§2 圆盘定理

程光辉

2019 年 11 月 17 日

定义 1. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$，则称

$$\boldsymbol{S}_i=\left\{z\in \boldsymbol{C}:|z-a_{ii}|\le R_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right\}$$

为行盖尔圆盘;

$$\boldsymbol{G}_i=\left\{z\in \boldsymbol{C}:|z-a_{ii}|\le C_i=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|\right\}$$

为列盖尔圆盘.

定理 1. *(1931, 圆盘定理 1)* 设 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值

$$\lambda\in \boldsymbol{S}=\bigcup_{j=1}^{n}\boldsymbol{S}_j.$$

证明： 因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, $\left(\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq \boldsymbol{0}\right)$，则

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda x_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

令 $|x_k|=\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}>0$，那么

$$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j=\lambda x_k,$$

移项得

$$x_k(\lambda-a_{kk})=\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j,$$

两边取模放缩有

$$|x_k||\lambda-a_{kk}|=\left|\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j\right|\le\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\,|x_j|\le|x_k|\sum_{j\neq k}|a_{kj}|$$

故

$$|\boldsymbol{\lambda} - a_{kk}| \leq R_k,$$

由于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的任意性，得证.

例 1. 估计矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & i & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 5 & -\frac{i}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

的特征值的分布范围.

解:

$$\begin{aligned} S_1 &: |z - 1| \leq 1; \\ S_2 &: \left|z - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{3}{2}; \\ S_3 &: |z - 5| \leq 1; \\ S_4 &: |z - 5i| \leq 1. \end{aligned}$$

推论 1. 设 $A \in C^{n \times n}$，则 A 的任一特征值

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} G_i.$$

定理 2. *(圆盘定理 2)* 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的 n 个盖尔圆盘中有 k 个圆盘的并形成一个连通区域 G，且它与余下的 $n-k$ 个圆盘都不相交，则在该区域 G 中恰好有 A 的 k 个特征值.

证明: 把矩阵 A 分解为对角部分和非对角部分的和，即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} =: D + B.$$

令

$$A_\varepsilon = D + \varepsilon B, \quad \varepsilon \in [0, 1],$$

则

$$R_i\left(A_\varepsilon\right) = R_i(\varepsilon B) = \varepsilon R_i(A).$$

设

$$
\begin{aligned}
G_k &= \bigcup_{i=1}^{k} \{z \in C : |z - a_{ii}| \le R_i(A)\}, \\
G_k(\varepsilon) &= \bigcup_{i=1}^{k} \{z \in C : |z - a_{ii}| \le R_i(A_\varepsilon) = \varepsilon R_i(A)\},
\end{aligned}
$$

故 $G_k \equiv G_k(1)$.

根据特征多项式知，矩阵特征值是关于矩阵元素的连续函数，也就是说 A_ε 的特征值是关于 ε 的连续函数，即特征值随着 ε 变化的曲线是不间断的. 当 ε 从 0 到 1 变化时，特征值 $\lambda(A_\varepsilon)$ 从矩阵 A 的对角元素为起点到 A 的对应特征值为终点变化. 因为特征值不会跑到区域外或者消失，也不会有外面的特征值进入区域 G，因此，k 个圆盘的并形成一个连通区域 G 中恰好有 k 个特征值.

推论 2. 设 $A \in C^{n\times n}$，λ 是 A 的任一特征值，则

$$
\lambda \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} G_j\right).
$$

推论 3. 设 n 阶方阵 A 的 n 个盖尔圆盘两两互不相交, 则 A 相似于对角阵.

推论 4. 设 n 阶实阵 A 的 n 个盖尔圆盘两两互不相交, 则 A 特征值全为实数.

令 $D = \operatorname{diag}(p_1, p_2, \cdots, p_n), (p_i > 0)$，则

$$
D^{-1}AD = \begin{bmatrix}
a_{11} & \frac{p_2}{p_1}a_{12} & \cdots & \frac{p_n}{p_1}a_{1n} \\
\frac{p_1}{p_2}a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{p_n}{p_2}a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{p_1}{p_n}a_{n1} & \frac{p_2}{p_n}a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix},
$$

进而

$$
r_i = \frac{1}{p_i}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|\, p_j, \quad Q_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \le r_i\},
$$

$$
t_j = p_j \sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{p_i}, \quad P_j = \{z \in C : |z - a_{jj}| \le t_j\}.
$$

定理 3. 设 $A \in C^{n\times n}$，λ 是 A 的任一特征值，则

$$
\lambda \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} Q_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} P_j\right).
$$

例 2. 估计矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.01 & 0.12\\ 0.01 & 0.8 & 0.13\\ 0.01 & 0.02 & 0.4\end{bmatrix}$ 的特征值范围.

解: 行盖尔圆为

$$\begin{aligned}S_1 &:|z-0.9|\le 0.13;\\ S_2 &:|z-0.8|\le 0.14;\\ S_3 &:|z-0.4|\le 0.03.\end{aligned}$$

先令 $D=\mathrm{diag}(1,1,0.1)$，对 A 进行相似变换有 $D^{-1}AD$，其行盖尔圆为

$$\begin{aligned}S_1 &:|z-0.9|\le 0.022\\ S_2 &:|z-0.8|\le 0.023\\ S_3 &:|z-0.4|\le 0.3.\end{aligned}$$

两者结合得更好估计.

定义 2. 设 $A\in C^{n\times n}$，若 A 行对角占优，则

$$|a_{ii}|\ge R_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ij}|,\quad (i=1,2,\cdots,n);$$

若 A 列对角占优, 则

$$|a_{ii}|\ge C_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ji}|,\quad (i=1,2,\cdots,n);$$

若 A 行严格对角占优, 则

$$|a_{ii}|> R_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ij}|,\quad (i=1,2,\cdots,n);$$

若 A 列严格对角占优, 则

$$|a_{ii}|> C_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ji}|,\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

定理 4. 设 $A\in C^{n\times n}$ 行 *(或列)* 严格对角占优，则

(1) A 可逆, 且 $\lambda_i\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i,\quad (S_i=\{z\in C:|z-a_{ii}|\le|a_{ii}|\})$;

(2) 若 A 的所有主对角元都是正数, 则 A 的特征值都有正实部;

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{Hermite}$ 矩阵，且所有主对角元都为正数，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都为正数.

证明：(1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 行严格对角占优，则有 $\boldsymbol{R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|}$，则

$$\boldsymbol{\lambda_i \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i, \quad (S_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| < |a_{ii}|\});}$$

显然 $\boldsymbol{0 \notin S_i}$，所以 $\boldsymbol{0}$ 不是其特征值，即可逆.

(2) 因为 $\boldsymbol{a_{ii} > 0, |\lambda - a_{ii}| < |a_{ii}|}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都有正实部.

(3)$\boldsymbol{A^H = A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 得特征值都是实数，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都有正数.