§6 A^+ 的计算方法

程光辉

2019 年 12 月 17 日

1 最大秩分解

引理 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵，则 $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^H(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)^{-1}$;

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵，则 $\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^H$.

证明： (1) 因为 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_m^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解，于是有

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^H\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H\right)^{-1}\left(\boldsymbol{E}_m^H\boldsymbol{E}_m\right)^{-1}\boldsymbol{E}_m^H = \boldsymbol{A}^H\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H\right)^{-1}.$$

(2) 类似 (1) 的证明.

定理 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解，则

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{D}^+\boldsymbol{B}^+.$$

证明： 因为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解，由引理 1 可得

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{D}^H\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^H\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^H = \boldsymbol{D}^+\boldsymbol{B}^+.$$

例 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 9 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{M-P}$ 广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^+$.

解： (1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$，

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(2) 计算 $\boldsymbol{B}^{+}$ 和 $\boldsymbol{D}^{+}$，

$$\boldsymbol{B}^{+}=\left(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{H}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4 & 5 & 1\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}^{+}=\boldsymbol{D}^{H}\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{H}\right)^{-1}=\frac{9}{290}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\\ 0 & 1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{10}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

(3) 计算 $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{D}^{+}\boldsymbol{B}^{+}$，

$$\boldsymbol{A}^{+}=\frac{3}{290}\begin{pmatrix}-32 & 34 & 2\\ -96 & 102 & 6\\ 329 & -268 & 61\\ 230 & -190 & 40\\ 3 & 24 & 27\end{pmatrix}.$$

例 2 举例说明下列结论不成立：

(1) $(\boldsymbol{AB})^{+}=\boldsymbol{B}^{+}\boldsymbol{A}^{+}$.

(2) $(\boldsymbol{A}^{k})^{+}=(\boldsymbol{A}^{+})^{k}$, 其中 $\boldsymbol{k}$ 是正整数.

(3) 若 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵，$(\boldsymbol{PAQ})^{+}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{P}^{-1}$.

解： (1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{AB}=(1)$，$(\boldsymbol{AB})^{+}=(1)$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 行满秩，则 $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{H}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{H})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. 因为 $\boldsymbol{B}$ 列满秩，则 $\boldsymbol{B}^{+}=(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{H}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

于是有 $\boldsymbol{B}^{+}\boldsymbol{A}^{+}=(\frac{1}{2})\neq(\boldsymbol{AB})^{+}$.

(2) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵.

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$ 是其最大秩分解，则 $\boldsymbol{A}^{+}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

于是有

$$(\boldsymbol{A}^{2})^{+}=\boldsymbol{A}^{+}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$(A^+)^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

则有 $(A^2)^+ \neq (A^+)^2$.

(3) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = (1)$, 则有

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(PAQ)^+ = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^{-1}A^+P^{-1} = (1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

显然有 $(PAQ)^+ \neq Q^{-1}A^+P^{-1}$.

2 奇异值分解法

定理 2 设 $A \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$ 的奇异值分解为

$$A = U\begin{pmatrix} D_r & O \\ O & O \end{pmatrix} V^H = UDV^H,$$

则有

(1) $A^+ = VD^+U^H$;

(2) $\|A^+\|_F^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i^2}$;

(3) $\|A^+\|_2 = \frac{1}{\min\limits_{1\le i\le r}\{\sigma_i\}}$.

证明: (1) 直接验证. (2) 和 (3) 利用范数的酉不变性.

定理 3 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, λ_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$ 是 AA^H 的 r 个非零特征值, α_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$ 是 AA^H 对应于 λ_i 单位正交的特征向量, 记 $\Delta_r = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$, $U_1 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$, 则有

$$A^+ = A^H U_1 \Delta_r^{-1} U_1^H.$$

证明: 设 $A \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$ 的奇异值分解为

$$A = U\begin{pmatrix} D_r & O \\ O & O \end{pmatrix} V^H,$$

则有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H &= \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_r^H & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^H \\
&= \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^H,
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)^+ &= \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^+\boldsymbol{U}^H \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{U}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta}_r^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1^H \\ \boldsymbol{U}_2^H \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Delta}_r^{-1}\boldsymbol{U}_1^H.
\end{aligned}
$$

即

$$
\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^H(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)^+ = \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Delta}_r^{-1}\boldsymbol{U}_1^H.
$$

例 3 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},
$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{M-P}$ 广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^+$.

解： 求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ 的特征值和非零特征值对应的单位正交特征向量，

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix},
$$

则特征值为 $\boldsymbol{\lambda_1 = 10}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$. 进而 $\boldsymbol{\lambda_1 = 10}$ 对应的单位特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^T$，即 $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$.

由定理 3，得

$$
\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Delta}_r^{-1}\boldsymbol{U}_1^H = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\left(\frac{1}{10}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.
$$