第二章

向量与矩阵的范数

1 向量的范数

定义1 设映射$\|\cdot\|: C^n \to R$满足：

(1) 正定性 $\|x\| \ge 0$,当且仅当 $x=0$时, $\|x\|=0$;

(2) 齐次性 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|\lambda x\|, \lambda \in R, x \in C^n$;

(3) 三角不等式 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|, \forall\ x, y \in C^n$.

则称映射 $\|\cdot\|$ 为 C^n上向量 x的范数 .

向量范数的性质：

(1) $\|0\|=0$;

(2) $x \ne 0$时，$\left\| \dfrac{1}{\|x\|} x \right\| = 1$;

(3) 对任意$x \in C^n$，有$\|-x\|=\|x\|$;

(4) 对任意$x, y \in C^n$，有$|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|$.

证 $\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\| \longrightarrow$

$\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$ (1) $\longrightarrow \|x-y\| = \|y-x\|$

$\ge \|y\| - \|x\| \longrightarrow \|x\| - \|y\| \ge -\|x-y\|$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow |\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|$

例 1 设$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in C^n$，则

(1) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $\Leftarrow$ 1−范数

(2) $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$ $\Leftarrow$ 2−范数

(3) $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ $\Leftarrow$ 无穷范数

证 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \longrightarrow$

$$|x^H y|^2 = |\bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \cdots + \bar{x}_n y_n|^2$$

$$\le (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2) \cdot$$

$$(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_n|^2)$$

$$= \|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \longrightarrow$$

$$\|x+y\|_2^2 = (x+y)^H (x+y)$$

$$= x^H x + x^H y + y^H x + y^H y$$

$$\le |x^H x| + |x^H y| + |y^H x| + |y^H y|$$

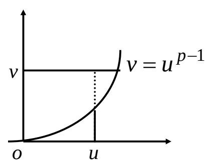
$$\le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

$$= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \longrightarrow$$

$$\|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$$

引理1 若u和v是非负实数，p和q是正实数，且满足条件$p, q>1$和$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则恒有不等式

$$uv \le \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q$$



证 $uv \le \int_0^u u^{p-1} du + \int_0^v v^{1/(p-1)} dv = \frac{1}{p}u^p + \int_0^v v^{q/p} dv$

$$= \frac{1}{p}u^p + (\frac{q}{p}+1)^{-1} v^{(q/p)+1} = \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q$$

定义 $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$ $1 \le p < \infty$ $\Leftarrow$ p−范数

定理 1 (Hölder不等式) 若$p,q>1$，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，

则对C^n任意向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$都有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|y_i|\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q)^{1/q}$$

证 $u=\frac{|x_i|}{\|x\|_p}, v=\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \longrightarrow \frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q}$

$$\le\frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} \quad 1\le i\le n \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q}\le\frac{1}{p\|x\|_p^p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p+\frac{1}{q\|y\|_q^q}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|y_i|\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q)^{1/q}$$

例 2 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^n$，则

$$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p} \quad 1\le p<\infty$$

是C^n上的向量范数，称为Hölder范数.

证 $\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p$

$$=\sum_{i=1}^{n}|x_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1}$$

$$\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}]^{1/q}$$

$$+(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{1/p}[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}]^{1/q}$$

$$=[(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{1/p}+(\sum_{i=1}^{n}|y|^p)^{1/p}]$$

$$\cdot[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}]^{1/q} \xrightarrow{(p-1)q=p}$$

$$[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p]^{1/p}=[(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{1/p}+(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{1/p}]$$

$$\xrightarrow{[\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p]^{1/p}\le[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p]^{1/p}}$$

$$\|x+y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p$$

定理 2 设$\|\cdot\|$是C^m上的范数，$A\in C_n^{m\times n}$，则$\|A\cdot\|$是C^n上的范数.

证 (1) $x\ne 0 \Longrightarrow Ax\ne 0 \Longrightarrow \|Ax\|>0$

(2) $\|A(\lambda x)\|=\|\lambda Ax\|=|\lambda|\|Ax\|$

(3) $\|A(x+y)\|=\|Ax+Ay\|\le\|Ax\|+\|Ay\|$

引理 2 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为线性空间$V_n(P)$的一组标准正交基，$x=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\tilde{x}, \tilde{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in P^n$，则$V_n(P)$上的向量范数$\|x\|$在闭球

$$S=\{x\,|\,(\tilde{x},\tilde{x})^{\frac{1}{2}}\le 1\}$$

上有界.

证 $x=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\tilde{x}\in S \Longrightarrow$

$$(\tilde{x},\tilde{x})=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\le 1 \Longrightarrow |x_i|\le 1\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\therefore \|x\|=\|\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\|\le\sum_{i=1}^{n}\|x_i\varepsilon_i\|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|\|\varepsilon_i\|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\|\varepsilon_i\|=M$$

引理 3 设 $\|x\|$ 是 $V_n(P)$ 上的向量范数，则 $\|x\|$ 是关于 $\|x\|_2$ 的连续函数.

证 $\Delta\tilde{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n) \in P^n$， 且

$\Delta x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\Delta\tilde{x} \in V_n(P)$ $\Longrightarrow$

$$|\|x+\Delta x\| - \|x\|| \le \|\Delta x\| \le \|\Delta x\|_2 \left\| \frac{\Delta x}{\|\Delta x\|_2} \right\|$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to \theta} |\|x+\Delta x\| - \|x\|| = 0$$

定义 2 设 在 $V_n(P)$ 上定义了 $\|x\|_a, \|x\|_b$ 两种向量范数，若存在常数 $C_1 > 0, C_2 > 0$，使得

$$C_1\|x\|_a \le \|x\|_b \le C_2\|x\|_a \quad \forall x \in V_n(P)$$

则称 $\|x\|_a$ 与 $\|x\|_b$ 等价.

定理 3 $V_n(P)$ 上的任意两个向量范数均等价.

证 $\|x\|_a, \|x\|_b$ 为任两向量范数 $\Longrightarrow$

$\|x\|_a, \|x\|_b$ 都是 $\|x\|_2$ 的连续函数 $\Longrightarrow$

$\varphi(x) = \dfrac{\|x\|_a}{\|x\|_b}$ 关于 $\|x\|_2$ 的连续函数 $\Longrightarrow$

$\varphi(x) = \dfrac{\|x\|_a}{\|x\|_b} \le k_1 \Longrightarrow \|x\|_a \le k_1\|x\|_b$

同理可证 $\|x\|_b \le k_2\|x\|_a$

因此，$V_n(P)$ 上的任意两个向量范数均等价.

定义 3 设 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T \in C^n$，如果

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

则称向量序列 $x^{(k)}$ 收敛于 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

定义 4 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x^{(k)} - a\| = 0$

定理 4 设 $\|\cdot\|$ 是 C^n 上的任一向量范数，则

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - a\| = 0$$

证 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \quad (1 \le i \le n)$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |x_i^{(k)} - a_i| = 0 \quad (1 \le i \le n) \Longleftrightarrow$

$\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{1\le i\le n}\{|x_i^{(k)} - a_i|\} = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x^{(k)} - a\|_\infty = 0$

$$m\|x^{(k)} - a\|_\infty \le \|x^{(k)} - a\| \le M\|x^{(k)} - a\|_\infty$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x^{(k)} - a\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|x^{(k)} - a\|_\infty = 0$

例 6 设 $a = (1, 1, \cdots, 1)^T \in R_n$，且

$$x^{(k)} = (1 + \frac{1}{2^k}, 1 + \frac{1}{3^k}, \cdots, 1 + \frac{1}{(n+1)^k})$$

则

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$$

证 $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^{(k)} - a\|_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{1\le i\le n}\{|x_i^{(k)} - a_i|\}$

$$= \lim_{k\to\infty} \max_{1\le i\le n}\{\frac{1}{(i+1)^k}\} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$$

§2 矩阵的范数

定义 1 设$A\in P^{m\times n}$，若映射 $\|\cdot\|$：$P^{m\times n}\to R$ 满足

(1) 正定性 $\|A\|\ge 0$,当且仅当$A=\theta$时, $\|A\|=0$;

(2) 齐次性 $\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|, \forall\lambda\in R, \forall A\in P^{m\times n}$;

(3) 三角不等式 $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|, \forall A,B\in P^{m\times n}$.

则称映射 $\|\cdot\|$ 为$p^{m\times n}$上的矩阵范数.

例 1 设 $A\in P^{m\times n}$，则

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_{m_2}=(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_{m_\infty}=\max_{i,j}\{|a_{ij}|\}\quad 1\le i\le m\quad 1\le j\le n$$

定义 2 设 $\|\cdot\|_a: P^{m\times l}\to R$，$\|\cdot\|_b: P^{l\times n}\to R$，$\|\cdot\|_c: P^{m\times n}\to R$是矩阵范数，如果

$$\|AB\|_c\le\|A\|_a\cdot\|B\|_b$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|_a$,$\|\cdot\|_b$ 和 $\|\cdot\|_c$ 相容 .

如果

$$\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$$

则称 $\|\cdot\|$是自相容矩阵范数 .

例 2 $\|A\|_{m_\infty}=\max_{i,j}\{|a_{ij}|\}\quad 1\le i\le m\quad 1\le j\le n$ 是不相容的矩阵范数 .

例如 $A=B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\|AB\|_{m_\infty}=2\not\le\|A\|_{m_\infty}\|B\|_{m_\infty}=1$$

例 3 $\|\cdot\|_{m_1}$ 和 $\|\cdot\|_{m_2}$ 是相容的矩阵范数 .

证 设$A\in P^{m\times l}$，$B\in P^{l\times n}$ $\Rightarrow$

1) $$\|AB\|_{m_1}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}|$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|\bullet|b_{kj}|$$

$$=\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ik}|\bullet|b_{kj}|$$

$$=\sum_{k=1}^{l}(\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|\bullet\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|)$$

$$\le\sum_{k=1}^{l}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|\bullet\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|)$$

$$=(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|)\bullet(\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|)$$

$$=\|A\|_{m_1}\bullet\|B\|_{m_1}$$

2) $$\|AB\|_{m_2}=(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le [\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|\bullet|b_{kj}|)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le [\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^2)\bullet(\sum_{k=1}^{l}|b_{kj}|^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{l}|b_{kj}|^2)\bullet[\sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^2)]\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le (\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}|a_{ik}|^2)^{\frac{1}{2}}\bullet(\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}|b_{kj}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|A\|_{m_2}\bullet\|B\|_{m_2}$$

定理 3 设$A\in P^{n\times n}$，

(1) 若$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则

$$\|A\|_F^2=\|A\|_{m_2}^2=\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_2^2$$

其中，$\|a_i\|_2^2=a_i^H a_i$.

(2) $\|A\|_{m_2}^2=tr(A^HA)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A^HA)$

(3) 对任意的酉矩阵 U、$V\in P^{n\times n}$，有

$$\|A\|_{m_2}^2=\|U^HAV\|_{m_2}^2=\|UAV^H\|_{m_2}^2$$

证 (3) $\|A\|_{m_2}^2=tr(A^HA)=tr(AA^H)$

$$=tr(AVV^HA^H)=tr[AV(AV)^H]$$

$$=tr[(AV)^HAV]=tr(V^HA^HAV)$$

$$=tr(V^HA^HUU^HAV)$$

$$=tr[(U^HAV)^H(U^HAV)]$$

$$=\|U^HAV\|_{m_2}^2$$

推论 1 设$A\in P^{n\times n}$，对任意的酉矩阵 U、$V\in P^{n\times n}$，有

$$\|A\|_{m_2}=\|UA\|_{m_2}=\|AV\|_{m_2}=\|UAV\|_{m_2}$$

一、 算子范数

定义 1 设$\|\bullet\|_a$是P^n上的向量范数，$\|*\|_m$是$P^{n\times n}$上的矩阵范数，且

$$\|Ax\|_a\le\|A\|_m\|x\|_a$$

则称$\|*\|_m$为与向量范数$\|\bullet\|_a$相容的矩阵范数.

例 1 设$x\in P^n, A\in P^{n\times n}$，则

$$\|A\|_{m_1}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

是与向量范数$\|\bullet\|_1$相容的矩阵范数.

证 $\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k|$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||x_k|$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}||x_k|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(|x_k|\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|)$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|)$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|)\bullet\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

$$=\|A\|_{m_1}\bullet\|x\|_1$$

例 2 设 $x\in P^n, A\in P^{n\times n}$，则 $\|A\|_{m_2}$ 是与 $\|x\|_2$ 相容的矩阵范数.

证 $$\|Ax\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}|a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n|^2$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)\bullet(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2)$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)\bullet\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2$$

$$=\|A\|_{m_2}^2\bullet\|x\|_2^2$$

定理 1 设 $\|x\|_a$ 是 P^n 上的向量范数，$A\in P^{n\times n}$，则

$$\|A\|_a=\max_{x\ne\theta}\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}\quad(=\max_{u=1}\|Au\|_a)$$

是与向量范数 $\|x\|_a$ 相容的矩阵范数.

证

$$\|A\|_a=\max_{x\ne\theta}\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}\Longrightarrow\|A\|_a\ge\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}$$

$$\Longrightarrow\quad\|A\|_a\cdot\|x\|_a\ge\|Ax\|_a$$

1) $A\ne 0\xrightarrow{P^n\text{中存在 }x_0\ne 0}Ax_0\ne 0\Longrightarrow$

$\|Ax_0\|_a>0,\ \|x_0\|_a>0\quad\Longrightarrow$

$$\|A\|_a\ge\frac{\|Ax_0\|_a}{\|x_0\|_a}>0$$

2) $$\|\lambda A\|_a=\max_{x\ne\theta}\frac{\|\lambda Ax\|_a}{\|x\|_a}$$

$$=\max_{x\ne\theta}\frac{|\lambda|\cdot\|Ax\|_a}{\|x\|_a}$$

$$=|\lambda|\cdot\max_{x\ne\theta}\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}=|\lambda|\cdot\|A\|_a$$

3) $$\|A+B\|_a=\max_{x\ne\theta}\frac{\|(A+B)x\|_a}{\|x\|_a}$$

$$\le\max_{x\ne\theta}\frac{\|Ax\|_a+\|Bx\|_a}{\|x\|_a}$$

$$\le\max_{x\ne\theta}\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}+\max_{x\ne\theta}\frac{\|Bx\|_a}{\|x\|_a}$$

$$=\|A\|_a+\|B\|_a$$

推论 1 设 $\|x\|_a$ 是 P^n 上的向量范数，A、$B\in P^{n\times n}$，$\|A\|_a$ 是从属于 $\|x\|_a$ 的算子范数，则它是相 容的矩阵范数，即

$$\|AB\|_a\le\|A\|_a\cdot\|B\|_a$$

证

$$\|AB\|_a=\max_{x\ne\theta}\frac{\|ABx\|_a}{\|x\|_a}$$

$$\le\max_{x\ne\theta}\frac{\|A\|_a\cdot\|Bx\|_a}{\|x\|_a}$$

$$=\| A \|_a \cdot \max_{x\neq\theta} \frac{\| Bx \|_a}{\| x \|_a} = \| A \|_a \cdot \| B \|_a$$

算子范数的特性:

1) 它是所有与向量范数 $\| x \|_a$ 相容的矩阵范数中最小的.

证 $\| Ax \|_a \leq \| A \| \cdot \| x \|_a \quad \forall x \in P^n \Longrightarrow$

$$\frac{\| Ax \|_a}{\| x \|_a} \leq \| A \| \quad \forall \theta \neq x \in P^n \Longrightarrow$$

$$\| A \|_a = \max_{x\neq\theta} \frac{\| Ax \|_a}{\| x \|_a} \leq \| A \|$$

2) 它的两种表达形式

$$\| A \|_a = \max_{x\neq\theta} \frac{\| Ax \|_a}{\| x \|_a} \quad (= \max_{u=1} \| Au \|_a)$$

3) 它是自相容矩阵范数(推论1).

定理 2 设 $\| \bullet \|_m$ 是相容的矩阵范数，则 存在向量范数 $\| x \|$，使

$$\| Ax \| \leq \| A \|_m \cdot \| x \|$$

证 定义 向量范数

$\| x \| = \| xa^H \|_m \quad \theta \neq a \in P^n$，$\forall x \in P^n$

1) $a \neq \theta \Longrightarrow xa^H \neq \theta$, $\forall \theta \neq x \in P^n \Longrightarrow$

$\| x \| = \| xa^H \|_m > 0 \quad \forall \theta \neq x \in P^n$

2) $\| \lambda x \| = \| \lambda x a^H \|_m = | \lambda | \cdot \| xa^H \|_m$

$= | \lambda | \cdot \| x \|$

3) $\| x + y \| = \| (x+y)a^H \|_m = \| xa^H + ya^H \|_m$

$\leq \| xa^H \|_m + \| ya^H \|_m$

$= \| x \| + \| y \|$

4) $\| Ax \| = \| Axa^H \|_m \leq \| A \|_m \cdot \| xa^H \|_m$

$= \| A \|_m \cdot \| x \|$

例 3 取 $a = (1, 0, \cdots, 0)$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

则

$$\| x \| = \| xa^H \|_{m_2} = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2)^{1/2} = \| x \|_2$$

定理 3 如果 $\| \bullet \|_m : C^{n\times n} \to R$ 是一相容的矩阵范数，则对任一 $A \in C^{n\times n}$，有

$$| \lambda_i | \leq \| A \|_m$$

其中，λ_i 是A的特征值 .

证 $Ax = \lambda_i x \Longrightarrow | \lambda_i | \cdot \| x \| = \| \lambda_i x \|$

$= \| A x \| \leq \| A \|_m \| x \| \Longrightarrow | \lambda_i | \leq \| A \|_m$

二、算子范数 的计算:

例 4 从属于向量范数 $\|x\|_1$ 的算子范数为

$$\|A\|_1=\max_j\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

被称为极大列和范数 .

证 $$\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\cdot|x_j|$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\cdot|x_j|$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\cdot|x_j|$$

$$\le\sum_{j=1}^{n}\left(\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\cdot|x_j|$$

$$=\left(\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}|x_j|$$

$$=\|A\|_1\cdot\|x\|_1$$

令 $\lambda=\sum_{i=1}^{n}|a_{is}|=\max_j\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\quad 1\le s\le n$

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ $\Rightarrow$

$\lambda=\|\alpha_s\|_1$

取 $\varepsilon_s=(0\ \cdots\ 0\ \overset{\text{第 } s \text{ 个}}{1}\ 0\ \cdots\ 0)$ $\Rightarrow$

$\|\varepsilon_s\|_1=1$ $\Rightarrow$

$\|A\varepsilon_s\|_1=\|\alpha_s\|_1=\lambda=\lambda\|\varepsilon_s\|_1$ $\Rightarrow$

$$\lambda=\max_{x\neq\theta}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|=\|A\|_1$$

例 5 从属于 $\|x\|_\infty$ 的算子范数为

$$\|A\|_\infty=\max_i\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

被称为极大行和范数.

证 $$\|Ax\|_\infty=\max_i\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|\right\}$$

$$\le\max_i\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\cdot|x_k|\right\}$$

$$\le\max_i\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\cdot\max_i|x_k|\right\}$$

$$=\max_i\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right\}\cdot\max_k\{|x_k|\}$$

$=\|A\|_\infty\cdot\|x\|_\infty$ $\Rightarrow$

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\le\|A\|_\infty \qquad (1)$$

令 $\mu=\sum_{j=1}^{n}|a_{sj}|=\max_i\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\quad 1\le s\le n$

记 $a_{sj}=|a_{sj}|e^{i\theta_j}\quad (j=1,2,\cdots,n)$ $\Rightarrow$

$z=(e^{-i\theta_1},e^{-i\theta_2},\cdots,e^{-i\theta_n})\Rightarrow\|z\|_\infty=1$

$$\|Az\|_\infty\ge\left|\sum_{j=1}^{n}a_{sj}e^{-i\theta_j}\right|=\sum_{j=1}^{n}|a_{sj}|=\mu$$

$=\mu\|z\|_\infty$ $\Rightarrow$

$$\frac{\|Az\|_\infty}{\|z\|_\infty}\ge\mu=\|A\|_\infty \qquad (2)$$

$$\therefore\quad\|A\|_\infty=\max_i\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

定义 2　设 $A \in C^{n\times n}$，λ_i是A的特征值，则 $r(A)=\max_i |\lambda_i|$ 称为 A的谱半径 .

例 6　设 $A \in P^{m\times n}$，则从属于 $\|x\|_2$ 的算子范数（又称为谱范数） 为

$$\|A\|_2=\sqrt{r(A^H A)}$$

证　$f(X)=X^H(A^H A)X=(AX)^H AX \ge 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0;$ $\Rightarrow$

X_i是对应λ_i的单位正交特征向量

设 $\forall u \in P^n$ 且 $\|u\|_2=1$ $\Rightarrow$

$u=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$ $\Rightarrow$

$\|u\|_2=u^H u=\|a_1\|^2+\|a_2\|^2+\cdots+\|a_n\|^2=1$ $\Rightarrow$

$A^H Au=a_1\lambda_1X_1+a_2\lambda_2X_2+\cdots+a_n\lambda_nX_n$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\|Au\|_2^2&=(Au)^H Au=u^H A^H Au\\&=\lambda_1\|a_1\|^2+\lambda_2\|a_2\|^2+\cdots+\lambda_n\|a_n\|^2\\&\le\lambda_1(\|a_1\|^2+\|a_2\|^2+\cdots+\|a_n\|^2)\\&=\lambda_1\end{aligned}$$ $\Rightarrow$

$$\max_{\|u\|_2=1}\|Au\|_2 \le \sqrt{\lambda_1}$$

又　$\|AX_1\|_2^2=X_1^H A^H AX_1=X_1^H\lambda_1X_1=\lambda_1$

$$\therefore \|A\|_2=\max_{\|u\|_2=1}\|Au\|_2=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{r(A^H A)}$$

三、　谱范数的性质

定理 4　设 $A \in C^{n\times n}$，则

(1)　$\|A\|_2=\|A^H\|_2=\|A^T\|_2=\|\overline{A}\|_2$

(2)　$\|A^H A\|_2=\|AA^H\|_2=\|A\|_2^2$

(3)　对任何 n阶酉矩阵 U及V都有

$\|UA\|_2=\|AV\|_2=\|UAV\|_2=\|A\|_2$

证

(1)　$A^H Ax=\lambda x$ $\Rightarrow$

若 $\lambda=0$ $\Rightarrow$ $A^H A$非满秩 $\Rightarrow$ AA^H非满秩

$\Rightarrow$ $\lambda=0$ 也是 AA^H的特征值

若 $\lambda \ne 0$ $\Rightarrow$ $y=Ax \ne 0$ $\Rightarrow$

$AA^H y=A\underline{A^H Ax}=A(\lambda x)=\lambda Ax=\lambda y$ $\Rightarrow$

λ也是 AA^H的特征值

同理可证 ：AA^H的特征值也是$A^H A$的特征值

$\Rightarrow$ $\|A\|_2=\sqrt{r(A^H A)}=\sqrt{r(AA^H)}=\|A^H\|_2$

$|\lambda E-(A^T)^H A^T|=|\lambda E-(AA^H)^T|=|\lambda E-AA^H|$

$\Rightarrow$ $\|A\|_2=\|A^H\|_2=\|A^T\|_2$

$\|\overline{A}\|_2=\|\overline{A}^H\|_2=\|A^T\|_2=\|A\|_2$

(2)　$\|A^H A\|_2^2=r[(A^H A)^H(A^H A)]$

$=r[(A^H A)^2]=[r(A^H A)]^2$ $\Rightarrow$

$\|A^H A\|_2=\|AA^H\|_2=\|A\|_2^2$

(3)　$\|UA\|_2^2=r[(UA)^H(UA)]=r[A^H\underline{U^H U}A]$

$=r(A^H A)=\|A\|_2^2$

定理 5 设 $A \in C^{n\times n}$，则

(1) $\|A\|_2 = \max\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |y^H Ax|$

(2) $\|A\|_2^2 \le \|A\|_1 \|A\|_\infty$

证

(1) $|y^H Ax| \le \|y\|_2 \|Ax\|_2 \le \|y\|_2 \|A\|_2 \|x\|_2$

$= \|A\|_2 \Rightarrow$

$\max\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |y^H Ax| \le \|A\|_2$

$\|A\|_2 = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|_2 \Rightarrow \|A\|_2 = \|Ax_0\|_2 > 0$

$y_0 = \dfrac{Ax_0}{\|Ax_0\|_2} \Rightarrow$

$|y_0^H Ax_0| = \left|\dfrac{(Ax_0)^H}{\|Ax_0\|_2} Ax_0\right| = \|Ax_0\|_2 = \|A\|_2$

$\Downarrow$

$\max\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |y^H Ax| = \|A\|_2$

(2) $\|A\|_2^2 = r(A^H A)$

$\le \|A^H A\|_1$

$\le \|A^H\|_1 \|A\|_1$

$= \|A\|_1 \|A\|_\infty$

四、 广义算子范数

定理 6 设 $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ 都是向量范数，$A \in P^{n\times n}$，则

$$\|A\|_{a,b} = \max_{x\neq\theta} \frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_b} \quad (= \max_{\|u\|_b=1} \|Au\|_a)$$

叫做$P^{n\times n}$上的广义算子范数.

定理 7 设 $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ 与 $\|\cdot\|_c$ 都是向量范数，则

$$\|AB\|_{a,c} \le \|A\|_{a,b} \|B\|_{b,c}$$

应用1　矩阵逆的摄动

(1) 矩阵A可逆，A与其摄动矩阵δA满足什么条件时，$A+\delta A$可逆？

(2) 当$A+\delta A$可逆，A^{-1}与$(A+\delta A)^{-1}$的近似程度如何估计？

定义：设A是可逆矩阵，称

$K_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$

是A相对给定范数的条件数.

定理1：设$A \in C^{n\times n}$，$\|A\|_a$ 是从属于向量范数 $\|x\|_a$ 的矩阵范数，则当 $\|A\|_a < 1$时，$E - A$可逆，且

$\|(E-A)^{-1}\|_a \le (1 - \|A\|_a)^{-1}$.

定理2 A可逆，δA为摄动矩阵,$\| A^{-1}\delta A\|_a<1$，则

(1) $A+\delta A$可逆；

(2) $(A+\delta A)^{-1}=(E+F)A^{-1}, \|F\|_a \le \dfrac{\|A^{-1}\delta A\|_a}{1-\|A^{-1}\delta A\|_a}$；

(3) $\dfrac{\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\|_a}{\|A^{-1}\|_a} \le \dfrac{\|A^{-1}\delta A\|_a}{1-\|A^{-1}\delta A\|_a}$.

例1

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6.00001 \end{pmatrix},\quad \delta A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.00002 \end{pmatrix}$$

计算可得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 300000.5 & -300000 \\ -100000 & 100000 \end{pmatrix},$$

$$(A+\delta A)^{-1}=\begin{pmatrix} -299999.5 & -300000 \\ 100000 & -100000 \end{pmatrix},$$

$$K(A)=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2 \approx 8.9443\times 123.56 \approx 1105.$$

例2 Hilbert matrix

$$H=\left(h_{ij}\right)\in R^{n\times n},\quad h_{ij}=\frac{1}{i+j-1}$$

$$H=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{n+(n-1)} \end{pmatrix}$$

$K(A)=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2 \approx 4.7661e+005$ (n=5)

应用2：线性方程组的摄动

定理1 在方程组$Ax=b$中,A固定且可逆,令$b\ne 0$且有小的摄动，则解方程组

$$A(x+\delta x)=b+\delta b,$$

得

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le K(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

定理2 在方程组$Ax=b$中,b固定且$b\ne 0$可逆矩阵A有小的摄动δA,当$\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|<1$时，

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b,$$

得

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le \frac{K(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-K(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$

定理3 在方程组$Ax=b$中,$b\ne 0$有小的摄动δb可逆矩阵A有小的摄动δA,当$\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|<1$时，

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b,$$

得

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le \frac{K(A)}{r(A)}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right).$$

$$K(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|, r(A)=1-K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}>0.$$