§3 Hermite 矩阵及其分解

程光辉

2019 年 11 月 8 日

定义 1 设 $A \in C^{n\times n}$，若 $A^H = A$，则称 A 为 Hermite 矩阵；若 $A^H = -A$，则称 A 为反 Hermite 矩阵.

定理 1 设 $A \in C^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵，则

(1) $(A\alpha, \beta) = (\alpha, A\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in C^n$,

(2) A 的特征值都是实数,

(3) 属于 A 不同特征值的特征向量正交,

(4) A 与矩阵 $\begin{bmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 合同，其中 $\mathrm{rank}(A) = r$，p 为正惯性指数,

(5) $U^H AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，其中 U 为酉矩阵.

定义 2 设 $A \in C^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵，对任意非零向量 $x \in C^n$，都有

$$f(x) = x^H Ax > 0 \quad (\geq 0),$$

则称二次型 $f(x)$ 是正定 *(*半正定*)* 二次型，此时系数矩阵 A 称为正定 *(*半正定*)* 矩阵.

定理 2 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 是正定 Hermite 矩阵，则

(1) $a_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$;

(2) A 的特征值 $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$;

(3) 存在正定矩阵 B，使得 $A = B^k$，$k \in Z^+$;

(4) 存在正线下三角矩阵 L，使得 $A = LL^H$, (Cholesky 分解);

(5) $\det(A) \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \Pi_{i=1}^n a_{ii}$, (Hadamard 不等式);

(6) $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同;

(7) $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式都为正.

证明: (5) 由 (4) 知，存在正线下三角 $\boldsymbol{L} = (l_{ij})$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^H$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素为

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}\bar{l}_{ik} = \sum_{k=1}^{i} |l_{ik}|^2 \geq |l_{ii}|^2, \quad i = 1, 2, \cdots n.$$

又因为

$$\det(A) = \det(LL^H) = \det(L)\det(L^H) = \Pi_{i=1}^{n} l_{ii}^2 \leq \Pi_{i=1}^{n} a_{ii},$$

得证.

定理 3 设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 是正定 **Hermite** 矩阵，$\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 是 **Hermite** 矩阵，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{T}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{T}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Lambda},$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

证明: 因为 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 是正定 **Hermite** 矩阵，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_n.$$

令 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$，又因 $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 是 **Hermite** 矩阵，则 $\boldsymbol{Q}$ 也为 **Hermite** 矩阵，故存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得

$$\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda},$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角矩阵.

记 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}_n,\\ \boldsymbol{T}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{P}^H\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda},\end{aligned}$$

故得证.