Devoir de maison N 01 Geometrie

Exercice 01 :

on considere $g(t) = (x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

1) Classe C^1 :

on a : $t \to t$ soit t et $\cos t$, sont C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc $x(t)$ et $y(t)$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$.

. La courbe est definie et de classe C^1.

2) Derivée et regularité :

$g'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, la courbe et reguliere

si $g(t) = (0,0)$. $1 - \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 1$

$\Leftrightarrow t = 2k\pi$.

les deux s'annulent pour $t = 2k\pi$. Donc

la courbe n'est pas reguliere.

3) tangente horizontale :

$y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$

$y'(t) = \sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$.

pour k impair $(t = \pi, 3\pi, \ldots)$ $x'(t) = 1 - \cos t = 2 \neq$

tangente horizontale en $t = (2k+1)\pi$.

4) <u>Variation sur $[0, 2\pi]$</u> :

- $x'(t) = 1 - \cos t \geq 0 \Rightarrow x(t)$ croissante sur $[0, 2\pi]$
- $y'(t) = \sin t > 0$ sur $[0, \pi]$ et $y'(t) < 0$ sur $[\pi, 2\pi]$

Intervalle	Variation de $y(t)$.
$[0, \pi]$	croissante
$[\pi, 2\pi]$	decroissante

5) <u>Allure de la Courbe.</u>

La Courbe est Une Cycloide, Elle part de l'origine monte et avance, atteint Un maximum en y a $t = 2\pi$. puis redescend en avançant, et revient à Une hauteur de 0 a $t = 2\pi$, la presente des point de rebroussement

Exercice 02: $h(t) = (t^2 . t^4)$

1) <u>Support géometrique</u> :

$x = t^2$ et $y = t^4 = (t^2)^2 = x^2$

Le support geometrique est donc le parabole d'equation

$y = x^2 \ , \ x \geq 0$.

2) <u>Régularité</u> : $h'(t) = (2t . 4t^3)$

$h'(t) = (0, 0)$ si seulement si $t = 0$ est Un point pour $t=0$ la Courbe regulière. (singulier).

3) tangente en 0. Etudier la limite.

$$\lim_{t\to 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{4t^3}{2t} = \lim_{t\to 0} 2t^2 = 0.$$

Donc il existe (Une tangente horizontale en $t=0$)

4) Comportement local:

Quand $t\to 0$: $x \sim t^2$, $y \sim t^4$.

La Courbe arrive très aplatie sur l'axe Ox.

5) type de singularité:

C'est Un point de rebroussement (Cuspide) de premier espèce.

Exercice 03: $g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$

1) Régularité:

$g'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$ $g'(t) = (0,0)$

Si seulement $\cos t - \sin t = 0$ et $\sin t + \cos t = 0$

$(\cos t - \sin t) + (\sin t + \cos t) = 2\cos t = 0$

$(\cos t - \sin t) - (\sin t + \cos t) = 2\sin t = 0$ $g'(t) \neq (0,0)$

est la Courbe est regulière sur $\mathbb{R}$.

2) Support géométrique: $x = e^t \cos t$ $y = e^t \sin t$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t} = e^t$

$\theta = \arctan(y/x) = \arctan\left(\frac{e^t \sin t}{e^t \cos t}\right) = t.$

Donc $r = e^{\theta}$.

3) Nature : L'equation $r = e^{\theta}$ represent Une spicale logarithme.

4) parametre polaire :

$$\begin{cases} r = e^{\theta} \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow g(\theta) = (e^{\theta}\cos\theta, e^{\theta}\sin\theta)$$

5) Comparaison de vitesse :

$$\|g'(t)\| = \sqrt{(e^{t}(\cos t - \sin t))^2 + (e^{t}(\sin t + \cos t)^2)}$$

$$\theta = \|g'(\theta)\| = e^{\theta}\sqrt{2}$$

La vitess de parcours est la même exprimé en fonction de different parametre.

Exercice 04 : $g_1(t) = (t, t^2)$ $g_2(t) = (t^2, t)$

1) Regularité :

$g_1'(t) = (1, 2t)$, $\|g_1'(t)\| = \sqrt{1+4t^2} > 0$ sur $[0,1]$

$g_2'(t) = (2t, 1)$, $\|g_2'(t)\| = \sqrt{4t^2+1} > 0$ sur $[0,1]$

Les deux arces sont reguliere sur $[0,1]$.

2) Longeur :

$L_1 = \| g_1'(t) \| = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt.$

$L_2 = \| g_2'(t) \| = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt.$

3) Comparaison : $L_1 = L_2$.

4) Interpretation geometrique :

- Les deux Courbe ont le même support geometrique.
- La longueur ne depend pas de la parametrisat