§3 自反广义逆矩阵

程光辉

2019 年 12 月 10 日

定义 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{G} \in \mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{GAG} = \boldsymbol{G}$$

同时成立，则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵，记为 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}_r^-$.

例 1 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) \in \mathbf{U}_r^{m\times r}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_i^H \boldsymbol{\alpha}_j = \begin{cases} \mathbf{1},\ i = j \\ \mathbf{0},\ i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, r)$，则 $\boldsymbol{A}^H$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆.

例 2 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 是行满秩矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的右逆矩阵 $\boldsymbol{A}_R^{-1}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个自反广义逆.

定理 1 任何矩阵都有自反广义逆矩阵.

证明： (1) 若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}_r^- = \boldsymbol{O}$，显然成立.

(2) 对 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，不妨设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}_r^{m\times n}$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{Q},$$

取

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{Q}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{YX} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1},$$

直接验证即可.

定理 2 设 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbf{C}^{n\times m}$ 均为 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 的广义逆矩阵，则

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{XAY}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵.

证明：因为 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵，则 $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AYA}=\boldsymbol{A}$，进而有

$$\boldsymbol{AZA}=\underline{\boldsymbol{AXA}}\boldsymbol{YA}=\boldsymbol{AYA}=\boldsymbol{A},$$

和

$$\boldsymbol{ZAZ}=\boldsymbol{X}\underline{\boldsymbol{AYA}}\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{X}\underline{\boldsymbol{AXA}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{Z},$$

得证.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{A}^{-}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵的充要条件是

$$\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^{-}).$$

证明： (**必要性**) 因为 $\boldsymbol{A}^{-}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵，即有

$$\boldsymbol{AA}^{-}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{AA}^{-}=\boldsymbol{A}^{-},$$

因此，

$$\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{AA}^{-}\boldsymbol{A})\leq\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^{-})\leq\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{AA}^{-})\leq\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}),$$

即

$$\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^{-}).$$

(**充分性**) 因为 $\boldsymbol{AA}^{-}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，且 $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^{-})$，因此

$$\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^{-}).$$

又由 $\mathbf{R}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\subset\mathbf{R}(\boldsymbol{A}^{-})$，得 $\mathbf{R}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})=\mathbf{R}(\boldsymbol{A}^{-})$，故存在 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times m}$，使得 $\boldsymbol{A}^{-}=\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{AX}$.

因为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{-}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{-}\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{AXA},$$

即 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵，由定理 2 知，$\boldsymbol{A}^{-}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times m}$，则下列任意两个等式成立都可推导得第三个等式成立.

(1) $\mathbf{rank}(\boldsymbol{A})=\mathbf{rank}(\boldsymbol{X})$;

(2) $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}$;

(3) $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X}$.

定理 5 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，则

$$X = \left(A^H A\right)^- A^H,\ Y = A^H \left(AA^H\right)^-$$

都是 A 的自反广义逆矩阵.

证明： 因为 $\mathrm{R}(A^H) = \mathrm{R}(A^H A)$，则有 $\mathrm{R}(A^H) = \mathrm{R}(A^H A)$，于是存在矩阵 $D \in \mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$A^H = A^H A D,$$

即 $A = D^H A^H A$.

因为

$$AXA = A\left(A^H A\right)^- A^H A = D^H A^H A \left(A^H A\right)^- A^H A = D^H A^H A = A,$$

所以 X 是 A 的广义逆矩阵.

又因

$$\mathrm{rank}(A) \leq \mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}\left(\left(A^H A\right)^- A^H\right) \leq \mathrm{rank}(A^H) = \mathrm{rank}(A),$$

即 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(X)$，由定理 3 知，$X$ 是 A 的自反广义逆矩阵.

定理 6 设 AA_r^- 和 $A_r^- A$ 都是幂等矩阵.

证明： 直接验证即可.

$$\left(AA_r^-\right)^2 = AA_r^- AA_r^- = AA_r^-,$$

即 AA_r^- 是幂等矩阵.

同理，可证 $A_r^- A$ 是幂等矩阵.