第三章

矩阵的分解

§1 矩阵的三角分解

一、n 阶方阵的三角分解

定义 1

正线上三角阵 $\Longleftrightarrow$ $R=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

单位上三角阵 $\Longleftrightarrow$ $R=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

定义 2

正线下三角阵 $\Longleftrightarrow$ $L=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

单位下三角阵 $\Longleftrightarrow$ $L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

1. 上三角矩阵R 的逆 R^{-1} 也是上三角矩阵, 且对角元是R 对角元的倒数;
2. 两个上三角矩阵 R_1、R_2 的乘积 R_1R_2也是上三角矩阵, 且对角元是 R_1与 R_2对角元之积;
3. 酉矩阵U 的逆 U^{-1}也是酉矩阵;
4. 两个酉矩阵之积 U_1U_2也是酉矩阵.

定理 1：设 $A\in C_n^{n\times n}$，则A可唯一地分解为

$$A=U_1R$$

其中，U_1是酉矩阵，R是正线上三角复矩阵.
或A可唯一分解为

$$A=LU_2$$

其中，L是正线下三角复矩阵，U_2是酉矩阵.

证：$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\xrightarrow{A\in C_n^{n\times n}}$

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关 $\xrightarrow{\text{正交化、单位化}}$

$$\begin{cases}\beta_1=\dfrac{a_1}{\|a_1\|}\\[2ex] \beta_i=\dfrac{a_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}(a_i,\ \beta_j)\beta_j}{\|a_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}(a_i,\ \beta_j)\beta_j\|} \quad i=2,\ 3,\cdots,n\end{cases}$$

$$\xrightarrow{k_{ij}=(a_i,\ \beta_j),\ k_{11}=\|a_1\|\text{或 } k_{ii}=\|a_i-\sum_{j=1}^{i-1}(a_i,\ \beta_j)\beta_j\|}$$

$$a_i=\sum_{j=1}^{i}k_{ij}\ \beta_j \quad i=1,2,\cdots,n \quad \Longrightarrow$$

$$A=(k_{11}\beta_1,\ k_{21}\beta_1+k_{22}\beta_2,\cdots,\ \sum_{j=1}^{n}k_{nj}\ \beta_j)$$

$$=(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\ \beta_n)\begin{bmatrix}k_{11}&k_{21}&\cdots&k_{n1}\\0&k_{22}&\cdots&k_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&k_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=U_1R$$

唯一性：设$A=U_1R_1=U_2R_2\longrightarrow R_1=\underline{U_1^{-1}U_2}R_2$

$=VR_2\longrightarrow V$为酉矩阵

$$\text{设}R_1=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{21}&\cdots&k_{n1}\\0&k_{22}&\cdots&k_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&k_{nn}\end{bmatrix}\quad R_2=\begin{bmatrix}l_{11}&l_{21}&\cdots&l_{n1}\\0&l_{22}&\cdots&l_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&l_{nn}\end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix}v_{11}&v_{21}&\cdots&v_{n1}\\v_{21}&v_{22}&\cdots&v_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\v_{n1}&v_{n2}&\cdots&v_{nn}\end{bmatrix}\longrightarrow (1)\ k_{11}=v_{11}l_{11}$$

$$v_{i1}l_{11}=0 \quad i=2,\cdots,n \xrightarrow{l_{11}>0} v_{21}=\cdots=v_{n1}=0$$

$$\xrightarrow{V\text{为酉矩阵}} v_{11}=1,\ \ v_{12}=\cdots=v_{1n}=0 \longrightarrow$$

$$V=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&v_{22}&\cdots&v_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&v_{n2}&\cdots&v_{nn}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{类推}} V=E_n \longrightarrow$$

$$U_1=U_2 \qquad R_1=R_2$$

推论1：设 $A\in R_n^{n\times n}$，则A可唯一地分解为

$$A=Q_1R$$

其中，Q_1是正交矩阵，R是正线上三角实矩阵
或A可唯一分解为

$$A=LQ_2$$

其中，L是正线下三角实矩阵，Q_2是正交矩阵.

例1 求三阶实矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\1&2&3\end{pmatrix}$的$QR$分解.

解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

对$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2$使用Schmidt正交化得：

$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1)^T$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\beta_1=(-1,0,1)^T$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$=\alpha_3-\frac{5}{3}\beta_1-\frac{1}{2}\beta_2=\frac{5}{6}(1,-2,1)^T$$

单位化：

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$$

$$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T \qquad \gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\beta_3$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&5/3\\0&1&1/2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\frac{5}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&5/3\\0&1&1/2\\0&0&1\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{3}&5/\sqrt{3}\\0&\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&0&\frac{5}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

推论 2：设 A是实对称正定矩阵, 则存在唯一的正线上三角实矩阵，使

$$A=R^TR$$

证：A是实对称正定矩阵 $\longrightarrow A=P^TP \quad (1)$

P 可逆 $\longrightarrow P=QR \longrightarrow A=R^T\underline{Q^TQ}R \longrightarrow$

$A=R^TR$

唯一性：　设$A=R_1^TR_1=R_2^TR_2 \longrightarrow$

$$(R_1^T)^{-1}R_2^T=R_1(R_2)^{-1}=E_n \longrightarrow R_1=R_2$$

推论 3：设 A是正定Hermite矩阵, 则存在唯一的正线上三角复矩阵，使

$$A=R^HR$$

定理 2:设 $A\in C_n^{n\times n}$,用L表示下三角复矩阵，$\tilde{L}$是单位下三角复矩阵，R是上三角复矩阵，$\tilde{R}$是单位上三角复矩阵，D表示对角矩阵，则下列命题等价：

$$(i)\quad \Delta_k=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}\neq 0$$

(ii)　A可唯一地分解为 $A=L\tilde{R}$

(iii)　A可唯一地分解为 $A=\tilde{L}R$

(iv)　A可唯一地分解为 $A=\tilde{L}D\tilde{R}$.

证：$(i)\Rightarrow(ii)$

(1)A为一阶方阵 $\longrightarrow A=L\tilde{R}$

(2)A为$n-1$阶方阵 $\longrightarrow$ 设 $A=L_1\tilde{R}_1$

(3)A为n阶方阵 $\longrightarrow A=\begin{bmatrix}A_{n-1}&\beta\\\alpha&a_{nn}\end{bmatrix}\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ \alpha & a_{nn}-\alpha A_{n-1}^{-1}\beta \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow A=\begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ \alpha & a_{nn}-\alpha A_{n-1}^{-1}\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow A=\begin{bmatrix} L_1\tilde{R}_1 & 0 \\ \alpha & a_{nn}-\alpha A_{n-1}^{-1}\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ \alpha\tilde{R}_1^{-1} & a_{nn}-\alpha A_{n-1}^{-1}\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{R}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ \alpha\tilde{R}_1^{-1} & a_{nn}-\alpha A_{n-1}^{-1}\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{R}_1 & \tilde{R}_1 A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=L\tilde{R}$$

唯一性：设$A=L_1\tilde{R}_1=L_2\tilde{R}_2 \longrightarrow L_1^{-1}L_2=\tilde{R}_1\tilde{R}_2^{-1}$

$$\longrightarrow L_1^{-1}L_2=\tilde{R}_1\tilde{R}_2^{-1}=E \longrightarrow L_1=L_2,\quad \tilde{R}_1=\tilde{R}_2$$

$(ii)\Rightarrow(i)\quad A=L\tilde{R} \longrightarrow A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12} \\ 0 & \tilde{R}_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} L_{11}\tilde{R}_{11} & L_{11}\tilde{R}_{12} \\ L_{21}\tilde{R}_{11} & L_{21}\tilde{R}_{12}+L_{22}\tilde{R}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow A_{11}=L_{11}\tilde{R}_{11} \longrightarrow \Delta_K=|A_{11}|=|L_{11}||\tilde{R}_{11}|=|L_{11}|$$

$$=l_{11}l_{22}\cdots l_{kk}\neq 0$$

$(ii)\Rightarrow(iv)$: $L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{l_{21}}{l_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{l_{n1}}{l_{11}} & \frac{l_{n2}}{l_{22}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\tilde{L}D \longrightarrow$$

$$A=L\tilde{R}=\tilde{L}D\tilde{R}$$

$(iv)\Rightarrow(ii)$: $A=\tilde{L}D\tilde{R} \xrightarrow{L=\tilde{L}D} A=L\tilde{R}$

例2. 求 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的$\tilde{L}R$及$\tilde{L}D\tilde{R}$分解

解：$\Delta_1=2,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad \Delta_3=\det A=5$

令：$\tilde{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$

$$\tilde{L}R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ l_{21}r_{11} & l_{21}r_{12}+r_{22} & l_{21}r_{13}+r_{23} \\ l_{31}r_{11} & l_{31}r_{12}+l_{32}r_{22} & l_{31}r_{13}+l_{32}r_{23}+r_{33} \end{pmatrix}=A$$

$$\tilde{L}R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ l_{21}r_{11} & l_{21}r_{12}+r_{22} & l_{21}r_{13}+r_{23} \\ l_{31}r_{11} & l_{31}r_{12}+l_{32}r_{22} & l_{31}r_{13}+l_{32}r_{23}+r_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \tilde{R}=D^{-1}R=\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

二、任意矩阵的三角分解

定义 3：设A为$m\times n$复(实)矩阵，如果$rankA=m$，则称 A为行满秩矩阵，记为 $A\in C_m^{m\times n}(R_m^{m\times n})$.

如果$rankA=n$，则称 A为列满秩矩阵，记为 $A\in C_n^{m\times n}(R_n^{m\times n})$.

定理 3：设A为行满秩矩阵或列满秩矩阵，则

(i) 设$A\in C_n^{m\times n}$，则存在m阶酉矩阵U及n阶正线上三角复矩阵R，使得

$$A=U\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) 设$A\in C_m^{m\times n}$，则存在n阶酉矩阵U及m阶正线下三角复矩阵L，使得

$$A=\begin{pmatrix} L & 0 \end{pmatrix}U$$

证：(i) $A\in C_n^{m\times n}\longrightarrow a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关

$\longrightarrow a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_m$线性无关 $\longrightarrow$

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

$$=(k_{11}\beta_1,k_{21}\beta_1+k_{22}\beta_2,\cdots,\sum_{j=1}^{n}k_{nj}\beta_j)$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\cdots,\beta_m)\begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ 0 & k_{22} & \cdots & k_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=U\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

定理 4：(i) 设$A\in C_n^{m\times n}$，则A可唯一地分解为

$$A=UR$$

其中，$U\in U_m^{m\times n}$，R是n阶正线上三角矩阵 .

(ii) 设$A\in C_m^{m\times n}$，则A可唯一地分解为

$$A=LU$$

其中，L是n阶正线下三角矩阵 ，$U\in U_m^{m\times n}$.

证：$A\in C_n^{m\times n}\longrightarrow$ 对$\forall x\neq 0$，有$Ax\neq 0$

$\longrightarrow x^HA^HAx=(Ax)^HAx>0\longrightarrow$

A^HA为正定 *Hermite* 矩阵 $\longrightarrow$

$A^HA=R^HR$.

令 $U=AR^{-1}\longrightarrow U^HU=(AR^{-1})^H(AR^{-1})$

$=(R^H)^{-1}\underline{A^HA}R^{-1}=(R^H)^{-1}R^HRR^{-1}=E_n$

$\longrightarrow A=UR$

唯一性： $A=U_1R_1=U_2R_2 \longrightarrow$

$$A^HA=R_1^HU_1^HU_1R_1=R_1^HR_1=R_2^HR_2 \longrightarrow$$

$$R_1=R_2 \longrightarrow U_1=U_2$$

定理 5: 设$A\in C_r^{m\times n}$, 则存在酉矩阵 $U\in U^{m\times m}$ 和 $V\in U^{n\times n}$ 及 r 阶正线下三角矩阵 L, 使得

$$A=U\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V$$

证：$A\in C_r^{m\times n} \longrightarrow AP=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$

其中，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 $\longrightarrow$

$(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)C \longrightarrow$

$$AP=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix} E_r & C \end{pmatrix}=U\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & C \end{pmatrix}$$

$$=U\begin{pmatrix} R & RC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} R & RC \end{pmatrix}\in C_r^{r\times n} \longrightarrow B=\begin{pmatrix} R & RC \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L & 0 \end{pmatrix}V_1$$

$$\longrightarrow A=U\begin{pmatrix} R & RC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}=U\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V_1P^{-1}$$

$$=U\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V, \text{其中} V=V_1P^{-1}.$$

§2 矩阵的谱分解

一、单纯矩阵的谱分解

定义 1 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$是 $A\in C^{n\times n}$ 的相异特征值，其重数分别为$r_1,r_2,\cdots,r_k$，则称 r_i 为矩阵A的特征值 λ_i的 代数重复度

定义 2 齐次方程组 $Ax=\lambda_i x \quad (i=1,2,\cdots,k)$ 的解空间 V_{λ_i}称为A的对应于特征值 λ_i的特征空间，则 V_{λ_i}的维数称为 A 的特征值 λ_i的几何重复度

定义 3 若矩阵 A的每个特征值的代数重 复度与几何重复度相等，则 称矩阵 A为单纯矩阵

定理3 设 $A\in C^{n\times n}$是单纯矩阵，则 A可分解为一系列幂等矩阵A_i $(i=1,2,\cdots,n)$的加权和，

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i$$

其中，λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$是A的特征值.

证：A是单纯矩阵 $\longrightarrow A=Pdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)P^{-1}$

$$P=(v_1,v_2,\cdots,v_n),\ P^{-1}=\begin{pmatrix}\omega_1^T\\ \omega_2^T\\ \vdots\\ \omega_n^T\end{pmatrix}$$

$$A=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1^T\\ \omega_2^T\\ \vdots\\ \omega_n^T\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\omega_i^T=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A_i \quad 其中,\ A_i=v_i\omega_i^T$$

$$P^{-1}P=E_n \longrightarrow \omega_i^T v_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \longrightarrow$$

$$A_iA_j=(v_i\omega_i^T)(v_j\omega_j^T)=v_i(\omega_i^T v_j)\omega_j^T$$

$$=\begin{cases}v_i\omega_i^T & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \longrightarrow A_i是幂等矩阵$$

A_i的性质 ：

(1) 幂等性：$A_i^2=A_i$

(2) 分离性：$A_iA_j=0 \quad (i\neq j)$

(3) 可加性：$\sum_{i=1}^{n}A_i=E_n$

证：

$$PP^{-1}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\begin{pmatrix}\omega_1^T\\ \omega_2^T\\ \vdots\\ \omega_n^T\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}v_i\omega_i^T=\sum_{i=1}^{n}A_i=E_n$$

定理4 设$A\in C^{n\times n}$，它有 k 个相异特征值 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，则 A 是单纯矩阵的充要条件是存在 k 个矩阵 $A_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 满足

(1) $A_iA_j=\begin{cases}A_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

(2) $\sum_{i=1}^{k}A_i=E_n$ (3) $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iA_i$

证：必要性 A 是单纯矩阵 $\longrightarrow A=\sum_{i=1}^{n}l_iB_i$

$$\longrightarrow A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\sum_{j=1}^{r_i}B_{ij} \qquad \xrightarrow{\text{令}A_i=\sum_{j=1}^{r_i}B_{ij}}$$

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iA_i \quad (3)$$

$$B_{ij}B_{lk}=\begin{cases}B_{ij} & i=l,\ j=k\\ 0 & i\neq l \text{ 或 } j\neq k\end{cases} \longrightarrow$$

$$A_iA_j=\begin{cases}A_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{k}A_i=\sum_{i=1}^{n}B_i=E_n \quad (2)$$

二、正规矩阵及其分解

定义 3　若 n 阶复矩阵 A 满足

$$AA^H = A^H A$$

则称 A 为正规矩阵

引理 1　设 A 为正规矩阵，A 与 B 酉相似，则 B 为正规矩阵

证　A 与 B 酉相似 $\longrightarrow B = U^{-1}AU = U^H AU$

$\longrightarrow BB^H = U^H AU(U^H AU)^H = U^H A\underline{UU^H}A^H U$

$= U^H \underline{AA^H} U = U^H A^H AU = U^H A^H UU^H AU$

$= (U^H AU)^H (U^H AU) = B^H B \Longrightarrow$

B 为正规矩阵

引理 2 (*Schur*)　设 $A \in C^{n\times n}$，则存在酉矩阵 U，使得

$$A = URU^H$$

其中，R 是一个上三角矩阵且主对角线上的元素为 A 的特征值．

证：$A \in C^{n\times n} \longrightarrow A = PJP^{-1} \xrightarrow{P = UR_1}$

$A = UR_1 J(UR_1)^{-1} = \underline{UR_1 JR_1^{-1}}U^H = URU^H$

引理 3　设 A 正规矩阵且是三角矩阵，则 A 是对角矩阵．

证

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

A 正规矩阵 $\Longrightarrow AA^H = A^H A \Longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar a_{12} & \bar a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar a_{1n} & \bar a_{2n} & \cdots & \bar a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar a_{12} & \bar a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar a_{1n} & \bar a_{2n} & \cdots & \bar a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\bar a_{1i} = \sum_{i=1}^{n} |a_{1i}|^2 = a_{11}\bar a_{11} = |a_{11}|^2$

$\Longrightarrow a_{1i} = 0 \quad (i = 2,3,\cdots,n)$

同理可得：$a_{2i} = 0 \quad (i = 3,\cdots,n)$

$a_{3i} = 0 \quad (i = 4,\cdots,n)$

……………………

$a_{n-1,n} = 0$

$\therefore$　A 是对角矩阵．

定理 5 n 阶复矩阵 A 是正规矩阵的充要条件是 A 与对角矩阵酉相似．即存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$$A = U diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) U^H$$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值．

证 必要性：$A \in C^{n\times n} \Rightarrow A = URU^H \Longrightarrow$

$$A = U diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) U^H$$

充分性： A 与对角矩阵酉相似 $\Rightarrow$ A 是正规矩阵

定理6 设 $A \in C^{n\times n}$，它有 k 个相异特征值 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，则 A 是正规矩阵的充要条件是存在 k 个矩阵 $A_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 满足

(1) $A_i A_j = \begin{cases} A_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

(2) $\sum_{i=1}^{k} A_i = E_n$

(3) $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$

(4) $A_i^H = A_i \quad (i = 1,2,\cdots,k)$

证 必要性：A 是正规矩阵 $\Rightarrow$

$$A = U diag(\lambda_1 E_{r_1}, \lambda_2 E_{r_2}, \cdots, \lambda_k E_{r_k}) U^H$$

$\Longrightarrow$

$$A=(V_1,V_2,\cdots,V_k)\begin{bmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{r_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k E_{r_k} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} V_1^H \\ V_2^H \\ \vdots \\ V_k^H \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{V_i V_i^H} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i \quad (A_i = V_i V_i^H)$$

$$UU^H = U^H U = E_n \Rightarrow V_i^H V_j = \begin{cases} E_{r_i} & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

$$A_i A_j = V_i \underline{V_i^H V_j} V_j^H = \begin{cases} V_i V_i^H = A_i & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} V_i V_i^H = UU^H = E_n$$

$$A_i^H = (V_i V_i^H)^H = (V_i^H)^H V_i^H = V_i V_i^H = A_i$$

充分性：

$$AA^H = (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i)(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j A_j)^H$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \lambda_i \bar{\lambda}_j A_i A_j^H$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \lambda_i \bar{\lambda}_j A_i A_j$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|^2 A_i$$

同理可知 $AA^H = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|^2 A_i$

§3 Hermite矩阵及其分解

定义1 $A \in C^{n\times n}$, $A^H = A \Leftrightarrow A$是$Hermite$矩阵

$A \in C^{n\times n}$, $A^H = -A \Leftrightarrow A$是反$Hermite$矩阵

2. Hermite矩阵的基本性质

(1) $(A\alpha, \beta) = (\alpha, A\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in C^n$

$\Longrightarrow (A\alpha, \beta) = (A\alpha)^H \beta = \alpha^H A^H \beta = \alpha^H A\beta$

$= (\alpha, A\beta)$

(2) $\lambda_i \in R, \quad \forall\ \lambda_i \in \lambda(A)$

(3) $Ax_i = \lambda_i x_i, Ax_j = \lambda_j x_j, \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow (x_i, x_j) = 0$

(4) A与矩阵$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$合同,其中$rank(A) = r$

(5) $U^H AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$,其中$U$为酉矩阵.

3. 正定$Hermite$矩阵的基本性质与分解

定义:

$A^H = A, x^H Ax > 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow A$为正定$Hermite$矩阵

(1) $a_{ii} > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n.$

$\Rightarrow e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T \Rightarrow e_i^H A e_i = a_{ii} > 0$

(2) $\lambda_i > 0, \quad \forall\ \lambda_i \in \lambda(A)$

(3) $\exists$正定矩阵B,使得$A = B^k, k \in N$

(4) $\exists$正线下三角矩阵$L, A = LL^H$;

(5) $\det A \le a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, $fisher$不等式

$\Rightarrow A = LL^H, \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{11} & l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{11} & l_{11} & \cdots & l_{11} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow LL^H = \begin{pmatrix} |l_{11}|^2 & * & \cdots & * \\ * & \sum_{i=1}^{2} |l_{2i}|^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \sum_{i=1}^{n} |l_{ni}|^2 \end{pmatrix} = A$

$\Rightarrow a_{kk} = \sum_{i=1}^{k} |l_{ki}|^2 \ge |l_{kk}|^2 \quad \Rightarrow \det A = \det L \cdot \det L^H = \prod_{i=1}^{n} |l_{ii}|^2$

(6) $\det A \le \det A_{11} \cdot \det A_{22}$, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

(7) A与单位矩阵I_n合同

3.半正定矩阵的基本性质

(1) $a_{ii} \ge 0,\ i = 1, 2, \cdots, n.$

(2) $\lambda_i \ge 0, \quad \forall\ \lambda_i \in \lambda(A)$

(3) $\exists$半正定矩阵B,使得$A = B^k, k \in N$

(4) A与单位矩阵$\begin{pmatrix} I_r & o \\ o & o \end{pmatrix}$合同, 其中$rank(A) = r$

定理1 设 $A, B \in C^{n\times n}$，A为正定矩阵，$B^H = B$，
则存在可逆矩阵T,使得

$$T^H AT = E_n, T^H BT = D.$$

证：A正定 $\Rightarrow$ A与E合同 $\Rightarrow$ $P^H AP = E$

$\Rightarrow$ $P^H BP$为$Hermite$矩阵

$\Rightarrow$ $U^H P^H BPU = D$

$\xrightarrow{T = PU}$ $T^H BT = D$

$\xrightarrow{T = PU}$ $T^H AT = U^H P^H APU = U^H EU = E$

4. 广义正定矩阵

定义:$A \in R^{n\times n}, \forall x \neq 0, x \in R^n$,有$x^T Ax > 0$
$\Leftrightarrow$ A为广义正定矩阵

A为广义正定矩阵 $\Rightarrow S = \frac{1}{2}(A + A^T)$

A为广义正定矩阵 $\Rightarrow K = \frac{1}{2}(A - A^T)$

广义正定矩阵的基本性质：

(1) $A^T, A + B$为广义正定矩阵

(2) S为正定矩阵

(3) $\max(\lambda(S)) \geq \mathrm{Re}\,\lambda_i(A) \geq \min(\lambda(S)) > 0$

(4) $\det A > 0$

§4 矩阵的最大秩分解

定理 1 设 $A \in C_r^{m\times n}$，则存在矩阵 $B \in C_r^{m\times r}$，$D \in C_r^{r\times n}$，使得

$$A = BD$$

证 $A \in C_r^{m\times n} \Longrightarrow A = U\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^H$

$\Longrightarrow A = U\begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}V^H$

$\Longrightarrow A = BD,\quad B = U\begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}V^H$

矩阵的最大秩分解步骤：

一、进行行初等变化， 化为行标准形：

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & i_1 & & & i_2 & & i_r & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

二. A的第$i_1, i_2, \cdots, i_r$列构成$B = (a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r})$;

三、$\tilde{A}$ 的非零行则构成D.

例 1 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 9 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$ 的最大秩分解 .

解一

$$A \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1/3 & 10/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1/3 & 10/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

解二

$$A \Longrightarrow \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

定理 2 设 $A \in C_r^{m \times n}$，且 $A = B_1 D_1 = B_2 D_2$ 均为A的最大秩分解，则

(1) 存在 r 阶可逆矩阵 Q，使得

$$B_1 = B_2 Q \qquad D_1 = Q^{-1} D_2$$

(2)
$$D_1^H (D_1 D_1^H)^{-1} (B_1^H B_1)^{-1} B_1^H$$
$$= D_2^H (D_2 D_2^H)^{-1} (B_2^H B_2)^{-1} B_2^H$$

注 1. $rank(A) = rank(A^H A) = rank(AA^H)$

2. $B \in C_r^{m \times r}$，则 $B^H \in C_r^{r \times m}, B^H B \in C_r^{r \times r}$

那么 $\underbrace{(B^H B)^{-1} B^H}_{\text{左逆}} B = E_r$

3. $D \in C_r^{r \times n}$，则 $D^H \in C_r^{n \times r}, DD^H \in C_r^{r \times r}$

那么 $D \underbrace{D^H (DD^H)^{-1}}_{\text{右逆}} = E_r$

证

(1) $B_1 D_1 = B_2 D_2 \Longrightarrow B_1 \underline{D_1 D_1^H} = B_2 D_2 D_1^H$

$\Longrightarrow B_1 = B_2 \underline{D_2 D_1^H (D_1 D_1^H)^{-1}} = B_2 Q_1$

同理可得 $D_1 = \underline{(B_1^H B_1)^{-1} B_1^H B_2} D_2 = Q_2 D_2$

$\Longrightarrow B_1 D_1 = B_2 Q_1 Q_2 D_2 = B_2 D_2 \Longrightarrow$

$\underline{B_2^H B_2} Q_1 Q_2 \underline{D_2 D_2^H} = \underline{B_2^H B_2} \underline{D_2 D_2^H} \Longrightarrow$

$Q_1 Q_2 = E_r \Longrightarrow$ 记 $Q = Q_1$，则 $Q_2 = Q^{-1}$

(2)
$$D_1^H (D_1 D_1^H)^{-1} (B_1^H B_1)^{-1} B_1^H$$
$$= (Q^{-1} D_2)^H \underline{[Q^{-1} D_2 (Q^{-1} D_2)^H]^{-1}}$$
$$\underline{[(B_2 Q)^H B_2 Q]^{-1}} (B_2 Q)^H$$
$$= D_2^H (Q^{-1})^H \underline{[Q^{-1} D_2 D_2^H (Q^{-1})^H]^{-1}}$$
$$\underline{[Q^H B_2^H B_2 Q]^{-1}} Q^H B_2^H$$
$$= D_2^H \underline{(Q^H)^{-1} Q^H} (D_2 D_2^H)^{-1} \underline{Q Q^{-1}}$$
$$(B_2^H B_2)^{-1} \underline{(Q^H)^{-1} Q^H} B_2^H$$
$$= D_2^H (D_2 D_2^H)^{-1} (B_2^H B_2)^{-1} B_2^H$$

§5 矩阵的奇异值分解

定理 1 设 $A \in C_r^{m\times n}$，则有

(1) $rank(A) = rank(A^H A) = rank(AA^H)$

(2) $A^H A$、AA^H的特征值均为非负实数

(3) $A^H A$、AA^H的非零特征值相同．

证 设 $rank(A^H A) = r \Longrightarrow A^H Ax = 0$ 的解空间

为$n-r$ 维，记为 $X \xrightarrow{\text{设 } x_1 \in X} x_1^H A^H Ax_1 = 0$

$\Longrightarrow x_1^H A^H Ax_1 = (Ax_1)^H Ax_1 = 0 \Longrightarrow$

$Ax_1 = 0 \Longrightarrow rank(A) \le rank(A^H A) \Longrightarrow$

$rank(A) = rank(A^H A)$

(2) $A^H A\alpha = \lambda\alpha \Longrightarrow 0 \le (A\alpha, A\alpha)$

$= (\alpha, A^H A\alpha) = (\alpha, \lambda\alpha) = \lambda(\alpha,\alpha) \Longrightarrow$

$\lambda \ge 0$

(3) 设 $A^H A$ 的特征值为

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

AA^H 的特征值为

$$\mu_1 \ge \mu_2 \ge \cdots \ge \mu_r > \mu_{r+1} = \cdots = \mu_m = 0$$

$A^H A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i \Longrightarrow (AA^H)A\alpha_i = A(A^H A\alpha_i)$

$\Longrightarrow (AA^H)A\alpha_i = \lambda_i A\alpha_i \Longrightarrow$

λ_i 也是 AA^H 的非零特征值

同理可证：

AA^H的非零特征值 也是 $A^H A$ 的非零特征值

设$y_1,\cdots,y_p$是$A^H A$的特征子空间 V_λ一组基

$k_1Ay_1 + k_2Ay_2 + \cdots + k_pAy_p = 0 \Longrightarrow$

$k_1A^H Ay_1 + k_2A^H Ay_2 + \cdots + k_pA^H Ay_p = 0$

$\Longrightarrow \lambda(k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_py_p) = 0 \Longrightarrow$

$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_py_p = 0 \Longrightarrow$

$k_1,k_2,\cdots,k_p$全为零 $\Longrightarrow$

$Ay_1, Ay_2,\cdots,Ay_p$线性无关 $\Longrightarrow$

$A^H A$的特征子空间 V_λ 的维数不大于 AA^H的特征子空间 V_λ的维数

同理可证： AA^H的特征子空间 V_λ 的维数不大于 $A^H A$特征子空间 V_λ的维数

$\therefore$ $A^H A$与AA^H的非零特征值的代数重 复度相同.

定义 1 设 $A \in C_r^{m\times n}$, $A^H A$的特征值为

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

则称 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}\ (i = 1,2,\cdots,r)$为$A$的正奇异值．

定义 2 设 A、$B\in C^{m\times n}$，如果存在酉矩阵 $U\in C^{m\times m}$ 和 $V\in C^{n\times n}$，使得

$$A=UBV$$

则称 A 与 B 酉等价．

定理 2 若 A 与 B 酉等价，则 A 与 B 有相同正奇异值．

证 A 与 B 酉等价 $\Rightarrow A=UBV \Rightarrow AA^H$

$$=UBV(UBV)^H=UB\underline{VV^H}B^HU^H=UBB^HU^H$$

$\Rightarrow AA^H\sim BB^H \Rightarrow A$ 与 B 有相同正奇异值．

定理 3 设 $A\in C_r^{m\times n}$，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 是 A 的 r 个正奇异值，则存在酉矩阵 $U\in C^{m\times m}$ 和 $V\in C^{n\times n}$，使得

$$A=U\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}V$$

其中，$D=diag(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$.

证 A^HA 为 n 阶正规矩阵 $\Rightarrow VA^HAV^H$

$$=\begin{bmatrix}D^HD&0\\0&0\end{bmatrix}=diag(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_r^2,0,\cdots,0)$$

$$\xrightarrow{V=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix},\ V_1\in C_r^{r\times n},\ V_2\in C_{n-r}^{(n-r)\times n}}$$

$$\begin{bmatrix}V_1A^HAV_1^H&V_1A^HAV_2^H\\V_2A^HAV_1^H&V_2A^HAV_2^H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D^HD&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$V_1A^HAV_1^H=D^HD,\qquad V_2A^HAV_2^H=0$$

$$\Rightarrow V_2A^HAV_2^H=(AV_2^H)^HAV_2^H=0\Rightarrow$$

$$AV_2^H=0 \Rightarrow U_1^H=(D^H)^{-1}V_1A^H\in C^{r\times m}$$

$$\Rightarrow U^H=\begin{pmatrix}U_1^H\\U_2^H\end{pmatrix}\Rightarrow U_2^HU_1=\underline{U_2^HAV_1^HD^{-1}=0}$$

$$\Rightarrow U_2^HAV_1^H=0 \qquad (1)$$

$$U_1^HAV_1^H=(D^H)^{-1}\underline{V_1A^HAV_1^H}=(D^H)^{-1}D^HD$$

$$\Rightarrow U_1^HAV_1^H=D \qquad (2)$$

$$AV_2^H=0\Rightarrow U_1^HAV_2^H=U_2^HAV_2^H=0 \qquad (3)$$

$$\therefore\ U^HAV^H=\begin{pmatrix}U_1^H\\U_2^H\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}V_1^H&V_2^H\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}U_1^HAV_1^H&U_1^HAV_2^H\\U_2^HAV_1^H&U_2^HAV_2^H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}$$

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ 的奇异值分解．

一、求 A^HA 的特征值及特征向量

$$A^HA=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=5,\lambda_2=0,\lambda_2=0;\quad \sigma_1=\sqrt{5}$$

$$(\lambda_iE-A^HA)x=0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

二、构造酉矩阵 V：

$$V^H=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix}$$ 其中，

$$V_1=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix},V_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

三、构造酉矩阵 U：

1. $U_1^H=(D^H)^{-1}V_1A^H=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

2. 将U_1^H扩充成酉矩阵

$$U_1^H x=0 \Rightarrow U_2^H=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

四、结论：

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt5&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

定义 $z=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$\Longleftrightarrow$ 一阶复矩阵的极分解

定理 4 设$A\in C_n^{n\times n}$，则必存在酉矩阵 U与两个正定Hermite矩阵H_1、H_2，使得

$$A=H_1U=UH_2$$

而且这种分解式是唯一 的.

证 $A\in C_n^{n\times n}\Rightarrow A^HA$正定$\Rightarrow\lambda_i>0$ 故$\sigma_i>0$

$\Rightarrow A=U_1DV_1=\underline{U_1DU_1^H}U_1V_1=H_1U$

同理 $A=U_1DV_1=U_1V_1\underline{V_1^HDV_1}=UH_2$

唯一性：$A=H_{11}U_1=H_{12}U_2\Rightarrow H_{11}=H_{12}U_2U_1^H$

$\Rightarrow H_{11}^2=H_{11}H_{11}^H=H_{12}U_2U_1^H(H_{12}U_2U_1^H)^H$

$=H_{12}U_2\underline{U_1^HU_1}U_2^HH_{12}^H=H_{12}H_{12}^H=H_{12}^2$

$\Rightarrow H_{11}=H_{12}\quad U_1=U_2$

推论 1 设$A\in R_n^{n\times n}$，则必存在唯一正交矩 阵Q两个正定实对称矩阵 H_1、H_2，使得

$$A=H_1Q=QH_2$$

推论 2 设$A\in C_n^{n\times n}$，则必存在酉矩阵 U_1、U_2，使得

$$U_2AU_1=diag(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

其中$\alpha_1\ge\alpha_2\ge\cdots\ge\alpha_n>0$是$A$的$n$个正奇异值 .

证 $A\in C_n^{n\times n}\Rightarrow A=UH\Rightarrow A^HA=H^2$

$\underrightarrow{H=U_1diag(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)U_1^H}$

$A=\underline{UU_1}diag(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)U_1^H\quad \underrightarrow{U_2^H=UU_1}$

$A = U_2^H diag(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) U_1^H \Longrightarrow$

$U_2 A U_1 = diag(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

定理 5 设$A \in C^{n\times n}$，则必存在酉矩阵 U与两个半正定 Hermite 矩阵H_1、H_2，使得

$$A = H_1 U = U H_2$$

并且$H_1^2 = AA^H$，$H_2^2 = A^H A$.

证 $A \in C^{n\times n} \Longrightarrow A = U_1 \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_1 \Longrightarrow$

$$A = U_1 \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_1^H \underline{U_1 V_1} = H_1 U$$

同理 $A = \underline{U_1 V_1} V_1^H \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_1 = U H_2$

$$H_1 = U_1 \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_1^H \Longrightarrow$$

$$H_1^2 = U_1 \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_1^H U_1 \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_1^H$$

$$H_1^2 = U_1 \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_1^H$$

$$H_1^2 = U_1 \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_1 \bullet V_1^H \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_1^H$$

$$= AA^H$$