1.设P可逆,且$\|P^{-1}\|<1$,则$\|A\|_a=\|PA\|_\infty$ 或
$\|A\|_b=\|AP\|_\infty$ 均为自相容的矩阵范数.
Proof:容易证明所定义的映射都是矩阵范数,
下面证明它们是相容的.
$\|AB\|_a=\|PAB\|_\infty=\|PAP^{-1}PB\|_\infty\le\|PA\|.\|P^{-1}\|.\|PB\|_\infty$
$\le\|PA\|.\|PB\|_\infty=\|A\|_a\|B\|_a$.

$\|AB\|_b=\|ABP\|_\infty=\|APP^{-1}BP\|_\infty\le\|AP\|.\|P^{-1}\|.\|BP\|_\infty$
$\le\|AP\|.\|BP\|_\infty=\|A\|_b\|B\|_b$.

2. 设$A=A^H$,则$\|A\|_2\le\|A\|_\infty=\|A\|_1\le n\|A\|_2$.

证明:由于$A^H=A$,所以$\|A\|_1=\|A^H\|_1=\|A\|_\infty$
$\|A\|_2^2=r(A^HA)=\lambda_{\max}(A^HA)\le\|A^HA\|_1$
$\le\|A^H\|_1\|A\|_1=\|A\|_1{}^2$,故$\|A\|_2\le\|A\|_1$.

$$\|A\|_2^2=r(A^HA)=\lambda_{\max}(A^HA)\ge\frac{\sum\lambda_i}{n}$$
$$=\frac{\|A\|_{m_2}^2}{n}=\frac{\sum|a_{ij}|^2}{n}\ge\frac{\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2}{n}$$
$$=\frac{\max_i n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2}{n^2}\ge\frac{\max_i(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|)^2}{n^2}$$
$$=\frac{\|A\|_\infty^2}{n^2},\text{故}\|A\|_\infty\le n\|A\|_2 .$$

4.1 特征值界的估计

定理 1 (Shur不等式) 设$A\in C^{n\times n}$的特征值为
$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则
$$\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2\le\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2=\|A\|_F^2$$
且等号成立当且仅当A为正规矩阵.

证: $A\in C^{n\times n}\Longrightarrow A=UTU^H\Longrightarrow$
$$\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2=\sum_{i=1}^n|t_{ii}|^2\le\sum_{i=1}^n|t_{ii}|^2+\sum_{i\ne j}|t_{ij}|^2=tr(T^HT)$$

$A=UTU^H\Longrightarrow A^HA=U(T^HT)U^H\Longrightarrow$

$tr(A^HA)=tr(T^HT)\Longrightarrow$

$\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2\le tr(T^HT)=tr(A^HA)=\|A\|_F^2$ □

$$B=\frac{1}{2}(A^H+A),\ C=\frac{1}{2}(A-A^H)$$
A,B,C的特征值分别为 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,

$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\},\{i\gamma_1,i\gamma_2,\cdots,i\gamma_n\}$,且满足

$$|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge\cdots\ge|\lambda_n|,$$
$$\mu_1\ge\mu_2\ge\cdots\ge\mu_n,$$
$$\gamma_1\ge\gamma_2\ge\cdots\ge\gamma_n.$$

定理 2 (Hirsch) 设$A \in C^{n\times n}$的特征值为 λ_1, $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则

1) $|\lambda_i| \le n\max_{i,j}|a_{ij}|$, 2) $|\mathrm{Re}\,\lambda_i| \le n\max_{i,j}|b_{ij}|$,

3) $|\mathrm{Im}\,\lambda_i| \le n\max_{i,j}|c_{ij}|$,

证：

1) $|\lambda_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \le n^2\max_{i,j}|a_{ij}|^2$

$\Longrightarrow |\lambda_i| \le n\max_{i,j}|a_{ij}|$

2) $A \in C^{n\times n} \Longrightarrow U^H AU = T,\ U^H A^H U = T^H$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U^H BU = \frac{1}{2}U^H(A^H + A)U = \frac{1}{2}(T^H + T) \\ U^H CU = \frac{1}{2}U^H(A - A^H)U = \frac{1}{2}(T - T^H) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\lambda_i + \bar{\lambda}_i}{2}\right|^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{|t_{ij}|^2}{2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2 \\ \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\lambda_i - \bar{\lambda}_i}{2}\right|^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{|t_{ij}|^2}{2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Re}\lambda_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2 \le n^2\max_{i,j}|b_{ij}|^2 \\ \sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Im}\lambda_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|^2 \le n^2\max_{i,j}|c_{ij}|^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2)\ |\mathrm{Re}\,\lambda_i| \le n\max_{i,j}|b_{ij}| \\ 3)\ |\mathrm{Im}\,\lambda_i| \le n\max_{i,j}|c_{ij}| \end{cases} \qquad \square$$

定理 3 (Bendixson) 设$A \in R^{n\times n}$, 则A的任一特值λ_i满足

$$|\mathrm{Im}\,\lambda_i| \le \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\max_{i,j}|c_{ij}|$$

证：

$$\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Im}\,\lambda_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|^2 = \sum_{\substack{i,j\\ i\ne j}}|c_{ij}|^2$$

$$\le n(n-1)\max_{i,j}|c_{ij}|^2 \Longrightarrow$$

$$2|\mathrm{Im}\,\lambda_i|^2 \le 2\sum_{i=1}^{s}|\mathrm{Im}\,\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Im}\,\lambda_i|^2$$

$$\le n(n-1)\max_{i,j}|c_{ij}|^2 \qquad \square$$

定理 4 设$A \in C^{n\times n}, B, C, \lambda_i, \mu_i, \gamma_i$定义同上, 则

$$\mu_n \le \mathrm{Re}\,\lambda_i \le \mu_1,\ \gamma_n \le \mathrm{Im}\,\lambda_i \le \gamma_1$$

证：B为正规矩阵 $\Longrightarrow$

$$U^H BU = diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) = D$$

$Ax = \lambda_i x\ (\|x\|_2 = 1) \Longrightarrow$

$(x, Ax) = (x, \lambda_i x) = \lambda_i(x, x) = \lambda_i \Longrightarrow$

$x^H Ax = \lambda_i \quad x^H A^H x = \bar{\lambda}_i \Longrightarrow$

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i = (x, \frac{A^H + A}{2} x) = (x, Bx) = (x, UDU^H x)$$

$$= x^H UDU^H x = y^H Dy = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \,|\, y_i \,|^2 \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_n \,|\, y_i \,|^2 \le \mathrm{Re}\,\lambda_i \le \sum_{i=1}^{n} \mu_1 \,|\, y_i \,|^2 \Longrightarrow$$

$$\mu_n \le \mathrm{Re}\,\lambda_i \le \mu_1$$

定理 4(Browne): 设$A \in C^{n\times n}$的特征值为 λ_1, $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$,奇异值为$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_n$,则

$$\sigma_n \le |\,\lambda_i\,| \le \sigma_1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

证:$A^H A$为$Hermite$矩阵 $\Longrightarrow$

$$UA^H AU^H = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2) = D \Longrightarrow$$

$$Ax = \lambda_i x (\|x\|_2 = 1) \Rightarrow x^H A^H = \bar{\lambda}_i x^H \Rightarrow x^H A^H Ax = |\,\lambda_i\,|^2$$

$$\Rightarrow x^H U^H DUx = |\,\lambda_i\,|^2 \qquad x^H U^H DUx = |\,\lambda_i\,|^2$$

$$Bx = \lambda x \Longrightarrow \sum_{t=1}^{n} b_{it} x_t = \lambda x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\Longrightarrow \sum_{t=1}^{n} \bar{b}_{it} \bar{x}_t = \bar{\lambda} \bar{x}_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) \Longrightarrow$$

$$\sum_{s,t=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} b_{it} \bar{b}_{is}) x_s \bar{x}_t = \lambda\bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i \bar{x}_i = \lambda\bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i \Longrightarrow$$

$$\sigma_n{}^2 \le |\,\lambda_i\,|^2 \le \sigma_1{}^2$$

定理 6 (Hadamard不等式) 设$A \in C^{n\times n}$,则

$$\prod_{i=1}^{n} |\,\lambda_i(A)\,| = |\det A| \le [\prod_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} |\,a_{ij}\,|^2)]^{1/2}$$

且等号成立当且仅当 A的某一列全为 0,或 A的列向量彼此正交 .

证:设$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

1) $a_1, a_2, \cdots, a_n$线性相关 $\Longrightarrow |\det A| = 0$

$\Longrightarrow$ 结论成立

2) $a_1, a_2, \cdots, a_n$线性无关 $\xrightarrow{\text{正交化}}$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 + p_{21} b_1 \\ a_3 = b_3 + p_{31} b_1 + p_{32} b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n = b_n + p_{n1} b_1 + \cdots + p_{n,n-1} b_{n-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$A = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \begin{bmatrix} 1 & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \det A = \det(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \det B$$

$$\|\,a_i\,\|^2 = \|\,b_i + p_{i1} b_1 + \cdots + p_{i,i-1} b_{i-1}\,\|^2$$

$$= \|\,b_i\,\|^2 + |\,p_{i1}\,|\,\|\,b_1\,\|^2 + \cdots + |\,p_{i,i-1}\,|\,\|\,b_{i-1}\,\|^2$$

$$\ge \|\,b_i\,\|^2 \Longrightarrow$$

$$|\det B|^2 = \det B^H \cdot \det B = \det B^H B$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \|b_i\|^2 = (\prod_{i=1}^{n} \|b_i\|)^2 \le (\prod_{i=1}^{n} \|a_i\|)^2$$

$$\Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)| = |\det A| \le [\prod_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2)]^{1/2}$$

2 圆盘定理

定义 1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$

行盖尔圆盘 $\Longleftrightarrow S_i=\{z\in C:|z-a_{ii}|\le R_i=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|\}$

列盖尔圆盘 $\Longleftrightarrow G_i=\{z\in C:|z-a_{ii}|\le C_i=\sum_{j\ne i}|a_{ji}|\}$

定理 1 (圆盘定理1)设$A\in C^{n\times n}$, 则A的任一特征值

$$\lambda\in S=\bigcup_{j=1}^{n} S_j$$

证： $Ax=\lambda x\ (x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\ne 0)\Longrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=\lambda x_i\ (i=1,2,\cdots,n) \xrightarrow{|x_k|=\max(|x_1|,\cdots,|x_n|)>0}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j=\lambda x_k \Longrightarrow x_k(\lambda-a_{kk})=\sum_{j\ne k}a_{kj}x_j \Longrightarrow$$

$$|x_k||\lambda-a_{kk}|=|\sum_{j\ne k}a_{kj}x_j|\le\sum_{j\ne k}|a_{kj}||x_j|\le|x_k|\sum_{j\ne k}|a_{kj}|$$

$$\Longrightarrow |\lambda-a_{kk}|\le R_k$$

例 1 估计矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & i & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 5 & -\frac{i}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

的特征值 的分布范围

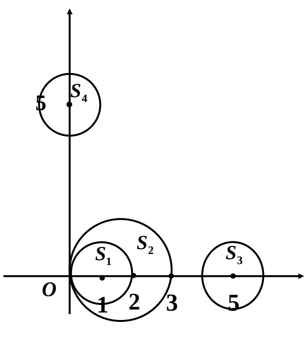
解：

$S_1:|z-1|\le 1;$

$S_2:|z-\frac{3}{2}|\le\frac{3}{2};$

$S_3:|z-5|\le 1;$

$S_4:|z-5i|\le 1$



推论 1 设$A\in C^{n\times n}$, 则A的任一特征值

$$\lambda_i\in\bigcup_{j=1}^{n} G_i$$

定理 2 (圆盘定理2)设n阶方阵A的n个盖尔圆盘中有k个圆盘的并形成一连通区域G，且它与余下的$n-k$个圆盘都不相交，则在该区域G中恰好有A的k个特征值.

证：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

即：$A=D+B$

$$\Longrightarrow \quad A_\varepsilon = D + \varepsilon B, \quad \varepsilon \in [0,1] \Longrightarrow$$

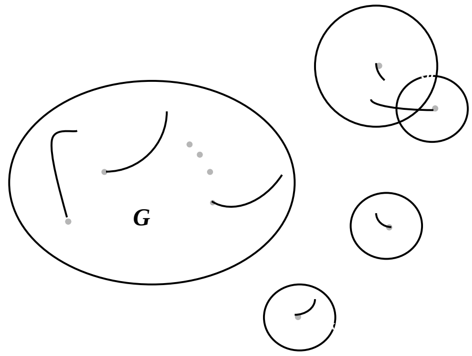
$$R_i(A_\varepsilon) = R_i(\varepsilon B) = \varepsilon R_i(A)$$

设$G = \bigcup_{i=1}^{k} \{z \in C : |z - a_{ii}| \le R_i(A)\}$

$$G_k(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{k} \{z \in C : |z - a_{ii}| \le R_i(A_\varepsilon) = \varepsilon R_i(A)\}$$

$$\Downarrow$$

$$G \equiv G_k(1)$$



推论 2 设$A \in C^{n\times n}$, 则A的任一特征值

$$\lambda_i \in (\bigcup_{i=1}^{n} S_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} G_j)$$

推论 3 设n阶方阵A的n个盖尔圆盘两两互不相交，则A相似于对角阵.

推论 4 设n阶实阵A的n个盖尔圆盘两两互不相交，则A特征值全为实数.

令$D = diag(p_1, p_2, \cdots, p_n), (p_i > 0)$

$$D^{-1}AD = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{p_2}{p_1}a_{12} & \cdots & \frac{p_n}{p_1}a_{1n} \\ \frac{p_1}{p_2}a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{p_n}{p_2}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p_1}{p_n}a_{n1} & \frac{p_2}{p_n}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$r_i = \frac{1}{p_i}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|\, p_j, \quad Q_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \le r_i\}$$

$$t_j = p_j \sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{p_i}, \quad P_j = \{z \in C : |z - a_{jj}| \le t_j\}$$

定理 2 设$A \in C^{n\times n}$, 则A的任一特征值

$$\lambda_i \in (\bigcup_{i=1}^{n} Q_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} P_j)$$

例 2 估计矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.01 & 0.12 \\ 0.01 & 0.8 & 0.13 \\ 0.01 & 0.02 & 0.4 \end{bmatrix}$

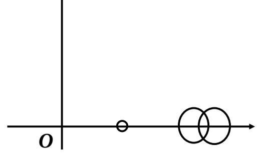
的特征值 的范围

解:

$S_1 : |z - 0.9| \le 0.13;$

$S_2 : |z - 0.8| \le 0.14;$

$S_3 : |z - 0.4| \le 0.03$

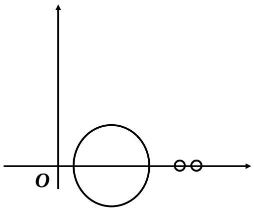


$D = diag(1,\ 1,\ 0.1)$

$S_1: |z-0.9| \le 0.022$;

$S_2: |z-0.8| \le 0.023$;

$S_3: |z-0.4| \le 0.3$



定义 2 设$A \in C^{n\times n}$

行对角占优 $\Longleftrightarrow |a_{ii}| \ge R_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$

列对角占优 $\Longleftrightarrow |a_{ii}| \ge C_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ji}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$

行严格对角占优 $\Longleftrightarrow \ |a_{ii}| > R_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|$

列严格对角占优 $\Longleftrightarrow \ |a_{ii}| > C_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ji}|$

定理 4 设$A \in C^{n\times n}$行(或列)严格对角占优，则

(1) A可逆，且$\lambda_i \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i \quad (S_i = \{z \in C: |z-a_{ii}| \le |a_{ii}|\})$

(2)若A的所有主对角元都为正数，则A的特征值都有正实部；

---

(3)若A为Hermite矩阵，且所有主对角元都为正数，则A的特征值都为正数.

证 (1)A行严格对角占优 $\Longrightarrow R_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$:

$\Longrightarrow \lambda_i \in \bigcup_{i=1}^{n} S_i \quad (S_i = \{z \in C: |z-a_{ii}| < |a_{ii}|\}) \quad \Longrightarrow$

$0 \notin S_i \ \Longrightarrow \ 0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} S_i$

(2)$a_{ii} > 0, |\lambda - a_{ii}| < |a_{ii}| \Longrightarrow$ A的特征值都有正实部

---

(3) $A^H = A \ \Longrightarrow$ A的特征值都是实数 $\Longrightarrow$

A的特征值都有正数

---

3 Gerschgorin定理的推广

定理1(Ostrowski) 设 $A=(a_{ij}) \in M_n(C), \alpha \in [0,1]$ 为给定 的数，则A的所有特征值位于n个圆盘的并集

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{z \in C: |z-a_{ii}| \le R_i^{\alpha} C_i^{1-\alpha}\}$$

其中，$R_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| \quad C_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ji}|$

证：1)：$\alpha = 0$或$\alpha = 1 \ \Longrightarrow$ Gerschgorin定理

2)：$Ax = \lambda x \Longrightarrow \ |\lambda - a_{ii}||x_i| = |\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} a_{ij} x_j|$

$\le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \ = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|^{\alpha} (|a_{ij}|^{1-\alpha} |x_j|)$

$\le [\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} (|a_{ij}|^{\alpha})^{1/\alpha}]^{\alpha} [\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} (|a_{ij}|^{1-\alpha} |x_j|)^{1/(1-\alpha)}]^{1-\alpha}$

$$=(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|)^{\alpha}[\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{1/(1-\alpha)}]^{1-\alpha}\Rightarrow$$

$$|\lambda-a_{ii}||x_i|\le R_i^{\alpha}[\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{1/(1-\alpha)}]^{1-\alpha}\xrightarrow{R_i>0}$$

$$\frac{|\lambda-a_{ii}|}{R_i^{\alpha}}|x_i|\le[\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{1/(1-\alpha)}]^{1-\alpha}\Rightarrow$$

$$(\frac{|\lambda-a_{ii}|}{R_i^{\alpha}})^{1/(1-\alpha)}|x_i|^{1/(1-\alpha)}\le\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{1/(1-\alpha)}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{|\lambda-a_{ii}|}{R_i^{\alpha}})^{1/(1-\alpha)}|x_i|^{1/(1-\alpha)}\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{1/(1-\alpha)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}C_j|x_j|^{1/(1-\alpha)}\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|\lambda-a_{ii}|}{R_i^{\alpha}}\right)^{1/(1-\alpha)}|x_j|^{1/(1-\alpha)}\le\sum_{j=1}^{n}C_j|x_j|^{1/(1-\alpha)}$$

$$\xrightarrow{\text{存在 }k}(\frac{|\lambda-a_{kk}|}{R_k^{\alpha}})^{1/(1-\alpha)}\le C_k\Rightarrow$$

$$|\lambda-a_{kk}|\le R_k^{\alpha}C_k^{1-\alpha}$$

引理 设σ和τ为非负实数，$0\le\alpha\le1$，则

$$\tau^{\alpha}\sigma^{1-\alpha}\le\alpha\tau+(1-\alpha)\sigma$$

证： $uv\le\frac{1}{p}u^p+\frac{1}{q}v^q\quad(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$

$$\xrightarrow{\text{取}p=1/\alpha,q=1/(1-\alpha)}$$

$$(u^{1/\alpha})^{\alpha}(v^{1/(1-\alpha)})^{1-\alpha}\le\alpha u^{1/\alpha}+(1-\alpha)v^{1/(1-\alpha)}$$

$$\xrightarrow{\tau=u^{1/\alpha},\sigma=v^{1/(1-\alpha)}}\tau^{\alpha}\sigma^{1-\alpha}\le\alpha\tau+(1-\alpha)\sigma$$

定理2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,则$A$的特征值位于如下的并集中

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{z\in C:|z-a_{ii}|\le\alpha R_i+(1-\alpha)C_i\}$$

推论 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 如果存在$\alpha\in[0,1]$,使得

$$|a_{ii}|>\alpha R_i+(1-\alpha)C_i, i=1,2,\cdots,n$$

则A非奇异.

定理3 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，则$A$的特征值位于$\frac{n(n-1)}{2}$个Cassini卵形域$O_{ij}$ 的并集中

$$O_{ij}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\le R_iR_j,\ i\neq j$$

证： $Ax=\lambda x,\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

$$\xrightarrow{|x_r|\ge|x_s|=\max\limits_{t\ne r}|x_t|}\begin{cases}(\lambda-a_{rr})x_r=\sum\limits_{j\ne r}a_{rj}x_j\\(\lambda-a_{ss})x_s=\sum\limits_{j\ne s}a_{sj}x_j\end{cases}$$

(1) $x_s=0\ \Rightarrow\ x_t=0,\ t\ne r, t\in N \Rightarrow \lambda=a_{rr}$

$\Rightarrow\ \lambda\in O_{rs}$

(2) $x_s\ne 0\ \Rightarrow\ |x_r|\ge|x_s|>0\ \Rightarrow$

$$(\lambda-a_{rr})(\lambda-a_{ss})x_rx_s=\sum_{j\ne r}a_{rj}x_j\sum_{j\ne s}a_{sj}x_j$$

$\Rightarrow\ |\lambda-a_{rr}||\lambda-a_{ss}||x_r||x_s|$

$=|\sum\limits_{j\ne r}a_{rj}x_j||\sum\limits_{j\ne s}a_{sj}x_j|$

$\le(\sum\limits_{j\ne r}|a_{rj}||x_j|)(\sum\limits_{j\ne s}|a_{sj}||x_j|)$

$\le R_r|x_s|R_s|x_r|\ \Rightarrow$

$|\lambda-a_{rr}||\lambda-a_{ss}|\le R_rR_s$

定理3 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，则$A$的特征值位于 $\dfrac{n(n-1)}{2}$个Cassini卵形域O_{ij} 的并集中

$$O_{ij}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\le R_iR_j,\ i\ne j$$

推论 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，如果满足

$$|a_{ii}||a_{jj}|>R_iR_j,\ i\ne j$$

则矩阵A非奇异.

例：判定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}10&5&6\\4&-20&8\\7&12&25\end{pmatrix}$$的可逆性.

$R_1=11, R_2=12, R_3=19,$

$|a_{11}a_{22}|=200>132=R_1R_2;$
$|a_{11}a_{33}|=250>209=R_1R_3;$
$|a_{22}a_{33}|=500>228=R_2R_3.$
所以非奇异.

4 Hermite矩阵特征值的变分特征

定义：设 $A\in C^{n\times n}$为Hermite矩阵，$x\in C$，称

$$R(x)=\frac{x^HAx}{x^Hx}\quad x\ne 0$$

为A的 Rayleigh商.

定理 1(Rayleigh - Ritz)：

设 $A\in C^{n\times n}$为Hermite矩阵，则

(1) $\lambda_n x^Hx\le x^HAx\le\lambda_1 x^Hx\quad(\forall\ x\in C^n)$

(2) $\lambda_{\max}=\lambda_1=\max\limits_{x\ne 0}R(x)=\max\limits_{x^Hx=1}x^HAx$

(3) $\lambda_{\min}=\lambda_n=\min\limits_{x\ne 0}R(x)=\min\limits_{x^Hx=1}x^HAx$

证： A为Hermite矩阵 $\Longrightarrow$

$$A=U^H\Lambda U,\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)\quad\xrightarrow{\forall\ x\in C^n}$$

$$x^HAx\ =x^HU^H\Lambda Ux\ =(Ux)^H\Lambda(Ux)$$

$$\xrightarrow{y=Ux}x^HAx=\sum_{i=1}^n\lambda_i\,|\,y_i\,|^2$$

$$\Longrightarrow x^HAx\ge\lambda_{\min}\cdot\sum_{i=1}^n|\,y_i\,|^2\ =\lambda_{\min}y^Hy\ =\lambda_{\min}x^Hx$$

$$\Longrightarrow x^HAx\le\lambda_{\max}\cdot\sum_{i=1}^n|\,y_i\,|^2\ =\lambda_{\max}y^Hy=\lambda_{\max}x^Hx$$

$$\lambda_{\min}\cdot x^Hx\le x^HAx\le\lambda_{\max}\cdot x^Hx$$

定理 2(Courant - Fischer): 设 $A\in C^{n\times n}$为Hermite矩阵, 特征值为$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$, k为给定的正整数,$1\le k\le n$，则

$$\min_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}\in C^n}\ \max_{\substack{x\ne 0,x\in C^n\\ x\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}}}R(x)=\lambda_k$$

$$\max_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}}\ \min_{\substack{x\ne 0,x\in C^n\\ x\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}}}R(x)=\lambda_k$$

证： A为Hermite矩阵 $\Longrightarrow$

$$A=U^H\Lambda U,\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)\quad\Longrightarrow$$

$$R(x)=\frac{x^HAx}{x^Hx}=\frac{(Ux)^H\Lambda(Ux)}{(Ux)^H(Ux)}\Longrightarrow$$

$$\{Ux:x\in C^n 且 x\ne 0\}=\{y\in C^n:y\ne 0\}$$

$$\xrightarrow{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}\in C^n}$$

$$\max_{\substack{x\ne 0,x\in C^n\\ x\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}}}R(x)=\max_{\substack{y\ne 0,y\in C^n\\ y\perp U\omega_1,\cdots,U\omega_{n-k}}}\frac{y^H\Lambda y}{y^Hy}$$

$$=\max_{\substack{y^Hy=1\\ y\perp U\omega_1,\cdots,U\omega_{n-k}}}\sum_{i=1}^n\lambda_i\,|\,y_i\,|^2$$

$$\ge\max_{\substack{y^Hy=1\\ y\perp U\omega_1,\cdots,U\omega_{n-k}\\ y_1=y_2=\cdots=y_{k-1=0}}}\sum_{i=1}^n\lambda_i\,|\,y_i\,|^2$$

$$=\max_{\substack{|y_k|^2+|y_{k+1}|^2+\cdots+|y_n|^2=1\\ y\perp U\omega_1,\cdots,U\omega_{n-k}}}\sum_{i=k}^n\lambda_i\,|\,y_i\,|^2\ge\lambda_k$$

$$\Longrightarrow\max_{\substack{x\ne 0,x\in C^n\\ x\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}}}R(x)\ge\lambda_k$$

$$\xrightarrow{\omega_i=u_{n-i+1}\quad U=(u_1,u_2,\cdots,u_n)}$$

$$\min_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}}\ \max_{\substack{x\ne 0,x\in C^n\\ x\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}}}R(x)=\lambda_k$$

定理 3(Weyl) :设 $A,B\in C^{n\times n}$为Hermite矩阵,则 $\forall k=1,2,\cdots,n$,有

$$\lambda_k(A)+\lambda_n(B)\le\lambda_k(A+B)\le\lambda_k(A)+\lambda_1(B)$$

证： $\forall x\ne 0, x\in C^n \Longrightarrow$

$$\lambda_n(B)\le\frac{x^HBx}{x^Hx}\le\lambda_1(B)\quad\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\lambda_k(A+B)&=\min_{\omega_1,\cdots,\omega_{n-k}}\ \max_{\substack{x\ne0,\\ x\perp\omega_1,\cdots,\omega_{n-k}}}\frac{x^H(A+B)x}{x^Hx}\\&=\min_{\omega_1,\cdots,\omega_{n-k}}\ \max_{\substack{x\ne0,\\ x\perp\omega_1,\cdots,\omega_{n-k}}}\left(\frac{x^HAx}{x^Hx}+\frac{x^HBx}{x^Hx}\right)\\&\ge\min_{\omega_1,\cdots,\omega_{n-k}}\ \max_{\substack{x\ne0,\\ x\perp\omega_1,\cdots,\omega_{n-k}}}\left(\frac{x^HAx}{x^Hx}+\lambda_n(B)\right)\\&=\lambda_k(A)+\lambda_n(B)\end{aligned}$$

5　摄动定理

例1

$$A=\begin{bmatrix}a&1&&\\&a&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&a\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda=a\text{是}A\text{的}n\text{重特征值}$$

$$A=\begin{bmatrix}a&1&&\\&a&\ddots&\\&&\ddots&1\\\varepsilon&&&a\end{bmatrix}\Rightarrow|\lambda_i-a|=\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

定理1 设$A=P\Lambda P^{-1}\in C^{n,n}$, $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, $\delta\in C^{n,n}$, $A+\delta$的特征值为$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，则对任一μ_j存在λ_i使得

$$|\lambda_i-\mu_j|\le\|P^{-1}\delta P\|_\infty$$

此外，若λ_i 是一个重数m的特征值，且圆盘

$$S_i=\{z:|z-\lambda_i|\le\|P^{-1}\delta P\|_\infty\}$$

和圆盘$S_k=\{z:|z-\lambda_k|\le\|P^{-1}\delta P\|_\infty\}(\lambda_i\ne\lambda_k)$不相交，则$S_i$正好包含着$A+\delta$的$m$个特征值.

证：(1) $C=P^{-1}(A+\delta)P=(c_{ij})_{n\times n}\xrightarrow{P^{-1}\delta P=B}$

$c_{ii}=\lambda_i+b_{ii}\ (i=1,2,\cdots,n)\xrightarrow{\text{Gerschgorin圆盘定理}}$

$|\mu_j-c_{ii}|=|\mu_j-(\lambda_i+b_{ii})|\le R_i(C)=R_i(B)\longrightarrow$

$|\lambda_i-\mu_j|=|\mu_j-\lambda_i|\le R_i(B)+|b_{ii}|\le\|P^{-1}\delta P\|_\infty$

(2) $G_k(C)=\{z:|z-(\lambda_k+b_{kk})|\le R_k(B)\}\subset S_k$

$\xrightarrow{\lambda_{i_1}=\lambda_{i_2}=\cdots\lambda_{i_m}=\lambda_i} G_{i_t}(C)=\{z:|z-(\lambda_i+b_{i_ti_t})|$

$\le R_{i_t}(B)\subset S_i\ \ (t=1,2,\cdots,m)$

定义 设$\|\cdot\|$为$C^{n,n}$上自相容矩阵范数. 若对任一对角矩阵$D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，满足

$$\|D\|=\max_i|\lambda_i|$$

则称它为单调(或绝对)范数.

例 2 判断那些是单调范数：

$$\|\bullet\|_{m_1},\ \|\bullet\|_{m_2},\ \|\bullet\|_{m_\infty},\ \|\bullet\|_1,\ \|\bullet\|_2,\ \|\bullet\|_\infty$$

定理 2　设$A=PDP^{-1}\in C^{n,n}, D=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,

则对$A+\delta$ 的任一μ，恒有

$$\min_i|\lambda_i-\mu|\le\|P^{-1}\delta P\|$$

这里,$\|\cdot\|$为单调矩阵范数.

证：$P^{-1}\delta\ P=B \longrightarrow C=P^{-1}(A+\delta)P=D+B$

(1) $D-\mu I$ 奇异 $\xrightarrow{\text{存在 } i}$ $\mu=\lambda_i\longrightarrow$ 结论成立

(2) $D-\mu I$ 非奇异 $\longrightarrow$

$C-\mu I=(D-\mu I)\bullet[I+(D-\mu I)^{-1}B]\longrightarrow$

$I+(D-\mu I)^{-1}B$奇异 $\longrightarrow -1$为$(D-\mu I)^{-1}B$的特征值

$\longrightarrow \|(D-\mu I)^{-1}\|\|B\|\ge\|(D-\mu I)^{-1}B\|\ge 1$

$\longrightarrow \max_i\frac{1}{|\lambda_i-\mu|}\|B\|=\frac{1}{\min_i|\lambda_i-\mu|}\|B\|\ge1\longrightarrow$

$$\min_i|\lambda_i-\mu|\le\|B\|=\|P^{-1}\delta P\|$$

残余向量：$r=Ax-\lambda x$

(1)：$r=0\Rightarrow\lambda$与x是精确的

(2)：$r\ne0\Rightarrow\|r\|$很小$\Rightarrow\lambda$是A的近似特征值

$$A=\begin{pmatrix} n & -(n-1)10^n\\ & n\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}1\\10^{-n}\end{pmatrix},$$

$\Rightarrow \|Ax-x\|_\infty=(n-1)10^{-n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

定理 3 设 $A=PDP^{-1}\in C^{n,n}, D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,

则对任意单调矩阵范数$\|\cdot\|$，若λ和$x(\|x\|'=1)$满足$\|Ax-\lambda x\|'\le\varepsilon$，那么

$$\min_i|\lambda_i-\lambda|\le\varepsilon\|P^{-1}\|\|P\|=\varepsilon k(P)$$

这里,$\|\cdot\|'$为与$\|\cdot\|$相容的向量范数，ε是任意给定的正数.

证：(1) $D-\lambda I$奇异 $\longrightarrow$ 结论成立

(2) $D-\mu I$非奇异$\longrightarrow r=Ax-\lambda x=P(D-\lambda I)P^{-1}x$

$x=P(D-\lambda I)^{-1}P^{-1}r\longrightarrow 1=\|x\|'=\|P(D-\lambda I)^{-1}P^{-1}r\|'$

$\longrightarrow 1\le\|P\|\|(D-\lambda I)^{-1}\|\|P^{-1}\|\|x\|'\longrightarrow$

$1\le\|P\|\frac{1}{\min_i|\lambda_i-\lambda|}\|P^{-1}\|\|x\|'\Longrightarrow$

$$\min_i|\lambda_i-\lambda|\le\varepsilon\|P^{-1}\|\|P\|=\varepsilon k(P)$$

定理 4 设$A=PDP^{-1}\in C^{n\times n}, D=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,

$\delta=Q\Lambda Q^{-1}\quad D=diag(\mu_1,\cdots,\mu_n)$,

μ为$A+\delta$的一个特征值，则存在A的一个特征值λ_i使得

$$|\mu-\lambda_i|\le\inf_{P,Q}k(P^{-1}Q)\max_{1\le j\le n}|\mu_i|$$

证：$\min_{1\le i\le n}|\mu-\lambda_i|\le\|P^{-1}\delta P\|=\|P^{-1}Q\Lambda Q^{-1}P\|$

$\le\|P^{-1}Q\|\bullet\|Q^{-1}P\|\max_{1\le j\le n}|\mu_j|\le k(P^{-1}Q)\max_{1\le j\le n}|\mu_j|$

定理 5 设$A \in C^{n\times n}$为具有特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的正规矩阵，$\delta \in C^{n\times n}$，$\mu$为$A+\delta$的一个特征值，则存在$A$的一个特征值 λ_i使得

$$|\mu-\lambda_i| \le \|\delta\|_2$$

定理 6 设$A \in C^{n\times n}$，$\delta \in C^{n\times n}$，$A+\delta$为正规矩阵，设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为按某一顺序给定的$A$的特征值，$\mu_1$，$\mu_2,\cdots,\mu_n$ 为按某一顺序给定的$A+\delta$的特征值，则存在整数$1,2,\cdots,n$的一个排列$\sigma(i)$，使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\mu_{\sigma(i)}-\lambda_i|^2\right)^{1/2} \le \|\delta\|_2$$