Devoir de maison Géometrie

Exo1

$g(t) = (t^2-1, t^3-t)$

01) Le support géometrique $\Gamma g(\mathbb{R})$

$x = t^2-1 \Rightarrow t^2 = x+1$

$y = t^3-t \Rightarrow y = t(t^2-1)$

Donc $y = tx$.

si $x \neq 0$ $t = \frac{y}{x}$

$t^2 = x+1 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = x+1$ ce qui donne $y^2 = x^2(x+1)$.

Donc, le support géométrique Γ est donné par l'équation $y^2 = x^2(x+1)$

2) Étudier la régularité de l'arc g

$g'(t) = (2t, 3t^2-1)$.

pour étudier la régularité

$g'(t) = (0,0)$ si et seulement si $2t = 0$

$3t^2-1 = 0$

$2t = 0$ implique $t = 0$

$3t^2-1 = 0$ donne $3(0)^2-1 = -1 \neq 0$

Donc $g'(t)$ ne s'annule jamais

Donc $g'(t)$ est régulier pour tout $t \in \mathbb{R}$

03) Détermination des point remarquables:

point d'intersection avec les axes:

$y=0$ $t^3-t = 0 \Rightarrow t(t^2-1) = 0$

$t = 0, t = 1, t = -1$

si $t = 0$ $x = -1$ point $(-1,0)$

si $t = 1$ $x = 1^2-1 = 0$ point $(0,0)$

si $t = -1$ $x = (-1)^2-1 = 0$ point $(0,0)$.

$x = 0$.

$t^2-1 = 0 \Rightarrow t = 1$ $t = -1$

. si $t = 1$, $y = 1^3-1 = 0$ point $(0,0)$

. si $t = -1$ $y = (-1)^3-(-1) = 0$ point $(0,0)$

point multiples.

$t_1 \neq t_2$ tel que $g(t_1) = g(t_2)$

$t_1^2-1 = t_2^2-1 \Rightarrow t_1^2 = t_2^2 \Rightarrow t_1 = \pm t_2$

si $t_1 = -t_2$ alors

$t_1^3-t_1 = t_2^3-t_2 \Rightarrow t_1^3-t_1 = (-t_1)^3-(-t_1)$

$= -t_1^3+t_1$

$2t_1^3-2t_1 = 0 \Rightarrow 2t_1(t_1^2-1) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0, t_1 = 1$ $t_1 = -1$

impossible

. si $t_1 = 0$ alors $t_2 = -t_1 = 0$

. si $t_1 = 1$ $t_2 = -1$ $g(1) = (0,0)$

et $g(-1) = (0,0)$

Donc, le seul point multiple est $(0,0)$ obtenu pour $t = 1$ et $t = -1$

04 - Étudier de l'existence et des directions des tangentes aux points remarquables

. point $(-1,0)$ $t = 0$ $g'(0) = (0,-1)$

tangente est verticale.

. point $(0,0)$: $t = 1$ et $t = -1$

$t=1$ $g'(1)=(2,2)$

$\Rightarrow$ la tangente a pour vecteur directeur $(1,1)$

- pour $t=-1$, $g'(1)=(-2,2)$

$\Rightarrow$ la tangente a pour vecteur directeur $(-1,1)$

il y a deux ~~tr~~ tangentes distinctes au point $(0,0)$

05- Description qualitative de la courbe.

1/ Symétries :

l'équation de la courbe est $y^2 = x^2(x+1)$

remplace y par $-y$

$\Rightarrow$ l'équation reste inchangée

Donc le courbe est symétrique.

- Allure générale

la courbe a une boucle à gauche de l'axe des ordonnées.

passe par le point $(-1,0)$ avec une tangente verticale. Elle un point double à l'origine avec deux tangentes distinctes.

Exo2

$$g(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\tilde{g}(s) = (\cos(\pi - s), \sin(\pi - s)) \quad s \in [0, 2\pi]$$

1) Montre que g et $\tilde{g}$ ont le meme support.

Pour $g(t) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$

le support est le cercle unité car

$(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1 \quad t \in [0, 2\pi]$

couvre toute le cercle.

Pour $\tilde{g}(s) = (\cos(\pi - s), \sin(\pi - s))$ avec $s \in [0, 2\pi]$

$\cos(\pi - s) = -\cos s$ et $\sin(\pi - s) = \sin s$

Donc $\tilde{g}(s) = (-\cos s, \sin s)$

so

$(-\cos s)^2 + (\sin s)^2 = (\cos s)^2 + (\sin s)^2 = 1$

s vrai de 0 à 2π.

Donc les valeurs de $-\cos s$ et $\sin s$ couvrent tous les point du cercle unité.

Par conséquent.

les deux paramétrisations ont le même support est le cercle unité.

2- Exist-t-il une fonction $\varnothing(s)$ telle que $\tilde{g}(s) = \cancel{g(\varnothing(s))}$

$\tilde{g} = g \circ \varnothing$.

$\phi(s)$ une fonction telle que

$\hat{g}(s) = g(\phi(s))$

Donc

$(\cos(\pi - s), \sin(\pi - s)) = (\cos(\phi(s)), \sin\phi(s))$

implique

$\cos(\pi - s) = \cos(\phi(s))$ et $\sin(\pi - s) = \sin(\phi(s))$

<u>Donc</u> $\phi(s) = \pi - s$.

est une fonction continue et derivable.

On a $s \in [0, 2\pi]$

Don $\phi(s) = \pi - s \in [-\pi, \pi]$

$g(\phi(s))$ est bien défini

$\phi(s)$ en ajoute 2π.

$\phi(s) = \pi - s + 2\pi = 3\pi - s$

$s \in [0, 2\pi]$ $\phi(s) \in [\pi, 3\pi]$

ce qui est accaptable.

<u>Q3</u>- Comparer le sens de parcours des deux paramétrisations :

Pour $g(t) = (\cos t, \sin t)$

t augmente de 0 et 2π.

le cercle unite dans le sens trigonométrique

Pour $\hat{g}(s) = (\cos(\pi - s), \sin(\pi - s))$

$s \in (0$ à $2\pi)$

- pour $s = 0$ $\hat{g}(0) = (-1, 0)$
- " $s = \pi/2$

$\hat{g}(\frac{\pi}{2}) = (\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2})$

$= (0, 1)$

- pour $s = \pi$

$\hat{g}(\pi) = (1, 0)$

- pour $s = \frac{3\pi}{2}$

$\hat{g}(3\pi/2) = (0, -1)$

- pour $s = 2\pi$

$\hat{g}(2\pi) = (-1, 0)$.

Donc les deux paramétrisations parcourent le cercle unite dans des sens opposés.

Q4- L'équivalence

~~On~~ $\exists \phi$ difféomorphisme tel que $\hat{g} = g \circ \phi$, on a trouvé que $\phi(s) = \pi - s$

$\phi'(s) = -1 < 0$

dérivée est negative

Donc les deux arcs sont pas equivalents au sens des arcs paramétrés.

Exo3

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(t) = (t^3, t^2)$$

01- le support géométrique de la courbe :

$x = t^3$ $\quad y = t^2 \geqslant 0$

$t \in \mathbb{R}$

$t = \pm\sqrt{y}$

et

$x = (\pm\sqrt{y})^3 = \pm y^{3/2}$

implique

$x^2 = y^3$

Ainsi que le support géométique est donné par l'équation $x^2 = y^3$.

02- la régularité de l'arc et localiser les points singuliers.

- On calcule la dérivée

$g'(t) = (3t^2, 2t)$

Donc

$3t^2 = 0 \quad 2t = 0$

$\boxed{t = 0}$

Pour $t \neq 0$ $\quad g'(t) \neq (0,0)$

Donc l'arc est régulier partout sauf en $t = 0$.

est Dans ce cas n'est pas régulier puisque $t = 0$.

03- L'équation de la tangente au point correspodant à $t = 1$.

On a $\quad g(1) = (1^3, 1^2) = (1, 1)$

la dérivée en $t = 1$

$g'(1) = (3(1)^2, 2(1)) = (3, 2)$.

Don l'equation est :

$(x, y) = g(1) + \lambda g'(1) = (1,1) + \lambda(3,2)$

$((1 + 3\lambda), (1 + 2\lambda))$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

On a

$x = 1 + 3\lambda$ --- (1)

$y = 1 + 2\lambda$ --- (2)

(1) multiple fois (2)

(2) multiple fois (3)

Donc

$2x = 2 + 6\lambda$ --- (3)

$3y = 3 + 6\lambda$ --- (4)

On (3) - (4)

$2x - 3y = -1$

$2x - 3y + 1 = 0$

Don l'équation est

$2x - 3y + 1 = 0$.

04 - Le comportement de la courbe au voisinage de $t=0$

$t=0$

On a

$x = t^3 \qquad y = t^2$

On peut considérer le Developement limite de x et y de $t=0$

t est toujour s'approche à 0

x et y aussi " ~~aussi~~ de 0.

Donc la courbe une singularité en $(0,0)$.

05 - Interpreter géometriquement le type de singularité obtenu.

la singularité en $t=0$ est une point ou un point de rebroussement

la courbe $x^2 = y^3$ a une singularité en $(0,0)$.

Exo 4

$g: [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$g(t) = (t, t^2)$

01) Verifier c'est l'arc est regulier sur $[0,1]$

- On calcule la dérivée

$g'(t) = (1, 2t)$

pour que $g'(t) = (0,0)$

Il faudrait que $1=0$ et $2t=0$

$1 \neq 0$ et $t=0$

↳ c'est impossible car $1 \neq 0$.

Donc

l'arc est régulier sur $[0,1]$ car sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle

02 - La longeur de l'arc $t=0$ et $t=1$

$$L = \int_a^b \|g'(t)\| \, dt.$$

$$\|g'(t)\| = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2} = \sqrt{1+4t^2}.$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} \, dt.$$

par intégration par parties.

$$I = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1+4t^2} \, dt.$$

$$u = \sqrt{1+4v^2} \quad . \quad dv = dt.$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Donc

$$L = \left[t\sqrt{1+4t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 t \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$L = \left[t\sqrt{1+4t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{5t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$L = \sqrt{5} - 4\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt$$

$$t^2 = \frac{1}{4}\left[(1+4t^2)-1\right]$$

Alors

$$\frac{t^2}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$$

Donc

$$4\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+4t^2}} = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$$

Mais.

$$\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt = L$$

$$L = \sqrt{5} - \left(L - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$$

$$2L = \sqrt{5} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$\int^1 \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{asinh}(2t)$$

Donc

$$2L = \sqrt{5} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$2L = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\,\mathrm{asinh}(2t).$$

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \mathrm{asinh}(2).$$

et $\mathrm{asin}(2) = \ln(2+\sqrt{5})$

Donc

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

~~c3~~ - Calculons l'intégrale de la ~~norme~~ de g'

c3 l'abscisse curviligne $s(t)$ est définie par.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+4u^2}\,du.$$

$$\int \sqrt{1+a^2t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{1+a^2t^2} + \frac{1}{2a}\,\mathrm{arsinh}(at) + c.$$

Ici $a=2$ donc

$$\int \sqrt{1+4u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{1+4u^2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{arsinh}(2u) + c$$

$$s(t) = \left[\frac{u}{2}\sqrt{1+4u^2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{arsinh}(2u)\right]_0^t$$

$u = t.$

$$\left.\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{arsinh}(2t)\right]_0$$

$u=0$

$$0 + \frac{1}{4}\,\mathrm{arsinh}(0) = 0$$

Donc

$$s(t) = \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arsinh}(2t)$$

On sait que

$$\operatorname{arsinh}(t) = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$$

$$\boxed{s(t) = \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2t+\sqrt{1+(2t)^2}\right)}$$

04- L'expression $s(t)$ est

$$s(t) = \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2} + \ln\left(2t+\sqrt{1+4t^2}\right)\right)$$

n'est pas inversible

Exo5

$g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

définie par $g(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$

01) Montrons que le support de l'arc cercle :

$x = t$

$y = \sqrt{1-t^2}$

$x^2 = t^2$

$y^2 = 1-t^2$

$y^2 = 1-x^2$

$y^2 + x^2 = 1$

Ainsi, le support de la courbe est le quart de cercle d'équation $x^2+y^2=1$

02)- La régularité

$$g'(t) = \left(1, \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$g'(t) = \left(1, -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

pour $t \in [0,1[$ $g'(t)$ est bien définie et continue

$t=1$ $g'(t)$ n'est pas définie car $\sqrt{1-t^2}$ tend vers 0.

Donc l'arc est régulier sur $[0,1[$. En $t=1$, l'arc n'est pas régulier

03 Calculer la longueur de l'arc

$$\|g'(t)\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Donc la longueur de l'arc

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = dv$ $\quad$ $v = \arcsin t$.

$u = 1$ $\quad$ $du = 0$

appliquant integration par partie.

$I = [uv]_0^1 - \int_0^1 v\,du$.

Donc

$I = [\arcsin t]_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0)$

$I = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

04 - Interpréter le resultat obtenu

est $\frac{\pi}{2}$.

le rayon $= 1$

donc $2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$.

Un quart de cette circoference est

$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Donc la longueur de l'arc est bien la longueur d'un quart de cercle de rayon 1.

Ex 06

$g(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

01 - Calculer $g'(t)$.

$g'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$.

b/ la régularité de la courbe

$g'(t) = (0,0) = D(1-\cos t, \sin t)$

$1 - \cos t = 0$ $\quad$ $\sin t = 0$

$\Downarrow$

$\cos t = 1$ $\quad$ $t = 2k\pi$ $\quad$ $k \in \mathbb{Z}$

$\sin t = 0$ $\quad$ $t = k\pi$ $\quad$ $k \in \mathbb{Z}$

Donc $g'(t) = (0,0) \Leftrightarrow t = 2k\pi$

Donc

$g'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

la courbe est régulière sur $]0, 2\pi[$.

02 - les point où la tangente est horizontale.

$g'(t)$ est nulle

$\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$

$1 - \cos t \neq 0$

$t = (2k+1)\pi$.

so

$g(\pi) = (\pi - \sin\pi, 1 - \cos\pi)$

$(\pi - 0, 1+1) = (\pi, 2)$.

Donc est horizontale au point $(\pi, 2)$.

03 - la longueur.

$\|g'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}$

$= \sqrt{2(1-\cos t)}$

$1 - \cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

$\boxed{\|g'(t)\| = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}} = \boxed{2\sin\frac{t}{2}}$

$$L = \int_0^{2\pi} \|g'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin\frac{t}{2} dt$$

$$L = 2 \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt$$

$$= 2\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= -4\left[\cos(\pi) - \cos(0)\right]$$

$$= -4\left[-1-1\right] = -4 \cdot -2 = 8$$

Donc la longeur de la
cycloïde sur $[0, 2\pi]$ est 8.

04 - Interprétation géométrique
de cette courbe.

La cycloïde est la trajectoire
d'un point sur un cercle qui
roule sans glisser sur une
ligne droite.