§2 矩阵函数

程光辉

2019 年 11 月 26 日

定义 1 设幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛半径为 r，且当 $|z| < r$ 时，幂级数收敛于 $f(z)$，即

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad |z| < r.$$

如果方阵 $A \in C^{n\times n}$ 满足 $r(A) < r$，则称收敛的矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 的和为矩阵函数，记为 $f(A)$，即

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k.$$

把 $f(A)$ 的方阵 A 换为 At，t 为参数，则得到

$$f(At) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (At)^k.$$

若 $A \in C^{n\times n}$，则常用的矩阵函数：

(1) $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$,

(2) $\sin A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$,

(3) $\cos A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$,

(4) $(E - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k, \quad r(A) < 1$,

(5) $\ln(E + A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)} A^{k+1}, \quad r(A) < 1.$

常用矩阵函数的性质：

(1) $e^{iA} = \cos A + i \sin A$,

(2) $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$,

(3) $\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$,

(4) $\cos(-A) = \cos A, \quad \sin(-A) = -\sin A$.

矩阵函数的计算方法：

(1) 利用相似对角化 (只对单纯矩阵有用)

(2) Jordan 标准型法 (计算困难)

(3) 数项级数求和法 (不具有通用性)

1. 利用相似对角化

设 $A = P\mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right) P^{-1} = PDP^{-1}$，则

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k\right) P^{-1} \\
&= P\mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_1^k, \cdots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_n^k\right) P^{-1} \\
&= P\mathrm{diag}\left(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)\right) P^{-1}.
\end{aligned}
$$

例 1 设

$$
A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix},
$$

求 e^{At}.

解：计算步骤为

- 计算特征值： $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
- 计算特征向量： $x_1 = [-1\ 1\ 1]^T, \quad x_2 = [-2\ 1\ 0]^T, \quad x_3 = [0\ 0\ 1]^T$.
- 构造矩阵：

$$
P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

- 写出计算值：

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= P\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{t}-e^{-2t} & 2e^{t}-2e^{-2t} & 0 \\ e^{2t}-e^{-t} & 2e^{-2t}-e^{t} & 0 \\ e^{-2t}-e^{t} & 2e^{-2t}-2e^{t} & e^{t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. Jordan 标准型方法

设 $P^{-1}AP = J = \mathrm{diag}(J_1, \cdots, J_s)$，则 $A = PJP^{-1} = P\mathrm{diag}(J_1, \cdots, J_s)P^{-1}$，进而

$$
f(A) = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k\right)P^{-1} = P\mathrm{diag}\left(f(J_1), \cdots, f(J_s)\right)P^{-1},
$$

其中

$$
\begin{aligned}
f(J_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_i^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{r_i-1}\lambda_i^{k-(r_i-1)} \\ & \lambda_i^k & & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_i-1)!}f^{(r_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(r_i-2)!}f^{(r_i-2)}(\lambda_i) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

其中 r_i 是特征值 λ_i 的代数重数.

例 2 设

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

求 $\sin A$.

解： (1) 化为 Jordan 标准型：$J_1 = 1$，$\quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 计算 $\sin J_i$：

$$\sin J_1=\sin 1,\quad \sin J_2=\begin{bmatrix}\sin 1 & \frac{1}{1!}\cos 1\\ 0 & \sin 1\end{bmatrix},$$

则

$$\sin A=\begin{bmatrix}\sin 1 & 0 & 0\\ 0 & \sin 1 & \cos 1\\ 0 & 0 & \sin 1\end{bmatrix}.$$

例 3 求 $\sin A$，其中

$$A=\begin{bmatrix}\pi & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

解： (1) 化为 Jordan 标准型：$J_1=\pi,\quad J_2=-\pi,\quad J_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

(2) 计算 $\sin J_i$：

$$\sin J_1=0,\quad \sin J_2=0,\quad \sin J_3=\begin{bmatrix}\sin 0 & \frac{1}{1!}\cos 0\\ 0 & \sin 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

则

$$\sin A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

3. 数项级数求和法

定理 1 哈密尔顿-凯莱定理：设 A 是数域 P 上的一个 $n\times n$ 矩阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n-b_{n-1}\lambda^{n-1}-\cdots-b_1\lambda-b_0$ 是 A 的特征多项式，则

$$f(A)=A^n-b_{n-1}A^{n-1}-\cdots-b_1A-b_0E=O.$$

于是有

$$A^n=b_{n-1}A^{n-1}+\cdots+b_1A+b_0E,$$

进而

$$\begin{cases}A^{n+1}=b_{n-1}^{(1)}A^{n-1}+\cdots+b_1^{(1)}A+b_0^{(1)}E\\ \cdots\cdots\\ A^{n+l}=b_{n-1}^{(l)}A^{n-1}+\cdots+b_1^{(l)}A+b_0^{(l)}E\\ \cdots\cdots\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f(A)}=&\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{A}^k\\
=&(c_0\boldsymbol{E}+c_1\boldsymbol{A}+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1})\\
&+c_n(b_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+b_1\boldsymbol{A}+b_0\boldsymbol{E})+\cdots\\
=&(c_0+\sum_{l=0}^{\infty}c_{n+l}b_0^{(l)})\boldsymbol{E}+(c_1+\sum_{l=0}^{\infty}c_{n+l}b_1^{(l)})\boldsymbol{A}\\
&+(c_{n-1}+\sum_{l=0}^{\infty}c_{n+l}b_{n-1}^{(l)})\boldsymbol{A}^{n-1}.
\end{aligned}$$

例 4 求 $\sin\boldsymbol{A}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\pi&0&0&0\\0&-\pi&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

解：特征多项式为 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\lambda^4-\pi^2\lambda^2$，所以有 $\boldsymbol{A}^4=\pi^2\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^5=\pi^2\boldsymbol{A}^3$，$\boldsymbol{A}^7=\pi^4\boldsymbol{A}^3$，$\cdots$，于是有

$$\begin{aligned}
\sin\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5-\frac{1}{7!}\boldsymbol{A}^7+\frac{1}{9!}\boldsymbol{A}^9-\cdots\\
&=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5!}\pi^2\boldsymbol{A}^3-\frac{1}{7!}\pi^4\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{9!}\pi^6\boldsymbol{A}^3-\cdots\\
&=\boldsymbol{A}+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\pi^2+\frac{1}{7!}\pi^4-\frac{1}{9!}\pi^6+\cdots\right)\boldsymbol{A}^3\\
&=\boldsymbol{A}+\frac{\sin\pi-\pi}{\pi^3}\boldsymbol{A}^3\\
&=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

矩阵函数的一些性质：

(1) 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}=e^{\boldsymbol{B}}e^{\boldsymbol{A}}=e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$.

(2) $e^{\boldsymbol{A}}e^{-\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{E}$.

(3) $(e^{\boldsymbol{A}})^m=e^{m\boldsymbol{A}}$.

(4) 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$$\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\cos\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}-\sin\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B},\\ \sin(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\sin\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}+\cos\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$