ENSEA
Ecole Nationale
Supérieure
de l'Electronique
et de ses Applications

CEM des systèmes

Utilisation de la méthode DF pour la simulation CEM

Objectifs :

- Calcul du potentiel électrique par la méthode des différences finies (potentiel scalaire)
- Calcul des grandeurs dérivées (champ électrique et capacité) illustratives sur un cas CEM

Compétences visées :

- Connaitre les éléments constitutifs d'un modèle électromagnétique : domaine de calcul, source, conditions initiales, conditions aux limites, convergence
- Utilisation d'un outil de simulation & développement numérique (sous environnement Matlab / Octave)
- Post-traitement des données & sensibilisation aux grandeurs CEM (capacité)

Contrôle des connaissances :

- Rendu d'un compte-rendu des travaux suite à la séance présentielle

---

A. Introduction

Le calcul du potentiel scalaire impliqué dans différents problèmes de CEM peut être réalisé pour des structures canoniques (simples).

Dans le cas général, il est nécessaire de résoudre l'équation de Laplace. Dans le vide, on exprime cette dernière selon :

$$\Delta V = 0 \tag{1}$$

Dans ce TD, nous nous proposons de résoudre numériquement en 2D l'équation précédente à l'aide de la méthode des différences finies (DF) centrées (voir les éléments évoqués en cours). L'application d'un schéma DF à la relation (1) conduit ainsi à la forme discrète suivante en considérant un pas de discrétisation unitaire suivant x et y (le pas dx et dy) :

$$V_{i,j} = 1/4\left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j-1} + V_{i,j+1}\right) \tag{2}$$

B. Travail demandé : étapes durant la séance

1. **Exécuter le script fourni** (**tp00.m**, sous environnement Matlab ou Octave) qui vise au calcul du potentiel V en tout point d'un domaine 2D de dimensions Nx=40 et Ny=40.
Observer le résultat obtenu qui doit permettre de visualiser le problème traité comme suit :

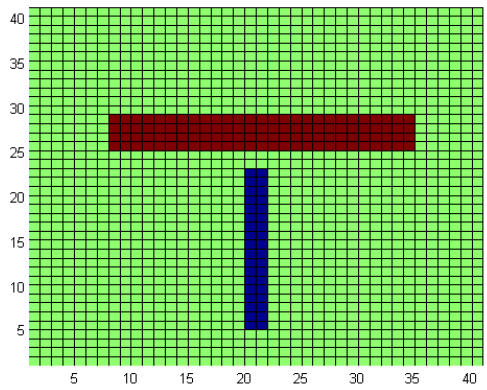

Figure 1. Problème considéré (gauche) et potentiel V représenté avec pcolor (conditions initiales)

➢ Reprendre le script et annoter (commenter au fur et à mesure les différentes parties constitutives de l'outil de simulation).
Sauvegarder votre script sous tp01.m.

2. Pour mémoire, on considère les **éléments caractéristiques de la simulation** :
   - La définition du domaine de calcul (nombre de cellules suivant x et y).
   - Conditions aux limites V=0 sur le bord du domaine de calcul (par convention le potentiel est nul à l'infini).
   - Des potentiels 'source' de 100V et -100V sur deux barres comme indiqué sur la Figure 1.
   - Une boucle pour itérer le calcul de l'équation (1) discrétisée un certain nombre de fois.

   Dans ce premier exemple, le calcul de la formule (2) sera itéré 200 fois (on rappelle que les potentiels V doivent être initialisés dans tout le domaine de calcul à zéro initialement). On souhaite obtenir un résultat sous la forme de la Figure 2.

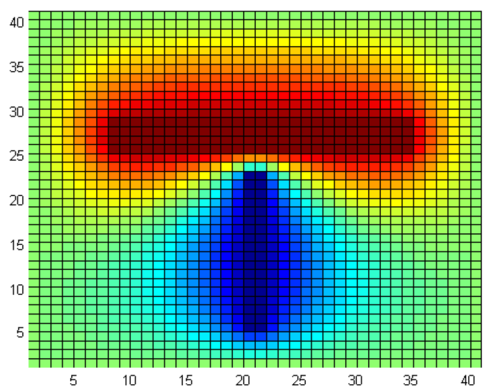

Figure 2. Potentiel V représenté avec pcolor après 200 itérations.

- Réaliser les modifications nécessaires sur la boucle (200 itérations demandées) pour obtenir le résultat de la Figure 2.
  Sauvegarder votre script sous tp02.m.

3. Définition de la notion de 'convergence' et de 'seuil de convergence'

Nous avons vu précédemment que le calcul effectué sur une seule itération et n=200 itérations donnent des résultats très différents. On s'interroge ici sur la possibilité de définir un critère plus 'avancé' que l'initialisation du nombre de boucles 'n' à réaliser.

- Ajouter un test de convergence sur la solution en comparant les valeurs de V en tout point du domaine de calcul entre deux itérations successives.
  Tester différentes valeurs d'arrêt (seuil de variation 0.01, 0.001, …) associées à différentes valeurs d'initialisation des potentiels V. Evaluer le nombre de passages dans la boucle et conclure (mettre en commentaire dans votre script ces éléments).
  Sauvegarder votre script sous tp03.m.

4. Etude de l'influence de la taille du domaine de calcul

La notion de taille du domaine de calcul et les conditions aux limites imposées jouent un rôle important. Nous nous intéressons ici à l'effet de la taille du domaine de calcul (on conservera les conditions aux limites de type V=0 comme condition à l'infini dans notre domaine).

- Faire varier (augmenter et diminuer) les dimensions du domaine de calcul. Observer le résultat obtenu et noter en commentaire l'effet obtenu.
  Sauvegarder votre script sous tp04.m.

5. Affichage des lignes équipotentielles

Les lignes équipotentielles sont utiles dans la visualisation des phénomènes électromagnétiques (ici lignes de potentiel électrostatique V constant) en permettant d'offrir une représentation des phénomènes physiques mis en jeu.

- A l'aide des fonctions Matlab/Octave '*contour*' représenter les lignes équipotentielles (voir la Figure 3).
  Sauvegarder votre script sous tp05.m.

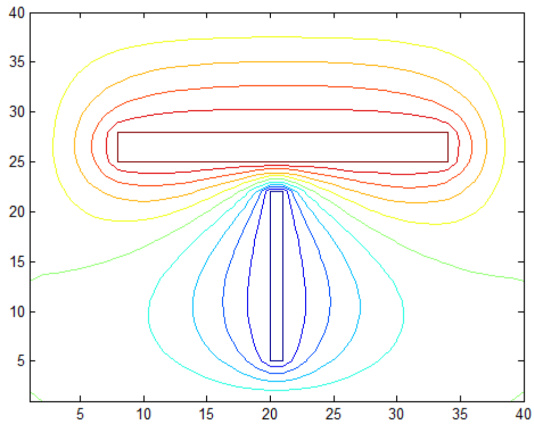

Figure 3. Représentation des lignes équipotentielles.

6. Calcul du champ électrostatique

A l'image du traitement proposé dans la question 5., on souhaite représenter le champ électrique (observable très largement utilisé pour qualifier les systèmes en CEM).

➤ En utilisant la formule $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, calculer les composante Ex et Ey en tout point du domaine de calcul. Représenter le champ électrique à l'aide de la fonction Matlab / Octave '*quiver*' (voir la Figure 4).
Sauvegarder votre script sous tp06.m.

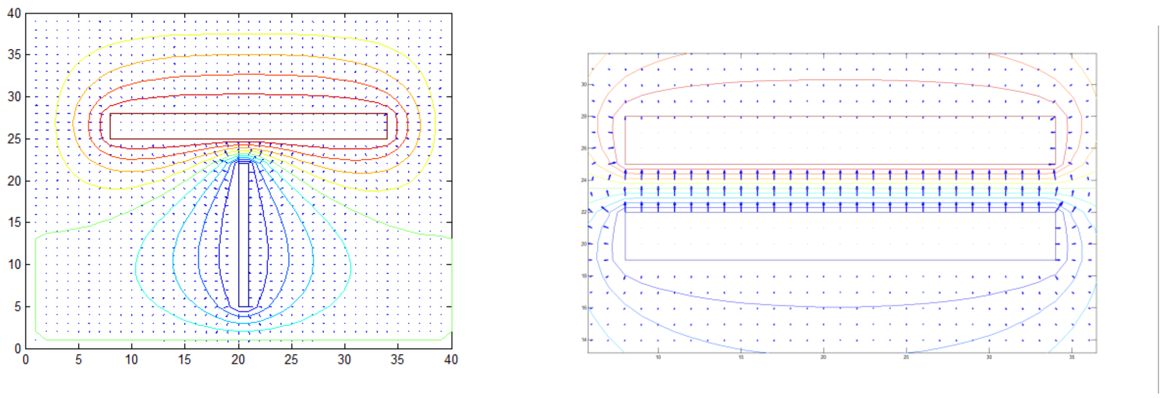

Figure 4. Représentations du champ électrostatique.

7. Calculs de capacités

La capacité (en Farad) d'un conducteur (ou d'un condensateur) est donnée par la relation :

$$C = \frac{Q}{U} \tag{3}$$

Avec *Q* (en Coulomb) la charge portée par le conducteur (ou l'armature du condensateur), *U* (en Volt) le potentiel du conducteur (ou différence de potentiel entre les plaques du condensateur).

Le calcul de la capacité *C* par le problème de Laplace consiste alors à fixer sur chaque conducteur *i* un potentiel V_i et un potentiel *V=0* sur la référence. L'estimation de la charge *Q* se fait en appliquant le théorème de Gauss :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{5}$$

Dans notre problème 2D, la charge totale Q_i sur chaque conducteur *i* est ainsi donnée par une intégrale de contour entourant le conducteur *i*. On détermine ensuite la capacité C_{ij} entre deux conducteurs *i* et *j* par :

$$Q_i = C_{ij}(V_j - V_i) \tag{6}$$

➤ Définir un contour permettant de réaliser le calcul demandé dans l'équation (5) et faire le calcul de la relation (6) ; en tirer une valeur de capacité C_{ij} entre les deux conducteurs.
Sauvegarder votre script sous tp07.m.

C. Compte-rendu

➢ **Dans le cadre de votre rapport, il vous est demandé de :**

- Transcrire les différentes étapes réalisées ensemble en fournissant vos scripts (tp0x.m des questions précédentes ; penser à commenter vos scripts !).
- Répondre aux questions proposées en fin de sujet (questions finales). Il faut pour cela réaliser de nouveaux scripts répondant aux questions posées

➢ **Questions finales :**

- Enrichir le modèle précédent en autorisant la définition d'un pas (suivant les directions x et y) non unitaire (dx et dy quelconques, ce point intervient lors du calcul du champ électrique)
- Expliquer les limitations du modèle et commenter les différences pouvant intervenir entre valeur théorique et valeur numérique (ici à partir de la méthode DF). Conclure sur l'intérêt des modèles numériques.
- Calcul de la capacité d'une structure coaxiale (voir le cas test en fin de sujet).