§2 广义逆矩阵 A^-

程光辉

2019 年 12 月 6 日

定义 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{G} \in \mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$\boldsymbol{AGb} = \boldsymbol{b}, \quad \forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}),$$

则称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵，记为 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^-$.

定理 1 设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 存在广义逆矩阵的充要条件是存在 $\boldsymbol{G} \in \mathbf{C}^{n\times m}$，满足

$$\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}.$$

证明： **(必要性)** 对 $\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^n$，则 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Au} \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$. 因 $\boldsymbol{AGb} = \boldsymbol{b}$，故

$$\boldsymbol{AGAu} = \boldsymbol{AGb} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Au},$$

由于 $\boldsymbol{u}$ 的任意性 (可取单位矩阵的列向量)，故 $\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}$.

(充分性) 对 $\forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$，则存在 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^n$ 使得 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Au}$. 因

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Au} = \boldsymbol{AGAu} = \boldsymbol{AGb},$$

故 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵.

推论 1 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，且 $\boldsymbol{A}^-$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个广义逆矩阵，则

$$\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^-) \geq \mathbf{rank}(\boldsymbol{A}).$$

证明：因为

$$\mathbf{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{rank}(\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}) \leq \mathbf{rank}(\boldsymbol{AA}^-) \leq \mathbf{rank}(\boldsymbol{A}^-),$$

故得证.

定义 2 $\boldsymbol{A}\{1\} = \{\boldsymbol{G}|\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A},\ \forall \boldsymbol{G} \in \mathbf{C}^{n\times m}\}$.

定理 2 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，且 A^- 是 A 的任意广义逆矩阵，则

$$\begin{aligned} A\{1\} &= \{G | G = A^- + U - A^- A U A A^-,\ \forall U \in \mathbf{C}^{n\times m}\} \\ &= \{G | G = A^- + (E_n - A^- A)V + W(E_m - AA^-),\ \forall V, W \in \mathbf{C}^{n\times m}\}. \end{aligned}$$

证明：若两个集合互相包含，则这两个集合相等.

对 $\forall G \in A\{1\}$，则 $AGA = A$，于是有

$$G = A^- + G - A^- - A^- A(G - A^-)AA^- = A^- + U - A^- AUAA^-,$$

其中 $U = G - A^-$，进而 $A\{1\} \subset \{G | G = A^- + U - A^- AUAA^-,\ \forall U \in \mathbf{C}^{n\times m}\}$.

对 $\forall M \in \{G | G = A^- + U - A^- AUAA^-,\ \forall U \in \mathbf{C}^{n\times m}\}$，则存在 $U \in \mathbf{C}^{n\times m}$，使得

$$M = A^- + U - A^- AUAA^-,$$

进而

$$\begin{aligned} AMA &= A(A^- + U - A^- AUAA^-)A \\ &= AA^- A + AUA - AA^- AUAA^- A \\ &= A + AUA - AUA \\ &= A. \end{aligned}$$

因此，$\{G | G = A^- + U - A^- AUAA^-,\ \forall U \in \mathbf{C}^{n\times m}\} \subset A\{1\}$，得证.

定理 3 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，$\lambda \in \mathbf{C}$ 非零，则

(1) $(A^T)^- = (A^-)^T$，$(A^H)^- = (A^-)^H$；

(2) AA^-，$A^- A$ 都是幂等矩阵，且 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^-) = \mathrm{rank}(A^- A)$;

(3) $\lambda^{-1} A^-$ 为 λA 的广义逆矩阵;

(4) 设 $S \in \mathbf{C}^{m\times m}$ 是可逆矩阵，$T \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是可逆矩阵，且 $B = SAT$，则 $T^{-1} A^- S^{-1}$ 是 B 的广义逆矩阵;

(5) $R(AA^-) = R(A)$，$N(A^- A) = N(A)$.

证明：(1) 因为 $AA^- A = A$，所以 $A^T = A^T (A^-)^T A^T$，即 $(A^T)^- = (A^-)^T$.

同理，$(A^H)^- = (A^-)^H$.

(2) 因 $(AA^-)^2 = AA^- AA^- = AA^-$，故是幂等矩阵.

因 $\mathrm{rank}(A) \geq \mathrm{rank}(AA^-) \geq \mathrm{rank}(AA^- A) = \mathrm{rank}(A)$，故

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AA^-).$$

同理，可证 $\mathbf{rank}(A)=\mathbf{rank}(A^-A)$.

(3) $(\lambda A)(\lambda^{-1}A^-)(\lambda A)=(\lambda\lambda^{-1}\lambda)AA^-A=\lambda A$.

(4) 因 $BT^{-1}A^-S^{-1}B=SATT^{-1}A^-S^{-1}SAT=SAA^-AT=SAT=B$，则 $T^{-1}A^-S^{-1}$ 是 B 的广义逆矩阵.

(5) 显然有 $\mathrm{R}(AA^-)\subset\mathrm{R}(A)$，$\mathrm{N}(A)\subset\mathrm{N}(A^-A)$，又因

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AA^-)=\mathrm{rank}(A^-A),$$

故 $\mathrm{R}(AA^-)$ 和 $\mathrm{R}(A)$ 的基相同，$\mathrm{N}(A)$ 和 $\mathrm{N}(A^-A)$ 的基相同，即 $\mathrm{R}(AA^-)=\mathrm{R}(A)$，$\mathrm{N}(A^-A)=\mathrm{N}(A)$.

(另证：) 对 $\forall b\in\mathrm{R}(A)$，则存在 $x\in\mathrm{C}^n$，使得 $b=Ax$. 因为 $AA^-A=A$，则有

$$b=Ax=AA^-Ax=AA^-y\in\mathrm{R}(AA^-),$$

其中 $y=Ax$. 由 b 的任意性，有 $\mathrm{R}(AA^-)\supset\mathrm{R}(A)$.

推论 2 设 $A\in\mathrm{C}^{m\times n}$，则

(1) $\mathrm{rank}(A)=n$ 的充要条件是 $A^-A=E_n$;

(2) $\mathrm{rank}(A)=m$ 的充要条件是 $AA^-=E_m$.

证明： (1) **(充分性)** 由定理 3(2) 知，$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^-A)=\mathrm{rank}(E_n)=n$.

(必要性) 因为 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^-A)=n$，则 A^-A 是 n 阶可逆矩阵，即有

$$E_n=(A^-A)(A^-A)^{-1}=A^-(AA^-A)(A^-A)^{-1}=(A^-A)(A^-A)(A^-A)^{-1}=A^-A.$$

引理 1 设 $A\in\mathrm{C}^{m\times n}$，且 $P\in\mathrm{C}^{m\times m}$ 和 $Q\in\mathrm{C}^{n\times n}$ 都是可逆矩阵，则

$$Q(PAQ)^-P\in A\{1\}.$$

证明: 因 P 和 Q 都是可逆矩阵，$PAQ(PAQ)^-PAQ=PAQ$，所以 $AQ(PAQ)^-PA=A$，即

$$Q(PAQ)^-P\in A\{1\}.$$

引理 2 设 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & O\\ O & A_{22}\end{bmatrix}\in\mathrm{C}^{m\times n}$，则存在 X_{12},X_{21} 满足 $A_{11}X_{12}A_{22}=O$，$A_{22}X_{21}A_{11}=O$，使得

$$\begin{bmatrix}A_{11}^- & X_{12}\\ X_{21} & A_{22}^-\end{bmatrix}\in A\{1\}.$$

证明：直接验证即可.

$$
\begin{aligned}
A\begin{bmatrix} A_{11}^{-} & X_{12} \\ X_{21} & A_{22}^{-} \end{bmatrix} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-} & X_{12} \\ X_{21} & A_{22}^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11}A_{11}^{-} & A_{11}X_{12} \\ A_{22}X_{21} & A_{22}A_{22}^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11}A_{11}^{-}A_{11} & A_{11}X_{12}A_{22} \\ A_{22}X_{21}A_{11} & A_{22}A_{22}^{-}A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= A.
\end{aligned}
$$

定理 4 设 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，有

(1) 如果 A_{11}^{-1} 存在，则存在 X_{12}，X_{21} 满足

$$
\begin{aligned}
X_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) = O, \\
(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})X_{21} = O,
\end{aligned}
$$

使得

$$
\begin{bmatrix} E_r & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & E_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & X_{12} \\ X_{21} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E_{m-r} \end{bmatrix} \in A\{1\}.
$$

(2) 如果 A_{22}^{-1} 存在，则存在 Y_{12}，Y_{21} 满足

$$
\begin{aligned}
Y_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) = O, \\
(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})Y_{12} = O,
\end{aligned}
$$

使得

$$
\begin{bmatrix} E_r & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & E_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-} & Y_{12} \\ Y_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & E_{m-r} \end{bmatrix} \in A\{1\}.
$$

证明：(1) 因为

$$
\begin{bmatrix} E_r & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E_{m-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & E_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix},
$$

利用引理 1 和引理 2，即可得证.

(2) 同 (1) 的证明.