# §7 广义逆矩阵的应用

程光辉

2019 年 12 月 15 日

## 1 矩阵方程的通解

**定理 1** 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，$B \in \mathbf{C}^{p\times q}$，$D \in \mathbf{C}^{m\times q}$，则矩阵方程

$$AXB = D$$

有解的充要条件是存在 $A^-$ 和 $B^-$，使得

$$AA^-DB^-B = D$$

成立. 在有解的条件下，矩阵方程 $AXB = D$ 的通解为

$$X = A^-DB^- + Y - A^-AYBB^-, \quad \forall Y \in \mathbf{C}^{n\times p}.$$

**证明：** (**必要性**) 设 $X$ 为 $AXB = D$ 的解，因为 $AA^-A = A$，$BB^-B = B$，则有

$$D = AXB = AA^-AXBB^-B = AA^-DB^-B.$$

(**充分性**) 因为 $D = AA^-DB^-B$，故 $X = A^-DB^-$ 是 $AXB = D$ 的解.

下面证明在有解情况下的通解. 因为

$$\begin{aligned} A(A^-DB^- + Y - A^-AYBB^-)B &= AA^-DB^-B + AYB - AA^-AYBB^-B \\ &= D + AYB - AYB \\ &= D, \end{aligned}$$

因此，$X = A^-DB^- + Y - A^-AYBB^-$ 是 $AXB = D$ 的解.

设 $G$ 是 $AXB = D$ 的任一解，即 $AGB = D$，进而

$$G = A^-DB^- + G - A^-DB^- = A^-DB^- + G - A^-AGBB^-,$$

故矩阵方程 $AXB = D$ 的通解为

$$X = A^-DB^- + Y - A^-AYBB^-, \quad \forall Y \in \mathbf{C}^{n\times p}.$$

**推论 1** 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，$D \in \mathbb{C}^{m\times p}$，则矩阵方程 $AX = D$ 有解的充要条件是存在 $A^-$，使得

$$AA^-D = D$$

成立. 在有解的条件下，矩阵方程 $AX = D$ 的通解为

$$X = A^-D + Y - A^-AY, \quad \forall Y \in \mathbb{C}^{n\times p}.$$

**推论 2** 设 $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$，$D \in \mathbb{C}^{p\times n}$，则矩阵方程 $XB = D$ 有解的充要条件是存在 $B^-$，使得

$$DB^-B = D$$

成立. 在有解的条件下，矩阵方程 $XB = D$ 的通解为

$$X = DB^- + Y - YBB^-, \quad \forall Y \in \mathbb{C}^{p\times m}.$$

**推论 3** 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，$b \in \mathbb{C}^{m}$，则矩阵方程 $Ax = b$ 有解的充要条件是存在 $A^-$，使得

$$AA^-b = b$$

成立. 在有解的条件下，矩阵方程 $Ax = b$ 的通解为

$$x = A^-b + (E_n - A^-A)u, \quad \forall u \in \mathbb{C}^{n}.$$

## 2 相容方程的最小范数解

**定义 1** 方程组 $Ax = b$ 有解，则称此方程组为相容方程组；否则，称为不相容方程组.

**定义 2** 设方程组 $Ax = b$ 有解，将所有的解中范数最小的解称为最小范数解.

令 $A\{1,3\} = \{G | AGA = A, \ (GA)^H = GA\}$.

**定理 2** 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，$D \in A\{1,3\}$，则 $Db$ 是相容方程组 $Ax = b$ 的最小范数解，并且方程组的最小范数解唯一.

**证明：** 设 $x_0$ 是 $Ax = b$ 的任意解，$D \in A\{1,3\}$，则有 $ADA = A$，进而

$$b = Ax_0 = ADAx_0 = ADb,$$

于是有 $Db$ 是 $Ax = b$ 的解. 根据定理 1 的推论 3 知，$Ax = b$ 的通解为

$$x = Db + (E - DA)u, \quad \forall u \in \mathbb{C}^{n}.$$

对任意解 $\boldsymbol{x_0}$ 有，

$$\begin{aligned}\|x_0\|_2^2 &= \|Db+(E-DA)u\|_2^2 \\ &= (Db+(E-DA)u)^H\,(Db+(E-DA)u) \\ &= \|Db\|_2^2+\|(E-DA)u\|_2^2+(Db)^H(E-DA)u+u^H(E-DA)^H Db. \end{aligned} \tag{1}$$

又由 $\boldsymbol{Ax_0=b}$ 得

$$\begin{aligned}(Db)^H(E-DA)u &= (DAx_0)^H(E-DA)u \\ &= x_0^H(DA)^H(E-DA)u \\ &= x_0^H DA(E-DA)u \\ &= x_0^H(DA-DADA)u \\ &= 0,\end{aligned}$$

所以由 (1) 式可得

$$\|x_0\|_2^2=\|Db\|_2^2+\|(E-DA)u\|_2^2\geq\|Db\|_2^2,$$

则 $\boldsymbol{Db}$ 是相容方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的最小范数解.

唯一性显然.

**定理 3** 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$，$D\in \mathbf{C}^{n\times m}$，$\forall b\in \mathbf{C}^m$，则 $Db$ 是相容方程组 $Ax=b$ 的最小范数解，则必有 $D\in A\{1,3\}$.

**证明：** 设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 $\alpha_i\in \mathrm{R}(A)$. 设 $G\in A\{1,3\}$，则 $G\alpha_i$ 是 $Ax=\alpha_i$ 的最小范数解. 由定理 2 知最小范数解是唯一的，则有

$$D\alpha_i=G\alpha_i,\quad \forall i=1,2,\cdots,n,$$

即 $DA=GA$，进而 $ADA=AGA=A$，$(DA)^H=(GA)^H=GA=DA$，于是有 $D\in A\{1,3\}$.

## 3 不相容方程组的解

如果 $Ax=b$ 是不相容方程组，令 $f(x)=\|Ax-b\|_2^2$，存在 $x_0$ 使得 $f(x_0)$ 最小，称 $x_0$ 为方程组的最小二乘解，这种问题称为最小二乘解问题.

令 $A\{1,4\}=\{G|AGA=A,\ (AG)^H=AG\}.$

**定理 4** 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$，$G\in A\{1,4\}$，则 $Gb$ 是不相容方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解.

**证明**：因为

$$\begin{aligned}\|Ax-b\|_2^2&=\|Ax-AGb+AGb-b\|_2^2\\&=(Ax-AGb+AGb-b)^H\,(Ax-AGb+AGb-b)\\&=\|Ax-AGb\|_2^2+\|AGb-b\|_2^2\\&\quad+(Ax-AGb)^H(AGb-b)+(AGb-b)^H(Ax-AGb).\end{aligned}\tag{2}$$

又由 $(AG)^H=AG$，有

$$\begin{aligned}(AGb-b)^H(Ax-AGb)&=(b^H(AG)^H-b^H)(Ax-AGb)\\&=(b^HAG-b^H)(Ax-AGb)\\&=b^HAGAx-b^HAx-b^HAGAGb+b^HAGb\\&=0,\end{aligned}$$

因此，由式 (2) 可得

$$\|Ax-b\|_2^2=\|Ax-AGb\|_2^2+\|AGb-b\|_2^2\geq\|AGb-b\|_2^2,$$

即 $Gb$ 是不相容方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解.

**引理 1** 设 $A\in\mathrm{C}^{m\times n}$，$x$ 是不相容方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解的充要条件是 $Ax=AGb$，$\forall G\in A\{1,4\}$.

**证明**：(**必要性**) 对 $\forall G\in A\{1,4\}$，$\forall x\in\mathrm{C}^n$，由定理 4 证明知，

$$\|Ax-b\|_2^2=\|Ax-AGb\|_2^2+\|AGb-b\|_2^2=\|AGb-b\|_2^2,$$

则 $Ax=AGb$.

(**充分性**) 若 $Ax=AGb$，则 $\|Ax-b\|_2^2=\|AGb-b\|_2^2$, 即 $x$ 是不相容方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解.

**定理 5** 设 $A\in\mathrm{C}^{m\times n}$，$G\in A\{1,4\}$，不相容方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解的通解是 $x=Gb+(E-A^-A)u$, $\forall u\in\mathrm{C}^n$.

**证明**：令 $x$ 是不相容方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解，则有 $Ax=AGb$，即 $x$ 是相容方程组 $A(x-Gb)=0$ 的解. 再由推论 3，知通解为

$$x-Gb=(E-A^-A)u,\ \forall u\in\mathrm{C}^n,$$

即

$$x=Gb+(E-A^-A)u,\ \forall u\in\mathrm{C}^n.$$

**定义 3** 设 $\boldsymbol{x_0}$ 是不相容方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的最小二乘解，若对方程组的任意最小二乘解 $\bar{\boldsymbol{x}}$，均有

$$\|\boldsymbol{x_0}\|_2 \leq \|\bar{\boldsymbol{x}}\|_2,$$

则称 $\boldsymbol{x_0}$ 是不相容方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的最佳最小二乘解，简称最佳逼近解.

**定理 6** 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，不相容方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的最佳逼近解是 $\boldsymbol{x=A^+b}$.

**例 1** 用广义逆矩阵方法判断线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=0 \\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4=3 \end{cases}$$

是否有解？如果有解，求通解和最小范数解；如果无解，求最小二乘解和最佳逼近解.

**解**：令系数矩阵和右端向量为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

则线性方程组即为 $\boldsymbol{Ax=b}$.

因为 $\boldsymbol{A^+} \in \boldsymbol{A}\{1,3\}$ 且 $\boldsymbol{A^+} \in \boldsymbol{A}\{1,4\}$，再由定理 2 和定理 4 知，可利用 $\boldsymbol{A^+b}$ 判断方程组解的类型，所以首先计算 $\boldsymbol{A^+b}$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大秩分解为 $\boldsymbol{A=BD}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A^+}=\boldsymbol{D^H(DD^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -6 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

又因为

$$\boldsymbol{AA^+b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{b},$$

故 $\boldsymbol{Ax=b}$ 是不相容方程组.

于是有不相容方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{11}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{-5}\\\mathbf{6}\end{pmatrix}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{u},\quad\forall\boldsymbol{u}\in\mathbf{C}^{4},$$

最佳逼近解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{11}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{-5}\\\mathbf{6}\end{pmatrix}.$$