

DM n°1 - Courbes paramétrées

Exercice 01 = $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $h(t) = (t^2, t^4)$

1/. Déterminer le support géométrique de la courbe :

* Notons : $x = t^2$ et $y = t^4$

De $x = t^2$ on déduit $x \geq 0$ et $t = \pm \sqrt{x}$.

Comme $y = t^4 = (t^2)^2 = x^2$

Donc le support est : $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 = y\}$

2/. la régularité et localiser les points singuliers :

$$h'(t) = (2t, 4t^3) = t(2, 4t^2)$$

Alors $h'(t) = (0, 0) \Leftrightarrow t = 0$

Donc l'arc est non régulier en $t = 0$ et régulier sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Le point singulier est $h(0) = (0, 0)$

3/. l'existence d'une tangente en $t = 0$:

Au paramètre $t = 0$: ~~$h(0) = (0, 0)$~~ , ~~$h'(0) = (0, 0)$~~

En calculer les dérivées secondes de $x(t)$ et $y(t)$

$$x''(t) = 2 \quad \text{et} \quad y''(t) = 12t^2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^3}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} 2t^2 = 0$$

Puisque la limite existe et égale à 0, il existe une tangente en $t = 0$.

41. le comportement de la courbe au voisinage de l'orig

Quand $t \rightarrow 0$ on a : $x = t^2$, $y = t^4$

~~Donc x est d'ordre t^2 et y d'ordre t^4 .~~

Pour $t < 0$, $x'(t) < 0$ et $y'(t) < 0$, donc x et y décroissent.

Pour $t > 0$, $x'(t) > 0$ et $y'(t) > 0$, donc x et y croissent.

La courbe arrive à l'origine avec une tangente horizontale et repart en restant toujours dans le premier quadrant.

51. le type de singularité =

On a $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. La première dérivée non nulle de x est $x''(0) = 2$, et la première dérivée non nulle de y est $y'''(0) = 24$.

Le point singulier est un point de rebroussement de seconde espèce.

Exercice 04 = $g_1(t) = (t, t^2)$, $g_2(t) = (t^2, t)$ sur $[0, 1]$.

11. vérifie la régularité sur $[0, 1]$:

* $g_1'(t) = (1, 2t)$: on a $\|g_1'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2} > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$; donc g_1 est régulière.

* $g_2'(t) = (2t, 1)$: on a $\|g_2'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 1} > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$; donc g_2 est régulière.

2/. Calculer les longueurs L_1 et $L_2 =$

$$* L_1 = \int_0^1 \|g'_1(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} dt$$

$$\text{on pose } w = 2t, dt = \frac{dw}{2} =$$

$$L_1 = \int_0^2 \|g'_1(t)\| dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1+w^2} dw$$

$$\text{on utilise la primitive } = \int \sqrt{1+w^2} dw = \frac{1}{2} (w\sqrt{1+w^2} + \operatorname{arsinh}(w)) + c$$

$$\text{ou } \operatorname{arsinh}(w) = \ln(w + \sqrt{1+w^2}) :$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left[(w\sqrt{1+w^2} + \operatorname{arsinh}(w)) \right]_0^2 = \frac{1}{4} (2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh}(2))$$

$$\boxed{L_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5})} = 1.4789$$

$$* L_2 = \int_0^1 \|g'_2(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1} dt$$

$$\text{on pose } w = 2t, dt = \frac{dw}{2} =$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{w^2+1} dw$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[(w\sqrt{w^2+1} + \operatorname{arsinh}(w)) \right]_0^2 + c$$

$$L_2 = \frac{1}{4} (2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh}(2))$$

$$\boxed{L_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2)} = 1.4789$$

3/. Comparer L_1 et $L_2 =$

$$\text{On a } L_1 = L_2$$

11. une interprétation géométrique du résultat.

L'arc $g_2(t)$ est obtenue à partir de $g_1(t)$ par la transformation $(x, y) \rightarrow (y, x)$, qui est une réflexion par rapport à la droite $y = x$. La longueur d'un arc est invariante par cette transformation.

Exercice 01: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$

11. Montre que la courbe est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} .

La fonction g est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ car les fonctions sinus et cosinus sont définies sur \mathbb{R} . De plus les fonctions ~~est~~ $t \rightarrow t - \sin t$ et $t \rightarrow 1 - \cos t$ sont des combinaisons linéaires de fonctions de classe C^1 (en fait, C^∞) sur \mathbb{R} . Par conséquent $g(t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

21. calcule $g'(t)$ et étudie la régularité =

$$g'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

$$\text{On a } g'(t) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos t = 1 \text{ et } \sin t = 0 \\ \Leftrightarrow t \in 2\pi\mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$$

sur $[0, 2\pi]$ cela donne $t = 0$ et $t = 2\pi$, donc la cycloïde est non régulière aux extrémités, et régulière sur $[0, 2\pi]$.

31. les points où la tangente est horizontale :

pour $t \in [0, 2\pi]$ on peut écrire : $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

on simplifie par formules trigonométriques :

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} ; \sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}$$

donc $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \cos \frac{t}{2}$

* en la tangente horizontale donc $\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{t}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \pi$$

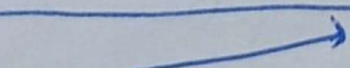
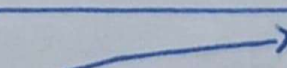
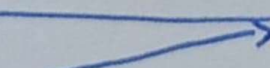
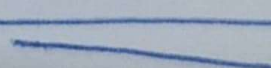
Au point $t = \pi$; $g(\pi) = (\pi \cdot \sin \pi, 1 - \cos \pi) = (\pi, 2)$

Donc tangente horizontale en $(\pi, 2)$

311. les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$:

* $x'(t) = 1 - \cos t$, sur $[0, 2\pi]$ on a $1 - \cos t \geq 0$ donc $x(t)$ est croissante.

* $y'(t) = \sin t$, sur $[0, 2\pi]$, $\sin(t) \geq 0$ sur $[0, \pi]$ et $\sin t \leq 0$ sur $[\pi, 2\pi]$, Donc $y(t)$ croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$

t	0	π	2π
$x'(t)$		+	+
$x(t)$			
$y'(t)$	+	0	-
$y(t)$		2	

51. L'allure de la courbe et proposer un tracé qualitatif
 la courbe est une cycloïde. elle part de l'origine (0,0)
 la coordonnée x augmente toujours, tandis que la coordonnée
 y augmente jusqu'à $t = \pi$ où elle atteint son maximum
 de 2, puis diminue jusqu'à 0 en $t = 2\pi$.

la courbe n'est pas régulière aux points $t = 2k\pi$
 en ces points, la courbe a une pointe.

Exercice 03: $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \quad t \in \mathbb{R}$

11. Montre que la courbe est régulière sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t) \\ &= e^t (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t) \end{aligned}$$

$$\gamma'(t) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \cos t - \sin t = 0 \\ \sin t + \cos t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sin t \\ \cos t = -\sin t \end{cases}$$

$$\text{Donc } \sin t = -\sin t$$

Si $\sin t = 0$, alors $\cos t = 0$, ce qui est impossible car

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Donc $\gamma'(t) \neq (0,0), t \in \mathbb{R}$.

Donc la courbe est régulière sur \mathbb{R} .

2/ Le Support géométrique :

$$x = e^t \cos t \quad \text{et} \quad y = e^t \sin t$$

$$\begin{aligned} r = \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t} \\ &= e^t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= e^t \end{aligned}$$

$$\text{et } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{e^t \sin t}{e^t \cos t}\right) = t$$

$$\text{Donc } r = e^\theta.$$

3/ Montre que la courbe est une spirale plane :

On a $r = e^\theta$. Lorsque θ augmente, r augmente également. La courbe s'enroule autour de l'origine de plus en plus de l'origine. Donc la courbe est une spirale plane.

4/ La nouvelle paramétrisation de la courbe au voisinage de l'origine :

$$\text{Nous avons } r = e^\theta, \quad x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta.$$

$$\Rightarrow x = e^\theta \cos \theta \quad \text{et} \quad y = e^\theta \sin \theta$$

$$h(\theta) = (e^\theta \cos \theta, e^\theta \sin \theta), \quad \text{si } \theta \in \mathbb{R}.$$

5/ Comparer les vitesses de parcours selon les deux paramétrisations.

$$\begin{aligned} \|g'(t)\| &= e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} \\ &= e^t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t - \cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + \sin t \cos t} \\ &= e^t \sqrt{1 + 1} = e^t \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$R'(\theta) = e^\theta (\cos \theta - \sin \theta, \sin \theta + \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \|R'(\theta)\| &= e^\theta \sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{2} e^\theta \end{aligned}$$

Puisque $\theta = t$ les vitesses sont les mêmes.