

به نام خدا



دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر



# ریاضی مهندسی

تمرین کامپیوتری شماره‌ی دو

نگاشت

استاد: دکتر مهدی طالع ماسوله

طراح: محمدهادی عطاریه

بهار ۹۸

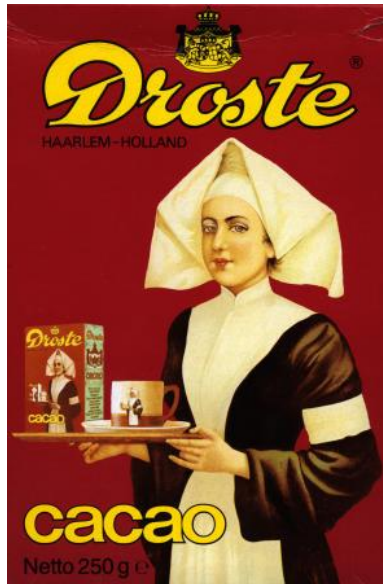


### نکات پروژه:

- ✓ هنگام کد زدن در صورت نیاز از توضیحات استفاده کنید. برای این کار در ابتدای خط از علامت % (در پایتون از علامت #) استفاده کنید.
- ✓ در صورت پروژه تعدادی راهنمایی وجود دارد. اجباری وجود ندارد که حتماً از آن‌ها استفاده کنید.
- ✓ در نمودارها حتماً از `title()` `xlabel()` `ylabel()` برای نام‌گذاری استفاده کنید.
- ✓ می‌توانید از `Live Script` استفاده کنید.
- ✓ در هر قسمت برای جدا کردن بخش‌ها از %% استفاده کنید.
- ✓ بهترین راهنمای شما قسمت `help` متلب است.
- ✓ در صورت وجود هرگونه سؤال و یا ابهام به TA اطلاع دهید.
- ✓ این پروژه را می‌توانید با متلب یا زبان پایتون انجام دهید.
- ✓ اجباری به استفاده از کتابخانه‌های `OpenCV` و `numpy` نیست.

### شرح پروژه

در این پروژه قصد داریم تا با استفاده از چند نگاشت که در درس با آنها آشنا شدیم روی تصویر ورودی افکتی با نام Droste ایجاد کنیم. در این نوع افکت تصویر به صورت بازگشتی در خودش تکرار می‌شود. دراست نام یک برند هلندی است که در سال ۱۹۰۴ میلادی در بسته بندی محصول خود از این افکت استفاده کرد. بسته بندی این محصول در شکل ۲ آمده است.



شکل ۱ طرح بسته بندی شرکت Droste

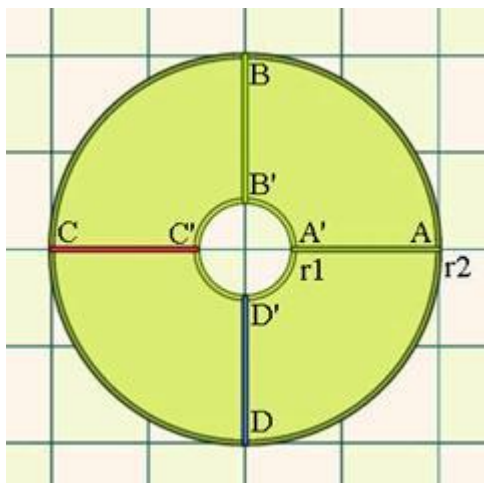


شکل ۲

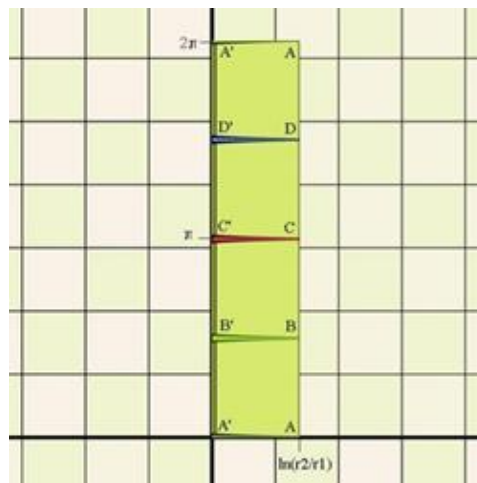
یک نمونه دیگر از این افکت را در شکل ۱ مشاهده می‌شود.

## روش ایجاد افکت Droste

برای ایجاد این افکت از ترکیب نگاشت های لگاریتمی، دوران و نمایی استفاده می کنیم. همانطور که می دانید نگاشت لگاریتمی یک دیسک تو خالی را به یک مستطیل تصویر می کند.

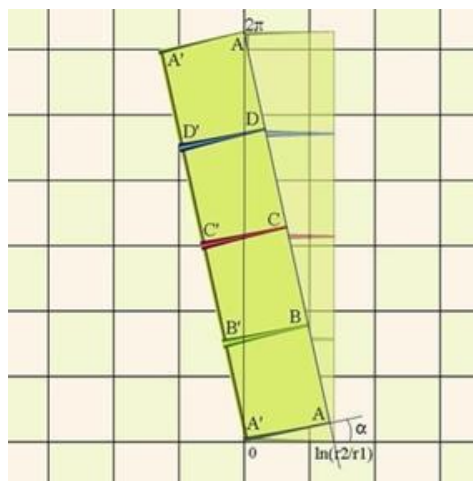


شکل 3. تصویر اصلی قبل از اعمال نگاشت لگاریتمی



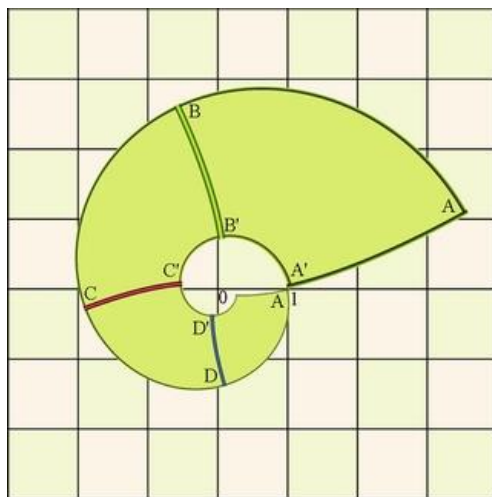
شکل 4. تصویر نهایی بعد از اعمال نگاشت لگاریتمی

سپس از نگاشت دوران استفاده میکنیم که تصویر را به صورتی که در شکل ۵ آمده تغییر می دهد.



شکل 5. تصویر نهایی پس از اعمال نگاشت دوران

سپس از نگاشت نمایی استفاده می کنیم.



شکل 6. تصویر نهایی پس از اعمال نگاشت نمایی

بخش های مختلف پروژه:

- 1) ابتدا به بررسی نگاشت لگاریتمی می پردازیم.
- 2) سپس نگاشت دوران را بررسی می کنیم.
- 3) در این گام تصویر حاصل از گام اول را تکرار می کنیم.
- 4) بعد از آن با اعمال نگاشت دورانی و نمایی به تصویر حاصل از گام سوم، تصویر نهایی را می سازیم.

### بخش اول) نگاشت لگاریتمی

ابتدا تصویر ساعت با نام “clock.jpg” را با استفاده از کتابخانه **OpenCV** بخوانید و خروجی را که یک ماتریس به ابعاد  $r * c * 3$  است را ذخیره کنید.  $r$  تعداد ردیف های تصویر و  $c$  تعداد ستون های آن است. سپس با استفاده از کتابخانه **numpy** دو بردار، یکی با تعداد نقاط برابر با  $r$  و یکی با تعداد نقاط برابر با  $c$  در بازه  $[-1, 1]$  بسازید. سپس با استفاده از دستور **meshgrid** و ترکیب این دو بردار، دو ماتریس بسازید که تمامی نقاط آن در بازه  $[-1, 1]$  قرار دارند. تعداد ردیف های این دو ماتریس برابر  $r$  و تعداد ستون های این دو ماتریس برابر  $c$  است. اگر این دو ماتریس را  $X$  و  $Y$  بنامیم. ماتریس  $X$  نشان دهنده فاصله از محور عمودی و ماتریس  $Y$  نشان دهنده فاصله از محور افقی است. با استفاده از این دو ماتریس یک ماتریس از اعداد مختلط بسازید که قسمت حقیقی آن همان ماتریس  $X$  و قسمت موهومی آن همان ماتریس  $Y$  است. دو عدد  $r_1$  و  $r_2$  را که کوچک تر از یک هستند را در نظر بگیرید. یک تابع بسازید که یک عدد مختلط  $Z$  به عنوان ورودی دریافت می کند و اگر اندازه آن بین  $r_1$  و  $r_2$  بود  $\ln \frac{Z}{r_1}$  را و در غیر این صورت صفر را باز می گرداند. با اعمال این تابع روی تمامی نقاط ماتریس  $Z$  و تفکیک قسمت حقیقی و موهومی نقاط حاصل، ماتریس های جدیدی را به دست آورید.

$$Z = X + iY$$

$$W(z) = \begin{cases} \ln \frac{Z}{r_1}, & r_1 < |z| < r_2 \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

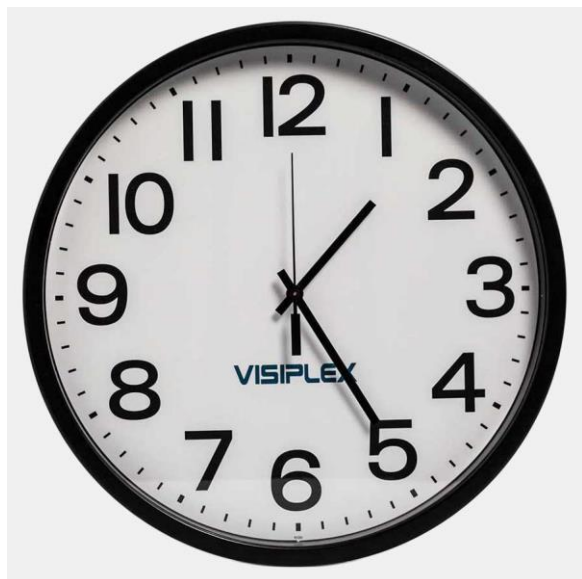
$$W_x = \text{real}(W), \quad W_y = \text{imag}(W)$$

برای نمایش تصویر نهایی، با تبدیل مناسب این ماتریس ها را به بازه  $[0, c]$  و  $[0, r]$  تصویر کنید. این ماتریس ها را  $X_{new}$  و  $Y_{new}$  می نامیم.

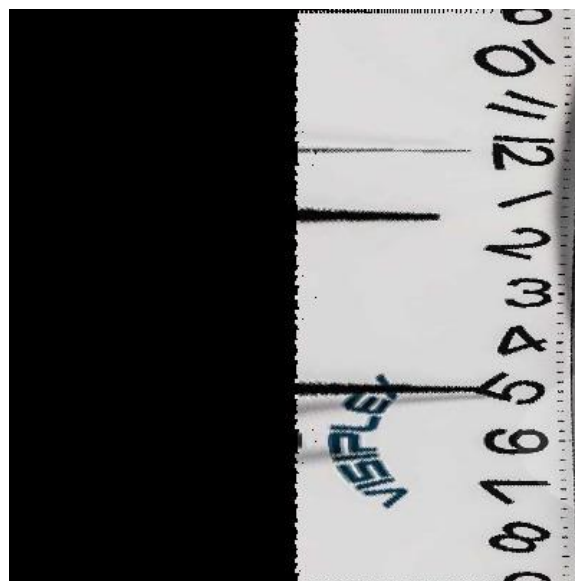
$$w_{x,max} = \max(\text{abs}(W_x)), \quad w_{y,max} = \max(\text{abs}(W_y))$$

$$X_{new} = \left( \frac{W_x}{w_{x,max}} + 1 \right) * \frac{c}{2}, \quad Y_{new} = \left( \frac{W_y}{w_{y,max}} + 1 \right) * \frac{r}{2}$$

یک ماتریس جدید به ابعاد  $r * c * 3$  بسازید. رنگ هر نقطه از این ماتریس را با توجه به ماتریس های  $X_{new}$  و  $Y_{new}$  و ماتریس به دست آمده از خواندن تصویر به دست آورید. تصویر نهایی را نمایش دهید. تصویر نهایی مشابه شکل ۷ خواهد بود.



شکل 8. تصویر اصلی



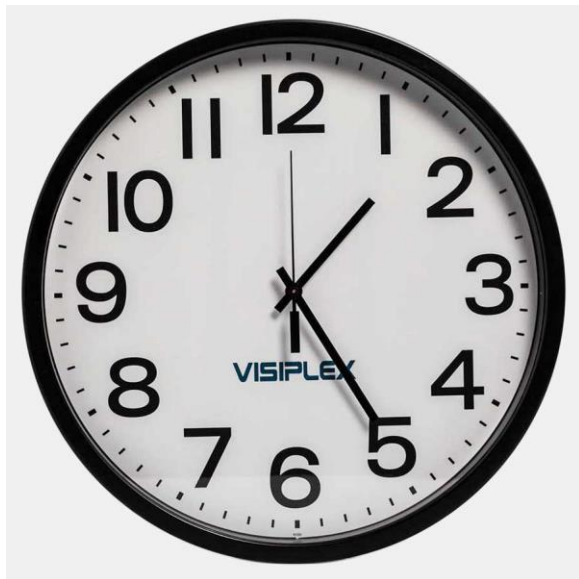
شکل 7. تصویر نهایی با استفاده از نگاشت لگاریتمی

**بخش دوم) دوران**

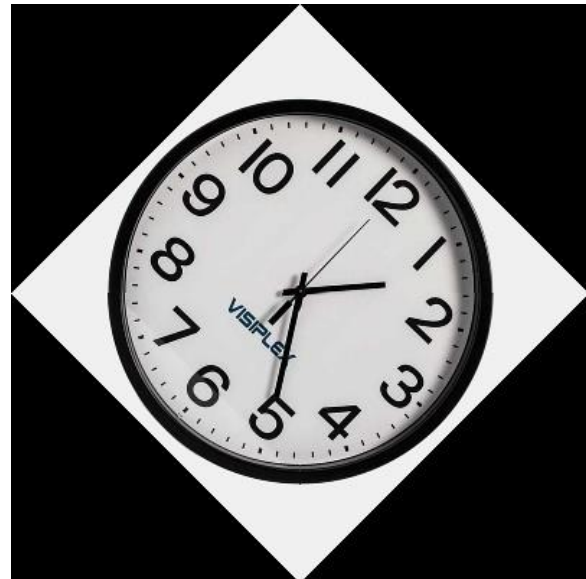
در این قسمت قصد داریم تا با استفاده از نگاشت دوران تصویر “clock.jpg” را بچرخانیم. مراحل این بخش مانند قسمت قبل می‌باشد. با این تفاوت که به جای تابع لگاریتمی از تابع دیگری با فرمول زیر استفاده خواهیم کرد:

$$z \rightarrow z * e^{i\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

خروجی مانند شکل ۹ خواهد بود.



شکل 10. تصویر اصلی



شکل 9. تصویر نهایی بعد از اعمال نگاشت دوران



### بخش سوم) تکرار تصویر

در این بخش، تصویر به دست آمده از بخش اول را تکرار می‌کنیم. برای اینکار لازم است تا ماتریس های  $X_{new}$  و  $Y_{new}$  را که در بخش به دست آوردیم را با دستور `tile` از کتابخانه `numpy` تکرار کنیم و سپس مختصات عمودی (منظور ماتریس به دست آمده از تکرار  $Y_{new}$ ) هر تکرار را با عدد درست جمع کنیم. تصویر نهایی مانند شکل ۱۱ خواهد بود.



شکل 11. تصویر به دست آمده از سه بار تکرار



### بخش چهارم) اعمال نگاشت دورانی و نمایی

حال تصویر به دست آمده از بخش سوم را با نگاشت زیر دوران می‌دهیم.

$$z \rightarrow z * f e^{i\alpha}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi} \right), f = \cos \alpha$$

سپس نگاشت نمایی را اعمال می‌کنیم.

$$z \rightarrow e^z$$

تصویر نهایی مانند شکل ۱۲ خواهد بود.



شکل 12 تصویر نهایی پس از ترکیب نگاشت های لگاریتمی، دوران و نمایی



### نکات مهم

- سوالات خود را از طریق ایمیل به آدرس [mhadi.attarieh@gmail.com](mailto:mhadi.attarieh@gmail.com) بفرستید.
- مهلت تحویل این پروژه تا ساعت ۲۳:۵۵ روز دوشنبه ۲۰ خرداد ماه خواهد بود.
- گزارش کار خود را با فرمت PDF به همراه کد ها در یک فایل فشرده به نام CA2-STD.zip آپلود نمایید.
- در صورت مشاهده تقلب برای طرفین نمره منفی صد در نظر گرفته خواهد شد.
- به دلیل امتیازی بودن این پروژه آپلود با تاخیر قابل قبول نیست.
- این پروژه گزارش کار ندارد.

موفق باشید.