Exercice 04 :

$$g_1(t) = (t, t^2) \qquad g_2(t) = (t^2, t)$$

1) est-ce que les deux arcs sont réguliers sur $[0,1]$

- $g_1(t)$: $g_1'(t) = (1, 2t)$
  si $t = 0 \Longrightarrow g_1'(0) = (1, 0) \Longrightarrow$ donc g_1 est régulier

- $g_2(t)$: $g_2'(t) = (2t, 1)$
  si $t = 0 \Longrightarrow g_2'(0) = (0, 1) \Longrightarrow$ donc g_2 est régulier

2) Calculons des longueurs L_1 et L_2 :

$$L_1 = \int_0^1 \| g_1'(t) \| \, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt$$

$$L_2 = \int_0^1 \| g_2'(t) \| \, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt$$

3) La comparaison entre L_1 et L_2 :

$$L_1 = L_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt$$

4) Interprétation géométrique du résultat.

Les deux arcs représentent des courbes symétriques par rapport la droite $x = y$

Exercice 03 : $g(t) = (e^t \cos t \,;\, e^t \sin t) \quad t \in \mathbb{R}$

1) la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t \\ y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t, \end{cases}$$

Donc $g'(t) = \left((e^t \cos t - e^t \sin t) \,;\, (e^t \sin t + e^t \cos t) \right)$

La norme :

$$\|g'(t)\|^2 = e^{2t} \left[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 \right]$$

$\|g'(t)\|^2 = 2e^{2t} > 0$ Alors la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$

2) Le support géométrique :

$$x^2 + y^2 = e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2t}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t)} = e^t$$

Le support géométrique $r = e^t$

3) La courbe est une spirale plane :

les cordonnées Polaire $\Rightarrow r = e^t, \ \theta = t$.

4) l'angle Polaire :

$$\begin{cases} r(\theta) = e^\theta \\ x(\theta) = e^\theta \cos\theta \\ y(\theta) = e^\theta \sin\theta \end{cases} \Rightarrow g(\theta) = (e^\theta \cos\theta \,;\, e^\theta \sin\theta).$$

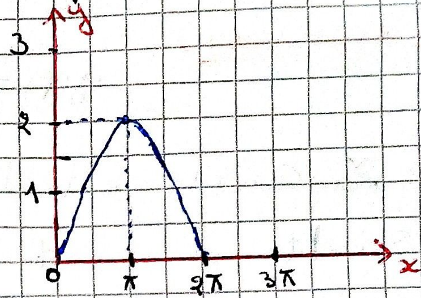
5) Comparaison des Vitesses de Parcours

- en t : $\|g'(t)\| = \sqrt{2}\, e^t$

- en θ : $\left\| \dfrac{dg}{d\theta} \right\| = \sqrt{2}\, e^\theta$

Les Vitesses identiques puisque $t = \theta$.

5) l'allure de la courbe et tracé qualitatif :



Exercice 02 :

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$h(t) = (t^2 ; t^4)$

1) Le Support géométrique de la courbe :

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = t^4 = y \Rightarrow y = x^2 \text{ avec } x \geq 0$$

2) Regulairte et Point Singulier :

$h'(t) = (2t, 4t^3)$

Pour $t = 0$ On a $h'(0) = (0, 0)$

non régulier alors il existe une Point singulier . $t = 0 \Rightarrow (0,0)$

3) l'existance d'une tangente en $t = 0$

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t^3}{2t} = 2t^2.$$

au Point $t = 0 \Rightarrow 2t^2 = 0$

Alors il existe un tangente au Point $t = 0$

4) Le comportement de la courbe au Voisinage de l'origine

$t \longrightarrow 0$: $x = t^2$, $y = t^4$ est négligalle devant x.

5) type de singularité :

le Point singulier admet une seule tangente et la courbe ne coupe pas elle-même

Donc $(0,0)$ est une Point de rebroussent.

Courbes Paramétrées :

Exercice 1 :

$$\gamma(t) = (t - \sin t \,;\, 1 - \cos t)$$

1) La courbe est définie et de class C^1 sur $\mathbb{R}$

- $\sin t$ et $\cos t$ est un fonction définie de class C^1 sur $\mathbb{R}$

- $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$. La courbe est définie et de class C^1 de $\mathbb{R}$

2) Calculer $\gamma'(t)$:

$x'(t) = 1 - \cos t$ donc

$y'(t) = \sin t$ $\Rightarrow \gamma'(t) = (1 - \cos t \,;\, \sin t)$

. La régularité de la courbe :

$t = 0$ On a $\gamma'(0) = (0, 0)$!

Alors la courbe n'est pas régulier.

3) les points où la tangente est horizontale :

la tengente est horizontale si $y'(t) = 0$, $\sin t = 0$

$t = 0$ $\quad \gamma(0) = (0, 0)$

4) Variation de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$

- $x(t) = t - \sin t$

$x'(t) = 1 - \cos t \Rightarrow x'(t) = 0 \Rightarrow 1 - \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 1$

$\begin{cases} t = 0 \\ t = 2\pi \end{cases}$ Alors $x(t)$ est croissante sur $[0, 2\pi]$

- $y(t) = 1 - \cos(t)$

$y'(t) = \sin t$ → $y'(t) \in [0, \pi]$ Possitif.

→ $y'(t) \in [\pi, 2\pi]$ négatif.

Alors $y(t)$ est croissante sur $[0, \pi]$ de decroissante

sur $[\pi, 2\pi]$