第 五 章

矩阵分析

1 矩阵序列与矩阵级数

设$m\times n$型矩阵序列为 $\{A^{(k)}\}$, 其中

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & \cdots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k=1,2,\cdots,$$

定义 1：$\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij} \iff \lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)}=A$

定理 1：设 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}=A$，$\lim\limits_{k\to+\infty} B^{(k)}=B.\ \alpha,\beta\in C$,则

(1) $\lim\limits_{k\to+\infty}(\alpha A^{(k)}+\beta B^{(k)})=\alpha A+\beta B$;

(2) $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}B^{(k)}=AB$;

(3)当$A^{(k)}$与A都可逆时，$\lim\limits_{k\to+\infty}(A^{(k)})^{-1}=A^{-1}$.

定理 2：设$\|\bullet\|$是$C^{m\times n}$上任一矩阵范数，$C^{m\times n}$中矩阵序列$\{A^{(k)}\}$收敛于A的充要条件是

$$\lim_{k\to+\infty}\|A^{(k)}-A\|=0$$

定义2：设$A\in C^{n\times n}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k=0$ (k为正整数), 则称 A 为 收敛矩阵.

定理 3 设$A\in C^{n\times n}$，则A为收敛矩阵的充要条件是$r(A)<1$.

Proof： (1) 充分性： $A\in C^{n\times n}\Longrightarrow$

$P^{-1}AP=J=diag(J_{r_1}(\lambda_1),J_{r_2}(\lambda_2),\cdots,J_{r_s}(\lambda_s))$

$\Longrightarrow A^k=PJ^kP^{-1}\Longrightarrow A^k\to 0\iff J^k\to 0$

$\Longrightarrow J_{r_i}^k(\lambda_i)\to 0$

$$J_{r_i}^k(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1}) & \cdots & C_k^{r_i-1}\lambda_i^{k-r_i+1} \\ & \lambda_i^k & \cdots & C_k^{r_i-2}\lambda_i^{k-r_i+2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix},\ k>r_i$$

$\xrightarrow{|\lambda_i|<1}$ $C_k^l\lambda_i^{k-l+1}\to 0\ (l=1,\cdots,r_i-1)$

$\Longrightarrow J_{r_i}^k(\lambda_i)\to 0\Longrightarrow J^k\to 0$

$\Longrightarrow A^k\to 0$

(2) 必要性：$A^k\to 0\Longrightarrow J_{r_i}^k(\lambda_i)\to 0\Longrightarrow$

$\lambda_i^k\to 0\Longrightarrow|\lambda_i|<1$

推论：设$A\in C^{n\times n},\forall\varepsilon>0$,则存在与$A,\varepsilon$有关的常数$c$,使得

$|(A^k)_{ij}|\le c[r(A)+\varepsilon]^k, k=1,2,\cdots;i,j=1,\cdots,n.$

定义 3：设$\{A^{(k)}\}$是$C^{m\times n}$的矩阵序列，称

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots$$

为矩阵级数．称$S^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} A^{(k)}$为矩阵级数的部分和．如果 $\lim_{N\to\infty} S^{(N)} = S$，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$收敛．

定义 4：如果mn个数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$$

都绝对收敛，则称矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$绝对收敛．

定理 4　在$C^{n\times n}$中，$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$绝对收敛的充要条件是正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \| A^{(k)} \|$收敛．

Proof：$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$绝对收敛 $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{N} |a_{ij}^{(k)}| \le M \Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{N} \| A^{(k)} \|_{m_1} = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{(k)}| \right) \le mnM$$

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \| A^{(k)} \|_{m_1}$收敛 $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \| A^{(k)} \|$收敛

必要性：$\sum_{k=1}^{\infty} \| A^{(k)} \|$收敛 $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \| A^{(k)} \|_{m_1}$收敛

$\xrightarrow{|a_{ij}^{(k)}| \le \| A^{(k)} \|_{m_1}} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$绝对收敛

定理 5(Neumann定理)　方阵A的Neumann级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$$

收敛的充要条件是$r(A) < 1$，且收敛时，其和为$(I - A)^{-1}$.

Proof：充分性：$r(A) < 1 \Longrightarrow I - A$可逆 $\Longrightarrow$

$$(I + A + A^2 + \cdots + A^k)(I - A) = I - A^{k+1} \Longrightarrow$$

$$I + A + \cdots + A^k = (I - A)^{-1} - A^{k+1}(I - A)^{-1}$$

$$\xrightarrow{r(A)<1} I + A + A^2 + \cdots + A^k \to (I - A)^{-1}$$

必要性：$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛 $\Longrightarrow$

$\delta_{ij} + (A)_{ij} + (A^2)_{ij} + \cdots + (A^k)_{ij} + \cdots$收敛 $\Longrightarrow$

$(A^k)_{ij} \to 0 \Longrightarrow A^k = ((A^k)_{ij}) \to 0 \Longrightarrow$

$r(A) < 1$

定理 6　　设幂级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

收敛半径为r，如果方阵A满足$r(A) < r$，则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$绝对收敛；如果$r(A) < r$，则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$发散.

2 矩阵函数

一、矩阵函数的定义

定义 设幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 收敛半径为r，且当$|z|<r$时，幂级数收敛于$f(z)$，即

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\quad |z|<r$$

如果$A\in C^{n\times n}$满足$r(A)<r$，则称收敛的矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$的和为矩阵函数，记为$f(A)$，即

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k,$$

把 $f(A)$的方阵A换为At，t为参数，则得到

$$f(At)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (At)^k.$$

常用的矩阵函数：

$$(1)\ e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k,\quad A\in C^{n\times n}$$

$$(2)\ \sin A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1},\quad A\in C^{n\times n}$$

$$(3)\ \cos A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k},\quad A\in C^{n\times n}$$

$$(4)\ (E-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k,\quad r(A)<1$$

$$(5)\ \ln(E+A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}A^{k+1},\quad r(A)<1$$

二、矩阵函数值的计算

1、利用相似对角化：

设$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=D \quad\Longrightarrow$

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(PDP^{-1})^k=P\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_kD^k\right)P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda_n^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}P^{-1}$$

同理

$$f(At)=Pdiag\left(f(\lambda_1 t),f(\lambda_2 t),\cdots,f(\lambda_n t)\right).$$

例1

设 $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求$e^{At}$.

解：1) $\det(\lambda E-A)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2 \quad\Longrightarrow$

$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$

2) 对应的特征向量:

$\lambda_1=-2:\ \xi_1=(-1,1,1)^T$

$\lambda_2=\lambda_3=1:\ \xi_2=(-2,1,0)^T,\xi_3=(0,0,1)^T \Longrightarrow$

$$P=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$e^{At}=P\begin{pmatrix}e^{-2t} & & \\ & e^{t} & \\ & & e^{t}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2e^{t}-e^{-2t} & 2e^{t}-2e^{-2t} & 0\\ e^{2t}-e^{-t} & 2e^{-2t}-e^{t} & 0\\ e^{-2t}-e^{t} & 2e^{-2t}-2e^{t} & e^{t}\end{pmatrix}$$

2、Jordan 标准形法:

设$P^{-1}AP=J=diag(J_1,J_2,\cdots,J_s) \quad \Longrightarrow$

$$f(J_i)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_i^k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\begin{pmatrix}\lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{m_i-1}\lambda_i^{k-(m_i-1)}\\ & \lambda_i^k & & \vdots\\ & & \ddots & C_k^1\lambda_i^{k-1}\\ & & & \lambda_i^k\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i)\\ & f(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-2)!}f^{(m_i-2)}(\lambda_i)\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & f(\lambda_i)\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kPJ^kP^{-1}=P\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kJ^k\right)P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}a_kJ_1{}^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty}a_kJ_s{}^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s)\end{pmatrix}P^{-1}$$

例 2 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 求 $\sin A$.

解: 1) 化为 *Jordan* 标准形

$A \Longrightarrow \quad J_1=1, J_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2) 计算 $\sin J_i$

$$\sin J_1=\sin 1, \sin J_2=\begin{pmatrix}\sin 1 & \frac{1}{1!}\cos 0\\ 0 & \sin 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \sin A=\begin{pmatrix}\sin 1 & 0 & 0\\ 0 & \sin 1 & \cos 1\\ 0 & 0 & \sin 1\end{pmatrix}$$

3、数项级数求和法：

哈密尔顿-凯莱定理：设A是数域P上的一个$n\times n$矩阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$是A的特征多项式，则

$$f(A)=A^n-b_{n-1}A^{n-1}-\cdots-b_1A-b_0E=0$$

$$\Longrightarrow A^n=b_{n-1}A^{n-1}+\cdots+b_1A+b_0E$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}A^{n+1}=b_{n-1}^{(1)}A^{n-1}+\cdots+b_1^{(1)}A+b_0^{(1)}E\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A^{n+l}=b_{n-1}^{(l)}A^{n-1}+\cdots+b_1^{(l)}A+b_0^{(l)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k=(c_0E+c_1A+\cdots+c_nA^n)+$$
$$c_{n+1}(b_{n-1}A^{n-1}+\cdots+b_0E)+\cdots$$

$$=(c_0+\sum_{l=1}^{\infty}c_{n+l}b_0^{(l)})E+(c_1+\sum_{l=1}^{\infty}c_{n+l}b_1^{(l)})A+\cdots$$
$$+(c_{n-1}+\sum_{l=1}^{\infty}c_{n+l}b_{n-1}^{(l)})A^{n-1}$$

三、矩阵函数的一些性质

性质1：如果$AB=BA$，则$e^Ae^B=e^Be^A=e^{A+B}$.

性质2：如果$AB=BA$，则

(1) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(2) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

5.3 矩阵的微分和积分

§1. 函数矩阵的微分积分

定义1. 矩阵$A=(a_{ij}(t))_{m\times n}$称为函数矩阵，如果$a_{ij}(t)$是以变量$t$的函数.

定义2. 如果$a_{ij}(t)$在$t\in[a,b]$上连续,可微,可积,则称矩阵$A=(a_{ij}(t))_{m\times n}$在$[a,b]$上连续,可微,可积.

规定：

$$A'(t)=(a_{ij}'(t))_{m\times n}$$

$$\int_a^b A(t)dt=(\int_a^b a_{ij}(t)dt)$$

例：求函数矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix}t & \sin t & 4 & t^2\\ \cos t & e^t & \ln t & a^t\end{pmatrix}$$的导数.

解：$$\frac{d}{dt}A(t)=\begin{pmatrix}1 & \cos t & 0 & 2t\\ -\sin t & e^t & \frac{1}{t} & a^t\ln a\end{pmatrix}$$

性质：设$A(t),B(t)\in C^{m\times n}$是两个可微函数,则

(1) $\frac{d}{dt}(A(t)+B(t))=\frac{d}{dt}A(t)+\frac{d}{dt}B(t)$

(2) $\frac{d}{dt}(A(t)B(t))=\frac{d}{dt}A(t)\cdot B(t)+A(t)\frac{d}{dt}B(t)$

(3) $\frac{d}{dt}(a(t)A(t))=\frac{d}{dt}a(t)\cdot A(t)+a(t)\frac{d}{dt}A(t)$

性质2：设$A\in C^{n\times n}$是常数矩阵,则

(1) $\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}=e^{tA}A;$

(2) $\frac{d}{dt}\cos(tA)=-A\sin(tA)=-\sin(tA)A;$

(3) $\frac{d}{dt}\sin(tA)=A\cos(tA)=\cos(tA)A;$

性质3：设$A(t),B(t)\in C^{m\times n}$在$[a,b]$上可积,则

(1) $\int_a^b(A(t)\pm B(t))dt=\int_a^b A(t)dt\pm\int_a^b B(t)dt$

(2) $\int_a^b\lambda A(t)dt=\lambda\int_a^b A(t)dt;$

(3) $\int_a^b(A(t)B)dt=\int_a^b A(t)dt\cdot B;$

$\int_a^b(AB(t))dt=A\int_a^b B(t)dt.$

二.数量函数对矩阵变量的导数

定义：设$X=(x_{ij})\in C^{m\times n}$，$f(X)$是以$X$为自变量的$mn$元函数，且$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}$都存在，则$f$对$X$的导数为

$$\frac{df}{dX}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}}\end{pmatrix}.$$

例2.设$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$f(x)=x^Tx$，求$\frac{df}{dx},\frac{df}{dx^T}$.

解：$f(x)=x^Tx=\sum_{i=1}^n x_i^2$，

$\frac{\partial f}{\partial x_i}=2x_i, i=1,2,\cdots,n.$

$\frac{df}{dx}=2x=2(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,$

$\frac{df}{dx^T}=2x^T=2(x_1,x_2,\cdots,x_n).$

例3.设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为常数矩阵，$f(X)=tr(AX)$，求$\frac{df}{dX}$.

解：$f(X)=tr(AX)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ji}$

$\frac{\partial f}{\partial x_{ji}}=a_{ij},\quad \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}=a_{ji},$

$\frac{df}{dX}=(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}})=(a_{ji})_{n\times n}=A^T.$

$A=I\quad \frac{df}{dX}=(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}})=I.$

三.矩阵值函数对矩阵变量的导数

def：设$X=(x_{st})\in C^{m\times n}$，$f_{ij}(X)$是$mn$元函数

$i=1,\cdots,r;j=1,\cdots,s;F(X)=(f_{ij}(X))\in C^{r\times s}$

则$F(X)$对矩阵X的导数为

$$\frac{dF}{dX}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_{1n}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_{mn}}\end{pmatrix},$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{1s}}{\partial x_{ij}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_{r1}}{\partial x_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f_{rs}}{\partial x_{ij}}\end{pmatrix},$$

例：设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 是向量变量，求 $\dfrac{dx^T}{dx},\dfrac{dx}{dx^T}$？

解：$$\frac{dx^T}{dx}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^T}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial x^T}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

$$\frac{dx}{dx^T}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial x}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

4 一阶线性常系数微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t)+f_1(t)\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t)+f_2(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{dx_n(t)}{dt}=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t)+f_n(t)\end{cases}$$

满足初始条件 $x_i(t_0)=c_i,\ i=1,2,\cdots,n$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f(t)\\ x(t_0)=c\end{cases}$$

其中，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$，

$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$，$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t))^T$，

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t))=e^{-At}(-A)x(t)+e^{-At}\frac{dx(t)}{dt}$$

$$=e^{-At}\left(\frac{dx(t)}{dt}-Ax(t)\right)=e^{-At}f(t)\quad\xrightarrow{\text{在}[t_0,t]\text{上积分}}$$

$$\Rightarrow e^{-At}x(t)-e^{-At_0}x(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}f(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow x(t)=e^{A(t-t_0)}c+e^{At}\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}f(\tau)d\tau$$

例 1：求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=-x_1(t)-2x_2(t)+6x_3(t)-e^t\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-x_1(t)+3x_3(t)\\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}=-x_1(t)-x_2(t)+4x_3(t)+e^t\\ x_1(0)=1,x_2(0)=0,x_3(0)=0\end{cases}$$

解：$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},f(t)=\begin{pmatrix}-e^t\\0\\e^t\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$e^{At}=e^t\begin{pmatrix}1-2t&-2t&6t\\-t&1-t&3t\\-t&-t&1+3t\end{pmatrix},$$

$$e^{At}c=e^t\begin{pmatrix}1-2t\\-t\\-t\end{pmatrix}\Rightarrow\int_0^t e^{-A\tau}f(\tau)d\tau=\int_0^t\begin{pmatrix}-1-8\tau\\-4\tau\\1-4\tau\end{pmatrix}d\tau\Rightarrow$$

$$\int_0^t e^{-A\tau}f(\tau)d\tau=\begin{pmatrix}-t-4t^2\\-2t^2\\t-2t^2\end{pmatrix}\Rightarrow e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}f(\tau)d\tau=e^t\begin{pmatrix}4t^2-1\\2t^2\\2t^2+2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}c+e^{At}\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}f(\tau)d\tau$$

$$x(t)=e^{At}c+e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}f(\tau)d\tau=e^t\begin{pmatrix}1-3t+4t^2\\-t+2t^2\\2t^2\end{pmatrix}$$

定义 设A是n阶常系数矩阵，如果对任意的t_0和x_0，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

的解$x(t)$满足 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$，则称$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t)$的解是渐进稳定的.

定理 对任意的t_0和x_0，初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t), x(t_0) = x_0$$

的解$x(t)$是渐进稳定的充要条件是A的特征值都有负实部.

证：必要性：$A\xi_1 = \lambda_1\xi_1 \quad (\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 \geq 0) \Rightarrow$

$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t), x(0) = \xi_1$的解为 $x(t) = e^{At}\xi_1$

$= e^{\lambda_1 t}\xi_1 = e^{\alpha_1 t}(\cos\beta_1 t + i\sin\beta_1 t)\xi_1 \xrightarrow{t\to\infty}$

$x(t)$不收敛（矛盾）

充分性：对任意的t_0和x_0，初值问题$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t)$，

$x(t_0) = x_0$的解为 $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \xrightarrow{\lambda(A)\text{都有负实部}}$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} e^{A(t-t_0)}x_0 = 0$$