exercice 01 : on considère l'arc paramétré g
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini par
$$g(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$$

1) Montrer que la courbe est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

on a les fonctions :
$x(t) = t - \sin t$.
$y(t) = 1 - \cos t$.
sont définies sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ aussi, et ce sont des sommes et différence de fonctions usuelles qui sont de classe C^∞ courbe g est de classe C^∞
donc la courbe g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) calculer $g'(t)$ et étudier la régularité
$$g'(t) = (1 - \cos t,\ \sin t)$$
on a :
$$g'(t) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$
$\Leftrightarrow t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
sur $[0, 2\pi]$, cela donne $t = 0$ et $t = 2\pi$
Donc :
g est non régulière aux extrémités
g est régulière sur $]0, 2\pi[$

Scanné avec CamScanner

3) Déterminer les points où la tangente est horizontale :

Pour $t \in]0, 2\pi[$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$1 - \cos t = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\sin t = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{2} \cancel{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\cancel{2} \sin^{\cancel{2}}\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= \cot g\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \iff \cos\frac{t}{2} = 0 \iff \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iff t = \pi$$

au point : $t = \pi$

$$g(\pi) = (\pi - \sin \pi) \, 1 - \cos \pi)$$

$$= (\pi, 2)$$

donc tangente horizontale en $(\pi, 2)$

4) Étudier la variation de $x(t)$ et $y(t)$ on $[0, 2\pi]$.

on a :

$$x'(t) = 1 - \cos t$$

on sait que :

$$-1 \leq \cos t \leq 1$$

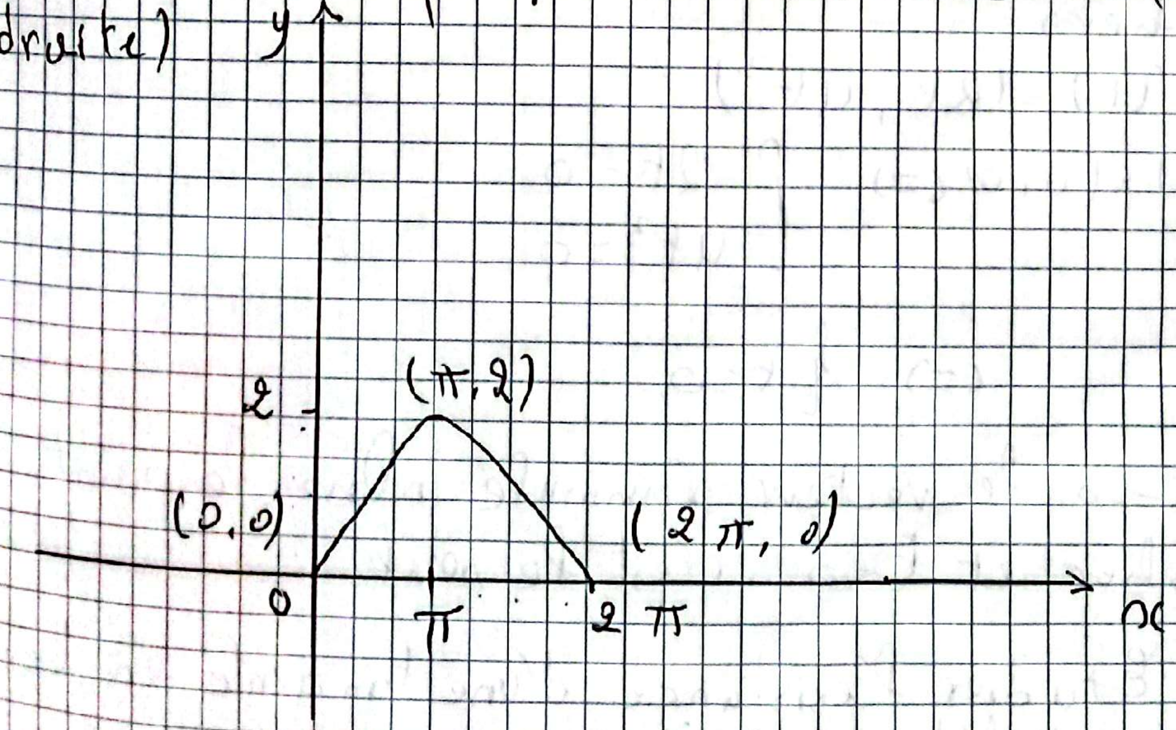
$$-1 \leq -\cos t \leq 1$$

$$0 \leq 1 - \cos t \leq 2.$$

alors on a pour $t \in [0, 2\pi]$
$1 - \cos t \geq 0$
donc $x(t)$ est strictement croissante sur $[0, 2\pi]$
on a :
$y'(t) = \sin t$
sur $[0. \pi]$, $\sin t \geq 0$
sur $[\pi, 2\pi]$, $\sin t \leq 0$
alors $y(t)$ est croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$.

b)- Décrire l'allure de la courbe et proposer un tracé qualitatif.

La courbe commence au point $(0,0)$ monte jusqu'au maximum $(\pi, 2)$ puis redescend vers $(2\pi, 0)$, la forme générale est une cycloïde, la tangente est horizontale en $t = \pi$ et les points singuliers sont en $t = 0$ et $t = 2\pi$, les sens parcours est indiqué par la croissance de t (vers la droite)



exercice 2 : on considère la courbe paramétrée

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$h(t) = (t^2, t^4)$

1) Déterminer le support géométrique de la courbe : $x = t^2$

$y = t^4$

alors :

$y = t^4 = (t^2)^2 = x^2$

Donc tout point de la courbe vérifie :

$y = x^2$ et puisque $t^2 \geq 0$, le support est la parabole $y = x^2$ située dans le demi-plan $x \geq 0$.

le support est exactement

$r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0 , y = x^2 \}$

2) Étudier la régularité et localiser les points singuliers

$h'(t) = (2t, 4t^3)$

$h'(t) = (0,0) \iff \begin{cases} 2t = 0 \\ 4t^3 = 0 \end{cases}$

$\iff \{ t = 0$.

en $t = 0$ le vecteur s'annule alors le point singulier est $t = 0$, c'est le seul

3) Étudier l'existance d'une tangente en $t = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cancel{4}t^3}{\cancel{2}t} = 2t^2.$$

en $t=0$ on a $2t^2 = 0$

$\frac{dy}{dx} = 0 \iff 2t^2 = 0 \iff t = 0$

au point $t=0$

$f(0) = ((0)^2, (0)^4)$

$= (0, 0)$

alors la géométrie du support admet une tangente en $(0,0)$ (l'axe ox)

donc tangente horizontale en $(0,0)$.

4) Décrire le comportement de la courbe au voisinage de l'origine.

on étudie le comportement de la courbe lorsque $t \to 0$

on a, $x = t^2 \geq 0$

$y = t^4 \geq 0$

donc la courbe reste dans le demi plan $x \geq 0$

de plus : $y = x^2$

la courbe est donc située au-dessus de l'axe des abscisses et passe par l'origine.

elle passe par $(0,0)$ et remonte symétriquement des deux côtés

5) Identifier le type de singularité le point est un point singulier car, la tangente en ce point est horizontale. la courbe reste du même côté de la tangente au voisinage de l'origine donc l'origine est un point de rebroussement d'ordre 2.

exercice 3 : on considère l'arc paramétré

$$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

1 - Montrer que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$

les fonctions e^t, $\cos t$, $\sin t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. donc la courbe est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

on a :

$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t$

$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$.

$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos(t))$

$= e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos(t))$.

e^t comme $e^t \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

le vecteur dérivé ne peut pas être

donc :

$g'(t) \neq (0, 0) \; \forall t \in \mathbb{R}$.

alors la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$

2) - Déterminer le support géométrique on pose

$x = e^t \cos t \Rightarrow x^2 = e^{2t} \cos^2 t$ --- ①

$y = e^t \sin t \Rightarrow y^2 = e^{2t} \sin^2 t$ --- ②

① + ② $\Leftrightarrow x^2 + y^2 \Leftrightarrow e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t$

$x^2 + y^2 = e^{2t} (\cos^2 t + \sin^2(t))$

on sait que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

alors $x^2 + y^2 = e^{2t}$ ainsi

$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{e^{2t}}$

Scanné avec CamScanner

$\sqrt{x^2+y^2} = e^t$

en coordonnées polaires : $r = e^t$, $\theta = t$

donc le support géométrique est une spirale logarithmique.

3) Montrer que la courbe est une spirale plane en calculant le rayon polaire.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2}$$

$$= e^t$$

comme l'angle polaire est $\theta = t$, on peut écrire $r = e^\theta$

cette équation montre que la courbe décrit une spirale plane dans le plan

4) Trouver une nouvelle paramétrisation de la courbe en fonction de l'angle polaire

comme $t = \theta$

alors $r = e^t = e^\theta$

en coordonnées polaires (r, θ)

$$\begin{cases} r(\theta) = e^\theta \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

en coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta = e^\theta \cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta = e^\theta \sin\theta \end{cases}$$

$\vec{g}(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta)$ c'est la nouvelle paramétrisation en fonction de l'angle polaire.

5) Comparer les vitesses de parcours selon les deux paramétrisations

on a :

$$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$$

la vitesse $\| g'(t) \|$

$$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin + e^t \cos t)$$

$$\| g'(t) \|_2 = \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \cancel{2\cos t \sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\cos t \sin t} + \cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(2\cos^2 t + 2\sin^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(2(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}))}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(2)}$$

$$= e^t \sqrt{2}$$

donc $\| g(t) \| = e^t \sqrt{2}$

on a : $v(\theta) = v(t)$

alors la vitesse de parcours est la même dans les deux paramétrisation.

Scanné avec CamScanner

exercice 4 : on considère les deux arcs paramétrés sur $[0,1]$:

$g_1(t) = (t, t^2)$

$g_2(t) = (t^2, t)$.

1) - Vérifier que les deux arcs sont réguliers sur $[0, 1]$.

$g_1'(t) = (1, 2t)$.

pour tout $t \in [0,1]$, $g_1'(t) \neq (0, 0)$.

donc g_1 est régulier sur $[0, 1]$.
alors les deux arcs sont réguliers sur $[0, 1]$.

2 . calculer les longueurs L_1 et L_2.

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{1^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$$

on a :

$$\int \sqrt{a + b^2}\, db = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(b + \sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

on pose : $a = 1$ et $b = 2t$

on a = $b = 2t \Rightarrow db = 2 \cdot dt$.

$$\Rightarrow dt = \frac{db}{2}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\sqrt{1 + b^2} + \frac{1}{2}\ln\left(b + \sqrt{1 + b^2}\right)\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}\sqrt{1 + 2^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sqrt{1 + 2^2}\right)\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{0}{2}\sqrt{\cancel{1} + 0^2} + \frac{1}{2}\ln\left(0 + \sqrt{1 + 0^2}\right)\right)\right]$$

Scanné avec CamScanner

$$= \left[\frac{1}{2} \left(1 \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left(2 + \sqrt{5} \right) \right) \right].$$

$$\cancel{= \left[\frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \ln 1 \right) \right]_0}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \left(2 + \sqrt{5} \right)$$

$\cdot g(t)$

$x_2'(t) = 2t \; , \; y_2'(t) = 1$

$$L_2 = \int_0^1 \| g_2'(t) \| \, dt = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + 1^2} \; dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1} \; dt.$$

c'est le même intégral que L_1 juste les termes sous la racines sont inversés

$$1 + 4t^2 = 4t^2 + 1.$$

donc

$$L_1 = L_2 = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \left(2 + \sqrt{5} \right).$$

3) – Comparer L_1 et L_2

on constate que $L_1 = L_2$.

4) – Donner une interpétation géométrique du résultat !

Les arcs g_1 et g_2 ont la même longueur sur $[0, 1]$ car inverser les coordonnées ne change pas la distance le longe de la courbe, géométriquement g_2 est la parabole $y = x^2$ reflechie par rapport à la diagonale $y = x$ ce qui explique des longueurs.