

# 华中科技大学

## 生物医学数字信号处理实验报告

### 实验 1 卷积与稀疏重建

学院

工程科学学院

班级

工程科学学院（生医）1701 班

姓名

汪能志

学号

U201713082

指导老师

全廷伟

2020 年 9 月 1 日

# 目录

1. 实验任务 .....	1
2. 实验原理 .....	1
2.1. 一维卷积 .....	1
2.2. 稀疏逆卷积（稀疏重建） .....	1
3. MATLAB 程序实现 .....	2
3.1. 稀疏重建 .....	2
3.2. 高斯噪声 .....	3
3.3. 实验 .....	3
4. 实验结果 .....	4
4.1. 钙信号生成和稀疏重建 .....	4
4.2. 迭代过程中重建信号的变化 .....	6
4.3. 正则化系数对重建结果的影响 .....	6
4.4. 信噪比对重建结果影响 .....	8
5. 实验总结 .....	10

## 1. 实验任务

信号的产生：利用一连串的脉冲序列模拟动作电位，和指数下降函数进行卷积后得到钙信号，并对得到的钙信号添加高斯白噪音。

信号的重建：利用稀疏逆卷积，从钙信号中重建出动作电位。

## 2. 实验原理

### 2.1. 一维卷积

一维卷积的公式为：

$$y[s] = x[s] * h[s] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[s-k] \quad (1-1)$$

其也可以写成线性方程组（矩阵乘法形式）如下：

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m+n-1} \end{pmatrix}_{(m+n-1,1)} = A_h \cdot x = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_n & h_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & h_n & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_n \end{pmatrix}_{(m+n-1,m)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{(m,1)} \quad (1-2)$$

### 2.2. 稀疏逆卷积（稀疏重建）

稀疏重建即为求解如下的优化问题：

$$X^* = \arg \min_x (\|Y - A \cdot X\|_2^2 + \lambda \|X\|_1) \quad (1-3)$$

$\lambda$ 越大，则稀疏性的权重越大； $\lambda$ 越小，则准确性的权重越大。

记式 3 的最优解为：

$$X^* = [x_1, x_2, \cdots]^T \quad (1-4)$$

以式 1-4 为基础，对式 1-3 进行一定的修改：

$$\begin{cases} \Lambda = \lambda \cdot [\frac{1}{|x_1| + \epsilon}, \frac{1}{|x_2| + \epsilon}, \cdots]^T = [\lambda_1', \lambda_2', \cdots]^T \\ X^* = \arg \min_x (\|Y - A \cdot X\|_2^2 + \|\Lambda^T \cdot X\|_1) \end{cases} \quad (1-5)$$

其中 $\epsilon$ 为一个非常小的常数，其目的是避免出现分母为 0 的情况。

由此可知， $X^*$ 中的元素越小，则其在计算稀疏性时的权重越大。因此式 1-5 的解比式 1-4 的解更具有稀疏性。

则有迭代公式：

$$X^{[k+1]} = G(X^{[k]}) \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda^{[k]} = \lambda \cdot [\frac{\alpha}{|x_1^{[k]}| + \epsilon}, \frac{\alpha}{|x_2^{[k]}| + \epsilon}, \dots]^T = [\lambda_1^{[k]}, \lambda_2^{[k]}, \dots]^T \\ X^{[k+1]} = \arg \min_X (\|Y - A \cdot X\|_2^2 + \|(\Lambda^{[k]})^T \cdot X\|_1) \end{cases} \quad (1-6)$$

同时，在 $\Lambda$ 中所有元素的值相同时，式 1-6 退化为式 1-3。

式 1-6 的解为：

$$\begin{aligned} X^{[k+1]*} &= X^{[k]} - \delta \cdot [A^T (A \cdot X^{[k]} - Y)] = X^{[k]} - \delta \cdot M[\tilde{h} * (X^{[k]} * h - Y)] \\ x_i^{[k+1]} &= \begin{cases} \text{sign}(x_i^{[k+1]*}) \cdot (|x_i^{[k+1]*}| - \lambda_i') & |x_i^{[k+1]*}| \geq \lambda_i' \\ 0 & |x_i^{[k+1]*}| < \lambda_i' \end{cases} \\ \Lambda &= \lambda \cdot [\frac{1}{|x_1| + \epsilon}, \frac{1}{|x_2| + \epsilon}, \dots]^T = [\lambda_1', \lambda_2', \dots]^T \end{aligned} \quad (1-7)$$

可知，从初值 $X^{[0]}$ 开始，通过式 1-7 进行迭代， $X^{[k]}$ 的稀疏性会逐渐增加，最终得到一个足够稀疏的解。在刚开始迭代时，可以使用等权重的 $\Lambda$ 计算范数。初值 $X^{[0]}$ 可以使用全零进行初始化。

### 3. MATLAB 程序实现

#### 3.1. 稀疏重建

```
function x = deconv_L1(y, h, lambda)
% 初始化
% x, y & h should be column vector
lambda = 1e-3 * lambda;
len_y = size(y, 1);
len_h = size(h, 1);
len_x = len_y - len_h + 1;
x = zeros(len_x, 1);
% 反转卷积模板
h_tilde = flipud(h);
% 初始化权重和迭代参数
weight = lambda * ones(len_x, 1);
lr = 0.01;
epoch_1 = 10;
epoch_2 = 100;

for i_1 = 1:epoch_1
    for i_2 = 1:epoch_2
        % 梯度下降和软阈值迭代

        % 快速逆卷积，计算梯度
        grad = conv(h_tilde, (conv(x, h, 'full') - y), 'full');
        grad = grad(len_h:len_y);
```

```

        descent = lr .* grad;
        x = x - descent;
        % 软阈值操作并引入非负性
        x = (abs(x) > weight) .* (abs(x) - weight) .* sign(x);
        x = max(x, 0);
    end
    % 根据梯度下降结果, 更新权重
    weight = lambda .* (1 ./ (x + 1e-6));
end
end

```

### 3.2. 高斯噪声

MATLAB 中的 `randn` 函数可以生成符合标准正态分布（高斯分布）的矩阵。输入参数 SNR 代表信号的信噪比，单位为分贝（dB）。

```

function Signal_Noise = Add_Noise(Signal, SNR)
% 计算信号功率
Signal_Power = sum(abs(Signal(:)).^2) / numel(Signal);
Signal_dB = 10 * log10(Signal_Power);

% 计算噪声功率
Noise_dB = Signal_dB - SNR;
Noise_Power = 10^(Noise_dB / 10);

% 生成噪声信号
Rand_Noise = randn(size(Signal));
Noise = sqrt(Noise_Power) * Rand_Noise;

Signal_Noise = Signal + Noise;

end

```

### 3.3. 实验

```

%%
% 信号的产生
% 动作电位脉冲
x = zeros(1024, 1);
ap_train = [200, 220, 250, 270, 300, 400, 500, 720, 600, 800, 900];
x(ap_train, 1) = 1;
% 指数下降模板
t = 15;
h = exp(-(0:1:ceil(10 * t)) / t)';
% 无噪声的钙信号
y = conv(x, h, 'full');
% 信噪比 dB

```

```

SNR = 15;
% 有噪声的钙信号
y_noise = Add_Noise(y, SNR);
% 稀疏重建
% 正则化系数 (*1e-3)
L = 0.5;

x_deconv_L1 = deconv_L1(y_noise, h, L);

%%
% 绘图
figure(1)
plot(y_noise, '-', 'color', [0.46, 0.67, 0.19])
hold on
plot(y, '-', 'LineWidth', 1.5, 'color', [0.85, 0.32, 0.01]);
plot(ap_train, 1, '.b', 'MarkerSize', 20);
hold off
title(sprintf('Ca Signal, SNR=%d dB', SNR))
legend('Signal with Noise', 'Signal without Noise', 'AP Train')
xlim([0, 1024])
ylim([-0.4, 1.6])
box off

figure(2)
plot(x_deconv_L1, '-r');
hold on
plot(ap_train, 1, '.b', 'MarkerSize', 20);
legend('Sparse Reconstruction', 'AP Train')
hold off
title(sprintf('Sparse Reconstruction, SNR=%d dB,  $\lambda$ =%.5f', SNR, L * 1e-3))
xlim([0, 1024])
ylim([-0.02, 1.3])
box off

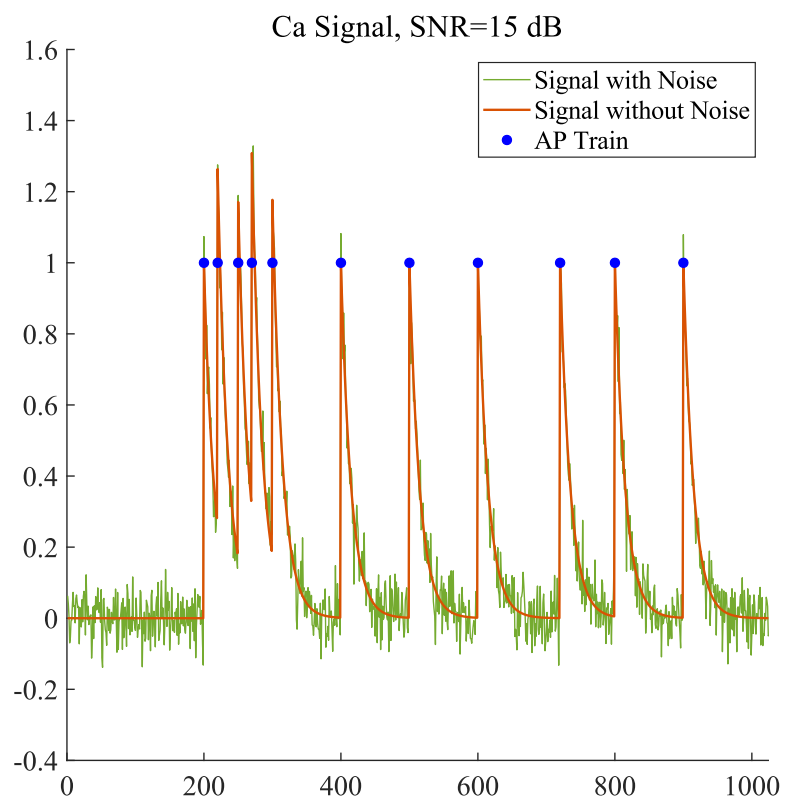
```

## 4. 实验结果

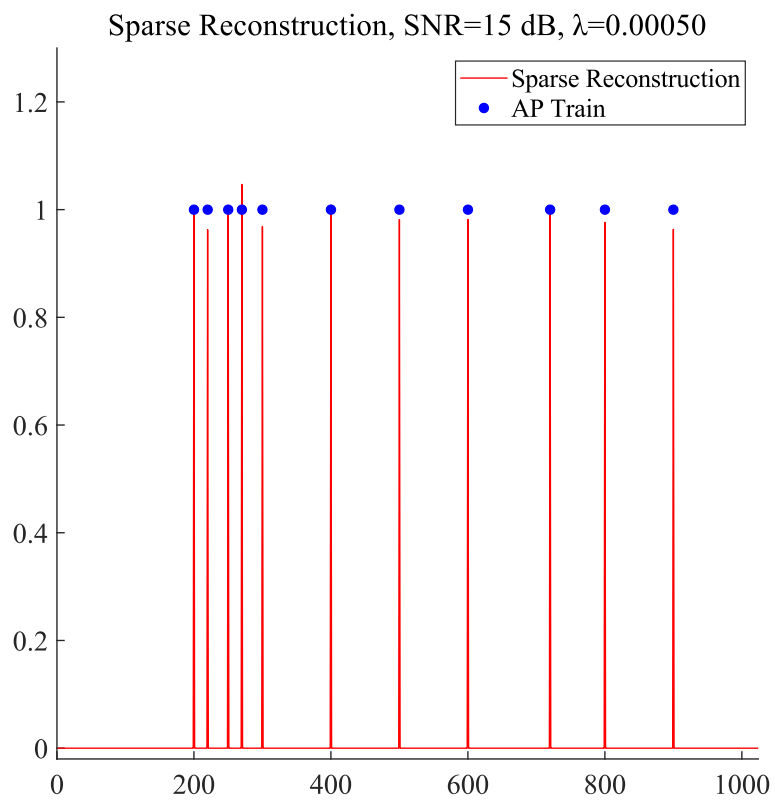
### 4.1. 钙信号生成和稀疏重建

在 200, 220, 250, 270, 300, 400, 500, 600, 720, 800 和 900 处共有 11 次动作电位。指数下降模板的时间常数为 15。和动作电位信号卷积后得到钙信号，并添加信噪比为 15dB 的高斯噪声。

随后对带有噪声的钙信号进行稀疏重建。

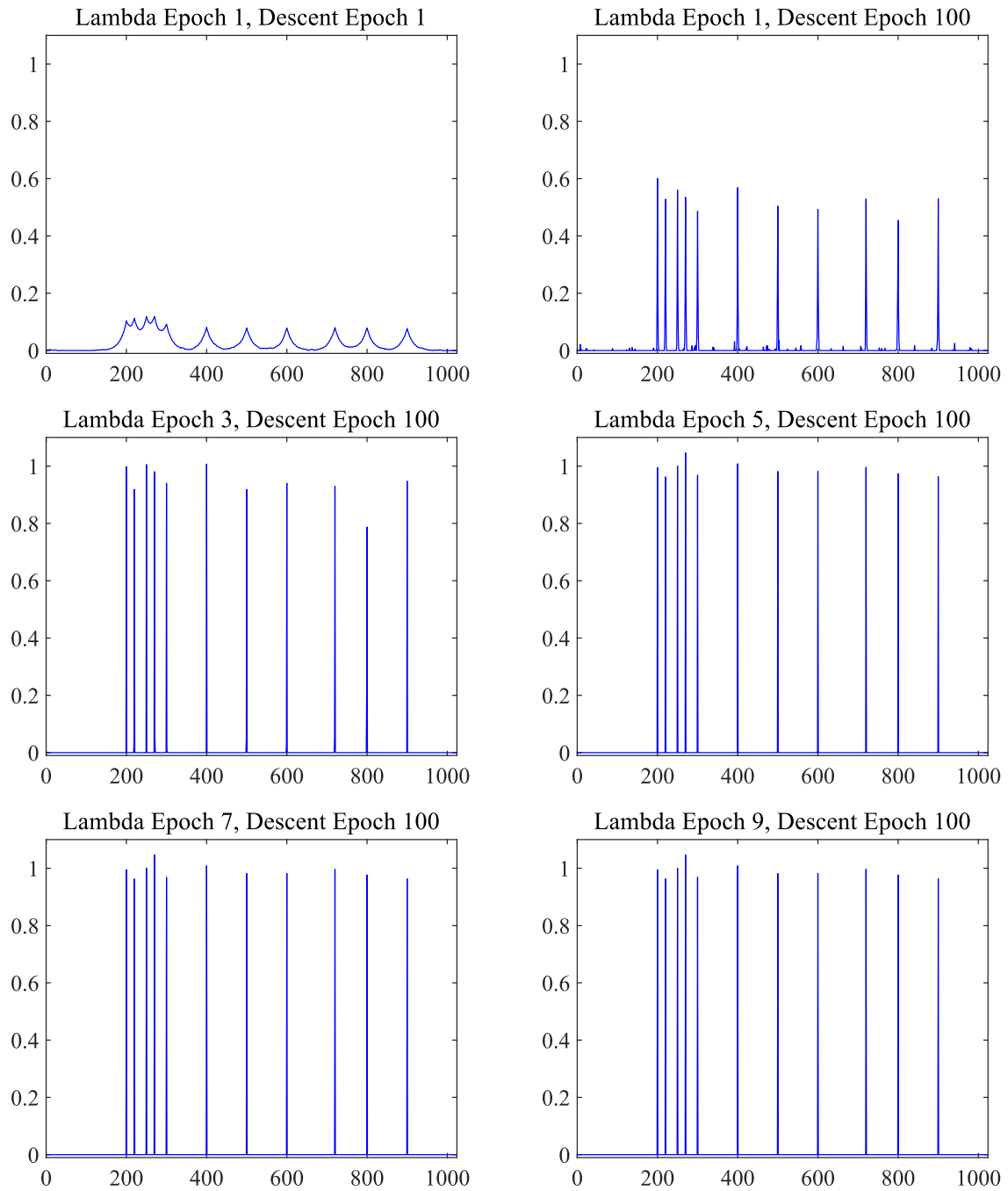


信噪比为 15dB 的钙信号



信噪比为 15dB，正则化系数为  $5 \times 10^{-4}$  时的稀疏重建结果

## 4.2. 迭代过程中重建信号的变化

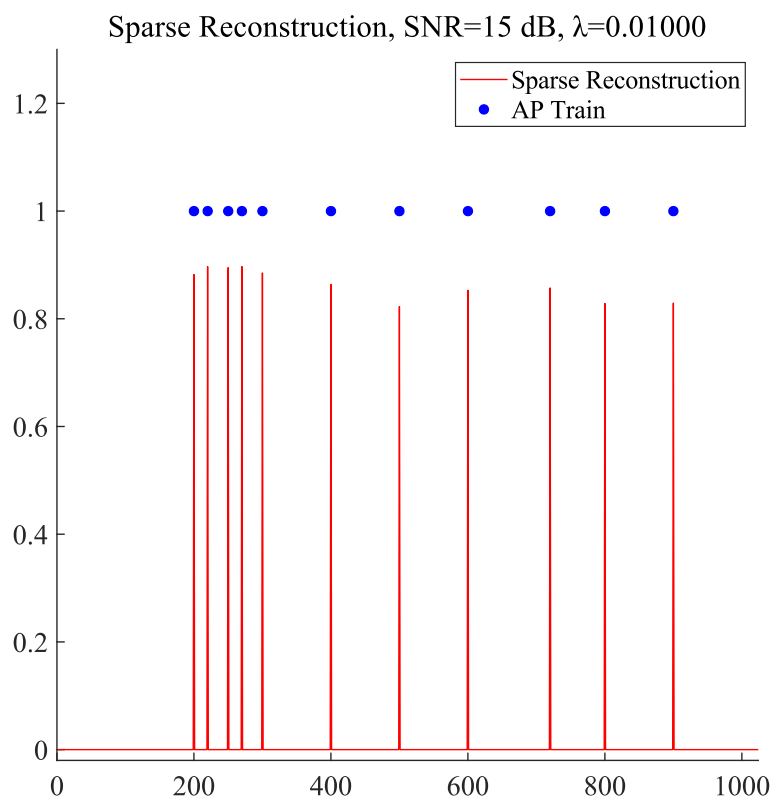


可见，在迭代刚开始时，动作电位序列就已经可以较为明显地被分辨出来。在根据梯度下降的结果调整范数权重后，动作电位序列会更明显地凸显出来，而因为噪声导致的信号会被抑制。

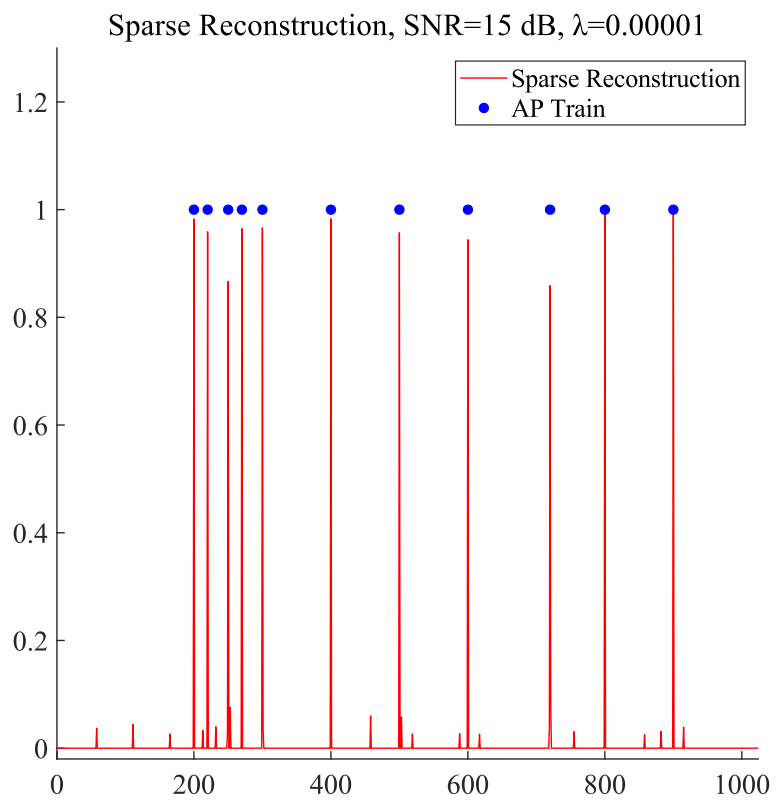
## 4.3. 正则化系数对重建结果的影响

保持钙信号的信噪比为 15dB，迭代次数和梯度下降率均保持不变，调整重建时的正则化系数。





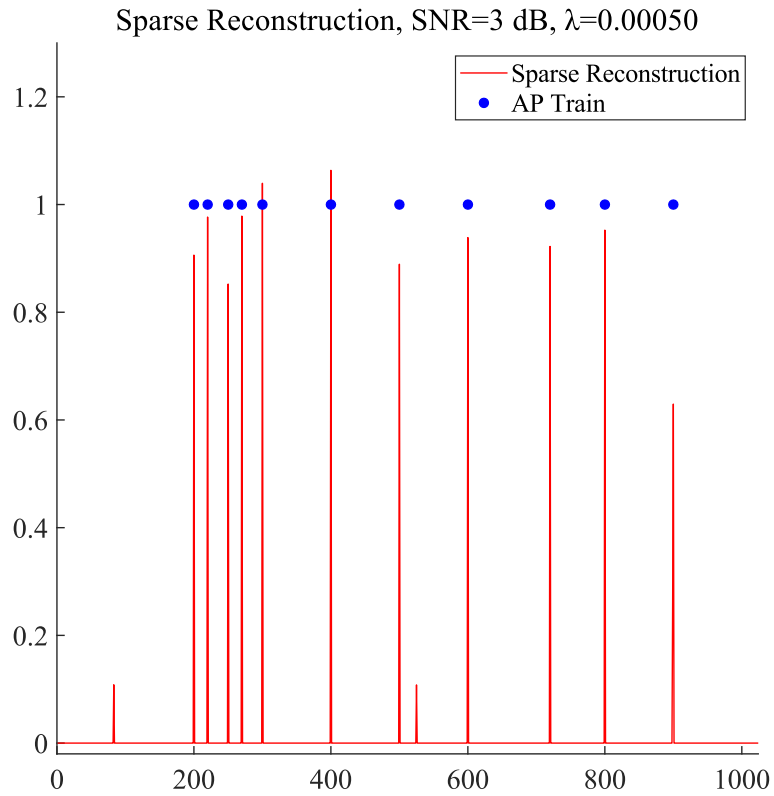
信噪比为 15dB，正则化系数为  $1 \times 10^{-2}$  时的稀疏重建结果



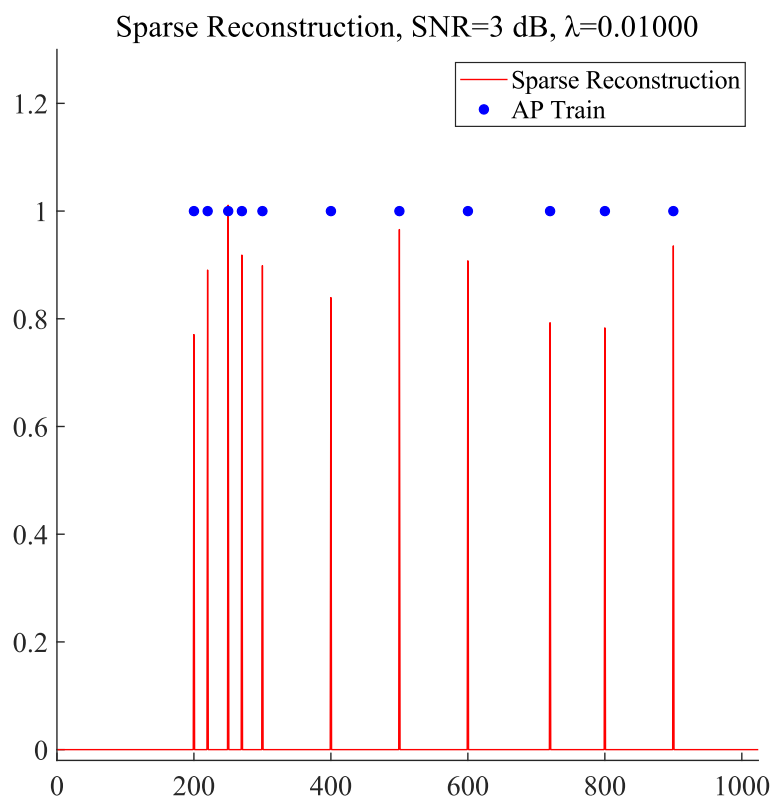
信噪比为 15dB，正则化系数为  $1 \times 10^{-5}$  时的稀疏重建结果

可见，在提高正则化系数（即提高稀疏性时），计算得到的动作电位值会下降。在继续提高正则化系数时，甚至会重建出全零的信号。而在降低正则化系数时，会导致噪声信号不能被很好地抑制。

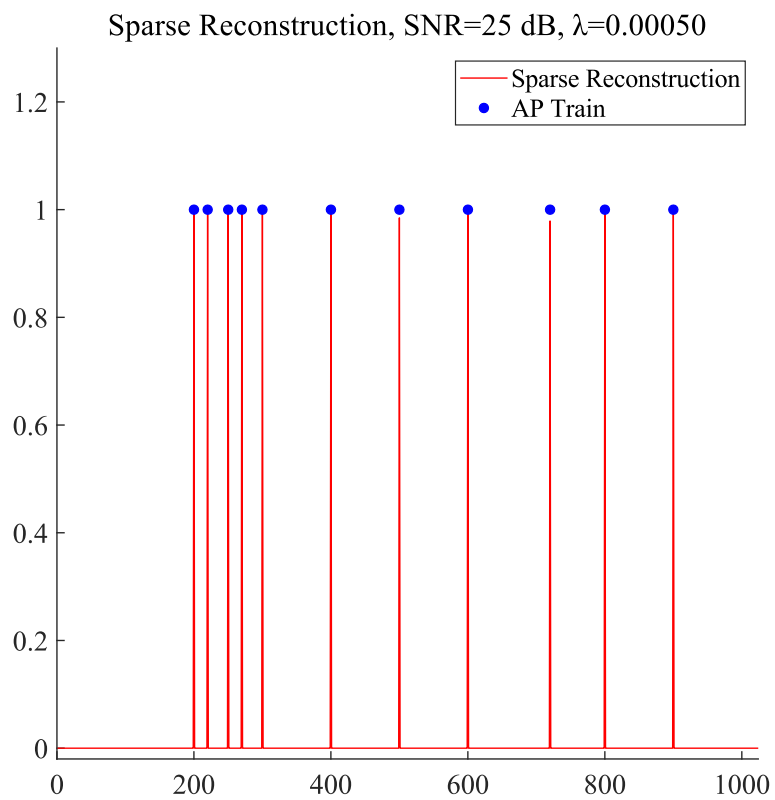
#### 4.4. 信噪比对重建结果影响



信噪比为 3dB，正则化系数为 $5 \times 10^{-4}$ 时的稀疏重建结果



信噪比为 3dB，正则化系数为  $1 \times 10^{-2}$  时的稀疏重建结果



信噪比为 25dB，正则化系数为  $5 \times 10^{-4}$  时的稀疏重建结果

将钙信号的信噪比降低到 3dB，仍然能较好地重建动作电位，但是动作电位的幅度波动较大，而且噪声信号并没有被很好地抑制。在提高正则化系数后，噪声信号得到了较好地抑制，但是动作电位幅度仍然波动较大，由于已知原始信号是二值信号，可以考虑对重建结果进行二值化来获得较好的重建结果。

将信噪比提高到 25dB 时，此时噪声已经非常小了，重建效果已经非常接近原始数据了。

## 5. 实验总结

本次实验的主要内容是利用卷积模板生成钙信号，并对带有噪声的钙信号进行稀疏重建。生成信号的任务较为简单，

由于在之前的实验阶段，已经对二维图像的稀疏逆卷积操作有所了解，这次的稀疏重建算法也在一定程度上参考了之前实验的代码。同时对于计算过程进行了一定的修改，使其更简洁。较为复杂的部分是稀疏重建的超参数选择，如梯度下降率和正则化系数。需要多次寻找，才能找到一组合适的超参数，获得较好的重建结果。