

Лабораторная работа № 1. Моделирование случайных процессов

Задача Бюффона. С помощью случайного метода можно вычислить число π .

Для этого необходимо решить задачу Бюффона. Французский математик Бюффон (XVIII в.) определил, что если на поле, разграфленное параллельными прямыми, расстояние между которыми L , бросается наугад игла длиной l , то вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну прямую, определяется формулой: $p = \frac{2l}{\pi L}$.

Эта задача дала способ вычисления числа π .

Действительно, если $L=2l$, то $p = \frac{1}{\pi}$

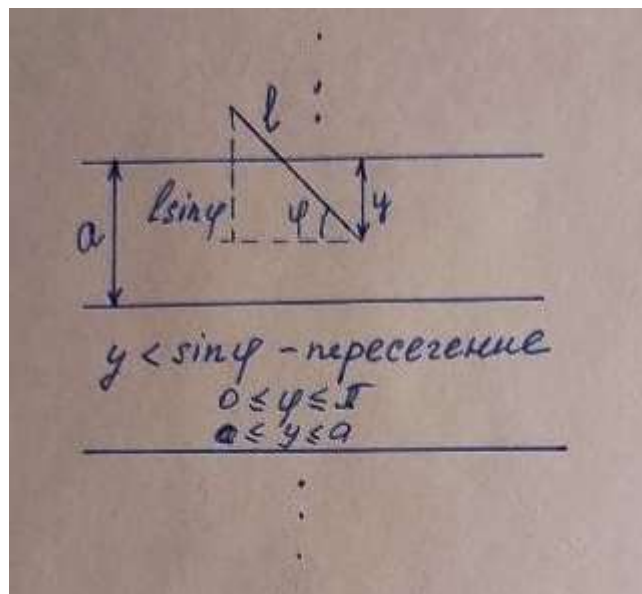


Рисунок 1. Случай, когда игла пересекает любую из линий на плоскости. Тогда положение иглы мы можем определить двумя координатами – углом пересечения, а также расстоянием от нижнего края.

Таким образом, автором было вычислено 200 знаков после запятой числа π . Точность получаемого решения зависит от количества проведенных экспериментов.

Задачу Бюффона можно легко смоделировать на компьютере

Известно, что $P = \frac{N1}{N}$, где N – число бросаний, $N1$ – число пересечений иглы с линиями.

Как определить, пересекла игла прямую или нет?

Положение иглы можно однозначно определить заданием координаты центра иглы

$y_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ и угла α , задаваемых случайным образом/

Тогда координаты концов иглы определяются по следующим формулам:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} * l * \sin(\alpha)$$

$$y_2 = 2 * y_0 - y_1$$

Условие пересечения прямой – $y_1 * y_2 < 0$

Пример программной реализации.

Исходя из теоретической формулы вероятности события A , при моделировании задачи мы можем вычислить число π .

```
function [d] = buffon_dpi(N)
% Задача Бюффона: игла 2l, между линиями 2a
% точность pi, зависимость дельта pi (отклонение от стандарта) от N
l = 1;
a = 2;
%N = 20000;
M = 5000;
tic
pm = zeros(M,1);
for j = 1:M
p = zeros (N,1);
for i = 1:N
y = rand * a; %случайное расстояние до прямой
q = rand * pi; %случайный угол
if y <= l * sin(q)
p(i,1) = 1;
end
end
mpi(j,1) = N / sum(p); %полученное пи
md(j,1) = abs(mpi(j,1) - pi); % отличие от эталона
end
d = sum (md) / M;
toc
end
```

Модели случайных и хаотических блужданий

На случайности основана так называемая «модель пьяницы», которая используется для моделирования всевозможных хаотических движений частиц скажем движений молекул каких-либо газов или жидкостей, с помощью этой модели моделируются многие химические и физические процессы, проходящие в дискретных средах - в газах и жидкостях - явления диффузии, всевозможные потоки частиц, ветер, водопад, взрыв и т.д.

Есть точка на прямой, имеющая начальную координату x_0 , которая движется вправо или влево в зависимости от случайной величины r из интервала $[0,1]$ если $r > 0,5$, то точка делает шаг вправо $x_1 = x_0 + h$, в противном случае $x_1 = x_0 - h$. Шаг может быть, как постоянный, так и переменный. Значение шага в свою очередь может быть случайное число из интервала $[0, h_{\max}]$.

Точка может двигаться по плоскости, может быть n точек – получается модель броуновского движения. Можно ввести различные скорости движения частиц, можно изменять условие, скажем если $r_i > 0,8$, то точка делает шаг вправо $x_1 = x_0 + h$, в противном случае $x_1 = x_0 - h$ – получим модель поступательного движения частиц вправо (стая комаров, подхваченных ветром). Если первоначально все частицы сконцентрировать в одной точке, а потом пронаблюдать их распространение – то это будет модель взрыва.

Если провести вертикальную черту (перегородку), и частицы по разную сторону перегородки закрасить разным цветом – получим модель диффузии (смешивания различных газов или жидкостей и т.д).

В модели пьяницы не предусматривается столкновение частиц.

Если случайным образом задать первоначальное положение частиц, направление их движения и скорость и определить, что далее частица будет двигаться равномерно и прямолинейно до столкновения с другой частицей, а в случае столкновения произойдет зеркальное упругое отражение, то получим модель движения частиц, называемую моделью бильярдного шара. Эта модель описывает поведение идеального газа. С помощью этой модельки можно посчитать, допустим, давление газа на стенки сосуда - ограничить частицы прямоугольником (количество частиц установить пропорциональным плотности газа), предусмотреть зеркальное отражение частиц от стенок и посчитать число ударов в стенки сосуда. Давление газа будет пропорционально числу ударов о стенки.