第六章

广义逆矩阵

1 矩阵的单边逆

定义 1 设 $A \in C^{m\times n}$,如果有 $G \in C^{n\times m}$,使得

$$GA = E_n$$

则称 G 为 A 的左逆矩阵，记为 $G = A_L^{-1}$.

如果 $\quad AG = E_m$

则称 G 为 A 的右逆矩阵，记为 $G = A_R^{-1}$.

定理 1 设 $A \in C^{m\times n}$，则

(1) A 左可逆的充要条件是 A 为列满秩矩阵；

(2) A 右可逆的充要条件是 A 为行满秩矩阵 .

证 充分性： A 为列满秩 $\Longrightarrow$

$A^H A$ 为满秩矩阵 $\Longrightarrow (A^H A)^{-1} A^H A = E_n$

$\xrightarrow{G=(A^HA)^{-1}A^H}$ $GA = E_n \Longrightarrow A$ 左可逆

必要性： $A_L^{-1} A = E_n \Longrightarrow$

$$rank(A) \ge rank(A_L^{-1} A) = rank(E_n) = n$$

$\Longrightarrow rank(A) = n \Longrightarrow A$ 为列满秩

推论 1 设 $A \in C^{m\times n}$,则

(1) A 左可逆的充要条件是 $N(A) = \{0\}$;

(2) A 右可逆的充要条件是 $R(A) = C^m$.

证 充分性： $N(A) = \{0\} \Longrightarrow Ax = 0$ 只有零解

$\Longrightarrow rank(A) = n \Longrightarrow A$ 为列满秩

必要性： A 左可逆 $\Longrightarrow A_L^{-1} A = E_n \Longrightarrow$

$\forall x \in N(A) \Longrightarrow x = E_n x = A_L^{-1}(Ax) = A_L^{-1} 0 = 0$

$\Longrightarrow N(A) = \{0\}$

初等变换求左(右)逆矩阵:

$$(1)\ P(A\ \ E_m) = \begin{pmatrix} E_n & G \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ G & * \end{pmatrix}$$

例 1 设矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求 A 的一个左逆矩阵 A_L^{-1}.

解：

$$(A\ \ E_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow A_L^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

例 2　设矩阵A为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

求A的一个右逆矩阵 A_R^{-1}.

解：

$$\begin{pmatrix}A\\E_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\1&-2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow A_R^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

定理 2　设 $A\in C^{m\times n}$是左可逆矩阵，则

$$G=(A_1^{-1}-BA_2A_1^{-1},\ B)P$$

是A的左逆矩阵，其中$B\in C^{n\times(m-n)}$为任意矩阵. 行初等变换对应的矩阵 P满足$PA=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$, A_1是n阶可逆方矩阵．

证：$GA=(A_1^{-1}-BA_2A_1^{-1},\ B)\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=E_n$

定理 3　设 $A\in C^{m\times n}$是右可逆矩阵，则

$$G=Q\begin{pmatrix}A_1^{-1}-A_1^{-1}A_2D\\D\end{pmatrix}$$

是A的右逆矩阵，其中$D\in C^{(n-m)\times m}$为任意矩阵. 列初等变换对应的矩阵Q满足$AQ=(A_1\quad A_2)$, A_1是m阶可逆方矩阵.

定理 4 设 $A\in C^{m\times n}$是左可逆矩阵，A_L^{-1}是A的左逆矩阵，则方程组 $Ax=b$有解的充要条件是

$$(E_m-AA_L^{-1})b=0\quad(1)$$

若(1)式成立，则方程组$Ax=b$有唯一解 $x=(A^HA)^{-1}A^Hb$.

证：必要性：设x_0是方程组 $Ax=b$的解 $\Longrightarrow$

$(AA_L^{-1})(Ax_0)=(AA_L^{-1})b=A(A_L^{-1}A)x_0=AE_nx_0$

$=Ax_0=b\quad\Longrightarrow\ (E_m-AA_L^{-1})b=0$

充分性：　$(E_m-AA_L^{-1})b=0\ \xrightarrow{x_0=A_L^{-1}b}$

$Ax_0=AA_L^{-1}b=b$

唯一性：

设x_0,x_1是$Ax=b$的解 $\Longrightarrow$

$A(x_1-x_0)=Ax_1-Ax_0=0\Longrightarrow\ x_1-x_0=0$

定理 5 设 $A\in C^{m\times n}$是右可逆矩阵，则$Ax=b$对任何 $b\in C^m$都有解. 若$b\neq 0$, 则方程组的解可表示为

$$x=A_R^{-1}b$$

其中, A_R^{-1}是A的一个右逆矩阵 .

证： $A(A_R^{-1}b)=(AA_R^{-1})b=E_m b=b$

2 广义逆矩阵 A^-

定义 1 设 $A\in C^{m\times n}$, 如果存在矩阵 $G\in C^{n\times m}$, 使得

$$AGb=b \quad (\forall\, b\in R(A))$$

则称G为A的广义逆矩阵, 记为$G=A^-$.

定理 1 设 $A\in C^{m\times n}$, 则A存在广义逆矩阵的充要条件是存在 $G\in C^{n\times m}$, 使其满足

$$AGA=A$$

proof 必要性：$\forall\, u\in C^n \Longrightarrow b=Au\in R(A)$

$\xrightarrow{AGb=b} AGAu=AGb=b=Au \Longrightarrow$

$AGA=A$

充分性：$Ax=b \Longrightarrow AGb=AGAx$

$=Ax=b \Longrightarrow G$为A的一个广义逆矩阵

推论 1 设 $A\in C^{m\times n}$, 且$A^-\in C^{n\times m}$是A的一个广义逆矩阵, 则

$$rank(A^-)\geq rank(A)$$

proof $rank(A)=rank(AA^-A)\leq rank(AA^-)\leq rank(A^-)$

定义 $A\{1\}=\{G\mid AGA=A,\quad \forall\, G\in C^{n\times m}\}$

定理 2 设 $A\in C^{m\times n}$, 且A^-是A的任一广义逆矩阵, 则有

$$A\{1\}=\{G\mid G=A^-+U-A^-AUAA^-,\ \forall\, U\in C^{n\times m}\}$$

$$=\{G\mid G=A^-+(E_n-A^-A)V+W(E_m-AA^-),\ \forall\ V,W\in C^{n\times m}\}$$

proof $\forall\, G\in A\{1\}\Longrightarrow AGA=A\Longrightarrow$

$G=A^-+G-A^--A^-A(G-A^-)AA^- \xrightarrow{U=G-A^-}$

$G=A^-+U-A^-AUAA^- \Longrightarrow$

$A\{1\}\subset\{G\mid G=A^-+U-A^-AUAA^-,\ \forall\ U\in C^{n\times m}\}$

$\forall\, U\in C^{n\times m}\Longrightarrow G=A^-+U-A^-AUAA^-$

$\Longrightarrow G=A^-+U-UAA^-+\underline{UAA^--A^-AUAA^-}$

$\Longrightarrow G=A^-+(E_n-A^-A)UAA^-+U(E_m-AA^-)$

$\xrightarrow[V=UAA^-]{W=U,} G=A^-+(E_n-A^-A)V-W(E_m-AA^-)$

$\Downarrow$

$\{G\mid G=A^-+U-A^-UAA^-,\forall\, U\in C^{n\times m}\}\subset$

$\{G\mid G=A^-+(E_n-A^-A)V+W(E_m-AA^-),$
$\forall\, V,W\in C^{n\times m}\}$

$$\forall M \in \{G \mid G = A^- + (E_n - A^-A)V + W(E_m - AA^-),\ \forall V,W \in C^{n\times m}\}$$

$$\xrightarrow{\forall V,W\in C^{n\times m}} M = A^- + (E_n - A^-A)V + W(E_m - AA^-)$$

$$\Downarrow$$

$$AMA = A[A^- + (E_n - A^-A)V + W(E_m - AA^-)]A$$

$$\Downarrow$$

$$AMA = AA^-A + (A - AA^-A)VA + AW(A - AA^-A)$$

$$\Downarrow$$

$$AMA = A + (A - A)VA + AW(A - A) = A$$

$$\Downarrow$$

$$\{G \mid G = A^- + (E_n - A^-A)V + W(E_m - AA^-),\ \forall V,W \in C^{n\times m}\} \subset A\{1\}$$

定理 3 设 $A\in C^{m\times n}, \lambda\in C$,则

(i) $(A^T)^- = (A^-)^T$, $(A^H)^- = (A^-)^H$

(ii) AA^-与A^-A都是幂等矩阵 ,且

$$rank(A) = rank(AA^-) = rank(A^-A)$$

(iii) $\lambda^- A^-$为λA的广义逆矩阵,其中$\lambda^- = \begin{cases}0 & \lambda = 0\\ \lambda^{-1} & \lambda \neq 0\end{cases}$

(iv) 设S是m阶可逆矩阵,T是n阶可逆矩阵,且

$B = SAT$,则$T^{-1}A^-S^{-1}$是B的广义逆矩阵;

(v) $R(AA^-) = R(A)$, $N(A^-A) = N(A)$;

proof (i) $AA^-A = A \Longrightarrow A^T = A^T(A^-)^T A^T \Longrightarrow$

$(A^-)^T = (A^T)^-$ 同理可证 $(A^-)^H = (A^H)^-$

(ii) $(AA^-)^2 = AA^-AA^- = (AA^-A)A^- = AA^- \Longrightarrow$

AA^-是幂等矩阵

$rank(A) \ge rank(AA^-) \ge rank(AA^-A)$

$= rank(A) \Longrightarrow rank(A) = rank(AA^-)$

(iii) $\lambda = 0 \Longrightarrow (\lambda A)(\lambda^- A^-)(\lambda A) = 0 = \lambda A$

$\lambda \neq 0 \Longrightarrow (\lambda A)(\lambda^- A^-)(\lambda A) = (\lambda\lambda^-\lambda)AA^-A$

$= \lambda A \Longrightarrow \lambda^- A^-$为$\lambda A$的广义逆矩阵

(iv) $BT^{-1}A^-S^{-1}B = SATT^{-1}A^-S^{-1}SAT = SAA^-AT$

$= SAT = B \Longrightarrow T^{-1}A^-S^{-1}$是$B$的广义逆矩阵;

(v) 显然有 $R(AA^-) \subset R(A), N(A^-A) \supset N(A)$

又 $rank(A) = rank(AA^-) = rank(A^-A)$

$\Longrightarrow R(AA^-) = R(A), \quad N(A^-A) = N(A)$

推论 2 设 $A\in C^{m\times n}$,则

(i) $rank(A) = n$的充要条件是 $A^-A = E_n$;

(ii) $rank(A) = m$的充要条件是 $AA^- = E_m$.

证: 充分性: 定理 3 (ii) $\Longrightarrow rank(A) = rank(AA^-)$

$= rank(E_n) = n$

必要性: $rank(A^-A) = rank(A) = n \Longrightarrow$

A^-A是 n 阶可逆矩阵 $\Longrightarrow E_n = (A^-A)(A^-A)^{-1}$

$= A^-(AA^-A)(A^-A)^{-1} = A^-A(A^-A)(A^-A)^{-1}$

$= A^-A$

引理 1 设 $A\in C^{m\times n}, P\in C^{m\times m}, Q\in C^{n\times n}$都是可逆矩阵,则

$$Q(PAQ)^-P \in A\{1\}$$

证: $PAQ(PAQ)^-PAQ = PAQ \Longrightarrow$

$$A[Q(PAQ)^{-}P]A = A \Longrightarrow Q(PAQ)^{-}P \in A\{1\}$$

引理 2 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix}$，则存在$X_{12}, X_{21}$满足

$A_{11}X_{12}A_{22} = 0,\ A_{22}X_{21}A_{11} = 0$, 使得

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{-} & X_{12} \\ X_{21} & A_{22}^{-} \end{pmatrix} \in A\{1\}$$

证：$A\begin{pmatrix} A_{11}^{-} & X_{12} \\ X_{21} & A_{22}^{-} \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{-} & X_{12} \\ X_{21} & A_{22}^{-} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^{-} & A_{11}X_{12} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}A_{22}^{-} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^{-}A_{11} & A_{11}X_{12}A_{22} \\ A_{22}X_{21}A_{11} & A_{22}A_{22}^{-}A_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$= A$$

定理 4 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，则

(i) 如果A_{11}^{-1}存在, 则存在X_{12}, X_{21}满足

$X_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) = 0,\ (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})X_{21} = 0,$

使得

$$\begin{bmatrix} E_r & -A_{11}^{-1} \\ 0 & E_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & X_{12} \\ X_{21} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E_{m-r} \end{bmatrix}$$

$\in A\{1\}$

(ii) 如果A_{22}^{-1}存在, 则存在Y_{12}, Y_{21}满足

$Y_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) = 0,\ (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})Y_{12} = 0,$

使得

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & E_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-} & Y_{12} \\ Y_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & E_{m-r} \end{bmatrix}$$

$\in A\{1\}$

proof

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E_{m-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & -A_{11}^{-1} \\ 0 & E_{n-r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

3 自反广义逆矩阵

定义 1 设 $A \in C^{m\times n}$, 如果有$G \in C^{n\times m}$, 使得

$$AGA = A,\ GAG = G$$

同时成立, 则称G为A的自反广义逆矩阵.

例 1 设$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \in C^{m\times r}$，且

$$\alpha_i^H \alpha_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, r)$$

则A^H为A的自反广义逆矩阵.

例 2　$A = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

则$G = diag(a_1^-, a_2^-, \cdots, a_n^-)$是$A$的自反广义逆,

其中$a_i^- = \begin{cases} a_i^{-1} & a_i \neq 0 \\ 0 & a_i = 0 \end{cases}$

定理 1　任何矩阵都有自反广义逆矩阵.

证　(1) $A = 0$，则$A_r^{-1} = 0 \Longrightarrow$ 结论成立

(2) $A \neq 0 \Longrightarrow rank(A) = r > 0 \Longrightarrow$

$$A = P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q \Longrightarrow$$

$$G = Q^{-1}\begin{bmatrix} E_r & X \\ Y & YX \end{bmatrix}P^{-1}$$

定义 2 $A\{1,2\} = \{A$的所有自反广义逆矩阵的集合$\}$.

定理 2 设$X, Y \in C^{n\times m}$均为$A \in C^{m\times n}$的广义逆矩阵,则

$$Z = XAY$$

是A的自反广义逆矩阵.

证：X, Y均为A的广义逆矩阵 $\Longrightarrow AXA = A$

$AYA = A \Longrightarrow AZA = AXAYA = AYA = A$

$ZAZ = XAYAXAY = XAXAY = XAY = Z$

定理 3 $A \in C^{m\times n}$, A^-是A的广义逆矩阵,则A^-是A的自反广义逆矩阵的充要条件是

$$rank(A) = rank(A^-)$$

证：必要性: A^-是A的自反广义逆矩阵 $\Longrightarrow$

$AA^-A = A \quad A^-AA^- = A^- \Longrightarrow$

$rank(A) = rank(AA^-A) \leq rank(A^-)$

$= rank(A^-AA^-) \leq rank(A) \Longrightarrow$

$rank(A) = rank(A^-)$

充分性: $AA^-A = A$，且$rank(A) = rank(A^-)$

$\Longrightarrow rank(A) = rank(AA^-A) \leq rank(A^-A)$

$\leq rank(A^-) = rank(A) \Longrightarrow$

$rank(A^-A) = rank(A^-) \xrightarrow{R(A^-A) \subset R(A^-)}$

$R(A^-A) = R(A^-) \xrightarrow{存在X \in C^{n\times m}}$

$A^- = A^-AX \Longrightarrow A = AA^-A = AA^-AX\,A$

$= AX\,A \Longrightarrow X$为$A$的广义逆矩阵

定理 4　设$A \in C^{m\times n}$，$X \in C^{n\times m}$，则下列任意两个等式成立都可推得第三个等式成立.

(1) $rank(A) = rank(X)$;

(2) $AXA = A$

(3) $XAX = X$

证 (1),(2)$\Rightarrow$(3): **(2)** $AXA = A \Rightarrow X = A^{-}$

$\underrightarrow{(1)\ rank(A) = rank(X)}$ X是A的自反广义逆矩阵

$\Longrightarrow XAX = X$

定理 5 设 $A \in C^{m\times n}$，则

$$X = (A^H A)^{-} A^H,\ Y = A^H (AA^H)^{-}$$

都是A的自反广义逆矩阵.

证 $A \in C^{m\times n} \Rightarrow R(A^H) = R(A^H A) \xrightarrow{\exists D \in C^{n\times m}}$

$A^H = A^H AD \Rightarrow A = D^H A^H A \Rightarrow$

$AXA = A(A^H A)^{-} A^H A = D^H \underline{A^H A(A^H A)^{-} A^H A}$

$= D^H A^H A = A \quad \Rightarrow X$是$A$的广义逆矩阵

$rank(X) = rank[(A^H A)^{-} A^H] \le rank(A^H)$

$A^H A = A^H A(A^H A)^{-} A^H A = A^H AXA \Rightarrow$

$rank(X) \le rank(A^H) = rank(A^H A) = rank(A^H AXA)$

$\le rank(X) \Longrightarrow rank(A) = rank(X) = rank(A^H)$

X是A的自反广义逆矩阵

定理 6 AA_r^{-1}和$A_r^{-1}A$都是幂等矩阵.

证 $(AA_r^{-1})^2 = AA_r^{-1}AA_r^{-1} = AA_r^{-1} \Rightarrow$

AA_r^{-1}是幂等矩阵.

4 A^{-}的计算

一、利用矩阵A的满秩分解

定理 1设 $A \in C_r^{m\times n}, A = BD$是$A$的最大秩分解，则

$$A\{1,2\} = \{G \mid G = D_R^{-1} B_L^{-1},\quad DD_R^{-1} = B_L^{-1}B = E_r,\ \forall D_R^{-1} \in C^{n\times r}, \forall B_L^{-1} \in C^{r\times m}\} \triangleq F$$

证：$\forall G \in F \Longrightarrow G = D_R^{-1} B_L^{-1} \Longrightarrow$

$AGA = BDD_R^{-1}B_L^{-1}BD = BD = A$

$GAG = D_R^{-1}B_L^{-1}BDD_R^{-1}B_L^{-1} = D_R^{-1}B_L^{-1} = G$

$\Longrightarrow G \in A\{1,2\} \Longrightarrow F \subset A\{1,2\}$

$\forall G \in A\{1,2\} \Longrightarrow AGA = A,\ GAG = G$

$\Longrightarrow BDGBD = BD \Longrightarrow E_r = B_L^{-1}BDD_R^{-1}$

$= B_L^{-1}BDGBDD_R^{-1} = DGB \Longrightarrow B_L^{-1} = DG,$

$D_R^{-1} = GB \Longrightarrow G = GAG = GBDG = D_R^{-1}B_L^{-1}$

$\Longrightarrow A\{1,2\} \subset F$

例 1 试利用矩阵的最大秩分解求矩阵A的广义逆矩阵A^{-}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

解：(1) 求矩阵A的最大秩分解

$$A = BD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 用初等变换求 B, D的单边逆

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow B_L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D_R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 计算A的自反广义逆矩阵

$$A^- = D_R^{-1}B_L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

二、利用矩阵 A的行交换和列交换法 ：

引理 1 设$A \in C_r^{m\times n}$,则总存在行交换P和列交换Q,使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中,$A_{11} \in C_r^{r\times r}$.

引理 2 设$A_1 \in C_r^{m\times n}$的分块矩阵为

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中,$A_{11} \in C_r^{r\times r}$,则有

$$A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

定理 2 设$A_1 \in C_r^{m\times n}$的分块矩阵为 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

其中,$A_{11} \in C_r^{r\times r}$,则有

$$A_1^- = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证：

$$A_1A_1^-A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ A_{21}A_{11}^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^-A_{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = A_1 \Longrightarrow$$

A_1^-是A_1的一个广义逆矩阵 .

定理 3 设$A \in C_r^{m\times n}$,则存在可逆矩阵 P 和Q,使得

$$PAQ = A_1 \quad A^- = QA_1^- P$$

其中,A_1 满足定理 2 的要求.

证： $A \in C_r^{m\times n} \xrightarrow{\text{存在可逆阵}P,Q}$

$$A_1 = PAQ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{其中,} A_{11} \in C_r^{r\times r}.$$

$$\Longrightarrow \quad AA^-A = P^{-1}A_1Q^{-1}QA_1^-PP^{-1}A_1Q^{-1}$$

$$= P^{-1}A_1A_1^-A_1Q^{-1} = P^{-1}A_1Q^{-1} = A$$

$\Longrightarrow$ A^-是A的一个广义逆矩阵.

例 2 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求A的一个广义逆矩阵 A^-.

解： (1) 求A的秩：$A \in C_2^{3\times 4}$

(2) 用初等变换求A_{11}^{-1}：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1 \leftrightarrow c_3]{r_2 \leftrightarrow r_3} PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 计算$A^- = Q\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$

$$A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

三、利用矩阵的初等变 换将A化为标准形

引理 3：

$$B_1 = \begin{bmatrix} E_r & B_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow B_1^- = \begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

其中,$B_{12}G_{21} = 0, G_{12}, G_{22}$为任意矩阵.

引理 4：

$$B_2 = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow B_1^- = \begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

其中,G_{12}, G_{21}, G_{22}为任意矩阵.

定理 4 设$A \in C_r^{m\times n}$,则存在可逆矩阵 P和Q,使得$PAQ = B_1$或$PAQ = B_2$,则

(1) 当$PAQ = B_1$时，$A^- = QB_1^-P$;

(2) 当$PAQ = B_2$时,G是A的广义逆矩阵的充要条件是$G = QB_2^-P$.

证： 必要性:

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow A = P^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}$$

$$AGA = A \Longrightarrow$$

$$P^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}GP^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

$$= P^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(Q^{-1}GP^{-1})\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{Q^{-1}GP^{-1} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow G_{11} = E_r \Longrightarrow$$

$$Q^{-1}GP^{-1} = \begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$G = Q\begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} P$$

充分性：

$$AGA$$

$$= P^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}Q\begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} PP^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

$$= P^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \Longrightarrow$$

$$AGA = P^{-1}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} = A \Longrightarrow$$

G是A的广义逆矩阵

例 3 求A的一个广义逆矩阵 A^{-}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A\ E) = \left[\begin{array}{ccc:cccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-} = Q\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P$$

5 M-P广义逆矩阵A^+

定义 1 设 $A\in C^{m\times n}$，如果有$G\in C^{n\times m}$，使得

$$AGA=A,\ GAG=G,$$
$$(AG)^H=AG,\ (GA)^H=GA$$

则称G是A的$M-P$广义逆矩阵，记为$G=A^+$.

定理 1 设$A\in C_r^{m\times n}$, $A=BD$是A的最大秩分解,则

$$G=D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

就是A的$M-P$广义逆矩阵A^+.

证：(1) $r=0\Rightarrow A=0\Rightarrow A^+=0$

(2) $r>0\Rightarrow$ 存在最大值分解$A=BD$

$\Rightarrow rank(B^HB)=rank(DD^H)=r\Rightarrow B^HB, DD^H$都可逆

$$\Rightarrow AGA=BD\underline{D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H}BD$$
$$=B\underline{(DD^H)(DD^H)^{-1}}\underline{(B^HB)^{-1}(B^HB)}D$$
$$=BD=A$$

$$GAG=D^H(DD^H)^{-1}\underline{(B^HB)^{-1}B^HB}\underline{DD^H(DD^H)^{-1}}(B^HB)^{-1}B^H$$
$$=D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=G$$

$$(AG)^H=G^HA^H=[D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H]^H(BD)^H$$

$$(AG)^H=B[(B^HB)^{-1}]^H[(DD^H)^{-1}]^HDD^HB^H$$
$$=B[(B^HB)^H]^{-1}[(DD^H)^H]^{-1}DD^HB^H$$
$$=B(B^HB)^{-1}\underline{(DD^H)^{-1}DD^H}B^H$$
$$=B(B^HB)^{-1}B^H$$
$$=B\underline{DD^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H}=AG$$

$$(GA)^H=A^HG^H=D^HB^HB[(B^HB)^{-1}]^H[(DD^H)^{-1}]^HD$$
$$=D^H\underline{B^HB(B^HB)}^{-1}(DD^H)^{-1}D=D^H(DD^H)^{-1}D$$
$$=\underline{D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^HB}D=GA$$

$\Rightarrow G$是A的$M-P$广义逆矩阵A^+

定理 2 设 $A\in C^{m\times n}$，则A^+是唯一的.

证：A_1^+, A_2^+都是A的$M-P$广义逆$\Rightarrow$

$$A_1^+=A_1^+AA_1^+=A_1^+(AA_2^+A)A_1^+=A_1^+(AA_2^+)(AA_1^+)$$
$$=A_1^+(AA_2^+)^H(AA_1^+)^H=A_1^+(A_2^+)^H\underline{A^H(A_1^+)^HA^H}$$
$$=A_1^+(A_2^+)^H\underline{(AA_1^+A)^H}=A_1^+\underline{(A_2^+)^HA^H}$$
$$=A_1^+\underline{(AA_2^+)^H}=A_1^+AA_2^+=\underline{A_1^+A}\underline{A_2^+}AA_2^+$$
$$=(A_1^+A)^H(A_2^+A)^HA_2^+=\underline{A^H(A_1^+)^HA^H}(A_2^+)^HA_2^+$$
$$=\underline{(AA_1^+A)^H}(A_2^+)^HA_2^+=\underline{A^H(A_2^+)^H}A_2^+$$

$$=\underline{(A_2^+A)^H}A_2^+=A_2^+AA_2^+=A_2^+$$

定理 3 设 $A\in C^{m\times n}$，则有

(1) $(A^+)^+=A$;

(2) $(A^T)^+=(A^+)^T, (A^H)^+=(A^+)^H$;

(3) $A^+=(A^HA)^+A^H=A^H(A^HA)^+$;

(4) $R(A^+)=R(A^H)$;

(5) $AA^+=P_{R(A)}$，$A^+A=P_{R(A^H)}$;

(6) $R(A)=R(A^H)\Leftrightarrow AA^+=A^+A$.

证：(2) $A=BD$为最大值分解$\Rightarrow B^HB, DD^H$可逆$\Rightarrow$

$$(A^+)^T=[D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H]^T$$
$$=(B^H)^T[B^T(B^H)^T]^{-1}[D^H(D^H)^T]^{-1}(D^H)^T$$
$$=(B^T)^H[B^T(B^T)^H]^{-1}[D^H(D^T)^H]^{-1}(D^T)^H=(A^T)^+$$

(3) $A=BD$为最大值分解$\Rightarrow$ $A^HA=(BD)^HBD$

$$=D^HB^HBD=D^H(B^HBD)\quad \underrightarrow{D_1=D^H, B_1=B^HBD}$$

$A^HA=D_1B_1$

$rank(A)=rank(A^HA)=r\Rightarrow r=rank(D)=rank(D_1)$

$=rank(B^HBD)=rank(B_1)\Rightarrow A^HA=D_1B_1$是$A^HA$的最大值分解$\Rightarrow$

$$(A^H A)^+ A^H = [B_1^H (B_1 B_1^H)^{-1} (D_1^H D_1)^{-1} D_1^H](BD)^H$$
$$= (B^H BD)^H [(B^H BD)(B^H BD)^H]^{-1} (DD^H)^{-1} D (BD)^H$$
$$= D^H B^H B (B^H BDD^H B^H B)^{-1} (DD^H)^{-1} DD^H B^H$$
$$= D^H \underline{B^H B (B^H B)^{-1}} (DD^H)^{-1} (B^H B)^{-1} \underline{(DD^H)^{-1} DD^H} B^H$$
$$= D^H (DD^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H$$
$$= A^+$$

(4) A^+是A的自反广义逆$\Rightarrow rank(A^+) = rank(A)$

$$= rank(A^H) \xrightarrow{R(A^+) \subset R(A^H)} R(A^+) = R(A^H)$$

(5) A^+是A的自反广义逆$\Rightarrow$ AA^+和A^+A是幂等矩阵$\Rightarrow$

$AA^+ = P_{R(AA^+)}$， $A^+A = P_{R(A^+A)}$

$$\xrightarrow{R(AA^+) = R(A), R(A^+A) = R(A^+), R(A^+) = R(A^H)}$$

$AA^+ = P_{R(A)}$， $A^+A = P_{R(A^H)}$

(6)充分性：$AA^+ = A^+A$，A^+是A的自反广义逆矩阵$\Rightarrow$

$$R(A) = R(AA^+) = R(A^+A) = R(A^+) = R(A^H)$$

必要性：$R(A) = R(A^H) \xrightarrow{AA^+ = P_{R(A)}, A^+A = P_{R(A^H)}}$

$$AA^+ = A^+A$$

定理 3 设 $A \in C^{m \times n}$，则有

(1) $(A^H A)^+ = A^+ (A^H)^+, (AA^H)^+ = (A^H)^+ A^+$;

(2) $(A^H A)^+ = A^+ (AA^H)^+ A = A^H (AA^H)^+ (A^H)^+$;

(3) $AA^+ = (AA^H)(AA^H)^+ = (AA^H)^+ (AA^H)$;

$A^+A = (A^H A)(A^H A)^+ = (A^H A)^+ (A^H A)$.

证：(1) $A = BD$是最大秩分解$\Rightarrow$

$$A^+ = D^H (DD^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H \Rightarrow$$
$$(A^H A)^+ = (D^H B^H BD)^+ \xrightarrow{D^H B^H BD\text{为}A^H A\text{最大秩分解}}$$
$$(A^H A)^+ = (B^H BD)^H (B^H BDD^H B^H B)^{-1} (DD^H)^{-1} D$$

$$= D^H \underline{B^H B (B^H B)}^{-1} (DD^H)^{-1} (B^H B)^{-1} (DD^H)^{-1} D$$
$$= D^H (DD^H)^{-1} (\underline{B^H B)^{-1} B^H B} (B^H B)^{-1} (DD^H)^{-1} D$$
$$= [D^H (DD^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H][B (B^H B)^{-1} (DD^H)^{-1} D]$$
$$= A^+ (A^H)^+$$

(2) $(A^H A)^+ = A^+ (A^H)^+ = A^+ (A^+)^H \overset{H}{=} A^+ [A^H (AA^H)^+]^H$

$$= A^+ [(AA^H)^+]^H A = A^+ (AA^H)^+ A$$

(3) $AA^+ = A\ [A^H (AA^H)^+] = (AA^H)(AA^H)^+ \quad (I)$

$$(AA^H)^+ (AA^H) = (BDD^H B^H)^+ (BDD^H B^H)$$
$$= BDD^H \underline{(DD^H B^H BDD^H)}^{-1} (BB^H)^{-1} B^H BDD^H B^H$$
$$= BDD^H (DD^H)^{-1} (B^H B)^{-1} (DD^H)^{-1} (\underline{BB^H)^{-1} B^H B}DD^H B^H$$
$$= BDD^H (DD^H)^{-1} (B^H B)^{-1} \underline{(DD^H)^{-1} DD}^H B^H$$
$$= BD[\underline{D^H (DD^H)^{-1} (B^H B)^{-1} B^H}]$$
$$= AA^+ \quad (II)$$

$(I),(II) \quad \Rightarrow \quad AA^+ = (AA^H)^+ (AA^H)$

$$= (AA^H)(AA^H)^+$$

定理 5 设$A \in C^{m \times l}$，$B \in C^{l \times n}$，则

$$(AB)^+ = B^+ A^+ \Leftrightarrow \begin{cases} R(A^H AB) \subset R(B), \\ R(BB^H A^H) \subset R(A^H). \end{cases}$$

证：必要性:$(AB)^+ = A^+ B^+ \Rightarrow B^H A^H = (AB)^H$

$$= (AB)^H [(AB)^H]^+ (AB)^H \overset{H}{=} \underline{(AB)^H [(AB)^+]}^H (AB)^H$$
$$= [\underline{(AB)^+ AB}]^H (AB)^H \overset{H}{=} (AB)^+ (AB)(AB)^H$$
$$= B^+ A^+ ABB^H A^H \xrightarrow{\text{上式两边都左乘}ABB^H B}$$
$$ABB^H BB^H A^H = ABB^H \underline{BB^+} A^+ ABB^H A^H \Rightarrow$$

$$= ABB^H B[\underline{(B^H B)^+ B^H}]A^+ ABB^H A^H$$
$$= ABB^H [\underline{(B^H)^H (B^H (B^H)^H)^+}]B^H A^+ ABB^H A^H$$
$$= ABB^H \underline{(B^H)^+ B^H} A^+ ABB^H A^H$$
$$= ABB^H A^+ ABB^H A^H \Rightarrow$$
$$ABB^H (E_l - A^+ A)BB^H A^H = 0$$
$$\underline{E_l - A^+ A = (E_l - A^+ A)^2 = (E_l - A^+ A)^H}$$
$$[(E_l - A^+ A)BB^H A^H]^H [(E_l - A^+ A)BB^H A^H] = 0 \Rightarrow$$
$$(E_l - A^+ A)BB^H A^H = 0 \Rightarrow BB^H A^H = A^+ ABB^H A^H$$
$$\Rightarrow R(BB^H A^H) = R(A^+ ABB^H A^H) \subset R(A^+ A)$$

充分性： $BB^+ = P_{R(B)}, A^+ A = P_{R(A^H)} \Longrightarrow$

$$BB^+ A^H AB = A^H AB, A^+ ABB^H A^H = BB^H A^H$$
$$\Longrightarrow B^H A^H A = (AB)^H (AB)B^+ \Longrightarrow$$
$$[(AB)^H]^+ (AB)^H AA^+ = [(AB)^H]^+ (AB)^H (AB)B^+ A^+$$
$$= [(AB)(AB)^+]^H (AB)B^+ A^+ = (AB)(AB)^+ (AB)B^+ A^+$$
$$= ABB^+ A^+ \Longrightarrow$$
$$AB(AB)^+ AA^+ = ABB^+ A^+ \Longrightarrow P_{R(AB)} P_{R(A)} = ABB^+ A^+$$

又 $P_{R(AB)} P_{R(A)} = P_{R(AB)} \Longrightarrow (AB)(AB)^+ = ABB^+ A^+$

$$\Longrightarrow (AB)(AB)^+ (AB) = ABB^+ A^+ AB \Longrightarrow$$

$AB = ABB^+ A^+ AB \Longrightarrow B^+ A^+$为$AB$的广义逆

$$\Longrightarrow rank(AB) \le rank(B^+ A^+)$$
$$(AB)(AB)^+ = ABB^+ A^+ \Longrightarrow (ABB^+ A^+)^H = [(AB)(AB)^+]^H$$
$$= (AB)(AB)^+ = ABB^+ A^+$$
$$A^+ = A^H (AA^H)^+, B^+ = (B^H B)^+ B^H \Longrightarrow$$
$$B^+ A^+ = (B^H B)^+ B^H A^H (AA^H)^+ \Longrightarrow$$
$$rank(B^+ A^+) \le rank((AB)^H) = rank(AB) \Longrightarrow$$

$$rank(B^+ A^+) = rank(AB) \Longrightarrow$$
$$B^+ A^+ (AB) B^+ A^+ = B^+ A^+ \Longrightarrow$$

$B^+ A^+$为AB的自反广义逆

$$A^+ ABB^H A^H = BB^H A^H \Longrightarrow$$
$$B^+ A^+ AB(AB)^H [(AB)^H]^+ = B^+ B(AB)^H [(AB)^H]^+$$
$$\Longrightarrow B^+ A^+ AB = B^+ B(AB)^+ AB = P_{R(B^H)} P_{R(B^H A^H)}$$
$$= P_{R(B^H A^H)} = (AB)^+ AB \Longrightarrow$$

$$(B^+ A^+ AB)^H = [(AB)^+ AB]^H = (AB)^+ AB = B^+ A^+ AB$$
$$\Downarrow$$

$B^+ A^+$为AB的$M-P$广义逆

$$\Downarrow$$
$$(AB)^+ = B^+ A^+$$

6 A^+的计算方法

一、最大秩分解法

引理1 设 $A \in C^{m\times n}$， 则

1) 如果A是行满秩矩阵,则$A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$;

2) 如果A是列满秩矩阵,则$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$.

证： $A \in C_m^{m\times n} \Longrightarrow A = E_m A = BD \xrightarrow{E_m = B, D = A}$

$$A^+ = D^H (DD^H)^{-1} (E_m^H E_m)^{-1} E_m^H = D^H (DD^H)^{-1}$$
$$= A^H (AA^H)^{-1}$$

定理 1 设 $A \in C_r^{m\times n}$, $A = BD$是A的最大秩分解,则

$$A^+ = D^+ B^+$$

证：$A = BD$是A的最大秩分解 $\Longrightarrow$

$$A^+ = D^H (DD^H)^{-1}(B^H B)^{-1} B^H = D^+ B^+$$

例 1 设矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 9 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

求 A 的 $M-P$ 广义逆矩阵 A^+.

解：(1) 求A的最大秩分解 $A = BD$：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1/3 & 10/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(2) 计算B^+和D^+：

$$B^+ = (B^H B)^{-1} B^H = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^+ = D^H (DD^H)^{-1} = \frac{9}{290}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/3 & 2/3 \\ 10/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(3) 计算$A^+ = D^+ B^+$：

$$A^+ = \frac{3}{290}\begin{pmatrix} -32 & 34 & 2 \\ -96 & 102 & 6 \\ 329 & -268 & 61 \\ 230 & -190 & 40 \\ 3 & 24 & 27 \end{pmatrix}$$

举例说明下列结论不成立:

(1): $(AB)^+ = B^+ A^+$

例：$A = (1,1), B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

则有 $AB = (1), (AB)^+ = (1),$

A行满秩,则 $A^+ = A^H (AA^H)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

B列满秩,则 $B^+ = (B^H B)^{-1} B^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B^+ A^+ = (\frac{1}{2}) \neq (AB)^+$$

⑵ $(A^k)^+ = (A^+)^k$,(其中k是正整�)

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A是幂等矩阵.

$A = BD, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D = (1, -1)$

$B^+ = (B^H B)^{-1} B^H = (1, 0)$

$D^+ = D^H (DD^H)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A^+ = D^+ B^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A^2)^+ = A^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A^+)^2 = (\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^+ \neq (A^+)^2$$

(3)若P,Q为可逆矩阵,$(PAQ)^+ = Q^{-1}A^+P^{-1}$

例:$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = (1)$

$$A^+ = (A^H A)^{-1} A^H = \frac{1}{2}(1,1)$$

$$(PAQ)^+ = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})^+ = \frac{1}{5}(2,1)$$

$$Q^{-1}A^+P^{-1} = (1)\frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,0)$$

二、奇异值分解法

定理 1 设 $A \in C_r^{m\times n}$ 的奇异值分解为

$$A = U\begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V = UDV$$

则有

(1) $A^+ = V^H D^+ U^H$;

(2) $\| A^+ \|_F^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i^2}$;

(3) $\| A^+ \|_2 = \frac{1}{\min\limits_{1\le i\le r}\{\sigma_i\}}$

定理 3 设 $A \in C^{m\times n}$, $\lambda_i\,(i = 1,2,\cdots,r)$是$AA^H$的$r$个非零特征值,$\alpha_i\,(i = 1,2,\cdots,r)$是$AA^H$对应于$\lambda_i$单位正交 的特征向量,记$\Delta_r = diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$,$U_1 = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$,则有

$$A^+ = A^H U_1 \Delta_r^{-1} U_1^H$$

证:$A \in C^{m\times n} \Longrightarrow$

$$A = U\begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V = UDV \Longrightarrow U = (U_1, U_2)$$

$$AA^H = U\begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VV^H\begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^H \Longrightarrow$$

$$= U\begin{pmatrix} \Delta_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^H \Longrightarrow$$

$$(AA^H)^+ = U\begin{pmatrix} \Delta_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ U^H = U\begin{pmatrix} \Delta_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^H$$

$$= (U_1, U_2)\begin{pmatrix} \Delta_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{pmatrix} = U_1\Delta_r^{-1}U_1^H \Longrightarrow$$

$$A^+ = A^H(AA^H)^+ = A^H U_1 \Delta_r^{-1} U_1^H$$

例 2 设矩阵A为

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

求A的$M-P$广义逆矩阵A^{+}.

解：（1）求AA^{H}的特征值及非零特征值对应的单位正交特征向 量：

$$AA^{H}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -4 & 8\end{bmatrix}\Longrightarrow \lambda_1=10,\lambda_2=0$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix}8 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0\Longrightarrow \alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow U_1=\alpha_1$$

(2) 计算$A^{+}=A^{H}U_1\Delta_r^{-1}U_1^{H}$：

$$A^{+}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

7 广义逆矩阵的应用

一、矩阵方程的通解

定理 1 设$A\in C^{m\times n}$，$B\in C^{p\times q}$，$D\in C^{m\times q}$，则矩阵方程

$$AXB=D$$

有解的充要条件是存在A^{-}和B^{-}，使得

$$AA^{-}DB^{-}B=D$$

成立. 在有解的条件下，矩阵 方程$AXB=D$的通解为

$$X=A^{-}DB^{-}+Y-A^{-}AYBB^{-}\quad \forall Y\in C^{n\times p}.$$

证：必要性：

设X为$AXB=D$的解, $AA^{-}A=A, BB^{-}B=B$

$$\Longrightarrow D=AXB=AA^{-}AXBB^{-}B=AA^{-}DB^{-}B$$

充分性：

$$AA^{-}DB^{-}B=D\Longrightarrow X=A^{-}DB^{-}\Longrightarrow$$

X为$AXB=D$的解

$$\begin{aligned}AXB&=A(A^{-}DB^{-}+Y-A^{-}AYBB^{-})B\\ &=AA^{-}DB^{-}B+AYB-AA^{-}AYBB^{-}B\\ &=D+AYB-AYB=D\Longrightarrow\end{aligned}$$

$X=A^{-}DB^{-}+Y-A^{-}AYBB^{-}$是$AXB=D$的解

设G是$AXB=D$的任一解 $\Longrightarrow AGB=D\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}G&=A^{-}DB^{-}+G-A^{-}DB^{-}\\ &=A^{-}DB^{-}+G-A^{-}AGBB^{-}\end{aligned}$$

推论 1 设 $A\in C^{m\times n}, D\in C^{m\times p}$, 则$AX=D$有解的充要条件是存在$A^{-}$，使得

$$AA^{-}D=D$$

成立. 此时 $AX=D$的通解为

$$X=A^{-}D+Y-AA^{-}Y\quad \forall Y\in C^{n\times p}.$$

推论 2 设 $B \in C^{m\times n}, D \in C^{p\times n}$, 则 $XB = D$

有解的充要条件是存在 B^-，使得

$$DB^-B = D$$

成立. 此时 $XB = D$ 的通解为

$$X = DB^- + Y - YBB^- \quad \forall Y \in C^{p\times m}.$$

推论 3 设 $A \in C^{m\times n}$, $b \in C^{m\times n}$, 则方程组 $Ax = b$

有解的充要条件是存在 A^-，使得

$$AA^-b = b$$

成立. 此时 $Ax = b$ 的通解为

$$x = A^-b + (E_n - A^-A)u \quad \forall u \in C^n.$$

定理 2 设 $A_1 \in C^{m\times n}, D_1 \in C^{m\times l}, A_2 \in C^{l\times p}$,

$D_2 \in C^{n\times p}$

$$\begin{cases} A_1X = D_1 \\ XA_2 = D_2 \end{cases} \quad (*)$$

有公共解的充要条件是，两个方程分别有解且

$$A_1D_2 = D_1A_2$$

在有公共解的条件下，通解为

$$X = X_0 + (E_n - A_1^-A_1)Y(E_l - A_2A_2^-) \quad \forall Y \in C^{n\times l}$$

其中，X_0 是 $(*)$ 的一个解.

证：必要性

设 X 是 $(*)$ 的一个解 $\Longrightarrow \begin{cases} A_1X = D_1 \\ XA_2 = D_2 \end{cases} \Longrightarrow$

$D_1A_2 = (A_1X)A_2 = A_1(XA_2) = A_1D_2$

充分性

$$X = A_1^-D_1 + D_2A_2^- - A_1^-A_1D_2A_2^- \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} A_1X &= A_1A_1^-D_1 + A_1D_2A_2^- - A_1A_1^-A_1D_2A_2^- \\ &= D_1 + A_1D_2A_2^- - A_1D_2A_2^- \\ &= D_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XA_2 &= A_1^-D_1A_2 + D_2A_2^-A_2 - A_1^-A_1D_2A_2^-A_2 \\ &= A_1^-D_1A_2 + D_2 - A_1^-D_1A_2A_2^-A_2 \\ &= A_1^-D_1A_2 + D_2 - A_1^-D_1A_2 \\ &= D_2 \end{aligned}$$

定理3 设 $A, B \in C^{m\times n}$, 则方程组

$$\begin{cases} Ax = a \\ Bx = b \end{cases}$$

有公共解的充要条件为

$$(B^-b - A^-a) \in N(A) + N(B).$$

证明：充分性

$(B^-b - A^-a) \in N(A) + N(B) \Longrightarrow \exists \tilde{a} \in N(A), \tilde{b} \in N(B)$

$\Longrightarrow B^-b - A^-a = \tilde{a} + \tilde{b} \Longrightarrow x = B^-b - \tilde{b} = A^-a + \tilde{a}$

$\Longrightarrow \begin{cases} Ax = A(A^-a + \tilde{a}) = a \\ Bx = B(B^-b - \tilde{b}) = b \end{cases}$

必要性

$Ax = a, Bx = b$ 有公共解 $x \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x = A^-a + (E_n - A^-A)u & (\forall u \in C^n) \\ x = B^-a + (E_n - B^-A)v & (\forall v \in C^n) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$B^-b - A^-a = (E_n - A^-A)u - (E_n - B^-B)v \in N(A) + N(B)$$

二. 相容方程的最小范数解

定义　方程组$Ax=b$有解,则称此方程组为相容的方程组.

定义　设方程组$Ax=b$有解,将所有的解中范数最小的解称为最小范数解.

$$A\{1,3\}=\{G\mid AGA=A,(GA)^H=GA\}$$

定理　$D\in A\{1,3\}$,则Db是相容方程组$Ax=b$的最小范数解,并且方程组的最小范数解唯一.

证: $Ax=b$有解 $\Rightarrow Ax_0=b, ADA=A\Rightarrow$

$b=ADAx_0=ADb\Rightarrow Db$是$Ax=b$的解.

$Ax=b$的任意解 $x_0=Db+(E-DA)u$

$$\|x_0\|_2^2=\|Db+(E-DA)u\|_2^2$$
$$=(Db+(E-DA)u)^H(Db+(E-DA)u)$$

$$=\|Db\|_2^2+\|(E-DA)u\|_2^2+$$
$$(Db)^H(E-DA)u+u^H(E-DA)^H Db$$

$$Ax_0=b\Rightarrow(Db)^H(E-DA)u$$
$$=x_0{}^H(DA)^H(E-DA)u$$
$$=x_0{}^H DA(E-DA)u$$
$$=x_0{}^H(DA-DADA)u=0$$

$$\|x_0\|_2^2=\|Db\|_2^2+\|(E-DA)u\|_2^2\geq\|Db\|_2^2$$

定理　设$D\in C^{n\times m}$, $\forall b\in C^m$, Db是相容方程组$Ax=b$的最小范数解, 则$D\in A\{1,3\}$.

$pf: A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\Rightarrow\alpha_i\in R(A)$

$\xrightarrow{G\in A\{1,3\}} G\alpha_i$是$Ax=\alpha_i$的最小范数解

$\xrightarrow{\text{最小范数的唯一性}} D\alpha_i=G\alpha_i\Rightarrow DA=GA$

$\Rightarrow ADA=AGA=A,$

$(DA)^H=(GA)^H=GA=DA$

$\Rightarrow D\in A\{1,3\}$

三. 不相容方程组的解

如果$Ax=b$不相容,令$f(x)=\|Ax-b\|_2^2$,存在x_0使得$f(x_0)$最小,称x_0为方程组的最小二乘解,这种问题称为最小二乘问题

定理:设$G\in A\{1,4\}$,则Gb是不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解.

证: $\|Ax-b\|_2^2=\|Ax-b+AGb-AGb\|_2^2$

$$=(Ax-b+AGb-AGb)^H(Ax-b+AGb-AGb)$$
$$=\|Ax-AGb\|_2^2+\|AGb-b\|_2^2+$$
$$\underline{(AGb-b)^H(Ax-AGb)+(Ax-AGb)^H(AGb-b)}$$

$$\underline{(AGb-b)^H(Ax-AGb)}$$
$$=(b^H(AG)^H-b^H)(Ax-AGb)$$
$$=(b^H AG-b^H)(Ax-AGb)$$
$$=b^H AGAx-b^H Ax-b^H AGAGb+b^H AGb=0$$

引理 x是不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解的充要条件为 $Ax=AGb.$

$pf:\forall G\in A\{1,4\},\forall x\in C^n$

$\Rightarrow\|Ax-b\|_2^2=\|Ax-AGb\|_2^2+\|AGb-b\|_2^2$

必要性 $\Rightarrow\|Ax-b\|_2^2=\|AGb-b\|_2^2$

$\Rightarrow\|Ax-AGb\|_2^2=0 \Rightarrow Ax-AGb=0$

充分性 $\Rightarrow\|Ax-b\|_2^2=\|AGb-b\|_2^2$

$\Rightarrow x$是最小二乘解

定理 不相容方程组$Ax=b$的最小二乘解的通解 $x=Gb+(E-A^-A)u,\ \forall u\in C^n.$

$pf:x$是最小二乘解$\Leftrightarrow Ax=AGb$

$\Leftrightarrow x$是$A(x-Gb)=0$解

$\Leftrightarrow$ 通解 $x-Gb=(E-A^-A)u$

定理:不相容方程$Ax=b$, $x=A^+b$是$Ax=b$的最佳逼进解

例:用广义逆矩阵方法判断线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+4x_2+x_3+x_4=3\\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=0\\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4=3\end{cases}$$

是否有解?如果有解,求通解和最小范数解;如果无解,求最小二乘解和最佳逼进解.

解 $A=\begin{pmatrix}2&4&1&1\\1&2&-1&2\\-1&-2&-2&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$

$step1$:求A的最大秩分解:$A=BD$

$$B=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\-1&2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$step2$:求A^+

$$A^+=D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&-2\\1&-5&-6\\1&6&5\end{pmatrix}$$

$step3$:检验 $AA^+b=b$是否成立.

$$A^+Ab=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\neq b$$

故$Ax=b$是不相容的方程.

$step4$:求最小二乘解的通解及最佳逼进解.

通解:

$$x=A^+b+(E-A^+A)u=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\6\end{pmatrix}+(E-A^+A)u$$

最佳逼进解:

$$x=A^+b=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1\\2\\-5\\6\end{pmatrix}$$