



# S9\_TP\_1 - Calcul du potentiel électrique avec méthode DF

<input checked="" type="checkbox"/> État	Terminé
<input type="checkbox"/> Matière	 <a href="#">CEM</a>
<input checked="" type="checkbox"/> Type	TP
<input type="checkbox"/> Échéance	@24 novembre 2025
<input type="checkbox"/> Binôme	Nelven THÉBAULT

## Objectifs

[Compétences visées](#)

[Contrôle des connaissances](#)

[A. Introduction](#)

[B. Travail demandé : étapes durant la séance](#)

- [1. Exécuter le script fourni](#)
- [2. Réaliser les modifications nécessaires sur la boucle](#)
- [3. Définition de la notion de “convergence” et de “seuil de convergence”](#)
- [4. Etude de l'influence de la taille du domaine de calcul](#)
- [5. Affichage des lignes équipotentielles](#)
- [6. Calcul du champ électrostatique](#)
- [7. Calculs de capacités](#)

## Questions finales

[Enrichir le modèle](#)

[Limitations du modèle](#)

[Conclusion sur l'intérêt des modèles numériques](#)

[Structure coaxiale](#)

## Scripts

### [\*\*Sujets\*\*](#)

[01\\_2025\\_SensibilisationSimuCEM\\_EE\\_vf.pdf](#)

[02\\_2025\\_SensibilisationSimuCEM\\_EE\\_cas\\_test\\_vf.pdf](#)

## Objectifs

- Calcul du potentiel électrique par la méthode des différences finies (potentiel scalaire)
- Calcul des grandeurs dérivées (champ électrique et capacité) illustratives sur un cas CEM

## Compétences visées

- Connaitre les éléments constitutifs d'un modèle électromagnétique : domaine de calcul, source, conditions initiales, conditions aux limites, convergence
- Utilisation d'un outil de simulation & développement numérique (sous environnement Matlab/Octave/Python)
- Post-traitement des données & sensibilisation aux grandeurs CEM (capacité)

## **Contrôle des connaissances**

- Rendu d'un compte-rendu des travaux suite à la séance présentiel

Tous les **scripts** se trouvent à la fin de ce document et dans le [Github](#).

## **A. Introduction**

Le calcul du potentiel scalaire impliqué dans différents problèmes de CEM peut être réalisé pour des structures canoniques (simples).

Dans le cas général, il est nécessaire de résoudre l'équation de Laplace. Dans le vide, on exprime cette dernière selon :

$$\Delta V = 0 \quad (1)$$

Dans ce TD, nous nous proposons de résoudre numériquement en 2D l'équation précédente à l'aide de la méthode des différences finies (DF) centrées (voir les éléments évoqués en cours).

L'application d'un schéma DF à la relation (1) conduit ainsi à la forme discrète suivante en considérant un pas de discréétisation unitaire suivant  $x$  et  $y$  (le pas  $dx$  et  $dy$ ) :

$$V_{i,j} = 1/4(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1} + V_{i,j+1}) \quad (2)$$

En effet en repartant de  $\Delta V = 0$  on a alors

$$\begin{aligned} \Delta V = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{dx} \left[ \frac{1}{dx}(V_{i+1,j} - V_{i,j}) - \frac{1}{dx}(V_{i,j} - V_{i-1,j}) \right] + \frac{1}{dy} \left[ \frac{1}{dy}(V_{i,j+1} - V_{i,j}) - \frac{1}{dy}(V_{i,j} - V_{i,j-1}) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow dx = dy = 1 = \text{(un pas unitaire choisit)} \\ &\Leftrightarrow (V_{i,j+1} - V_{i,j}) - (V_{i,j} - V_{i,j-1}) + (V_{i,j+1} - V_{i,j}) - (V_{i,j} - V_{i,j-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{V_{i,j} = 1/4(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1} + V_{i,j+1})} \end{aligned}$$

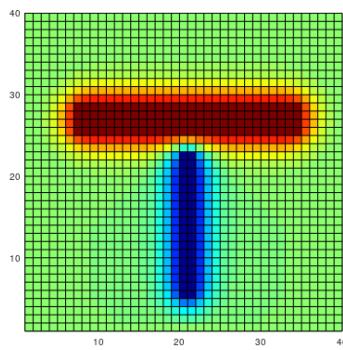
## **B. Travail demandé : étapes durant la séance**

### **1. Exécuter le script fourni**

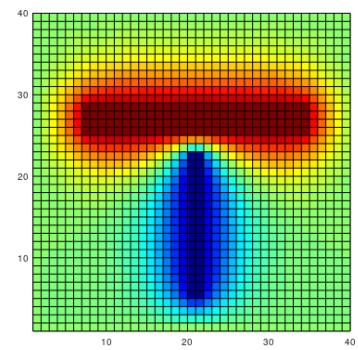
- Voir [tp01.m](#)
- On prend la transposée par rapport à la manière dont les lignes et colonnes ont été définis.

### **2. Réaliser les modifications nécessaires sur la boucle**

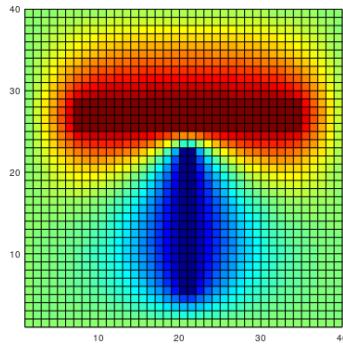
- Voir [tp02.m](#)



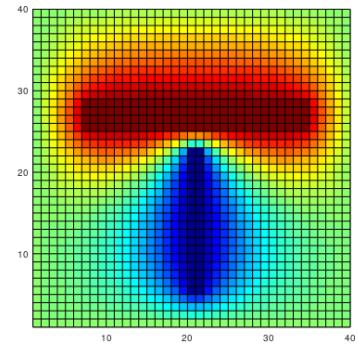
$k = 10$



$k = 50$



$k = 200$



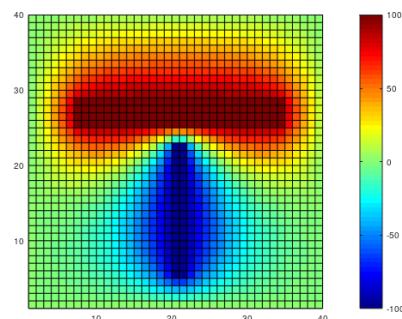
$k = 500$

### **3. Définition de la notion de “convergence” et de “seuil de convergence”**

Nous avons vu précédemment que le calcul effectué sur une seule itération et  $n = 200$  itérations donnent des résultats très différents.

On s'interroge ici sur la possibilité de définir un critère plus “avancé” que l'initialisation du nombre de boucles “ $n$ ” à réaliser.

- Voir [tp03.m](#)
- On remarque que pour  $V_h = 0,01 V$ , on obtient 282 itérations et un résultat satisfaisant par rapport à notre cahier des charges.



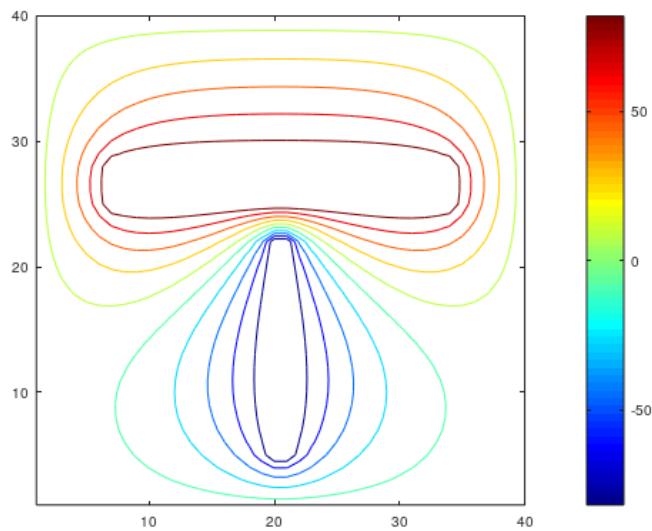
### **4. Etude de l'influence de la taille du domaine de calcul**

- Voir [tp04.m](#)

- La fenêtre de mesure à bien une importance car les potentIELS nuls de la masse définit tout autour sont donc à différente ici dans la modélisation de notre problème.

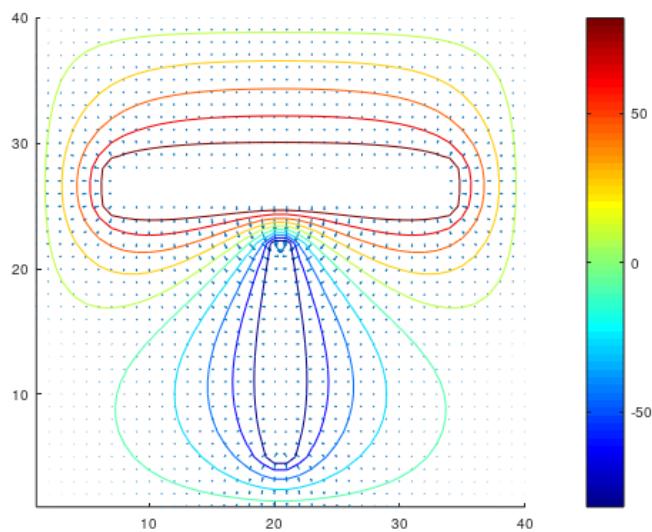
## **5. Affichage des lignes équipotentielles**

- Voir [tp05.m](#)



## **6. Calcul du champ électrostatique**

- Voir [tp06.m](#)
- On repart de  $\vec{E} = \overset{\rightarrow}{grad}(V)$



## **7. Calculs de capacités**

- Voir [tp07.m](#)

La capacité (en Farad) d'un conducteur (ou d'un condensateur) est donnée par la relation :

$$C = \frac{Q}{U} \quad (3)$$

Avec  $Q$  (en Coulomb) la charge portée par le conducteur (ou l'armature du condensateur),  $U$  (en Volt) le potentiel du conducteur (ou différence de potentiel entre les plaques du condensateur).

Le calcul de la capacité  $C$  par le problème de Laplace consiste alors à fixer sur chaque conducteur  $i$  un potentiel  $V_i$  et un potentiel  $V=0$  sur la référence. L'estimation de la charge  $Q$  se fait en appliquant le théorème de Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

Dans notre problème 2D, la charge totale  $Q_i$  sur chaque conducteur  $i$  est ainsi donnée par une intégrale de contour entourant le conducteur  $i$ . On détermine ensuite la capacité  $C_{ij}$  entre deux conducteurs  $i$  et  $j$  par :

$$Q_i = C_{ij}(V_j - V_i) \quad (6)$$

- On obtient un capacité de l'ordre du nano-farad ce qui est réaliste.

## Questions finales

### Enrichir le modèle

- Enrichir le modèle précédent en autorisant la définition d'un pas (suivant les directions  $x$  et  $y$ ) non unitaire ( $dx$  et  $dy$  quelconques, ce point intervient lors du calcul du champ électrique)
- Voir [tp08.m](#)
- Au final non traité

### Limitations du modèle

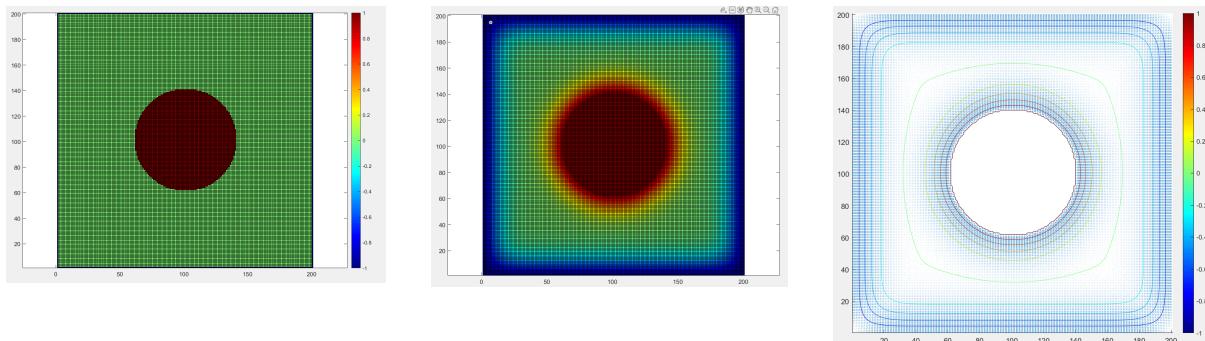
- Expliquer les limitations du modèle et commenter les différences pouvant intervenir entre valeur théorique et valeur numérique (ici à partir de la méthode DF). Conclure sur l'intérêt des modèles numériques.
- 1. **2D vs 3D** : le modèle est 2D (géométrie invariante selon  $z$ ). Les résultats sont **par unité de longueur** ; pour structures 3D réelles il faudra intégrer sur la longueur réelle ou utiliser un modèle 3D.
- 2. **Maillage grossier** :  $N_x$ ,  $N_y$  faibles donnent une erreur de discréttisation. Résoudre → augmenter  $N_x$ ,  $N_y$  ( $\rightarrow$  coût CPU mémoire).
- 3. **Conditions aux limites (taille du domaine)** : surfaces extérieures mises à zéro à la bordure du domaine ; si la fenêtre est trop petite, les frontières artificielles perturbent le champ (erreur de proximité) comme on a pu le voir dans le [tp04.m](#).
- 4. **Ordre du schéma** : différences finies centrées sont d'ordre 2 ; pour une meilleure précision on peut utiliser schémas d'ordre supérieur ou FEM.
- 5. **Discontinuités de permittivité** : si matériaux diélectriques différents, il faut traiter  $\varepsilon_r$  spatialement (FEM ou discréttisation du flux).

### **Conclusion sur l'intérêt des modèles numériques**

Les modèles numériques permettent d'obtenir des solutions approximatives pour des géométries complexes où la solution analytique est impossible. Ils permettent d'explorer l'influence de paramètres (taille du domaine, matériaux, position des conducteurs). Mais il faut **maîtriser** les sources d'erreur (maillage, BCs, algorithmes) et, si possible, **valider** par comparaison à des formules analytiques (cas test) ou mesures expérimentales.

## **Structure coaxiale**

- Calcul de la capacité d'une structure coaxiale (voir le cas test en fin de sujet).
- Voir [tp09.m](#)
- On obtient 360 itérations
- On obtient une capacité linéique théorique de  $\sim 55 \text{ pF/m}$ .



---

## **Scripts**

⬇ Fichiers [.m](#)

[tp01.m](#)

[tp02.m](#)

[tp03.m](#)

[tp04.m](#)

[tp05.m](#)

[tp06.m](#)

[tp07.m](#)

[tp09.m](#)

---

**FIN**