§2 矩阵的谱分解

程光辉

2019 年 11 月 7 日

定义 1 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 $A \in C^{n\times n}$ 的 k 个互异特征值,其重数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_k$,则称 r_i 为矩阵 A 的特征值 λ_i 的代数重复度. 齐次方程组

$$Ax = \lambda_i x \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

的解空间 V_{λ_i} 称为 A 对应于特征值 λ_i 的特征子空间,V_{λ_i} 的维数称为 A 的特征值的几何重复度.

定理 1 矩阵 A 的任意特征值的几何重复度不大于它的代数重复度.

定义 2 若矩阵 A 的每个特征值的几何重复度与它的代数重复度相等,则称 A 为单纯矩阵.

定理 2 矩阵 A 是单纯矩阵的充要条件是 A 与对角矩阵相似.

定理 3 设矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 是单纯矩阵,则 A 可分解为一系列幂等矩阵 A_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的加权和,即

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i,$$

其中 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 A 的特征值.

证明: 因为 A 是单纯矩阵,则存在可逆矩阵 P 使得

$$A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1},$$

其中 λ_i 是 A 的特征值.

令 $P = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$,$P^{-1} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$,则有

$$A = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i,$$

其中 $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_i^T$.

又因为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_n$，可知

$$\boldsymbol{w}_i^T\boldsymbol{v}_j = \begin{cases} \boldsymbol{1}, & j = i, \\ \boldsymbol{0}, & j \neq i, \end{cases}$$

进而有

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_i^T\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{w}_j^T = \begin{cases} \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_i^T = \boldsymbol{A}_i, & j = i, \\ \boldsymbol{O}, & j \neq i, \end{cases}$$

故 $\boldsymbol{A}_i$ 为幂等矩阵，得证.

$\boldsymbol{A}_i$ 的性质：

(1) 幂等性：$\boldsymbol{A}_i^2 = \boldsymbol{A}_i$

(2) 分离性：$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{O} \quad (i \neq j)$

(3) 可加性：$\sum_{i=1}^n \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{E}_n$

证明： (3)

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^T \\ \boldsymbol{w}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_i^T = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{E}_n.$$

定理 4 设 $\boldsymbol{A} \in C^{n\times n}$，它有 k 个相异特征值 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$，则 $\boldsymbol{A}$ 是单纯矩阵的充要条件是存在 k 个矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 满足

(1) $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j = \begin{cases} \boldsymbol{A}_i, & j = i, \\ \boldsymbol{O}, & j \neq i, \end{cases}$,

(2) $\sum_{i=1}^k \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{E}_n$,

(3) $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^k \lambda_i\boldsymbol{A}_i$.

定义 3 若 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵.

思考：哪些矩阵属于正规矩阵？

引理 1 若 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 酉相似，则 $\boldsymbol{B}$ 为正规矩阵.

证明：因为 A 与 B 酉相似，则存在酉矩阵 U，使得 $B = U^H AU$，进而

$$
\begin{aligned}
BB^H &= (U^H AU)(U^H AU)^H \\
&= U^H AUU^H A^H U \\
&= U^H AA^H U \\
&= U^H A^H AU \quad (\ A\text{为正规矩阵}) \\
&= U^H A^H UU^H AU \\
&= (U^H AU)^H (U^H AU) \\
&= B^H B,
\end{aligned}
$$

得证.

引理 2 *(Schur 分解) 若 $A \in C^{n\times n}$，则存在酉矩阵 U，使得*

$$A = URU^H,$$

其中 R 是一个上三角矩阵，且对角元为矩阵 A 的特征值.

证明：对任意的 $A \in C^{n\times n}$ 都与 Jordan 标准形相似，即存在可逆矩阵 P，使得

$$A = PJP^{-1}.$$

因为 P 可逆，存在酉矩阵 U 和正线上三角矩阵 R_1，使得 $P = UR_1$.

于是有

$$A = PJP^{-1} = UR_1 JR_1^{-1} U^{-1} = URU^H,$$

其中 $R = R_1 JR_1^{-1}$ 为上三角矩阵，故得证.

引理 3 *设 A 是三角矩阵，则 A 是正规矩阵充要条件是 A 对角矩阵.*

证明：不妨设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

(必要性) 因为 A 是正规矩阵，则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

比较上式两端矩阵第一行第一列的元素，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\bar{a}_{1i} = \sum_{i=1}^{n} |a_{1i}|^2 = a_{11}\bar{a}_{11} = |a_{11}|^2,$$

即有

$$a_{1i} = 0, \quad i = 2, 3, \cdots, n.$$

依此类推，即可得证.

(充分性) 直接验证，显然成立.

定理 5 n 阶复矩阵 A 是正规矩阵的充要条件是 A 与对角矩阵酉相似，即存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U^H,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

证明：(必要性) 由引理 2，有 $A = URU^H$. 又因为 A 是正规矩阵及引理 1 和引理 3，有 R 为对角矩阵.

(充分性) 直接由引理 1 得证.

定理 6 设 $A \in C^{n\times n}$，它有 k 个相异特征值 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$，则 A 是正规矩阵的充要条件是存在 k 个矩阵 A_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 满足

(1) $A_iA_j = \begin{cases} A_i, & j = i, \\ O, & j \neq i, \end{cases}$,

(2) $\sum_{i=1}^{k} A_i = E_n$,

(3) $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$,

(4) $A_i^H = A_i$.

证明：(必要性) 因为 A 是正规矩阵，则

$$\begin{aligned}
A &= U\mathrm{diag}(\lambda_1 E_{r_1}, \lambda_2 E_{r_2}, \cdots, \lambda_k E_{r_k})U^H \\
&= (U_1, U_2, \cdots, U_k)\begin{bmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{r_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k E_{r_k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \\ \vdots \\ U_k^H \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i U_i U_i^H \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i,
\end{aligned}$$

其中 $A_i = U_iU_i^H$.

根据 $UU^H = U^HU = E_n$，有

$$U_iU_j^H = \begin{cases} E_{r_i}, & j = i, \\ O, & j \neq i. \end{cases}$$

于是有

$$A_iA_j = U_iU_i^HU_jU_j^H = \begin{cases} U_iU_i^H = A_i, & j = i, \\ O, & j \neq i, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} U_iU_i^H = UU^H = E_n,$$

$$A_i^H = (U_iU_i^H)^H = A_i.$$

(充分性) 只需验证 $AA^H = A^HA$ 即可.

$$\begin{aligned} AA^H &= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i\right) \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j A_j\right)^H \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \lambda_i \bar{\lambda}_j A_i A_j^H \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \lambda_i \bar{\lambda}_j A_i A_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|^2 A_i. \end{aligned}$$

同理，可得

$$A^HA = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|^2 A_i,$$

故 A 是正规矩阵.