DM n°1 — Courbes paramétrées

Exercice 1 (Étude globale d'une courbe paramétrée) *On considère l'arc paramétré $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini par*

$$g(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t).$$

1) Montrer que la courbe est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $g'(t)$ et étudier la régularité de la courbe.

3) Déterminer les points où la tangente est horizontale.

4) Étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$.

5) Décrire l'allure de la courbe et proposer un tracé qualitatif.

Exercice 2 (Point singulier et comportement local) *On considère la courbe paramétrée $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$h(t) = (t^2,\ t^4).$$

1) Déterminer le support géométrique de la courbe.

2) Étudier la régularité et localiser les points singuliers.

3) Étudier l'existence d'une tangente en $t = 0$.

4) Décrire le comportement de la courbe au voisinage de l'origine.

5) Identifier le type de singularité.

Exercice 3 (Changement de paramétrisation) *On considère l'arc paramétré*

$$g(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer le support géométrique.

3) Montrer que la courbe est une spirale plane.

4) Trouver une nouvelle paramétrisation de la courbe en fonction de l'angle polaire.

5) Comparer les vitesses de parcours selon les deux paramétrisations.

Exercice 4 (Longueur d'arc et comparaison) *On considère les deux arcs paramétrés sur $[0, 1]$:*

$$g_1(t) = (t,\ t^2), \qquad g_2(t) = (t^2,\ t).$$

1) Vérifier que les deux arcs sont réguliers sur $[0, 1]$.

2) Calculer les longueurs L_1 et L_2.

3) Comparer L_1 et L_2.

4) Donner une interprétation géométrique du résultat.