§5 $M-P$ 广义逆矩阵 A^+

程光辉

2019 年 12 月 13 日

定义 1 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{G}\in\mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$\boldsymbol{AGA}=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{GAG}=\boldsymbol{G},\ (\boldsymbol{GA})^{H}=\boldsymbol{GA},\ (\boldsymbol{AG})^{H}=\boldsymbol{AG},$$

同时成立，则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{M-P}$ 广义逆矩阵，记为 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}^{+}$.

定理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BD}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解，则

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{D}^{H}\left(\boldsymbol{DD}^{H}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{H}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{+}$.

证明： (1) 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=0$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{O}$.

(2) 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})>0$,则存在最大秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BD}$. 又因 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{DD}^{H})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$，所以 $\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{DD}^{H}$ 都是可逆的. 下面直接验证.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AGA}&=\boldsymbol{BDD}^{H}\left(\boldsymbol{DD}^{H}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{BD}\\&=\boldsymbol{BD}\\&=\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{GAG}&=\boldsymbol{D}^{H}\left(\boldsymbol{DD}^{H}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{BDD}^{H}\left(\boldsymbol{DD}^{H}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{H}\\&=\boldsymbol{D}^{H}\left(\boldsymbol{DD}^{H}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{H}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{H}\\&=\boldsymbol{G}.\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{GA})^{H}=\boldsymbol{A}^{H}\boldsymbol{G}^{H}$$

$$
\begin{aligned}
&= D^H B^H B \left[\left(B^H B\right)^{-1}\right]^H \left[\left(DD^H\right)^{-1}\right]^H D \\
&= D^H B^H B \left(B^H B\right)^{-1} \left(DD^H\right)^{-1} D \\
&= D^H \left(DD^H\right)^{-1} D \\
&= D^H \left(DD^H\right)^{-1} \left(B^H B\right)^{-1} B^H B D \\
&= GA.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(AG)^H &= G^H A^H \\
&= B \left[\left(B^H B\right)^{-1}\right]^H \left[\left(DD^H\right)^{-1}\right]^H DD^H B^H \\
&= B \left(B^H B\right)^{-1} \left(DD^H\right)^{-1} DD^H B^H \\
&= B \left(B^H B\right)^{-1} B^H \\
&= BDD^H \left(DD^H\right)^{-1} \left(B^H B\right)^{-1} B^H \\
&= AG.
\end{aligned}
$$

综上，G 是 A 的 $M-P$ 广义逆矩阵 A^+.

定理 2 设 $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$，则 A^+ 是唯一的.

证明： 令 A_1^+，A_2^+ 都是 A 的 $M-P$ 广义逆，则

$$
\begin{aligned}
A_1^+ &= A_1^+ A A_1^+ \\
&= A_1^+ (A A_2^+ A) A_1^+ \\
&= A_1^+ (A A_2^+)(A A_1^+) \\
&= A_1^+ (A A_2^+)^H (A A_1^+)^H \\
&= A_1^+ \left(A_2^+\right)^H A^H \left(A_1^+\right)^H A^H \\
&= A_1^+ (A_2^+)^H \left(A A_1^+ A\right)^H \\
&= A_1^+ (A_2^+)^H (A)^H \\
&= A_1^+ (A A_2^+)^H \\
&= A_1^+ A A_2^+ \quad \text{(考虑左侧结合，重复上述步骤.)} \\
&= A_2^+ A A_2^+ \\
&= A,
\end{aligned}
$$

得证.

定理 3 设 $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$，则

(1) $\left(A^{+}\right)^{+}=A$*;*

(2) $\left(A^{T}\right)^{+}=\left(A^{+}\right)^{T}$，$\left(A^{H}\right)^{+}=\left(A^{+}\right)^{H}$*;*

(3) $A^{+}=\left(A^{H}A\right)^{+}A^{H}=A^{H}\left(AA^{H}\right)^{+}$*;*

(4) $\mathrm{R}(A^{+})=\mathrm{R}(A^{H})$*;*

(5) $AA^{+}=\mathrm{P}_{\mathrm{R}(A)}$，$A^{+}A=\mathrm{P}_{\mathrm{R}(A^{H})}$*;*

(6) $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(A^{H})$ *的充要条件是* $AA^{+}=A^{+}A$*.*

证明： (1) 显然成立；

(2) 设 $A=BD$ 是矩阵 A 的最大秩分解，则 $A^{T}=D^{T}B^{T}$ 是矩阵 A^{T} 的最大秩分解. 于是有

$$\begin{aligned}
\left(A^{+}\right)^{T} &= \left[D^{H}\left(DD^{H}\right)^{-1}\left(B^{H}B\right)^{-1}B^{H}\right]^{T}\\
&= (B^{H})^{T}\left[\left(B^{H}B\right)^{-1}\right]^{T}\left[\left(DD^{H}\right)^{-1}\right]^{T}(D^{H})^{T}\\
&= (B^{T})^{H}\left[\left(B^{H}B\right)^{T}\right]^{-1}\left[\left(DD^{H}\right)^{T}\right]^{-1}(D^{T})^{H}\\
&= (B^{T})^{H}\left[B^{T}(B^{T})^{H}\right]^{-1}\left[D^{T}(D^{T})^{H}\right]^{-1}(D^{T})^{H}\\
&= (A^{T})^{+}.
\end{aligned}$$

类似可证明 $\left(A^{H}\right)^{+}=\left(A^{+}\right)^{H}$.

(3) 设 $A=BD$ 是矩阵 A 的最大秩分解，则 $A^{H}A=D^{H}B^{H}BD=B_{1}D_{1}$ 是矩阵 $A^{H}A$ 的最大秩分解，其中 $B_{1}=D^{H}$ 列满秩，$D_{1}=B^{H}BD$ 行满秩. 进而

$$\begin{aligned}
\left(A^{H}A\right)^{+}A^{H} &= \left[D_{1}^{H}(D_{1}D_{1}^{H})^{-1}(B_{1}^{H}B_{1})^{-1}B_{1}^{H}\right](BD)^{H}\\
&= (B^{H}BD)^{H}[(B^{H}BD)(B^{H}BD)^{H}]^{-1}(DD^{H})^{-1}DD^{H}B^{H}\\
&= D^{H}B^{H}B(B^{H}BDD^{H}B^{H}B)^{-1}B^{H}\\
&= D^{H}B^{H}B(B^{H}B)^{-1}(DD^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}\\
&= D^{H}(DD^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}\\
&= A^{+}.
\end{aligned}$$

类似，可证另外一个等式.

(4) 因 A^{+} 是 A 的自反广义逆，则 $\mathrm{rank}(A^{+})=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^{H})$. 又由 (3) 知，$\mathrm{R}(A^{+})\subset\mathrm{R}(A^{H})$，进而 $\mathrm{R}(A^{+})=\mathrm{R}(A^{H})$.

(5) 因 A^{+} 是 A 的自反广义逆，则 AA^{+} 和 $A^{+}A$ 都是幂等矩阵，即

$$AA^{+}=\mathrm{P}_{\mathrm{R}(AA^{+})},\quad A^{+}A=\mathrm{P}_{\mathrm{R}(A^{+}A)}.$$

又因 $\mathbf{R}(AA^+)=\mathbf{R}(A)$，$\mathbf{R}(A^+A)=\mathbf{R}(A^+)$，$\mathbf{R}(A^+)=\mathbf{R}(AH)$，故

$$AA^+=\mathbf{P}_{\mathbf{R}(A)},\quad A^+A=\mathbf{P}_{\mathbf{R}(A^H)}.$$

(6) 充分性：因 $AA^+=A^+A$，结合 (5) 的证明，则

$$\mathbf{R}(A)=\mathbf{R}(AA^+)=\mathbf{R}(A^+A)=\mathbf{R}(A^+)=\mathbf{R}(A^H).$$

必要性：因 $\mathbf{R}(A)=\mathbf{R}(A^H)$，$AA^+=\mathbf{P}_{\mathbf{R}(A)}$，$A^+A=\mathbf{P}_{\mathbf{R}(A^H)}$，则

$$AA^+=A^+A.$$

定理 4 设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$，则有

(1) $(A^HA)^+=A^+(A^H)^+$，$(AA^H)^+=(A^H)^+A^+$;

(2) $(A^HA)^+=A^+(AA^H)^+A=A^H(AA^H)^+(A^H)^+$;

(3) $AA^+=(AA^H)(AA^H)^+=(AA^H)^+(AA^H)$;
$A^+A=(A^HA)(A^HA)^+=(A^HA)^+(A^HA)$.

证明： (1) 设 $A=BD$ 是矩阵 A 的最大秩分解，则 $A^HA=D^HB^HBD=B_1D_1$ 是矩阵 A^HA 的最大秩分解，其中 $B_1=D^H$ 列满秩，$D_1=B^HBD$ 行满秩. 于是有

$$\begin{aligned}
(A^HA)^+&=D_1^H(D_1D_1^H)^{-1}(B_1^HB_1)^{-1}B_1^H\\
&=(B^HBD)^H[(B^HBD)(B^HBD)^H]^{-1}(DD^H)^{-1}D\\
&=D^HB^HB(B^HBDD^HB^HB)^{-1}(DD^H)^{-1}D\\
&=D^HB^HB(B^HB)^{-1}(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}(DD^H)^{-1}D\\
&=D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}(DD^H)^{-1}D\\
&=\left[D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H\right]\left[B(B^HB)^{-1}(DD^H)^{-1}D\right]\\
&=A^+(A^H)^+.
\end{aligned}$$

类似，可证另外一个等式.

(2) 定理 3 知，$\left(A^H\right)^+=\left(A^+\right)^H=\left[A^H\left(AA^H\right)^+\right]^H=\left(AA^H\right)^+A^H$. 又由 (1) 知，$(A^HA)^+=A^+(A^H)^+$，进而

$$(A^HA)^+=A^+(A^H)^+=A^+\left(AA^H\right)^+A^H.$$

类似，可证另外一个等式.

(3) 由定理 3(3)，知

$$AA^+=A\left[A^H\left(AA^H\right)^+\right]=\left(AA^H\right)\left(AA^H\right)^+.$$

又因为

$$\begin{aligned}
(AA^H)\left(AA^H\right)^+ &= \left[(AA^H)\left(AA^H\right)^+\right]^H \\
&= \left[\left(AA^H\right)^+\right]^H (AA^H)^H \\
&= \left(AA^H\right)^+ AA^H \\
&= AA^+.
\end{aligned}$$

故有

$$AA^+ = (AA^H)(AA^H)^+ = (AA^H)^+(AA^H).$$

类似，可证另外一个等式.

定理 5 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times l}$，$B \in \mathbf{C}^{l\times n}$，则

$$(AB)^+ = B^+A^+ \Leftrightarrow R(A^HAB) \subset R(B) \text{且} R(BB^HA^H) \subset R(A^H).$$