Nom : Belkacemi
Prénom : Manel

Devoir maison n° 01 L2 Math.

Excersise 1 : on considère l'arc paramétré g $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par :

$$g(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

1\ - Montrer que la courbe ~~C~~ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On a les fonctions $x(t) = t - \sin t$ et $y(t) = 1 - \cos t$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}$, et ce sont des sommes et defférence de fonctions usuelles qui son de classe C^∞ alors g est de classe C^∞.

donc la courbe g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2\ Calculer $g'(t)$ est etudier régularité :

$$g'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

On a :

$$g'(t) = (0, 0) \iff \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

$$\iff t = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

sur $[0, 2\pi]$, cela donc $t = 0$ et $t = 2\pi$

donc g est non régulier auxc esctrémités g est

est régulier sur $0, 2\pi$.

3) Déterminer les points ou la tangeste est horizontale

pour $t \in]0, 2\pi[$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$1 - \cos t = 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\sin t = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{2} \cancel{\sin(t/2)} \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\cancel{2} \sin^{\cancel{2}}\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cotg\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{t}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \pi$$

au point $t = \pi$

$$g(\pi) = (\pi - \sin\pi \, , \, 1 - \cos\pi) = (\pi, 2)$$

donc tangente horizontale en $(\pi, 2)$

4) - Etudier la variation de $x(t)$ et $y(t)$ en $[0, 2\pi]$

on a : $x'(t) = 1 - \cos t$

on sait que. $-1 \leq \cos t \leq 1$

$$-1 \leq -\cos t \leq 1$$

$$0 \leq 1 - \cos t \leq 2$$

alors on a pour $t \in [0, 2\pi]$

$$1 - \cos t \geq 0$$

donc $x(t)$ est strictement croissante sur $[0 ; 2\pi]$

On a :

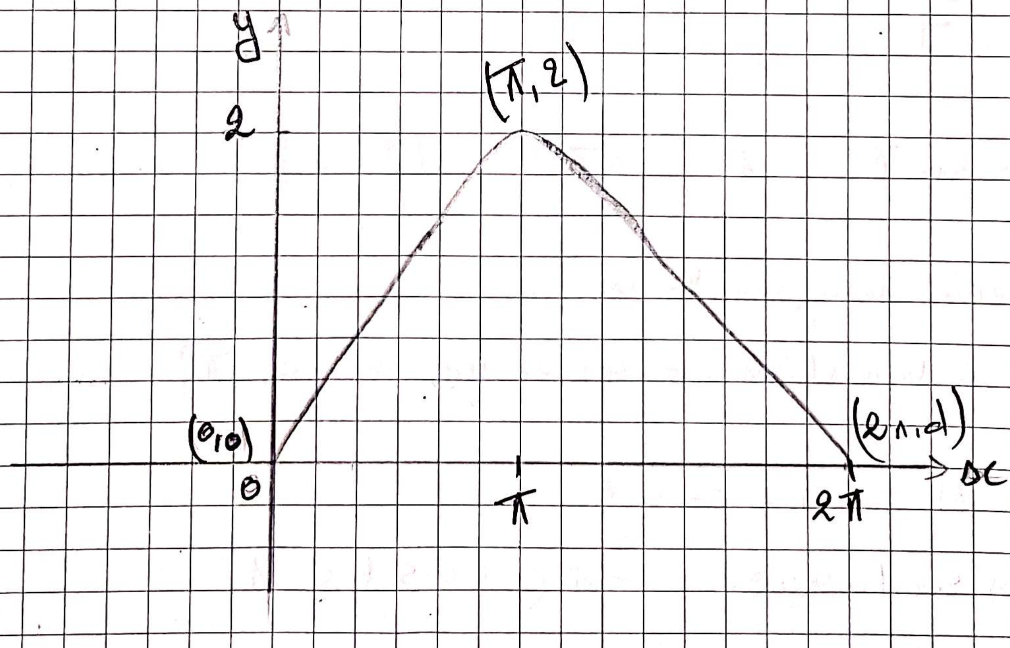
$y'(t) = \sin t$

- sur $[0, \pi]$, $\sin t \geq 0$
- sur $[\pi, 2\pi]$, $\sin t \leq 0$

alors $y(t)$ est croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$

5| Décrire l'allure de la courbe et proposer sur tracée qualitatif.

La courbe commence au point $(0,0)$ monte jusqu'au max $(\pi, 2)$ puis redexend vers $(2\pi, 0)$, la forme générale est une cyloïde, la tangente est horizontale en $t = \pi$ et les points singuliers sont en $t = 0$ et $t = 2\pi$, le sens parcours est indiqué par la croissance de t (vers la droite)



Exercice 02 : On considère la courbe paramétrée

$R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par : $R(t) = (t^2, t^4)$

1\ Déterminer le support géométrique de la courbe posons :

$x = t^2$

$y = t^4$

alors : $y = t^4 = (t^2)^2 = x^2$

donc tout point de la courbe vérifie $y = x^2$ et puisque $t^2 \geq 0$, le support est le parabole $y = x^2$ situé dans le demi plan $x \geq 0$. le support est exactement.

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0 , y = x^2\}$$

2\ - Étudier la régularité et localiser les points singuliers.

$R'(t) = (2t, 4t^3)$

$R'(t) = (0,0) \iff \begin{cases} 2t = 0 \\ 4t^3 = 0 \end{cases}$

$\iff \{t = 0$

en $t = 0$ le vecteur s'annule.

alors le point singulier est $t = 0$ c'est le seul

3\ Étudier l'existance d'une tangente en $t = 0$.

$$\frac{dy}{d} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t^2}{2t} = 2t^2$$

en $t = 0$ on a $2t^2 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \iff 2t^2 = 0 \iff t = 0$$

au point $t = 0$.

$$h(0) = \left((0)^2, (0)^4\right) = (0, 0)$$

alors la géométrie du support admet une tangente en $(0,0)$ (l'ax OX). donc tangente horizontale en $(0,0)$

4) Décrire le comportement de la courbe au voisinage de l'origine

on étudier le comportement de la courbe lorsque $t \to 0$

on a : $x = t^2 \geq 0$

$y = t^4 \geq 0$

donc : la courbe reste dans le demi plan $x \geq 0$ de plus : $y = x^2$ la courbe est donc située au-dessus de l'axe des absisses et passe par l'origine elle passe par $(0,0)$ et remonte symétriquement des deux côtés.

5) Identifier le type de singularité :

Le point est un point singulier car : la tangente en ce point est horizontale. La courbe reste du même côté de la tangente au voisinage de l'origine donc l'origine est un point de rebroussement d'ordre 2.

Exercice 03 : $g(t) = (e^t \cos t, \; e^t \sin\quad)$

1) Montrer : les fonction e^t, $\cos t$, $\sin t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc la courbe est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

on a : $x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t$

$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$

$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, \; e^t \sin t + e^t \cos t)$

$= e^t (\cos t - \sin t, \; \sin t + \cos t)$

et comme $e^t \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

le vecteur dérivé ne peut pas être null donc :

$g'(t) \neq (0,0) \; \forall t \in \mathbb{R}$.

alors la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer le support géométrique.

on pose :

$x = e^t \cos t \Rightarrow x^2 = e^{2t} \cos t$ ---- ①

$y = e^t \sin t \Rightarrow y^2 = e^{2t} \sin^2 t$ ---- ②

① + ② $\Leftrightarrow x^2 + y^2 \Leftrightarrow e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t$.

$x^2 + y^2 = e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t)$.

on sait que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

alors :

$x^2 + y^2 = e^{2t}$, ainsi.

$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{e^{2t}}$

$\sqrt{x^2 + y^2} = e^t$

Scanné avec CamScanner

en coordonnées polaire : $r = e^t$, $\theta = t$.

donc le support géométrique est une spirale logarithmique.

3\ Montrer que la courbe est une spirale plane :

en calculant le rayon polaire :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2} = e^t$$

Comme l'angle polaire est $\theta = t$, On peut ecrire $r = e^\theta$

cette equation montre que la courbe décrit une spirale plane dans le plan

4\ Trouver une nouvelle parmétisation de la courbe en fonction de l'angle polaire. comme $t = \theta$ alors : $r = e^t = e^\theta$

en coordonnés polaires (r, θ)

$$\begin{cases} r(\theta) = e^\theta \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

en coordonées cartésiennes

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos\theta = e^\theta \cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) = e^\theta \sin\theta . \end{cases}$$

$\vec{g}(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta)$ c'est la nouvelle paramétrisation en fonction de l'angle polaire.

5\ - Comparer les vitesses de parcours selon les deux paramétrisations.

on a : $g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$

La vitesse $\|g'(t)\|$

$$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t , e^t \sin t + e^t \cos t)$$

Scanné avec CamScanner

$$\|g'(t)\|_2 = \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \cancel{2\cos t \sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\cos t \sin t} + \cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(2\cos^2 t + 2\sin^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(2\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1})}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(2)} = e^t\sqrt{2}$$

donc $\|g'(t)\| = e^t\sqrt{2}$

On $g(\theta) = (e^\theta \cos\theta,\ e^\theta \sin\theta)$

On calcule la vitesse.

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d(e^\theta \cos\theta)}{d\theta} = e^\theta \cos\theta - e^\theta \sin\theta$$

$$= e^\theta(\cos\theta - \sin\theta)$$

Scanné avec CamScanner

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d(e^{\theta}\sin\theta)}{d\theta} = e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta$$
$$= e^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)$$

$$\|g'(\theta)\| = \sqrt{e^{2\theta}\left((\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2\right)}$$

$$= \sqrt{e^{2\theta}2} = e^{\theta}\sqrt{2}$$

On a : $v(\theta) = v(t)$

alors la vitesse de parcours est la même dans les deux paramétrisation.

Exercice 04 : On considère les deux arcs paramétrés sur $[0, 1]$:

$$g_1(t) = (t, t^2)$$

$$g_2(t) = (t^2, t)$$

1) $g_1'(t) = (1, 2t)$

pour tout $t \in [0, 1]$, $g_1'(t) \neq (0,0)$

donc g_1 est régulier sur $[0, 1]$.

- $g_2'(t) = (2t, 1)$

pour tout $t \in [0, 1]$, $g_2'(t) \neq (0,0)$

donc g_2 est régulier sur $[0, 1]$

alors les deux arcs sont réguliers sur $[0, 1]$

2)- Calculer les longueurs L_1 et L_2.

• $g_1(t)$

$x'(t) = 1$, $y'(t) = 2t$

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{1 + 2(t)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt$$

On a : $\int \sqrt{a+b^2}\,dt = \frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(b+\sqrt{a^2+b^2}\right)$

On pose : $a = 1$ et $b = 2t$

On a : $b = 2t \Rightarrow db = 2 \cdot dt$

$\Rightarrow dt = \frac{db}{2}$

$$L_1 = \int_0^2 \sqrt{1+b^2}\,\frac{db}{2}.$$

$$L_1 = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+b^2}\,db$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\sqrt{1+b^2} + \frac{1}{2}\ln\left(b+1+b^2\right)\right)\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{0}{2}\sqrt{1+0^2} + \frac{1}{2}\ln\left(0+\sqrt{1+0^2}\right)\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left|2+\sqrt{5}\right|\right)\right] -$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\ln 1\right)\right] \longrightarrow 0$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

- $g_2(t)$

$$x_2'(t) = 2t \quad , \quad y_2'(t) = 1$$

$$L_2 = \int_0^1 \| g_2'(t) \| \, dt = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + 1^2} \, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{4t^2+1} \, dt$$

c'est la même integrale que L_1 juste les termes sous la racines son inversés $1 + 4t^2 = 4t^2 + 1$.

donc: $L_1 = L_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

3\ Comparer L_1 et L_2:

On constate que $L_1 = L_2$.

4\ Donner une interprétation géomitrique de resultat

Les arcs g_1 et g_2 om la même longueurs sur $[0,1]$ car inverser les coordonnées ne change pas la distance le long de la courbe géométriquement g_2 est la parabole $y = x^2$ reflichie par rapport à la diagonale $y = x$ ce qui explique l'égalité des longueurs.