Chapitre 2 : Interpolation polynomiale

Etant donnée une fonction $f(x)$ connue pour un certain nombre de points contenus dans un intervalle $[a, b]$ tel que $a \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq b$. L'expression analytique de la fonction $f(x)$ n'étant pas connue, on se propose d'approximer cette fonction avec un polynôme $P_n(x)$ de degré inférieur ou égal à n et passant par les points de coordonnées $(x_i, f(x_i))$.

c'est à dire que $\forall x_i$: $P_n(x_i) = f(x_i)$

si on arrive à retrouver ce polynôme, on aurait alors réalisé une interpolation polynomiale. On se pose alors la question de l'existence ainsi que de l'unicité de ce polynôme ?

Si le polynôme $P_n(x)$ existe, il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

En remplaçant x par les différentes valeurs x_i, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_0 + a_n = P_n(x_0) = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_1 + a_n = P_n(x_1) = y_1 \\ \cdots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_n + a_n = P_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Les inconnus sont les coefficients a_i et la matrice V de ce système est appelée matrice de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ & \vdots & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

On peut montrer que le déterminant de cette matrice est :

$$\det V = \prod_{i=0, j<i}^{n} (x_j - x_i)$$

Comme tous les points x_i sont différents, le déterminant est différent de zéro, et le système admet une solution unique. Le polynôme $P_n(x)$ donc existe et il est unique.
Le détermination du polynôme $P_n(x)$ exige la recherche des coefficients a_i. L'utilisation du système précédent est une mauvaise solution parce que la matrice V est mal conditionnée : les puissances des x_i donnent des différences énormes entre les éléments de la matrice. On va donc présenter des méthodes alternatives simplifiant le calcul du polynôme $P_n(x)$. Ces méthodes ont toutes pour principe le changement de base. On n'utilisera plus la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ mais plutôt d'autres bases.

$L_1(x_1) = 1$

$L_1(x_2) = 0$

1) Méthode de Lagrange

La base de Lagrange dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n est définie comme suit :

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Pour toute valeur de x_j différente de x_i le polynôme $L_i(x_j) = 0$.

Donc le polynôme $L_i(x)$ peut s'écrire sous la forme suivante : $\to K$?

$$L_i(x) = K(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$$

Pour toute valeur de x_i le polynôme $L_i(x_i) = 1$

Soit $L_i(x_i) = K(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)$
$= 1$

$$\boxed{K = \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}}$$

Alors

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Ou encore

$$L_i(x) = \prod_{i=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_j)} \quad , i = 0, \dots, n$$

Ce sont les polynômes de Lagrange.

$y_i = f(x_i)$

Ceci fait, quel est alors le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n(x)$.

On sait que $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$

On peut écrire $P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$

Ou encore

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Exemple :

Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ qui interpole la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$ pour les trois points

$$x_0 = 0, \; x_1 = \frac{1}{6}, \; x_2 = \frac{1}{2}$$

Calculons les ordonnées pour les points

$$x_0 = 0, \; x_1 = \frac{1}{6} \text{ et } x_2 = \frac{1}{2}$$

$y_0 = \sin(0) = 0$

$y_1 = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$y_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

On calcule les polynômes de Lagrange :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(0-\frac{1}{6}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)} = 12x^2 - 8x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-0\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)} = -18x^2 + 9x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)} = 6x^2 - x$$

Alors $P_2(x) = 0L_0(x) + \frac{1}{2}L_1(x) + 1L_2(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$

2) Méthode de Newton

On appelle ainsi cette méthode par rapport à la base de Newton

$$N : \begin{cases} 1 \\ (x-x_0) \\ (x-x_0)(x-x_1) \\ \vdots \\ (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1}) \end{cases}$$

Le polynôme d'interpolation de Newton s'écrivait alors sous la forme suivante :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Alors quelles sont les valeurs des coefficients a_i ? Il existe deux méthodes de Newton selon que les points de collocation sont équidistants (la différence entre les abscisses des points successives est constante) ou non.

x_0

$x_1 = x_0 + h$

$x_2 = x_1 + h$

$h \quad h$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2$

2.1/ Méthode de Newton pour les différences divisées :

Avant de procéder au calcul des coefficients, on va définir les différences divisées :

- La différence divisée d'ordre 0 de x_i : $D(x_i) = f(x_i) = y_i$
- La différence divisée d'ordre 1 de x_i :

$$D(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{D(x_{i+1}) - D(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

• La différence divisée d'ordre 2 de x_i :

$$D(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{D(x_{i+1}, x_{i+2}) - D(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

• . . .

• La différence divisée d'ordre k de x_i.

$$D(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{D(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - D(x_i, \dots, x_{i+p-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Alors $P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$

$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$

Soit $a_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = D(x_0, x_1)$

et ainsi de suite, on démontre que

$$a_i = D(x_0, x_1, \dots, x_i)$$

Exemple :

On va recalculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$ de l'exemple précédent et pour les mêmes points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$, à l'aide de la méthode de Newton pour les différences divisées.

Tableau 1 : Résultat de calcul de la pyramide des différences divisées

x_n	$f(x_n)$	D_1	D_2	
0	0			a_0
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\dfrac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{6}-0} = 3$		a_1
$\frac{1}{2}$	1	$\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = \frac{3}{2}$	$\dfrac{\frac{3}{2}-3}{\frac{1}{2}-0} = -3$	a_2

$f(0)$

$f(1/6)$

$f(1/2)$

Alors le polynôme d'interpolation de Newton pour les différences divisées est :

$$P_2(x) = 0 + 3(x-0) - 3(x-0)(x-\frac{1}{6}) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$$

On a retrouvé exactement le même polynôme, c'est normal puisque on a déjà montré que le polynôme est unique.

2.2/ Méthode de Newton pour les différences finies

Les points de collocation sont équidistants (la différence entre les abscisses des points successives est constante). On pourra définir le polynôme de Newton en introduisant une autre entité mathématique appelée "différence finie".

Les points sont équidistants donc $\forall x, x_i - x_{i-1} = h =$ constante

On définit les différences finies par :

- La différence finie d'ordre 0 de y_i : $\Delta y_i^0 = f(x_i) = y_i$
- La différence finie d'ordre 1 de y_i : $\Delta y_i^1 = \Delta y_{i+1}^0 - \Delta y_i^0$
- La différence finie d'ordre 2 de y_i : $\Delta y_i^2 = \Delta y_{i+1}^1 - \Delta y_i^1$
- ....
- La différence finie d'ordre k de y_i : $\Delta y_i^k = \Delta y_{i+1}^{k-1} - \Delta y_i^{k-1}$

Alors le polynôme d'interpolation de Newton pour les différences divisées est :

$P_2(x) = 0 + 3(x-0) - 3(x-0)(x-\frac{1}{6}) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$

On a retrouvé exactement le même polynôme, c'est normal puisque on a déjà montré que le polynôme est unique.

2.2/ Méthode de Newton pour les différences finies

Les points de collocation sont équidistants (la différence entre les abscisses des points successives est constante). On pourra définir le polynôme de Newton en introduisant une autre entité mathématique appelée "différence finie".

Les points sont équidistants donc $\forall x, x_i - x_{i-1} = h = $ constante

On définit les différences finies par :

- La différence finie d'ordre 0 de y_i : $\Delta y_i^0 = f(x_i) = y_i$
- La différence finie d'ordre 1 de y_i : $\Delta y_i^1 = \Delta y_{i+1}^0 - \Delta y_i^0$
- La différence finie d'ordre 2 de y_i : $\Delta y_i^2 = \Delta y_{i+1}^1 - \Delta y_i^1$
- ....
- La différence finie d'ordre k de y_i : $\Delta y_i^k = \Delta y_{i+1}^{k-1} - \Delta y_i^{k-1}$

On peut établir aisément la relation entre les différences divisées et finies

- $D(x_i) = f(x_i) = \Delta y_i^0$
- $D(x_i, x_{i+1}) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{\Delta y_{i+1}^0 - \Delta y_i^0}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{\Delta^1 y_i}{h}$
- $D(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \dfrac{D(x_{i+1}, x_{i+2}) - D(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$

$$= \frac{\Delta y_{i+1}^1 - \Delta y_i^1}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_i}{2h^2}$$

- ....

- On peut alors établir que : $D(x_i, \dots, x_{i+k}) = \dfrac{\Delta^k y_i}{k!\, h^k}$

Dans ces conditions le polynôme de Newton devient :

$$P_n(x) = \Delta^0 y_0 + \frac{\Delta^1 y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Exemple :

On va calculer le polynôme d'interpolation à l'aide de la méthode de Newton pour les différences finies ~~de la fonction~~ $f(x)$ définie pour les points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, tels que $f(x_0) = 6$, $f(x_1) = 6$, et $f(x_2) = 10$.

On calcule la pyramide des différences finies.

Tableau 2 : Résultat de calcul de la pyramide des différences finies

x_0	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^1 y_0$	$\Delta^2 y_0$	
0	6			a_0
1	6	$6-6=0$		a_1
2	10	$10-6=4$	$4-0=4$	a_2

$$P_2(x) = \Delta^0 y_0 + \frac{\Delta^1 y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$

La valeur du pas d'interpolation $h = 1$

$$P_2(x) = 6 + \frac{0}{1}(x-0) + \frac{4}{2}\cdot(x-0)(x-1)$$

$$P_2(x) = 2x^2 - 2x + 6$$

3/ Les erreurs d'interpolation :

Il est clair que le polynôme d'interpolation n'est qu'une approximation de la fonction $f(x)$, ce qui entraîne l'existence d'une erreur $e(x) = P_n(x) - f(x)$

Théorème : On suppose que $f(x) \in C^{n+1}([a,b])$, c'est-à-dire qu'elle est $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$.

Alors $\forall x \in [a,b]$, $\exists \xi \in [a,b]$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

ce théorème ne fait finalement appel qu'à une interpolation sur $n+2$ points :
$x_0, \dots, x_n, x_{n+1}$ et ξ annule l'erreur.
si $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$ sur $[a, b]$
Alors

$$e(x) = P_n(x) - f(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

Donc l'erreur d'interpolation E_i sera

$$E_i(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

Exemple :

Soit la fonction $f(x)$ définie pour les points $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, et $x_2 = 144$. tels que $f(x_0) = 10$, $f(x_1) = 11$, et $f(x_2) = 12$. Si l'on sait qu'en réalité cette fonction n'est autre que la fonction racine de x, $f(x) = \sqrt{x}$. Quelle est alors l'erreur commise lors de l'interpolation de la fonction pour $x = 115$

On calcule la dérivée d'ordre 3 de $f(x)$.

$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow x^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1}$

$f'''(x) = -\frac{3}{8} x^{-5/2} \quad \left(\frac{-1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}-1}$

$M_3 = \frac{3}{8} (100)^{-5/2} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}$

$x = 115$

donc

$$E_i \leq \frac{3}{8.3!}(10)^{-5}\,|(115-100)(115-121)(115-144)|$$

$$\leq 1.63 . 10^{-3}$$

verifiant maintenant que le calul est juste
On calule $P_2(115)$ pour cela on dresse d'abord
le tableau de la pyramide des differences divisées

Tableau 3: La pyramide des differences divisées pour le calcul de l'erreur d'interpolation

x_0	$f(x_n)$	D_1	D_2	
100	10			a_0
121	11	$\frac{11-10}{121-110} = \frac{1}{21}$		a_1
144	12	$\frac{12-11}{144-121} = \frac{1}{23}$	$\frac{\frac{1}{23}-\frac{1}{21}}{144-100} = \frac{-2}{21252}$	a_2

$$P_2(115) = 10.\frac{1}{21}(115-110) - \frac{2}{21252}(115-100)(115-121)$$

$$= 10.7227555$$

$$f(115) = \sqrt{115} = 10.~~72~~38053$$

L'erreur d'interpolation est

$$|f(115) - P_2(115)| = 1.05 . 10^{-3} \leq 1.63\,(10)^{-3}$$

Donc l'erreur d'interpolation est inferieure
à l'erreur maximale E_i,

11

4) L'effet Runge :

Runge Carl David est un mathématicien qui s'est intéressé de près à l'erreur d'interpolation aux bords du domaine d'interpolation. On aurait tendance à croire que plus on augmente le nombre de points de collocation, plus l'interpolation est précise. Il s'avère que ce n'est pas toujours le cas. Un exemple traité par Runge est la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Il s'est aperçu que l'erreur aux bords du domaine est plus importante. On s'intéresse à la façon de minimiser l'erreur d'interpolation

$$E_i(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

La seule entité sur laquelle on peut agir c'est le PDD définit comme suit :

$$PDD = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

La manière de minimiser ce produit sera traité dans le paragraphe suivant.

5) Les polynômes de Tchebychev :

Dans le prolongement de ce qu'on vient de citer, il est clair que pour minimiser le terme PDD. On doit chercher une loi de distribution des x_i qui assure un produit minimum.

Pour ce faire, nous allons voir une base formée par les polynômes de Tchebychev et en avoir par la suite son utilité

Les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation trigonométrique suivante :

$T_n(x) = \mathrm{Cos}(n\,\mathrm{ArcCos}(x))$

On comprend que le domaine de définition est l'intervalle $[-1, 1]$.

$\forall x,\ -1 \leq T_n(x) \leq 1$

Si $n=0$, $T_0(x) = \mathrm{Cos}(0.\mathrm{ArcCos}(x)) = 1$

Si $n=1$, $T_1(x) = \mathrm{Cos}(1.\mathrm{ArcCos}(x)) = x$

$\mathrm{Cos}(a+b)$ $\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b - \mathrm{sin}\,a\,\mathrm{sin}\,b$

Si $n=2$, $T_2(x) = \mathrm{Cos}(2.\mathrm{ArcCos}(x)) = \mathrm{Cos}(\mathrm{ArcCos}(x)+\mathrm{ArcCos}(x))$

$T_2(x) = \mathrm{Cos}(\mathrm{ArcCos}(x))\,\mathrm{Cos}(\mathrm{ArcCos}(x)) - \mathrm{sin}(\mathrm{ArcCos}x)\,\mathrm{sin}(\mathrm{ArcCos}x)$

$T_2(x) = \mathrm{Cos}^2(\mathrm{ArcCos}(x)) - \mathrm{sin}^2(\mathrm{ArcCos}(x))$

$T_2(x) = \mathrm{Cos}^2(\mathrm{ArcCos}(x)) - (1 - \mathrm{Cos}^2(\mathrm{ArcCos}(x)))$

$T_2(x) = 2\mathrm{Cos}^2(\mathrm{ArcCos}\,x) + 1 = 2x^2 + 1$

Donc pour $n+1$

$T_{n+1}(x) = \mathrm{Cos}((n+1)\,\mathrm{ArcCos}(x)) = \mathrm{Cos}(n\,\mathrm{ArcCos}(x) + \mathrm{ArcCos}(x))$

$T_{n+1}(x) = \mathrm{Cos}(n\,\mathrm{ArcCos}(x))\,\mathrm{Cos}(\mathrm{ArcCos}(x)) - \mathrm{sin}(n\,\mathrm{ArcCos}(x))$
$\mathrm{sin}(\mathrm{ArcCos}(x))$

De même pour $n-1$

$T_{n-1}(x) = \mathrm{Cos}((n-1)\,\mathrm{ArcCos}(x)) = \mathrm{Cos}(n\,\mathrm{ArcCos}(x) - \mathrm{ArcCos}(x))$

$T_{n-1}(x) = \mathrm{Cos}(n\,\mathrm{ArcCos}(x))\,\mathrm{Cos}(\mathrm{ArcCos}(x)) + \mathrm{sin}(n\,\mathrm{ArcCos}\,x)$
$\mathrm{sin}(\mathrm{ArcCos}(x))$

Alors

$$T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x) = 2\cos(n \operatorname{ArcCos}(x)) \cos(\operatorname{ArcCos} x)$$
$$= 2\,T_n(x) \cdot x$$

$$\boxed{T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)}$$

C'est la relation de récurrence qui donne les différents polynômes de Tchebychev.

Il se trouve que les solutions des équations $T_n(x) = 0$ minimisent le produit PDD. Donc on recherche $(n+1)$ valeurs qui rendent l'erreur minimale, on va donc les calculer à partir des équations $T_{n+1}(x) = 0$

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1) \operatorname{ArcCos}(x)) = 0$$

La fonction cos s'annule pour un angle de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \dots, n$

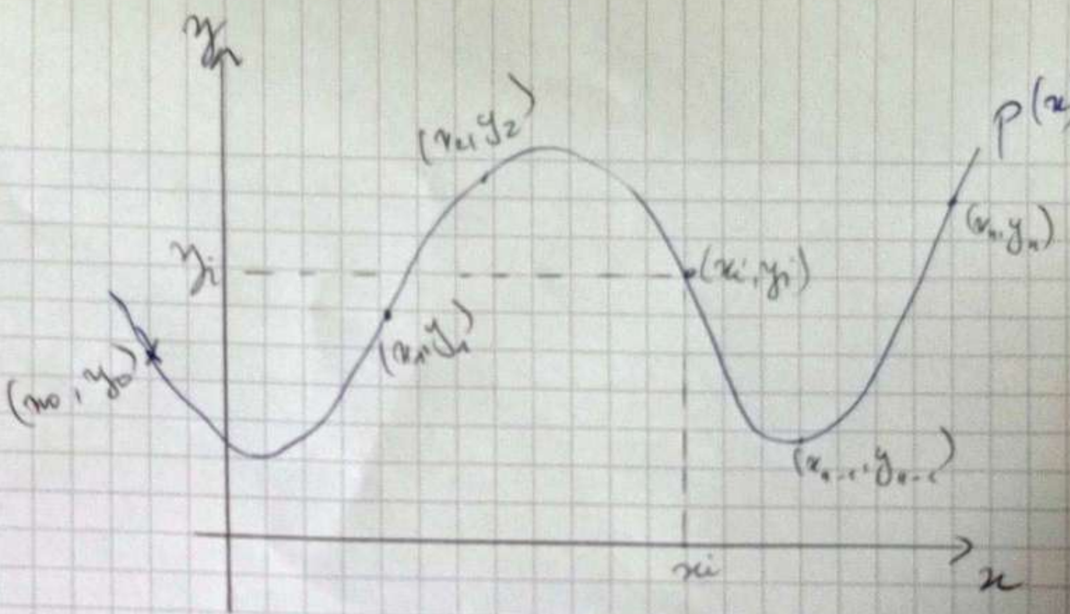
$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Donc pour $(n+1) \operatorname{ArcCos}(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{2k+1}{2}\pi$

Alors $x = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right)$, $k = 0, \dots, n$

Une distribution selon cette expression minimise l'effet Runge.



y
y_i
(x_0, y_0)
(x_1, y_1)
(x_2, y_2)
(x_i, y_i)
(x_{n-1}, y_{n-1})
(x_n, y_n)
$p(x)$
x_i
x