Exercice 01 :

soit $g(t) = (t - \sin t, \ 1 - \cos t)$

on a : $t - \sin t$ et $1 - \cos t$ sont dérivable et les dérivés sont continue

donc : g est de class C^1 sur $\mathbb{R}$

2) on a $g'(t) = (1 - \cos t, \ \sin t)$

$g'(0,0)$: $1 - \cos t = 0$

$\cos t = 1$; $t = 2k\pi$

$\sin t = 0$, $t = k\pi$

donc points singuliers pour $t = 2k\pi$

3) tangente horizontale quand

$y'(t) = 0$ mais $x'(t) \neq 0$

$y'(t) = \sin t = 0 \quad t = k\pi$

et k est impaire ($t = \pi, 3\pi, 5\pi ..$)

4) sur $[0, 2\pi]$

$x'(t) = 1 - \cos t \geq 0 \quad]0, 2\pi[$

$y'(t) = \sin t < 0$ sur $]\pi, 2\pi[$

Max de y en $t = \pi$ avec $y = 2$

5) c'est un cycloide

et point de rebroussement $t = 0$

$t = 2\pi$

Exo 02 :

1) $x = t^2 \geq 0$, $y = t^4 = x^2$

le support $y = x^2$

2) $h'(t) = (2t, \ 4t^3)$

$h'(t) = (0,0) \Rightarrow t = 0$

3) $\lim \dfrac{(2t, 4t^3)}{\sqrt{4t^2 + 16t^6}} = \dfrac{(2t \cdot 4t^3)}{2t\sqrt{1 + 4t^4}}$

si $t > 0 \rightarrow (1, 0)$

si $t < 0 \longrightarrow (-1, 0)$

demi tangentes opposés

4) la courbe arrive vers $(0,0)$ par la gauch ($t < 0$) et repart vers la droit

5) le type : Rebroussement de première espèce

Exo 03 :

1) $g'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), \ e^t(\sin t - \cos t))$

$\| g'(t) \| = e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t - \cos t)^2}$

$= e^t \sqrt{2} \neq 0$

donc régulière partout

2) $r = e^t$ et $\theta = t$; $r = e^\theta$

$\Rightarrow$ spirale logarithmique

3) quand t augment r augment

la courbe s'éloigne de l'origine en tournant quand $t = -\infty$, $r \to 0$

elle s'enroule autour l'origine

4) si on prend θ : $g(\theta)$

$= e^{\theta} (\cos\theta, \sin\theta)$

c'est la même formule

5) avec : $t : \|g'(t)\| = e^{t}\sqrt{2}$

$\theta : \|g'(\theta)\| = e^{\theta}\sqrt{2}$

les vitesses sont identiques

Exo 04 :

1) $g_1'(t) = (1, 2t) \neq (0,0)$

sur $[0, 1]$

$g_2'(t) = (2t, 1) \neq (0,0)$

donc les deux sont réguliers.

2) $L_1 = \int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2} = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}$

$L_2 = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + 1} = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}$

3) $L_1 = L_2$

4) les deux courbes sont symétrique par rapport $y = x$