3) Tangente horizontale :

Tangente horizontale $\Leftrightarrow y'(t) = 0$ et
$x'(t) \neq 0$

donc : $\sin t = 0$. ($y'(t) = \sin t$)

on exclut $t = 2k\pi$ (point singuliers)

donc tangente horizontale pour

$t = (2k+1)\pi$.

4) Variations sur $[0, 2\pi]$.

- $x'(t) = 1 - \cos t \geqslant 0$.

Donc x est croissante.

- $y'(t) = \sin t$.

$$\begin{cases} y'(t) \geqslant 0, & t \in [0, \pi]. \\ y'(t) \leqslant 0, & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \text{ croissante sur } [0, \pi]. \\ y \text{ décroissante sur } [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

hello

I) L'Allure de La Courbe :

$\Rightarrow$ On obtient un Cycloïde (courbe décrite par un point d'un cercle roulant).

Point singulier en $t = 0$.

Sommet en $t = \pi$.

Retour à $(2\pi, 0)$.

Exercice N°2 :

1) $h(t) = (t^2, t^4)$.

1) Support géometrique :

$$\begin{cases} x = t^2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{x} \\ y = t^4 = (t^2)^2 = x^2 \end{cases}$$

Donc le support est :

$y = x^2$, $x \geq 0$ (partie Droite de la parabole $y = x^2$)

2) Régularité et point singulier:

on a : $h'(t) = (2t, 4t^3)$.

$h'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ 4t^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$

. la courbe est régulière sur $\mathbb{R} / \{0\}$

il y a un point singulier en (0.0)

3) Tangente en $t = 0$: on étudie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3}{2t}.$$

Pour $t \neq 0$: $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2t^2$.

quand $t = 0$: $\Leftrightarrow 2t^2 = 0$.

Donc la tangente existe et son coefficient directeur vaut 0.

$t : y = 0$.

(Tangente horizontale).

4) Comportement au voisinage de 0:

Près de 0:

$x = t^2 \geqslant 0$, $y = t^4$

La courbe reste du côté droit de l'axe

hello

des abscisses.

5) Type de singularité :

il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.

Exercice N°3 :

$$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$$

1) Régularité :

$$g'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$$

$$\|g'(t)\|^2 = \left\| \sqrt{(e^t(\cos t - \sin t))^2 + (e^t(\sin t + \cos t))^2} \right\|^2$$

$$= \left\| \sqrt{e^{2t}(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1} - \cancel{2\cos t \sin t}) + e^{2t}(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1} + \cancel{2\cos t \sin t})} \right\|^2$$

$$\|g'(t)\|^2 = \left\| \sqrt{e^{2t} + e^{2t}} \right\|^2 = 2e^{2t} > 0 \neq 0$$

Donc la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$..

hello

2) Le support géométique:

$$x^2+y^2=(e^t\cos t)^2+(e^t\sin t)^2$$
$$=e^{2t}(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1})=\boxed{e^{2t}}$$

Donc $r=\sqrt{x^2+y^2}=e^t$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{e^t\sin t}{e^t\cos t}=\tan t$

Donc: $\theta=t$

passant aux coordonnées polaires:

$r=e^t,\quad \theta=t.$

3) La nature:

on a: $\quad r=e^\theta.$

il s'agit d'une spirale

4) Nouvelle paramétrisation en fonction de l'angle polaire:

On pose $\theta=t$. on obtient:

$(x,y)=(e^\theta\cos\theta,\ e^\theta\sin\theta)$

(c'est la paramétrisation en coordonnées polaires)

hello

5) Comparaison des vitesses :

on a :
$$\|g'(t)\| = \sqrt{2}\, e^{t}.$$

la vitesse est propositionnelle à e^t, donc elle augmente exponontiellement lorsque t augmente.

Ainsi, le point s'eloigne de plus en plus vite de l'origine. ($e^t > 0$.)

Exercice N°4:

$$g_1(t) = (t, t^2) \;,\; g_2(t) = (t^2, t)$$

1) Régularité :

$$g_1'(t) = (1, 2t) \neq 0.$$

$$g_2'(t) = (2t, 1) \neq 0.$$

Donc $g_1(t)$ et $g_2(t)$ sont régulières sur $I = [0,1]$.

2) Longueurs:

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt.$$

$$L_2 = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1}\, dt.$$

3) donc:

$$L_1 = L_2.$$

4) Les deux arcs sont symetriques par rapport à la droite $y = x$
Or une symètrie est une isométrie qui conserve les longueurs.
Donc les deux courbes ont la meme longeur.