DM n°1 - Courbes paramétrées

Exercice 02 : $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $h(t) = (t^2, t^4)$

1/. Déterminer le support géométrique de la courbe :

* Notons : $x = t^2$ et $y = t^4$

De $x = t^2$ on déduit $x \geq 0$ et $t = \pm\sqrt{x}$.

Comme $y = t^4 = (t^2)^2 = x^2$

Donc le support est : $\boxed{\Gamma = \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ x^2 = y\}}$

2/. la régularité et localiser les points singuliers :

$$h'(t) = (2t, 4t^3) = t(2, 4t^2)$$

Alors $h'(t) = (0.0) \iff t = 0$

Donc l'arc est non régulier en $t = 0$ et régulier sur $\mathbb{R}/\{0\}$

Le point singulier est $h(0) = (0, 0)$

3/. l'existence d'une tangente en $t = 0$:

Au paramètre $t = 0$: ~~$h(0) = (0,0)$, $h'(0) = (0,0)$~~

En calculer les dérivées secondes de $x(t)$ et $y(t)$

$x''(t) = 2$ et, $y''(t) = 12t^2$

$$\lim_{t=0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{4t^3}{2t} = \lim_{t\to 0} 2t^2 = 0$$

Puisque la limite existe et égale à 0, il existe une tangente en $t = 0$.

4/. Le comportement de la courbe au voisinage de l'orig

Quand $t \to 0$ on a : $x = t^2$, $y = t^4$

~~Donc $\frac{x}{y}$ est d'ordre t^2 et y d'ordre t^4~~ :

Pour $t < 0$, $x'(t) < 0$ et $y'(t) < 0$, donc x et y décroît .

Pour $t > 0$, $x'(t) > 0$ et $y'(t) > 0$, donc x et y croît

La courbe arrive à l'origine avec une tangente horizontale et repart en restant toujours dans le premier quadrant.

5/. Le type de singularité :

On a $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. La première dérivée non nulle de x est $x''(0) = 2$, et la première dérivée non nulle de y est $y''''(0) = 24$

Le point singulier est un point de rebroussement de seconde espèce.

Exercice 04 : $g_1(t) = (t, t^2)$, $g_2(t) = (t^2, t)$ sur $[0, 1]$.

1/. vérifie la réguliers sur $[0, 1]$:

* $g_1'(t) = (1, 2t)$: on a $\|g_1'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2} > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$; donc g_1 est régulière.

* $g_2'(t) = (2t, 1)$: on a $\|g_2'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 1} > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$

donc g_2 est régulière

2/. Calculer les longueurs L_1 et L_2 :

* $L_1 = \int_0^1 \|g_1'(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} \, dt$

on pose $w = 2t$, $dt = \frac{dw}{2}$:

$$L_1 = \int_0^2 \|g_1'(t)\| \, dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1+w^2} \, dw$$

on utilise la primitive : $\int \sqrt{1+w^2} \, dw = \frac{1}{2} \left(w\sqrt{1+w^2} + \text{arsinh}(w) \right) + c$

où $\text{arsinh}(w) = \ln(w + \sqrt{1+w^2})$:

$$L_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left[\left(w\sqrt{1+w^2} + \text{arsinh}(w) \right) \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left(2\sqrt{5} + \text{arsinh}(2) \right)$$

$$\boxed{L_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5})} = 1.4789$$

* $L_2 = \int_0^1 \|g_2'(t)\| = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1} \, dt$

on pose $w = 2t$, $dt = \frac{dw}{2}$:

$$L_2 = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{w^2+1} \, dw$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(w\sqrt{w^2+1} + \text{arsinh}(w) \right) \right]_0^2 + c$$

$$L_2 = \frac{1}{4} \left(2\sqrt{5} + \text{arsinh}(2) \right)$$

$$\boxed{L_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2)} = 1.4789$$

3/. Comparer L_1 et L_2 :

On a $L_1 = L_2$

4/. une interprétation géométrique du résultat :

l'arc $g_2(t)$ est obtenu à partir de $g_1(t)$ par la transformation $(x,y) \to (y,x)$, qui est une réflexion par rapport à la droite $y=x$. La longueur d'un arc est invariante par cette transformation.

Exercice 01 : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$

1/. Montre que la courbe est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

La fonction g est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ car les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$. De plus les fonctions ~~est~~ $t \to t - \sin t$ et $t \to 1 - \cos t$ sont des combinaisons linéaires de fonctions de classe C^1 (en fait, C^∞) sur $\mathbb{R}$. par conséquent $g(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2/. calcule $g'(t)$ et étudier la régularité :

$$g'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

On a $g'(t) = (0,0) \iff \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases} \iff \cos t = 1$ et $\sin t = 0$

$\iff t \in 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

sur $[0, 2\pi]$ cela donne $t=0$ et $t = 2\pi$, donc la cycloïde est non régulière aux extrémités, et régulière sur $]0, 2\pi[$.

3/. les points où la tangente est horizontale :

Pour $t \in [0, 2\pi]$ on peut écrire : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$

on simplifie par formules trigonométriques :

$$1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2} \ , \ \sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}$$

donc $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2\sin \frac{t}{2}} = \cos \dfrac{t}{2}$

* en la tangente horizontale donc : $\dfrac{dy}{dx} = 0 \iff \cos \dfrac{t}{2} = 0$

$\iff \dfrac{t}{2} = \dfrac{\pi}{2} \iff t = \pi$

Au point $t = \pi$; $g(\pi) = (\pi - \sin \pi, 1 - \cos \pi) = (\pi, 2)$

Donc tangente horizontale en $(\pi, 2)$

4/. les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$:

* $x'(t) = 1 - \cos t$, sur $[0, 2\pi]$ on a $1 - \cos t \geqslant 0$ donc $x(t)$ est croissante.

* $y'(t) = \sin t$, sur $[0, 2\pi]$. $\sin(t) \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$ et $\sin t \leqslant 0$ sur $[\pi, 2\pi]$, Donc $y(t)$ croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$

t	0		π		2π
$x'(t)$		$+$		$+$	
$x(t)$	$\bullet$	$\nearrow$		$\nearrow$	
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

5). L'allure de la courbe et proposer un tracé qualitatif

La courbe est une cycloïde. elle part de l'origine (0,0) la coordonnée x augmente toujours, tandis que la coordonnée y augmente jusqu'à $t=\pi$ où elle atteint son maximum de 2, puis diminue jusqu'à 0 en $t=2\pi$.

La courbe n'est pas régulière aux points $t=2k\pi$ en ces points, la courbe a une pointe.

Exercice 03 : $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ $t \in \mathbb{R}$

1.1. Montre que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$:

$$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t ; e^t \sin t + e^t \cos t)$$
$$= e^t (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$$

$$g'(t) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \cos t - \sin t = 0 \\ \sin t + \cos t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sin t \\ \cos t = -\sin t \end{cases}$$

Donc $\sin t = -\sin t$

Si $\sin t = 0$, alors $\cos t = 0$, ce qui est impossible car

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Donc $g'(t) \neq (0,0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Donc la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$.

2/. Le Support geometrique :

$x = e^t \cos t$ et $y = e^t \sin t$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t}$

$= \sqrt{e^{2t}(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1})}$

$= e^t$

et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{e^t \sin t}{e^t \cos t}\right) = t$

Donc $r = e^\theta$.

3/. Montre que la courbe est une spirale plane :

On a $r = e^\theta$. Lorsque θ augmente, r augmente également la courbe s'enroule autour de l'origine de plus en plus de l'origine. Donc la courbe est une spirale plane.

4/. La nouvelle paramétrisation de la courbe au voisinage de l'origine :

Nous avons $r = e^\theta$, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

$\Rightarrow x = e^\theta \cos\theta$ et $y = e^\theta \sin\theta$

$h(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

5/ comparer les vitesses de parcours selon les deux paramétrisat.

$\|g'(t)\| = e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}$

$= e^t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t - \cancel{\cos t \sin t} + \sin^2 t + \cos^2 t + \cancel{\sin t \cos t}}$

$= e^t \sqrt{1 + 1} = e^t \sqrt{2}$

$$h'(\theta) = e^{\theta}\,(\cos\theta - \sin\theta,\ \sin\theta + \cos\theta)$$

$$\|h'(\theta)\| = e^{\theta}\sqrt{(\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2}$$

$$= \sqrt{2}\, e^{\theta}$$

Puisque $\theta = t$ les vitesses sont les mêmes.