Координаты вектора в базисе.

Даны векторы $\varepsilon_1(0;1;1;1)$, $\varepsilon_2(1;0;1;1)$, $\varepsilon_3(1;1;0;1)$, $\varepsilon_4(1;1;1;0)$, X(1;4;2;2). Показать, что векторы образуют базис четырехмерного пространства и найти координаты вектора X в этом базисе.

Данная задача состоит из двух частей. Сначала необходимо проверить образуют ли векторы базис. Векторы образуют базис, если определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля, в противном случае вектора не являются базисными и вектор X нельзя разложить по данному базису.

Вычислим определитель матрицы:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Минор для (1,1):

$$\Delta_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель для этого минора.

$\Delta_{1,1} = 0*(0*0 - 1*1) - 1*(1*0 - 1*1) + 1*(1*1 - 0*1) = 2$

Минор для (2,1):

$$\Delta_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель для этого минора.

$\Delta_{2,1} = 1*(0*0 - 1*1) - 1*(1*0 - 1*1) + 1*(1*1 - 0*1) = 1$

Минор для (3,1):

$$\Delta_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель для этого минора.

$\Delta_{3,1} = 1*(1*0 - 1*1) - 0*(1*0 - 1*1) + 1*(1*1 - 1*1) = -1$

Минор для (4,1):

$$\Delta_{4,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель для этого минора.

$\Delta_{4,1} = 1*(1*1 - 0*1) - 0*(1*1 - 0*1) + 1*(1*1 - 1*1) = 1$

$\Delta = 0*2-1*1+1*(-1)-1*1 = -3$

Определитель матрицы равен Δ =-3

Так как определитель отличен от нуля, то векторы образуют базис, следовательно, вектор X можно разложить по данному базису. Т.е. существуют такие числа α_1, α_2, α_3, α_4, что имеет место равенство:

$X = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \alpha_4\varepsilon_4$

Запишем данное равенство в координатной форме:

$(1;4;2;2) = \alpha(0;1;1;1) + \alpha(1;0;1;1) + \alpha(1;1;0;1) + \alpha(1;1;1;0)$

Используя свойства векторов, получим следующее равенство:

$(1;4;2;2) = (0\alpha_1;1\alpha_1;1\alpha_1;1\alpha_1;) + (1\alpha_2;0\alpha_2;1\alpha_2;1\alpha_2;) + (1\alpha_3;1\alpha_3;0\alpha_3;1\alpha_3;) + (1\alpha_4;1\alpha_4;1\alpha_4;0\alpha_4;)$

$(1;4;2;2) = (0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\alpha_4;1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\alpha_4;1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4;1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4)$

По свойству равенства векторов имеем:

$0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\alpha_4 = 1$

$1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 + 1\alpha_4 = 4$

$1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 + 1\alpha_4 = 2$

$1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 1\alpha_3 + 0\alpha_4 = 2$

Решаем полученную систему уравнений методом Гаусса.
Запишем систему в виде расширенной матрицы:

0	1	1	1	1
1	0	1	1	4
1	1	0	1	2
1	1	1	0	2

Работаем со столбцом №1.
Умножим 3-ю строку на (-1). Добавим 3-ю строку к 2-й:

0	1	1	1	1
0	-1	1	0	2
1	1	0	1	2
1	1	1	0	2

Умножим 4-ю строку на (-1). Добавим 4-ю строку к 3-й:

0	1	1	1	1
0	-1	1	0	2
0	0	-1	1	0
1	1	1	0	2

Для удобства вычислений поменяем строки местами:

0	0	-1	1	0
0	1	1	1	1
0	-1	1	0	2
1	1	1	0	2

Работаем со столбцом №2.
Добавим 3-ю строку к 2-й:

0	0	-1	1	0
0	0	2	1	3
0	-1	1	0	2

1	1	1	0	2

Работаем со столбцом №3.
Умножим 1-ю строку на (2). Добавим 2-ю строку к 1-й:

0	0	0	3	3
0	0	2	1	3
0	-1	1	0	2
1	1	1	0	2

Теперь исходную систему можно записать так:
x4 = 3/3 = 1
x3 = [3-x4]/2 = 1
x2 = [2-x3]/(-1) = -1
x1 = 2-(x2 + x3) = 2

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$X = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$