



Генетски алгоритам за решавање проблема минималног доминирајућег скупа

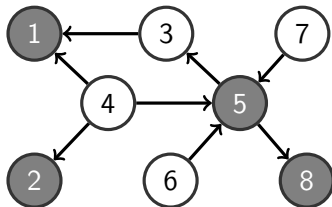
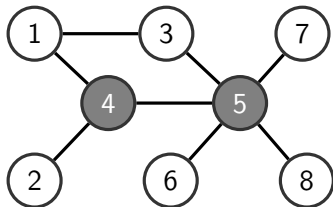
студент: Немања Живановић 1056/2021
ментор: др Нина Радојичић Матић

Универзитет у Београду, Математички факултет

15. септембар 2023.

Опис проблема

- Проблема минималног доминирајућег скупа за граф $G = (V, E)$
 - Неусмерена варијанта - тражи се кардиналност најмањег подскупа чворова $D \subseteq V$ тако да је сваки чвор из V или у D или суседан чвору из D
 - Усмерена варијанта - тражи се кардиналност најмањег подскупа чворова $D \subseteq V$ тако да је сваки чвор из V или у D или има грану ка неком чвору из D



- Другим речима, потребно је пронаћи подскуп чворова такав да за сваки чвор који није у подскупу важи да постоји грана од тог чвора ка бар једном чвору у подскупу

Генетски алгоритам

- Репрезентација јединки
- Функција прилагођености
- Почетна популација
- Селекција
- Репродукција

-
- ```

graph TD
 1((1)) --> 3((3))
 3 --> 1
 1 --> 4((4))
 3 --> 4
 4 --> 2((2))
 4 --> 5((5))
 2 --> 5
 5 --> 1

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻ 4/33

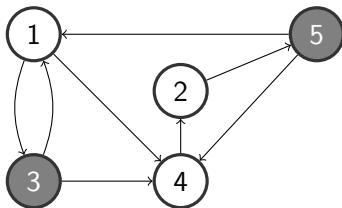
- 
- ```

graph TD
    1((1)) --> 3((3))
    3 --> 1
    1 --> 4((4))
    3 --> 4
    4 --> 2((2))
    4 --> 5((5))
    2 --> 5
    5 --> 1
  
```

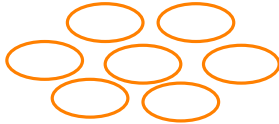
- Граф ће бити представљен помоћу низа од n природних бројева из интервала $[1, 2^n)$ који представља имплицитну матрицу повезаности

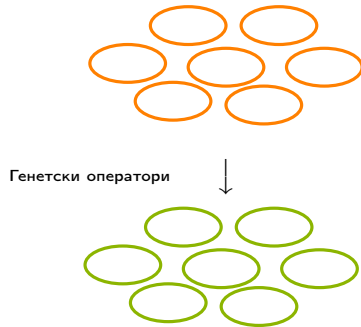
Репрезентација јединки

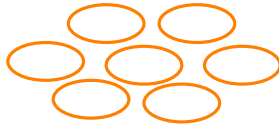
- Основно питање при имплементацији генетског алгоритма
- Јединка ће бити представљена бројем из интервала $[1, 2^n)$ који се посматра као n -битни број



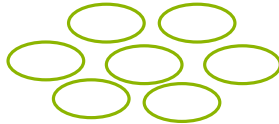
Јединка 5 = (0 0 1 0 1)



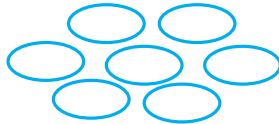




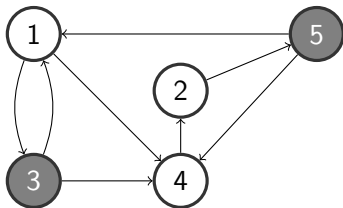
Генетски оператори



Генетски оператори



- Функција прилагођености — број јединица у бинарном запису јединке
- Јединке са мањим бројем јединица се сматрају квалитетнијим



Јединка $5 = (0\ 0\ 1\ 0\ 1)$ има вредност 2

- Постоји више начина за рачунање
 - наиван приступ — $\mathcal{O}(n)$
 - Вегнеров метод — $\mathcal{O}(\text{број јединица})$
 - најбољи метод — $\mathcal{O}(\text{број јединица}/4)$

Вегнеров метод

- У свакој итерацији петље елиминише се текућа најдеснија јединица док број не постане нула

```
count = 0
while number:
    number &= (number - 1)
    count += 1
return count
```

- Ово је најбољи начин за бројање бинарних јединица за број произвољне дужине
- Постоји ефикаснији начин у контексту генетског алгоритма

Вегнеров метод

- У свакој итерацији петље елиминише се текућа најдеснија јединица док број не постане нула

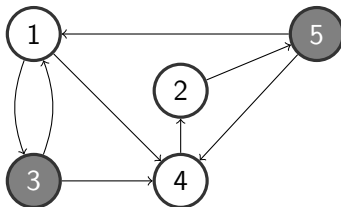
```
count = 0
while number:
    → number &= (number - 1)
    count += 1
return count
```

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\
 \& & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0
 \end{array}$$

- Ово је најбољи начин за бројање бинарних јединица за број произвољне дужине
- Постоји ефикаснији начин у контексту генетског алгоритма

Поправка јединки

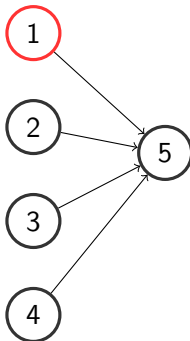
- Потребно је обезбедити да јединке буду валидни доминирајући скупови
- Јединка неће бити валидна онда када постоји бар један недоминирани чвор



- Постоји више начина за поправку јединки

chromosome_repair

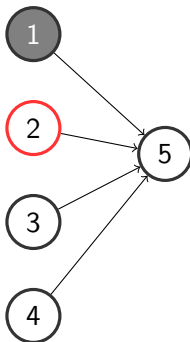
- Провера се врши према нумерацији чворова



Јединка 0 = (0 0 0 0 0)

chromosome_repair

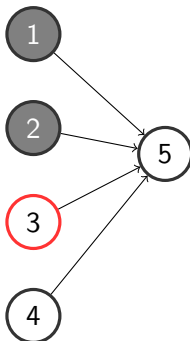
- Провера се врши према нумерацији чворова



Јединка 16 = (1 0 0 0 0)

chromosome_repair

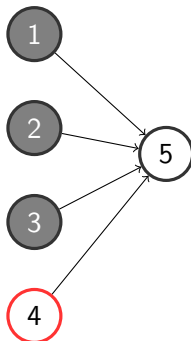
- Провера се врши према нумерацији чворова



Јединка 24 = (1 1 0 0 0)

chromosome_repair

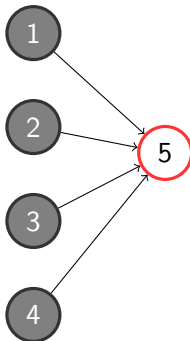
- Провера се врши према нумерацији чворова



Јединка 28 = (1 1 1 0 0)

chromosome_repair

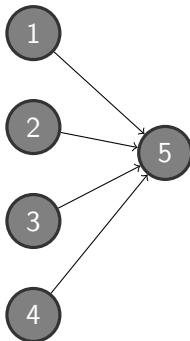
- Провера се врши према нумерацији чворова



Јединка 30 = (1 1 1 1 0)

chromosome_repair

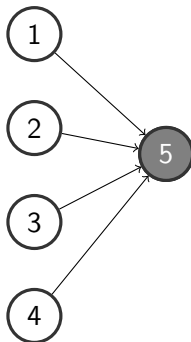
- Провера се врши према нумерацији чворова



Јединка 31 = (1 1 1 1 1)

chromosome_repair

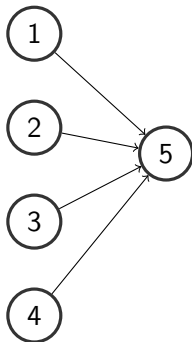
- Провера се врши према нумерацији чворова



Јединка 1 = (0 0 0 0 1)

better_chromosome_repair

- Распоред провере чворова се фиксира према улазном степену чворова
- Потребна је сортирана листа чворова према улазном степену

better_chromosome_repair

Улазни степени чворова:

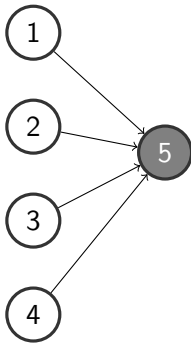
5 : 4

1 : 0

2 : 0

3 : 0

4 : 0

better_chromosome_repair

Улазни степени чворова:

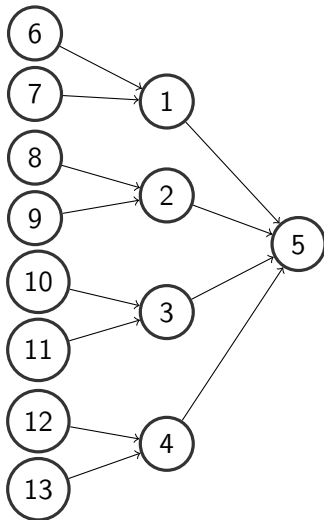
5 : 4

1 : 0

2 : 0

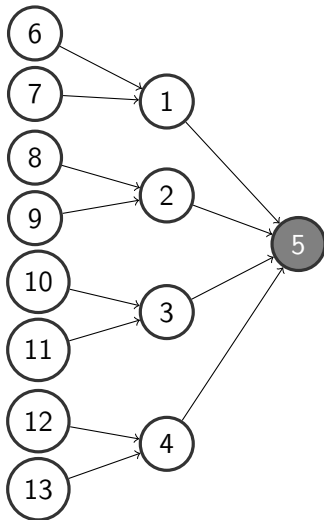
3 : 0

4 : 0

better_chromosome_repair

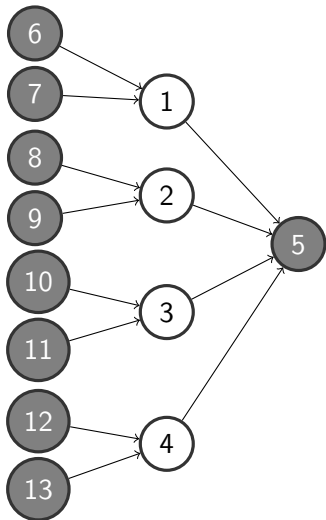
Улазни степени чворова:

	6 : 0
	7 : 0
5 : 4	8 : 0
1 : 2	9 : 0
2 : 2	10 : 0
3 : 2	11 : 0
4 : 2	12 : 0
	13 : 0

better_chromosome_repair

Улазни степени чворова:

	6 : 0
	7 : 0
5 : 4	8 : 0
1 : 2	9 : 0
2 : 2	10 : 0
3 : 2	11 : 0
4 : 2	12 : 0
	13 : 0

better_chromosome_repair

Улазни степени чворова:

	6 : 0
	7 : 0
5 : 4	8 : 0
1 : 2	9 : 0
2 : 2	10 : 0
3 : 2	11 : 0
4 : 2	12 : 0
	13 : 0

Почетна популација

- Најједноставнији начин генерисања почетних јединки јесте да се псеудослучајно бирају из интервала $[1, 2^n)$
- Усложњено генерисање почетне популације
 - ограничење броја јединица сваке јединке
 - бирање позиција јединица у оквиру сваке јединке

Почетна популација

- Најједноставнији начин генерисања почетних јединки јесте да се псеудослучајно бирају из интервала $[1, 2^n)$

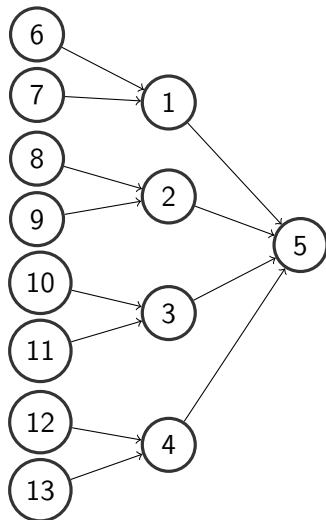
23	4	21	28	9	3
10111	00100	10101	11100	01001	00011

- Усложњено генерисање почетне популације
 - ограничење броја јединица сваке јединке
 - бирање позиција јединица у оквиру сваке јединке

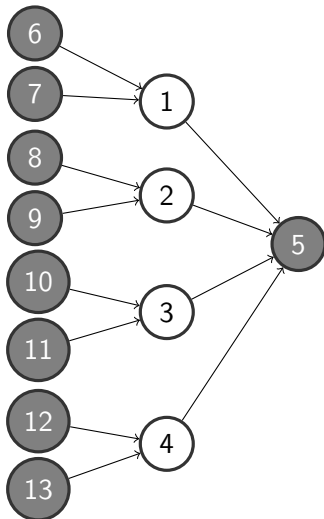
Ограничење броја јединица

- Треба одабрати функцију која расте спорије од n
- Горње ограничење ће представљати кардиналност доминирајућег скупа који се добије након слања празног скупа у функцију *better_chromosome_repair*

Ограничење броја јединица



Ограничење броја јединица

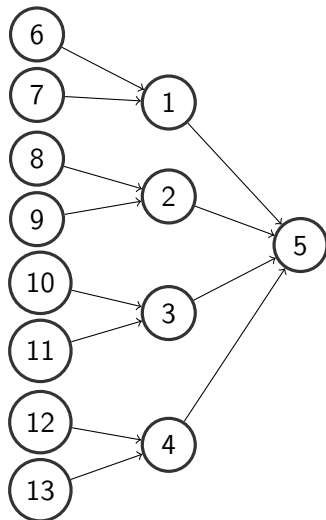


јединке почетне популације
ће имати највише 9
чворова

Бирање позиција јединица у оквиру јединке

- Приоритет при бирању имају чворови са већим улазним степеном
- Сваком чвору се додељује вероватноћа у складу са његовим улазним степеном
- За добијање тих вероватноћа може се искористити листа улазних суседа чворова

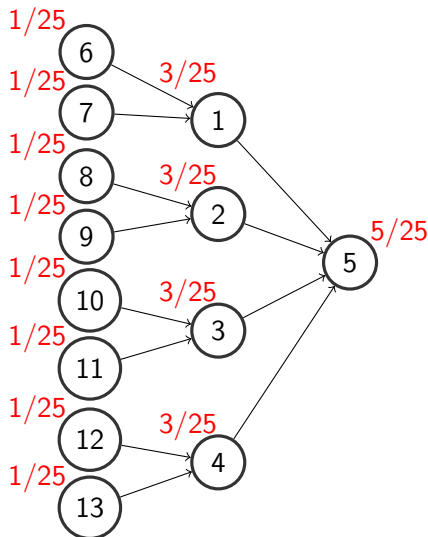
Бирање позиција јединица у оквиру јединке



Улазни степени чворова:

	6 : 0
	7 : 0
5 : 4	8 : 0
1 : 2	9 : 0
2 : 2	10 : 0
3 : 2	11 : 0
4 : 2	12 : 0
	13 : 0

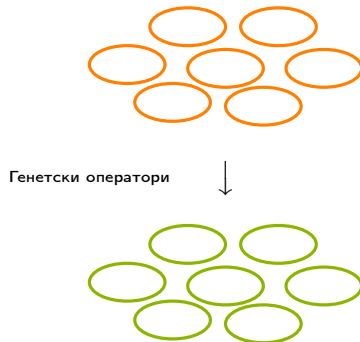
Бирање позиција јединица у оквиру јединке



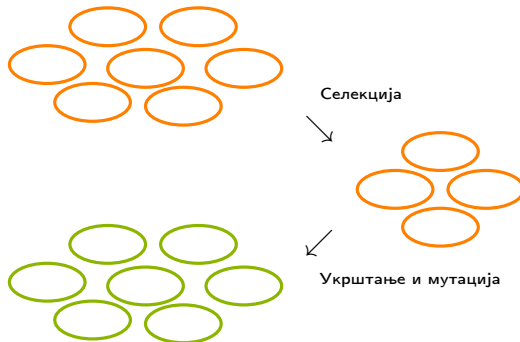
Улазни степени чворова:

6 : 0	
7 : 0	
5 : 4	8 : 0
1 : 2	9 : 0
2 : 2	10 : 0
3 : 2	11 : 0
4 : 2	12 : 0
	13 : 0

Селекција



Селекција



Селекција

- Турнирска селекција



Укрштање и мутација

- Варијанта укрштања која је одабрана је једнопозиционо укрштање

родитељи:



деца:

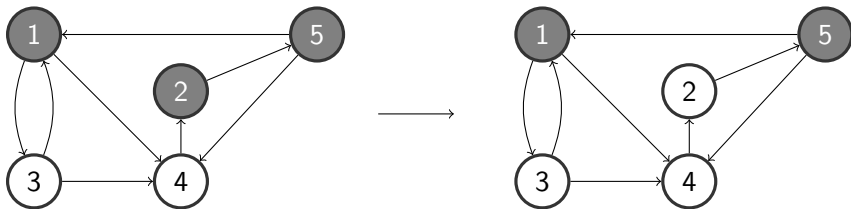


- Мутација која је одабрана је комплементирање произвољног бита

деца											
након	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	(4 јединице)
мутација:	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	(7 јединица)

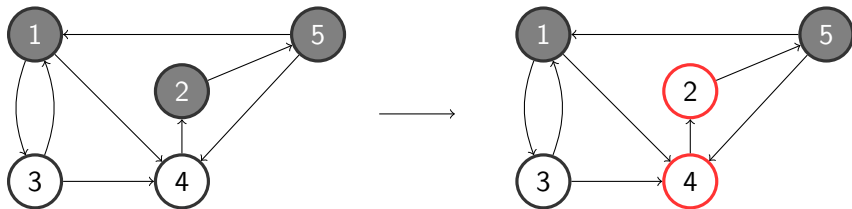
best_chromosome_repair

- Проблем претходних приступа — увек се проверава сваки чвор у графу
- Базира се на томе да су родитељске јединке доминирајући скупови



best_chromosome_repair

- Проблем претходних приступа — увек се проверава сваки чвор у графу
- Базира се на томе да су родитељске јединке доминирајући скупови



best_chromosome_repair

родитељи: $\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \longrightarrow$ деца: $\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

best_chromosome_repair

родитељи:

1	1		0	0	1
1	0		1	1	1

 \longrightarrow деца:

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1

$$\neg \implies \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

best_chromosome_repair

родитељи:

1	1		0	0	1
1	0		1	1	1

 \longrightarrow деца:

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1

$$\neg \implies \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{Вегнеров метод}} \begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (8) \\ \& & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0) \end{array}$$

best_chromosome_repair

родитељи:

1	1		0	0	1
1	0		1	1	1

 \rightarrow деца:

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1

$$\neg \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{Вегнеров метод}} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{matrix} (8) \\ (0) \end{matrix}$$

$$\rightarrow 8 - 0 = 8 \rightarrow \log_2 8 = 3$$

best_chromosome_repair

родитељи:

1	1		0	0	1
1	0		1	1	1

 \longrightarrow деца:

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1

$$\neg \implies \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{Вегнеров метод}} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{matrix} (8) \\ (0) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow 8 - 0 = 8 \longrightarrow \log_2 8 = 3 \longrightarrow 5 - 3 = 2$$

best_chromosome_repair

родитељи:

1	1		0	0	1
1	0		1	1	1

 \longrightarrow деца:

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1

$$\neg \implies \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{Вегнеров метод}} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{matrix} (8) \\ (0) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow 8 - 0 = 8 \longrightarrow \log_2 8 = 3 \longrightarrow 5 - 3 = 2$$

\longrightarrow у листу потенцијално недоминираних чворова се додају улазни суседи чвора 2

best_chromosome_repair

родитељи:

1	1		0	0	1
1	0		1	1	1

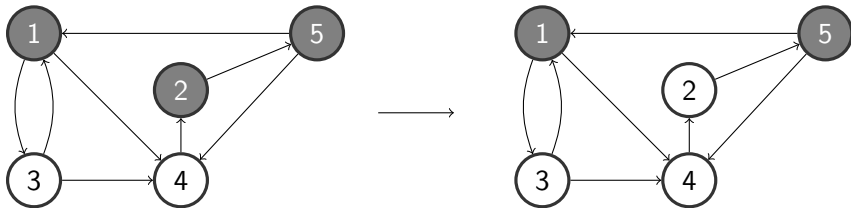
 → деца:

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1

$$\neg \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{Вегнеров метод}} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{matrix} (8) \\ (0) \end{matrix}$$

$$\rightarrow 8 - 0 = 8 \rightarrow \log_2 8 = 3 \rightarrow 5 - 3 = 2$$

→ у листу потенцијално недоминираних чворова се додају улазни суседи чвора 2



best_chromosome_repair

родитељи:

1	1		0	0	1
1	0		1	1	1

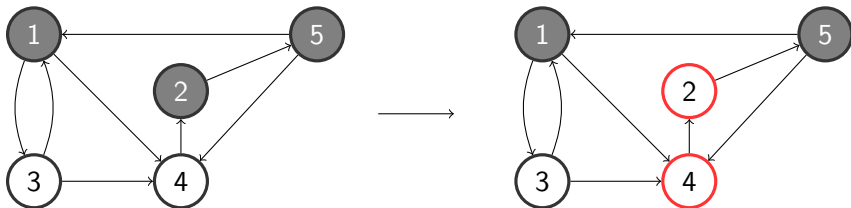
 → деца:

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1

$$\neg \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{Вегнеров метод}} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{matrix} (8) \\ (0) \end{matrix}$$

$$\rightarrow 8 - 0 = 8 \rightarrow \log_2 8 = 3 \rightarrow 5 - 3 = 2$$

→ у листу потенцијално недоминираних чворова се додају улазни суседи чвора 2



best_chromosome_repair

родитељи:

1	1		0	0	1
1	0		1	1	1

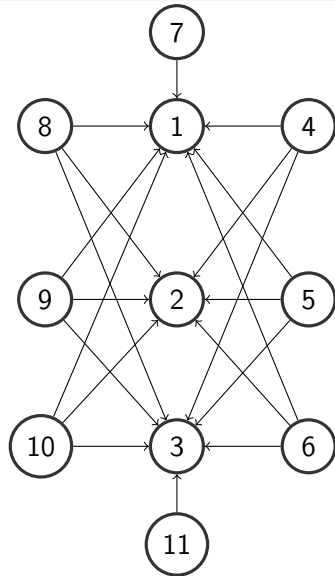
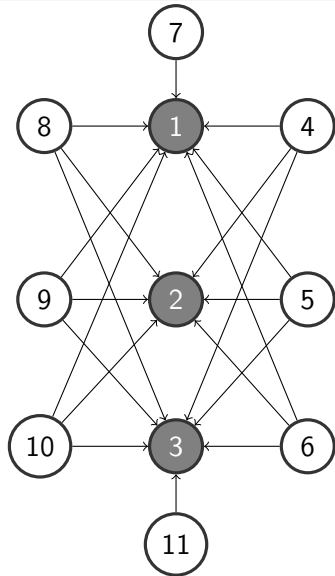
 → деца:

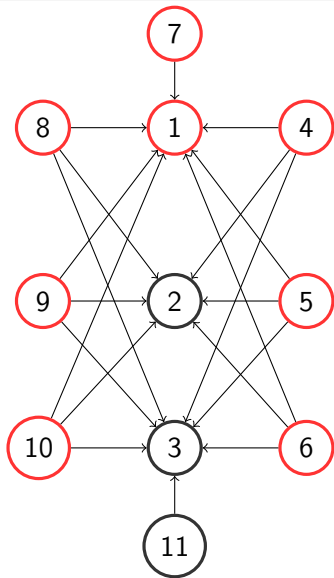
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1

$\neg \Rightarrow$

1	0	1	1	1
1	1	1	1	1
<hr/>				
0	0	0	0	0

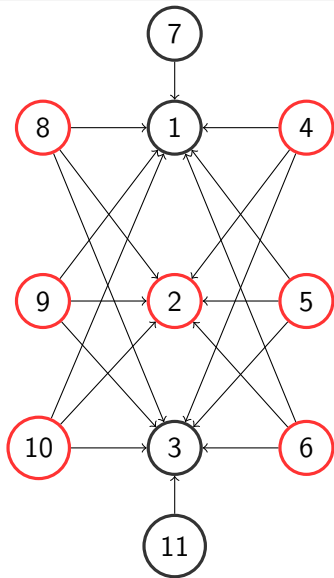
→ нема недоминираних чворова

best_chromosome_repair

best_chromosome_repair

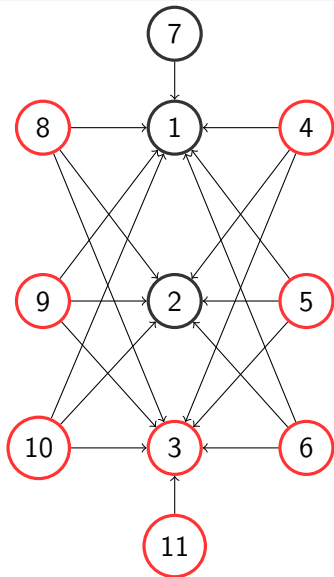
Листа потенцијално
недоминираних чворова:

3,4,5,6,7,8,9

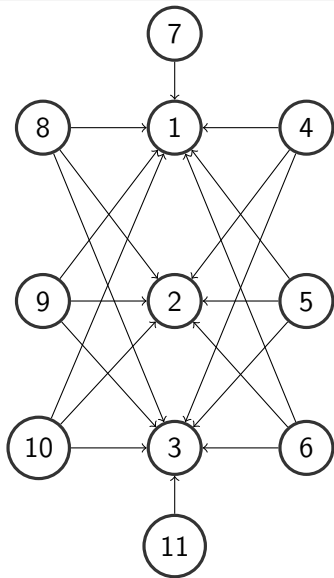
best_chromosome_repair

Листа потенцијално
недоминираних чворова:

3,4,5,6,7,8,9, 1,3,4,5,7,8,9



3,4,5,6,7,8,9, 1,3,4,5,7,8,9
2,3,4,5,7,8,9,10

best_chromosome_repair

Листа потенцијално
недоминираних чворова:

3,4,5,6,7,8,9, 1,3,4,5,7,8,9
2,3,4,5,7,8,9,10

Листа потенцијално
недоминираних чворова
садржи 23 чвора

Најбољи начин за бројање јединица

родитељи:

$$\begin{array}{c|c}
 \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}}^{x_1} & \overbrace{\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}}^{x_2} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y_1} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y_2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_1 + x_2 = 6 \\
 y_1 + y_2 = 5
 \end{array}$$



деца:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_1 + y_2 \text{ јединица} \\
 y_1 + x_2 \text{ јединица}
 \end{array}$$

- Издвајају се бројеви **1 1 0** 0 0 0 0 0 0 0 и **0 1 1** 0 0 0 0 0 0 0 и њима рачуна број јединица Вегнеровим методом — укупно 4 итерације петље

Најбољи начин за бројање јединица

родитељи:

$$\begin{array}{c|c}
 \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}}^{x_1=2} & \overbrace{\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}}^{x_2} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y_1=2} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y_2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2 + x_2 = 6 \\
 2 + y_2 = 5
 \end{array}$$



деца:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 + y_2 \text{ јединица} \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 + x_2 \text{ јединица}
 \end{array}$$

- Издвајају се бројеви **1 1 0** 0 0 0 0 0 0 0 и **0 1 1** 0 0 0 0 0 0 0 и њима рачуна број јединица Вегнеровим методом — укупно 4 итерације петље

Најбољи начин за бројање јединица

родитељи:

$$\begin{array}{c|c}
 \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}}^{x_1=2} & \overbrace{\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}}^{x_2} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y_1=2} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y_2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_2 = 6 - 2 = 4 \\
 y_2 = 5 - 2 = 3
 \end{array}$$



деца:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 + y_2 \text{ јединица} \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 + x_2 \text{ јединица}
 \end{array}$$

- Издвајају се бројеви **1 1 0** 0 0 0 0 0 0 0 и **0 1 1** 0 0 0 0 0 0 0 и њима рачуна број јединица Вегнеровим методом — укупно 4 итерације петље

Најбољи начин за бројање јединица

родитељи:

$$\begin{array}{c|c}
 \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}}^{x_1=2} & \overbrace{\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}}^{x_2=4} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y_1=2} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{y_2=3}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_1 + x_2 = 6 \\
 y_1 + y_2 = 5
 \end{array}$$



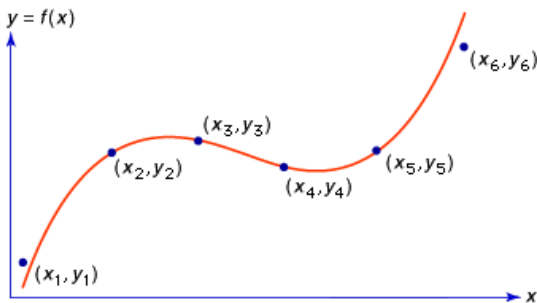
деца:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 + 3 = 5 \text{ јединица} \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 + 4 = 6 \text{ јединица}
 \end{array}$$

- Издвајају се бројеви **1 1 0** 0 0 0 0 0 0 0 и **0 1 1** 0 0 0 0 0 0 0 и њима рачуна број јединица Вегнеровим методом — укупно 4 итерације петље

Подешавање вредности параметара

- Пакетом *irace* су подешене вредности параметара за графове величине x_1, x_2, \dots, x_m
- Интерполацијом помоћу радијалне базне функције се интерполира замишљена функција вредности параметра између тачака x_1, x_2, \dots, x_m



© 2003 Encyclopædia Britannica, Inc.

Поређење са егзактним алгоритмима

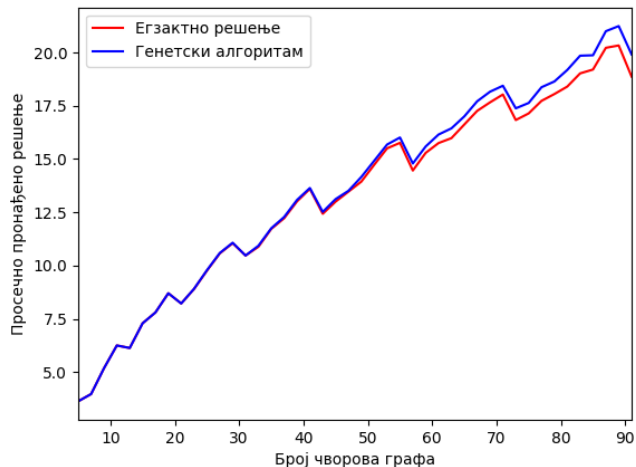
- Врши се поређење са алгоритмом грубе силе и Ван Рој-Бодландеровим алгоритмом
- Граница за дужину извршавања је 120 секунди и односи се на просечну дужину извршавања на 100 графова
- Бележе се и кардиналности пронађених решења

Поређење са егзактним алгоритмима

	>1s	>120s
Груба сила	~20 чворова	~30 чворова
Ван Рој-Бодландер	~70 чворова	~90 чворова
Генетски алгоритам	~115 чворова	~1600 чворова

- Генетски алгоритам је постао бржи од алгоритма грубе силе за графове са око 17 чворова, а од Ван Рој-Бодландеровог за графове са око 60 чворова

Поређење са егзактним алгоритмима



Слике

<https://www.researchgate.net/figure/>

Binary-tournament-selection_fig1_340097570

<https://www.britannica.com/science/interpolation>

Захвалница

Хвала на пажњи!