

# Verovatnoća i statistika

## Vezbe 4

### Uslovna verovatnoća

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ako se radi o jednako verovatnim ishodima onda je

$$P(A|B) = \frac{\text{broj ishoda koji su povoljni i za } A \text{ i za } B}{\text{broj ishoda povoljnih za } B}$$

Kao i na prošlim vežbama ovi zadaci se mogu približno rešiti simulacijama u R-u.

1. Bacaju se dve kocke. Ako znamo da je zbir dobijenih brojeva 8, naći uslovnu verovatnoću da je bar jedan od brojeva paran.
2. Novčić se baca tri puta. Koja je verovatnoća da je u drugom bacanju palo Pismo, ako znamo da je ukupno palo bar jedno Pismo?
3. Koja je verovatnoća da je slučajno izabrani broj između 1 i 100 deljiv sa 3, ako znamo da mu je bar jedna cifra 5?

Kako bi izračunali ovu verovatnoću programerski?

- (a) Prebrojimo koliko ima brojeva od 1-100 sa bar jednom cifrom 5 i stavimo ih u vektor B.
- (b) Od elemenata vektora B prebrojimo koliko ih je deljivo sa 3. Taj broj podelimo dužinom vektora B i voilà.
- (c) Uporedite taj rezultat sa onim dobijenim teorijski.

Primetimo da ovaj program možemo adaptirati za mnogo zahtevniji problem, kada teorijski nije tako lako i mnogo veći brojevi su u pitanju.

Ako je  $\{B_1, \dots, B_n\}$  jedna particija skupa svih ishoda  $\Omega$  i  $A$  neki događaj u  $\Omega$ , onda važi tzv **Zakon potpune verovatnoće**:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

4. Imamo dve kutije. U prvoj kutiji su dve loptice obeležene sa 1 i 2. U drugoj kutiji su tri loptice, obeležene sa 3, 4 i 5. Biramo jednu kutiju na slučajan način (sa jednakim verovatnoćama) i onda iz te kutije biramo opet na slučajan način jednu lopticu. Koja je verovatnoća da ćemo izabrati lopticu broj 5?
5. Imamo dve kutije. U prvoj kutiji su tri loptice obeležene sa 1, 2 i 3. U drugoj kutiji su četiri loptice, obeležene sa 2, 3, 4 i 5. Biramo jednu kutiju na slučajan način tako da je verovatnoća izbora prve kutije  $1/5$  a verovatnoća izbora druge kutije  $4/5$ . Potom iz te kutije izaberemo jednu lopticu (uniformly at random). Koja je verovatnoća da ćemo izabrati lopticu obeleženu brojem 2?

Hint:  $B_1$  je događaj da je izabrana prva kutija a  $B_2$  da je izabrana druga.  $A$  je događaj da je izabrana loptica broj 2. Применити Закон потпуне вероватноће

6. Kada Vesna provodi dan sa bebisiterkom postoji verovatnoća 0.6 da će uključiti TV i gledati crtani. Njena mala sestra Mina ne ume da upali TV sama. Ako je TV već upaljen, onda Mina gleda crtani sa verovatnoćom 0.8. Sutra devojčice provode dan sa bebisiterkom.

(a) Koja je verovatnoća da će sutra obe devojčice gledati TV?

(b) Koja je verovatnoća da će sutra Mina gledati TV?

(c) Koja je verovatnoća da će sutra samo Vesna gledati TV?

7. Iskoristi definiciju uslovne verovatnoće i aditivnost verovatnoće da dokažeš da je

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

8. Neka je  $P(A|B) = 0.6$  i  $P(B) = 0.5$ . Naći  $P(A^cB)$ .

Ako je  $\{B_1, \dots, B_n\}$  jedna particija skupa svih ishoda  $\Omega$  i  $A$  neki događaj u  $\Omega$ , onda važi **Bajesova teorema**

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

9. Imamo dve kutije. U prvoj kutiji su tri loptice obeležene sa 1, 2 i 3. U drugoj kutiji su četiri loptice, obeležene sa 2, 3, 4 i 5. Biramo jednu kutiju na slučajan način tako da je verovatnoća izbora prve kutije  $1/5$  a verovatnoća izbora druge kutije  $4/5$ . Potom iz te kutije izaberemo jednu lopticu (uniformly at random). Pretpostavimo da smo izabrali lopticu obeleženu brojem 2. Koja je verovatnoća da je izvadjena iz druge kutije?

Hint: Nazovite događaje kao u zadatku 5. i upotrebite Bajesovu teoremu

10. Otvorimo [MontyHall game](#) i pročitamo o čemu se radi u ovoj igri.

Igrajte u paru. Jedna osoba neka uvek ostane pri prvom izboru (npr vrata broj 1) i prebrojte od 30 pokusaja koliko je puta dobila nagradu.

Druga osoba neka uvek PROMENI vrata, kad joj se ponudi izbor. I opet igrajte 30 puta i prebrojte nagrade. Ko je bolje prošao? Šta mislite zašto?

11. Imamo kesicu sa 3 kockice. Jedna je četvorostrana, jedna je šestostrana a jedna je 12-ostrana. Otvorimo kesicu, izvučemo jednu kockicu na slučajan način i bacimo je. Dobili smo broj 4. Koja je verovatnoća da smo bacili šestostranu kocku?

12. Osiguravajuća kompanija Sava ima dva tipa mušterija, pažljive i nemarne. Pažljiv klijent u toku jedne godine doživi nezgodu sa verovatnoćom 0.01. Nemarni klijent u toku jedne godine doživi nezgodu sa verovatnoćom 0.04. 80 % svih klijenata su pažljivi a 20 % nemarni. Pretpostavimo da slučajno izabrani klijent doživi nezgodu u toku ove godine. Koja je verovatnoća da je to jedan od pažljivih?

**$A$  i  $B$  su nezavisni ako je  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$**

13. Pretpostavimo da je  $P(A) = 1/3$ ,  $P(B) = 1/3$ ,  $P(A \cap B^c) = 2/9$ . Odredite da li su  $A$  i  $B$  nezavisni ili ne.

14. Neka su  $A$  i  $B$  dva *disjunktna* događaja. Pod kojim uslovima oni mogu biti nezavisni?
15. Svakog jutra Valentina ne stigne na autobus sa verovatnoćom  $1/10$ , nezavisno od ostalih dana. Koja je verovatnoća da će sledeće nedelje ona stigne na autobus u ponedeljak, utorak i četvrtak, a propusti ga u sredu i petak?
16. Neka su  $A, B, C$  **nezavisni** događaji takvi da  $P(A) = 1/2, P(B) = 1/3, P(C) = 1/4$ . Naći
- (a)  $P(A \cap B \cup C)$

$$P(ABC) = P(A|BC)P(B|C)P(C)$$

17. Promešamo špil karata i podelimo 3 karte (bez vraćanja). Koja je verovatnoća da je prva karta kraljica, druga karta kralj a treća karta kec?
18. U populaciji su krvne grupe prisutne u sledećim procentima: 40% grupa A, 11% grupa B, 4% grupa AB i 45% nulta. Biraju se dve osobe na slučajan način. Naći
- (a) verovatnoću da obe osobe imaju nultu krvnu grupu.
- (b) verovatnoću da obe osobe imaju istu krvnu grupu.