Sadaoui ASHA.

Devoir de maison n°1

Exo 1

$g(t) = (t - \sin t\ ,\ 1 - \cos t)$.

Q1) Montrez que la courbe est définie de la classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On a la fonction $g(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ est définie sur $\mathbb{R}$ car les fonctions sinus et cosinus sont définie sur $\mathbb{R}$ et t est défini sur $\mathbb{R}$

Les fonction $t - \sin t$ et $1 - \cos t$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car elle sont composées de fonction de classe C^1.

Donc

$g(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q2. Calculer $g'(t)$:

$g'(t) = (1 - \cos t\ ,\ \sin t)$.

La régularité.

$g'(t) = (0, 0)$ si et seulement si

$1 - \cos t = 0$ et $\sin t = 0$

$\hookrightarrow$ si impossible $\cos t = 1$

$\cos t = 1$ et $\sin t = 0$

ce qui équivaut à $t = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Donc, la courbe est régulière par tout sauf aux point $t = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Q3- Déterminer les point où la tangente est horizontale.

$g'(t)$ est nulle

c-à-d $\sin t = 0$ $t = k\pi$.

et le composante horizontale $1 - \cos t$ non nulle pour que la tangente horizontalle et non point singulier.

si $t = k\pi$. $\begin{cases} \cos t = 1 & k \text{ pair} \\ \cos t = -1 & k \text{ impair} \end{cases}$

Donc $1 - \cos t = 0$ si k est pair

$1 - \cos t = 2$ c'est impair.

Donc la tangente horizontale aux points $t = (2k+1)\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Q4- La Variation $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$

$x(t) = t - \sin t$

$y(t) = 1 - \cos t$.

Donc

$x'(t) = 1 - \cos t$

$y'(t) = \sin t$

. On a $1 - \cos t \geq 0$, donc $x(t)$ est croissante sur $[0, 2\pi]$

$x(0) = 0$, $x(2\pi) = 2\pi$.

. On a $\sin t \geq 0$ sur $[0, \pi]$

$\sin t \leq 0$ sur $[\pi, 2\pi]$ Donc $y(t)$ est croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$

$y(0) = 0$ $y(\pi) = 2$

$y(2\pi) = 0$.

05. Allure de la courbe :

La courbe présente des point de rebroussement aux points $t = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

Exo2

$f(t) = (t^2, t^4)$.

01) Le support géométrique de la courbe :

$x = t^2$

$y = t^4$.

Donc,

$x^2 = (t^2)^2 = t^4$.

On a $y = t^4 = x^2$

Donc $y = x^2$.

Donc le support géométrique de la courbe est la partie de la parabole $y = x^2$ avec $x \geq 0$.

02. La régularité et localiser les point singulier :

$x'(t) = 2t$

$y'(t) = 4t^3$.

$x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$

$2t = 0 \Rightarrow t = 0$

$4t^3 = 0 \Rightarrow t = 0$

Donc, $t = 0$ est le seul point où les deux dérivées s'annulent simultanément.

03. L'existence d'une tangente en $t = 0$.

$x'(t) = 2t$

$y'(t) = 4t^3$.

La limite de $\frac{y'(t)}{x'(t)}$

$\lim_{t \to 0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{4t^3}{2t} = \lim_{t \to 0} 2t^2 = 0$

Donc

Il existe une tangente en $t = 0$, et elle est horizontale.

04. Décrire le comportement de la courbe au voisinage de l'origine

$x(t)$ est proche en 0 $\Rightarrow$ toujours positif non nul

$y(t)$ proche de 0

$x(t)$ toujours positive non nulle

$y \geq 0$ $x \geq 0$ $\Rightarrow$ la courbe s'approche à l'origine.

Donc

Au voisinage de l'origine, la courbe s'approche de l'origine avec une tangente horizontale.

05 - Identifier le type de singularité

$x'(t) = 2t \qquad x''(t) = 2$

$y'(t) = 4t^3 \qquad y''(t) = 12t^2$

$y'''(t) = 24t$

$y^{(4)}(t) = 24.$

c'est $t = 0$

En $t = 0$

$x'(0) = 0 \qquad x''(0) = 2 \neq 0 x$

$\theta \cdot x(t)$ est 2

En $t = 0$ $\quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0$

$y'''(0) = 0$

$y^{(4)}(0) = 24 \neq 0$

Donc l'ordre de la premier dérivée non nulle de $y(t)$ est 4.

Donc il s'agit d'un point de rebroussement de 2ème espace.

Exo 3 :

$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \quad t \in \mathbb{R}.$

a) Montre que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$:

$g'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t)$

$g'(t) = e^t (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$

$g'(t) = (0,0)$

$\cos t - \sin t = 0 \qquad \sin t + \cos t = 0$

cela implique

$\cos t = \sin t \quad , \quad \cos t = -\sin t$

Donc

$\sin t = -\sin t$ ce qui signifie

$\sin t = 0 \qquad \cos t = 0$

ce qui est impossible car

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$

Donc $g'(t)$ n'est jamais nul.

Donc

$g'(t) \neq (0,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$.

02 - Le support géométrique :

$x = e^t \cos t$

$y = e^t \sin t \qquad t \in \mathbb{R}.$

En coordonnées polaires

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t} = \sqrt{e^{2t}}$

$= e^t.$

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$= \arctan\left(\frac{e^t \sin t}{e^t \cos t}\right)$

$= \arctan(\tan t) = t.$

$r = e^\theta.$

le support géométrique est donc la spirale d'équation polaire $r = e^\theta.$

03_ Montrer que la courbe est une spirale plane.

~~$r = e^\theta$ en co~~

le support géométrique est $r = e^\theta$ en coordonnées polaires c'est une l'équation d'une spirale puisque la courbe définie dans le plan (x, y). c'est une spirale plane.

04_ Une nouvelle paramétrisation de la courbe en fonction de l'angle polaire :

$\theta = t.$

la courbe en fonction de θ en substituant t par θ dans l'expression de $g(t)$

$g(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta).$

05_ Comparer les vitesses de parcours selon les deux paramétrisations.

$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$

$\|g'(t)\| = \| e^t (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t) \|$

$= e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}$

$= e^t \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = e^t \sqrt{2}.$

$\| g'(\theta) \| = e^\theta \sqrt{2}.$

$e^t \sqrt{2}$ = vitesse parcours.

$e^\theta \sqrt{2}$ = nouvelle parmetrisation.

Ex04

$g_1(t) = (t, t^2)$

$g_2(t) = (t^2, t)$

01_ Vérifier que les deux arcs sont réguliers sur $[0, 1]$

$g_1'(t) = (1, 2t)$

$g_1'(t)$ ne s'annule jamais

Donc g_1 est régulier sur $[0, 1]$.

$g_2'(t) = (2t, 1)$

$g_2'(t)$ ne s'annule jamais

Donc g_2 est régulier sur $[0, 1]$.

Q2 - Calculer les longueurs L_1 et L_2.

a) calcule L_1 et L_2.

$g(t) = (x(t), y(t))$

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

$g_1(t) = (t, t^2)$, $x'(t) = 1$

et $y'(t) = 2t$

Donc :

$$L_1 = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt.$$

par intégration by partie

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

$u = \sqrt{1 + 4t^2}$ $dv = dt$.

$$L = \left[t\sqrt{1 + 4t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{5t}{\sqrt{1+4t^2}}\, dt.$$

$$L = \sqrt{5} - 4\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+4t^2}}\, dt$$

$$t^2 = \frac{1}{4}\left((1+4t^2) - 1 \right)$$

$$\frac{t^2}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)$$

Donc

$$4\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+4t^2}} = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$$

Mais

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt.$$

$$L = \sqrt{2} - \left(L - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} \right)$$

$$2L = \sqrt{5} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{a\,sinh}(2t).$$

Donc

$$2L = \sqrt{5} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

$$2L = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \operatorname{a\,sinh}(2)$$

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \operatorname{a\,sinh}(2)$$

$$\operatorname{a\,sinh}(2) = \ln(2 + \sqrt{5}).$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5})$$

$$L_2 = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1}\, dt = L_1$$

Donc

$$L_2 = L_1 = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}) \right).$$

03)- Comparer L_1 et L_2.

Comme on a vu dans le calcul des longeurs $L_1 = L_2$.

04)- Interprétation géométrique

$g_2(t) = (y_1(t), x_1(t))$ où $g_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$. La longueur d'un arc est invariante par une telle symétrie.