

华中科技大学 生物医学数字信号处理实验报告

卷积与稀疏重建

学院

工程科学学院

班级

工程科学学院（生医）1701 班

姓名

汪能志

学号

U201713082

指导老师

全廷伟

2020 年 9 月 1 日

目录

| | |
|--------------------------|----|
| 1. 实验任务 | 1 |
| 2. 实验原理 | 1 |
| 2.1. 一维卷积 | 1 |
| 2.2. 稀疏逆卷积（稀疏重建） | 1 |
| 3. MATLAB 程序实现 | 2 |
| 3.1. 稀疏重建 | 2 |
| 3.2. 高斯噪声 | 3 |
| 3.3. 实验 | 3 |
| 4. 实验结果 | 4 |
| 4.1. 钙信号生成和稀疏重建 | 4 |
| 4.2. 迭代过程中重建信号的变化 | 6 |
| 4.3. 正则化系数对重建结果的影响 | 6 |
| 4.4. 信噪比对重建结果影响 | 8 |
| 5. 实验总结 | 10 |

1. 实验任务

信号的产生：利用一连串的脉冲序列模拟动作电位，和指数下降函数进行卷积后得到钙信号，并对得到的钙信号添加高斯白噪音。

信号的重建：利用稀疏逆卷积，从钙信号中重建出动作电位。

2. 实验原理

2.1. 一维卷积

一维卷积的公式为：

$$y[s] = x[s] * h[s] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[s-k] \quad (1)$$

其也可以写成线性方程组（矩阵乘法形式）如下：

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m+n-1} \end{pmatrix}_{(m+n-1,1)} = A_h \cdot x = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_n & h_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & h_n & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_n \end{pmatrix}_{(m+n-1,m)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{(m,1)} \quad (2)$$

2.2. 稀疏逆卷积（稀疏重建）

稀疏重建即为求解如下的优化问题：

$$X^* = \arg \min_x (\|Y - A \cdot X\|_2^2 + \lambda \|X\|_1) \quad (3)$$

λ 越大，则稀疏性的权重越大； λ 越小，则准确性的权重越大。

记式 3 的最优解为：

$$X^* = [x_1, x_2, \cdots]^T \quad (4)$$

以式 4 为基础，对式 3 进行一定的修改：

$$\begin{cases} \Lambda = \lambda \cdot [\frac{1}{|x_1| + \epsilon}, \frac{1}{|x_2| + \epsilon}, \cdots]^T = [\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots]^T \\ X^* = \arg \min_x (\|Y - A \cdot X\|_2^2 + \|\Lambda^T \cdot X\|_1) \end{cases} \quad (5)$$

其中 ϵ 为一个非常小的常数，其目的是避免出现分母为 0 的情况。

由此可知， X^* 中的元素越小，则其在计算稀疏性时的权重越大。因此式 5 的解比式 4 的解更具有稀疏性。

则有迭代公式：

$$X^{[k+1]} = G(X^{[k]}) \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda^{[k]} = \lambda \cdot [\frac{\alpha}{|x_1^{[k]}| + \epsilon}, \frac{\alpha}{|x_2^{[k]}| + \epsilon}, \dots]^T = [\lambda_1^{[k]}, \lambda_2^{[k]}, \dots]^T \\ X^{[k+1]} = \arg \min_X (\|Y - A \cdot X\|_2^2 + \|(\Lambda^{[k]})^T \cdot X\|_1) \end{cases} \quad (6)$$

同时，在 A 中所有元素的值相同时，式 6 退化为式 3。

式 6 的解为：

$$\begin{aligned} X^{[k+1]*} &= X^{[k]} - \delta \cdot [A^T (A \cdot X^{[k]} - Y)] = X^{[k]} - \delta \cdot M[\tilde{h} * (X^{[k]} * h - Y)] \\ x_i^{[k+1]} &= \begin{cases} \text{sign}(x_i^{[k+1]*}) \cdot (|x_i^{[k+1]*}| - \lambda_i') & |x_i^{[k+1]*}| \geq \lambda_i' \\ 0 & |x_i^{[k+1]*}| < \lambda_i' \end{cases} \\ \Lambda &= \lambda \cdot [\frac{1}{|x_1| + \epsilon}, \frac{1}{|x_2| + \epsilon}, \dots]^T = [\lambda_1', \lambda_2', \dots]^T \end{aligned} \quad (7)$$

可知，从初值 $X^{[0]}$ 开始，通过式 7 进行迭代， $X^{[k]}$ 的稀疏性会逐渐增加，最终得到一个足够稀疏的解。在刚开始迭代时，可以使用等权重的 A 计算范数。初值 $X^{[0]}$ 可以使用全零进行初始化。

3. MATLAB 程序实现

3.1. 稀疏重建

```

1  function x = deconv_L1(y, h, lambda)
2  % 初始化
3  % x, y & h should be column vector
4  lambda = 1e-3 * lambda;
5  len_y = size(y, 1);
6  len_h = size(h, 1);
7  len_x = len_y - len_h + 1;
8  x = zeros(len_x, 1);
9  % 反转卷积模板
10 h_tilde = flipud(h);
11 % 初始化权重和迭代参数
12 weight = lambda * ones(len_x, 1);
13 lr = 0.01;
14 epoch_1 = 10;
15 epoch_2 = 100;
16
17 for i_1 = 1:epoch_1
18     for i_2 = 1:epoch_2
19         % 梯度下降和软阈值迭代
20
21         % 快速逆卷积，计算梯度
22         grad = conv(h_tilde, (conv(x, h, 'full') - y), 'full');
23         grad = grad(len_h:len_y);

```

```

24         descent = lr .* grad;
25         x = x - descent;
26         % 软阈值操作并引入非负性
27         x = (abs(x) > weight) .* (abs(x) - weight) .* sign(x);
28         x = max(x, 0);
29     end
30     % 根据梯度下降结果，更新权重
31     weight = lambda .* (1 ./ (x + 1e-6));
32 end
33 end

```

3.2. 高斯噪声

MATLAB 中的 `randn` 函数可以生成符合标准正态分布（高斯分布）的矩阵。输入参数 SNR 代表信号的信噪比，单位为分贝（dB）。

```

1 function Signal_Noise = Add_Noise(Signal, SNR)
2 % 计算信号功率
3 Signal_Power = sum(abs(Signal(:)).^2) / numel(Signal);
4 Signal_dB = 10 * log10(Signal_Power);
5
6 % 计算噪声功率
7 Noise_dB = Signal_dB - SNR;
8 Noise_Power = 10^(Noise_dB / 10);
9
10 % 生成噪声信号
11 Rand_Noise = randn(size(Signal));
12 Noise = sqrt(Noise_Power) * Rand_Noise;
13
14 Signal_Noise = Signal + Noise;
15
16 end

```

3.3. 实验

```

1 %%
2 % 信号的产生
3 % 动作电位脉冲
4 x = zeros(1024, 1);
5 ap_train = [200, 220, 250, 270, 300, 400, 500, 720, 600, 800, 900];
6 x(ap_train, 1) = 1;
7 % 指数下降模板
8 t = 15;
9 h = exp(-(0:1:ceil(10 * t)) / t)';
10 % 无噪声的钙信号
11 y = conv(x, h, 'full');
12 % 信噪比 dB

```

```

13 SNR = 15;
14 % 有噪声的钙信号
15 y_noise = Add_Noise(y, SNR);
16 % 稀疏重建
17 % 正则化系数 (*1e-3)
18 L = 0.5;
19 x_deconv_L1 = deconv_L1(y_noise, h, L);
20
21 %%
22 % 绘图
23 figure(1)
24 plot(y_noise, '-', 'color', [0.46, 0.67, 0.19])
25 hold on
26 plot(y, '-', 'LineWidth', 1.5, 'color', [0.85, 0.32, 0.01]);
27 plot(ap_train, 1, '.b', 'MarkerSize', 20);
28 hold off
29 title(sprintf('Ca Signal, SNR=%d dB', SNR))
30 legend('Signal with Noise', 'Signal without Noise', 'AP Train')
31 xlim([0, 1024])
32 ylim([-0.4, 1.6])
33 box off
34
35 figure(2)
36 plot(x_deconv_L1, '-r');
37 hold on
38 plot(ap_train, 1, '.b', 'MarkerSize', 20);
39 legend('Sparse Reconstruction', 'AP Train')
40 hold off
41 title(sprintf('Sparse Reconstruction, SNR=%d dB,  $\lambda$ =%.5f', SNR, L * 1e-
42 3))
43 xlim([0, 1024])
44 ylim([-0.02, 1.3])
45 box off

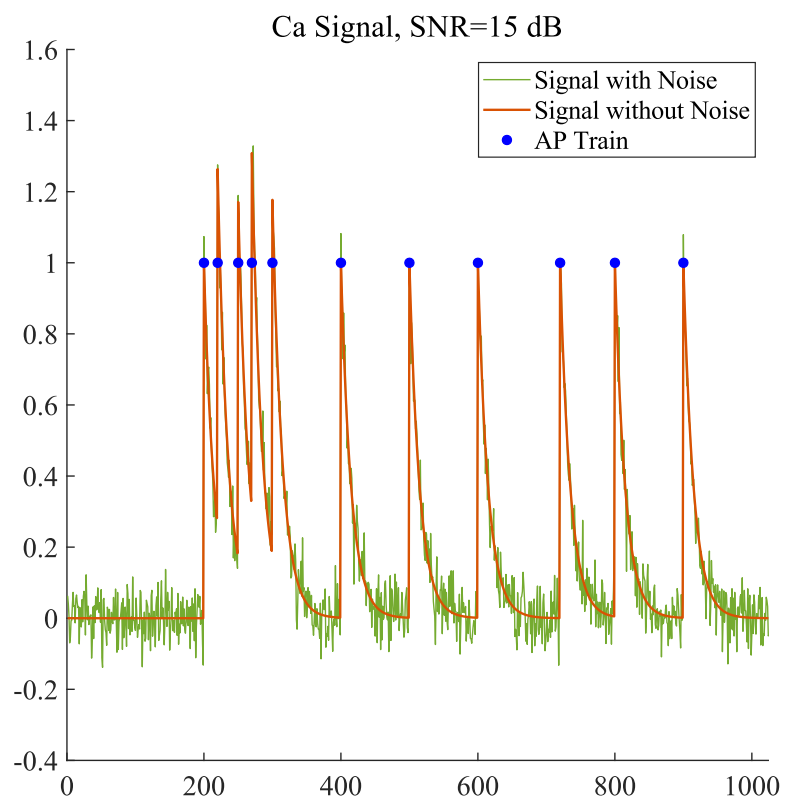
```

4. 实验结果

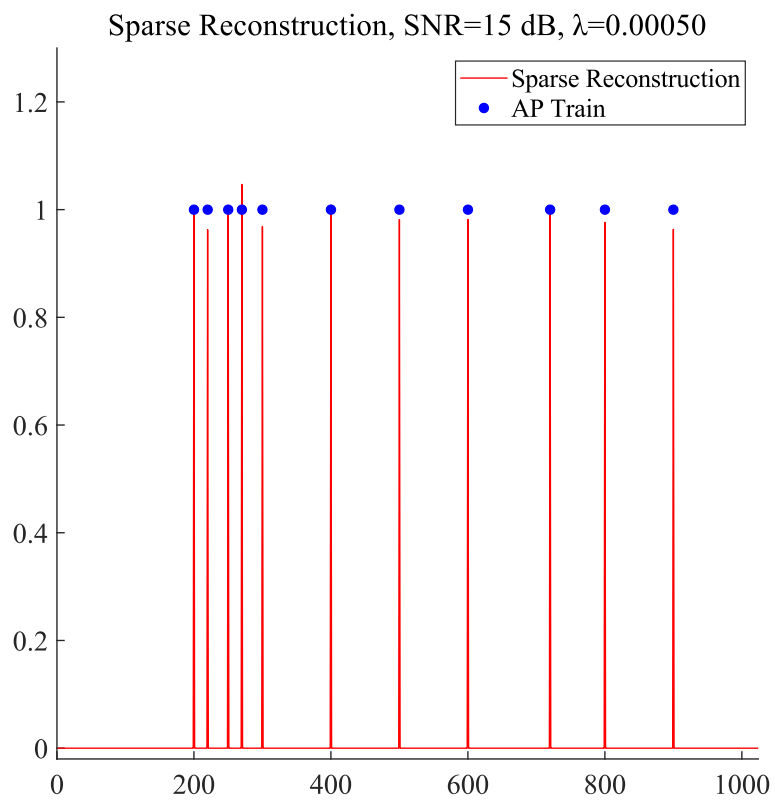
4.1. 钙信号生成和稀疏重建

在 200, 220, 250, 270, 300, 400, 500, 600, 720, 800 和 900 处共有 11 次动作电位。指数下降模板的时间常数为 15。和动作电位信号卷积后得到钙信号，并添加信噪比为 15dB 的高斯噪声。

随后对带有噪声的钙信号进行稀疏重建。

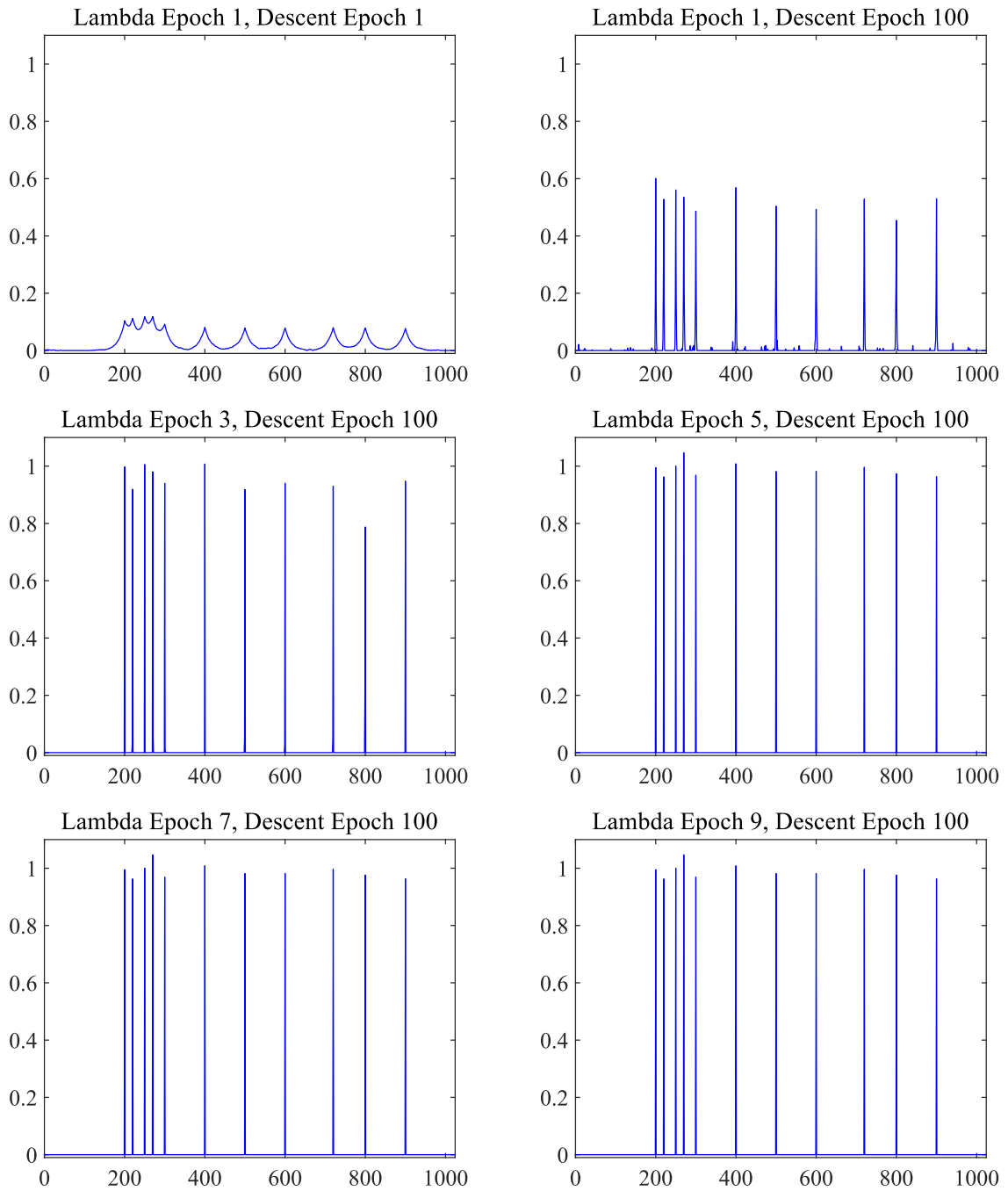


信噪比为 15dB 的钙信号



信噪比为 15dB, 正则化系数为 5×10^{-4} 时的稀疏重建结果

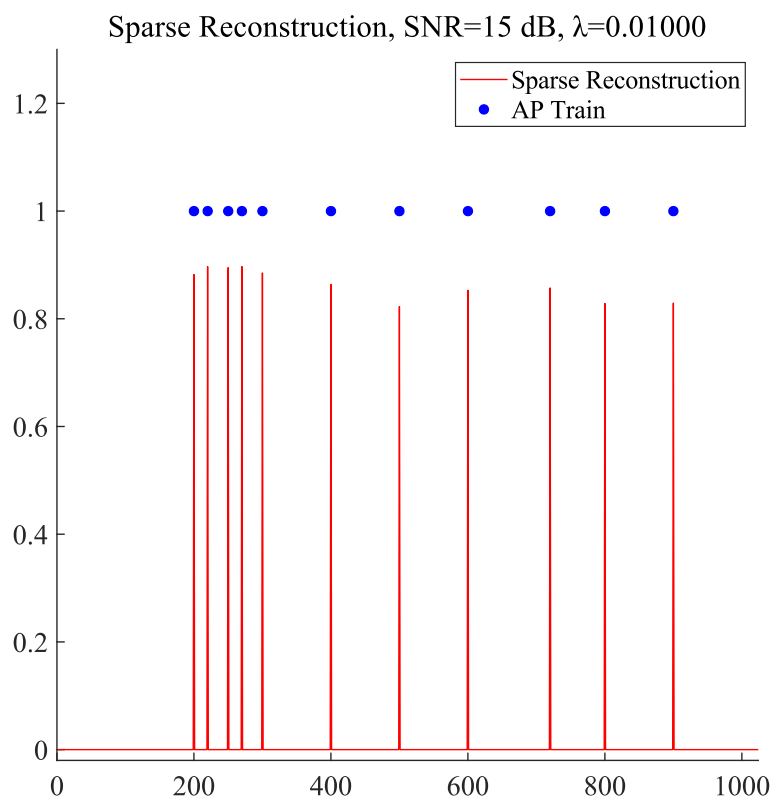
4.2. 迭代过程中重建信号的变化



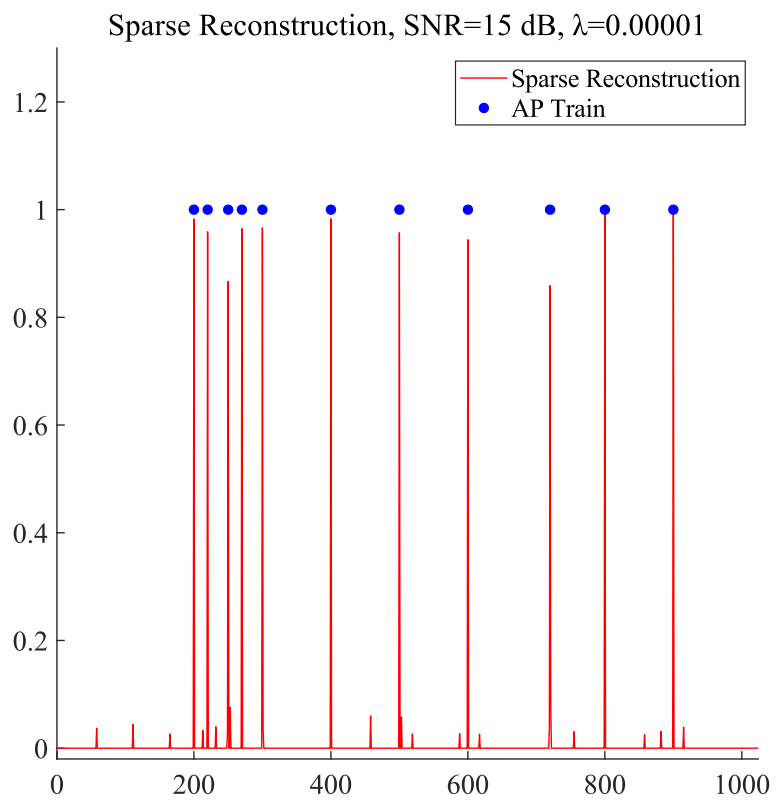
可见，在迭代刚开始时，动作电位序列就已经可以较为明显地被分辨出来。在根据梯度下降的结果调整范数权重后，动作电位序列会更明显地凸显出来，而因为噪声导致的信号会被抑制。

4.3. 正则化系数对重建结果的影响

保持钙信号的信噪比为 15dB，迭代次数和梯度下降率均保持不变，调整重建时的正则化系数。



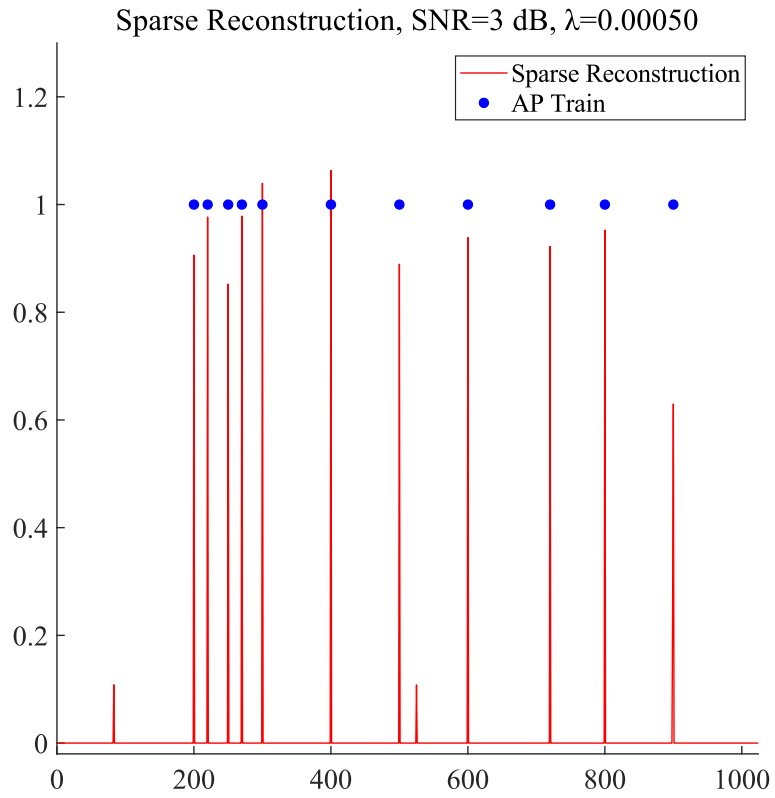
信噪比为 15dB，正则化系数为 1×10^{-2} 时的稀疏重建结果



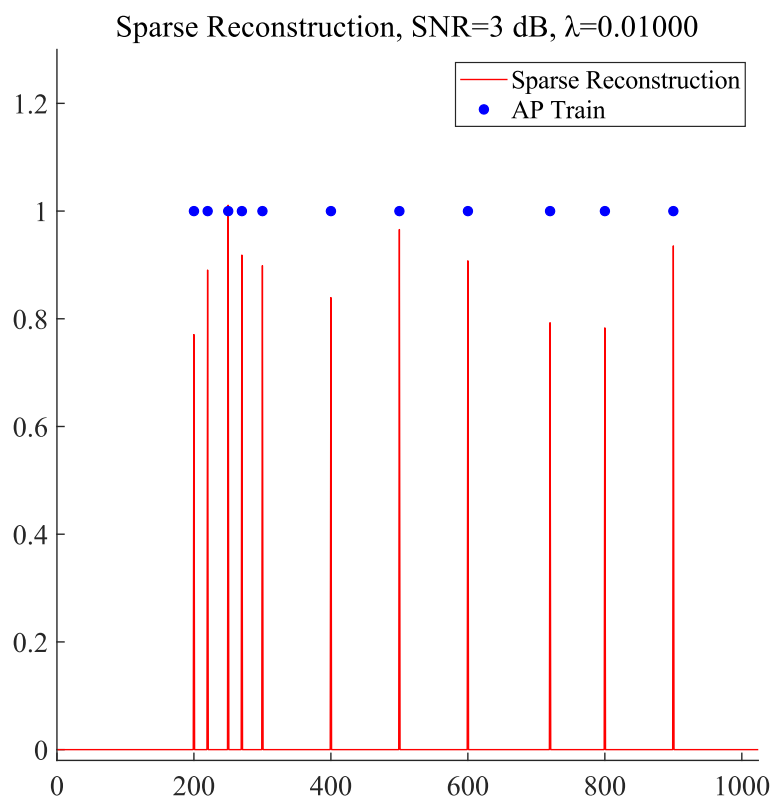
信噪比为 15dB，正则化系数为 1×10^{-5} 时的稀疏重建结果

可见，在提高正则化系数（即提高稀疏性时），计算得到的动作电位值会下降。在继续提高正则化系数时，甚至会重建出全零的信号。而在降低正则化系数时，会导致噪声信号不能被很好地抑制。

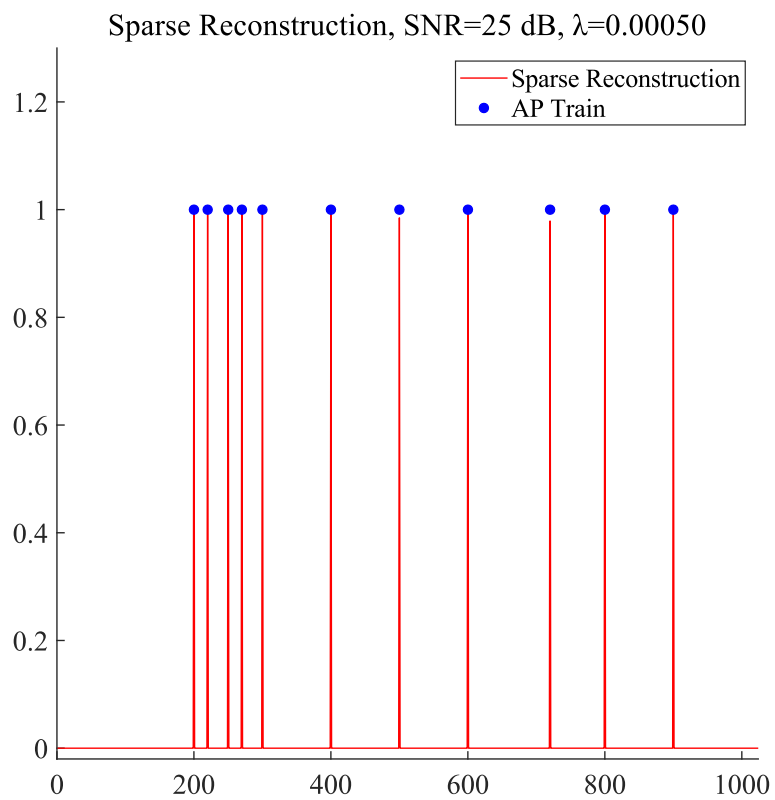
4.4. 信噪比对重建结果影响



信噪比为 3dB，正则化系数为 5×10^{-4} 时的稀疏重建结果



信噪比为 3dB，正则化系数为 1×10^{-2} 时的稀疏重建结果



信噪比为 25dB，正则化系数为 5×10^{-4} 时的稀疏重建结果

将钙信号的信噪比降低到 3dB，仍然能较好地重建动作电位，但是动作电位的幅度波动较大，而且噪声信号并没有被很好地抑制。在提高正则化系数后，噪声信号得到了较好地抑制，但是动作电位幅度仍然波动较大，由于已知原始信号是二值信号，可以考虑对重建结果进行二值化来获得较好的重建结果。

将信噪比提高到 25dB 时，此时噪声已经非常小了，重建效果已经非常接近原始数据了。

5. 实验总结

本次实验的主要内容是利用卷积模板生成钙信号，并对带有噪声的钙信号进行稀疏重建。生成信号的任务较为简单，

由于在之前的实验阶段，已经对二维图像的稀疏逆卷积操作有所了解，这次的稀疏重建算法也在一定程度上参考了之前实验的代码。同时对于计算过程进行了一定的修改，使其更简洁。较为复杂的部分是稀疏重建的超参数选择，如梯度下降率和正则化系数。需要多次寻找，才能找到一组合适的超参数，获得较好的重建结果。