1 Grundlagen

- Wenn ein Ereignis B eingetreten ist, dann soll dies zu einer Neubewertung aller Ereignisse A führen (neue W-Maß P, manche Ereignisse werden beeinflusst, andere nicht)
- $\Rightarrow$ man braucht ein neues W-Maß P_A was bestimmte Eigenschaften erfüllt.
- Bsp: Urne mit roten und blauen Kugeln, wobei wir Kugeln nicht zurücklegen. A := Erste Kugel ist blau, B := Zweite Kugel ist blau. Wenn A eingetreten ist, sind weniger Kugeln in der Urne und B ist unwahrscheinlicher geworden, bzw. braucht eine neue Beurteilung.

2 Neubewertung von Wahrscheinlichkeiten

2.1 Anforderungen an das neue W-Maß P_A

1. $P_A(A) = 1$, da nun A ein sicheres Ereignis ist.
2. Die Neubewertung der Teilereignisse B von A ist proportional zur ursprünglichen Bewertung: $\exists c_A > 0 \forall B \in \mathcal{A}, B \subseteq A : P_A(B) = c_A P(B)$

In Deutsch: Alle Ereignisse die von A abhängig sind werden um den gleichen Faktor c gestreckt.

Satz: Neubewertung von Ereignissen:

- Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) > 0$. Dann gibt es genau ein W-Maß P_A auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit den Eigenschaften (1) + (2), nämlich:
- $P_A(B) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ für $B \in \mathcal{A}$

Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- $P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ für $B \in \mathcal{A}$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A bzgl. P

Satz: W-Maß Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Durch $B \mapsto P(B|A)$ wird ein W-Maß P_A auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert

Beweis

- (N): $P_A(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = 1$
- (A): Sei $B = \sqcup_{i \geq B_i}$ mit $B_i \in \mathcal{A}$. Dann gilt wegen (A) von P: $P_A(B) = P_A(\sqcup_{i\geq 1} B_i) = \frac{P(A \cap \sqcup_{i\geq 1} B_i)}{P(A)} = \frac{P(\sqcup_{i\geq 1} A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{\sum_{i\geq 1} P(A \cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i\geq 1} P_A(B_i)$

2.2 Fallunterscheidungsformel + Formel von Bayes

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $\Omega = \sqcup_{i\in I} B_i$ eine disjunkte Zerlegung von Ω in höchstens abzählbar unendlich viele Ereignisse $B_i \in \mathcal{A}$ mit $P(B_i) > 0$ Dann gilt:

Fallunterscheidungsformel: + Beweis

- Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt: $P(A) = \sum_{i\in I} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$

- folgt aus Def. Bedingte Wahrscheinlichkeit + Kürzen + σ-Additivität
- in Deutsch: Hilft die Wahrscheinlichkeit von A zu bestimmen; Man muss nur die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Ereignisse auf dem Weg drauf multiplizieren (dann natürlich auch die Bedingten)

Formel von Bayes: + Beweis

- Für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) > 0$ und alle $k \in I$ gilt $P(B_k|A) = \frac{P(B_k)\cdot P(A|B_k)}{\sum_{i\in I} P(B_i)\cdot P(A|B_i)}$
- folgt aus (1) + Def. (P(B)) im Bruch ergänzen
- in Deutsch: Hilft die Bedingung umzudrehen, und zwar in dem man die Wahrscheinlichkeit des Weges B_k teilt durch die Gesamtwahrscheinlichkeit aller Wege (zu A natürlich)
- Zum Merken: Wahrscheinlichkeit des Wegs über B_k geteilt durch Gesamtwahrscheinlichkeit aller Wege

3 Charakteristika mehrstufiger Experimente + Beispiel:

Charakteristika

- Motivation: Mit bedingten Wahrscheinlichkeiten kann man mehrstufige Zufallsexperimente modellieren.
- Charakteristika: meistens n nacheinander ausgeführte Teilexperimente; Gesamtexperiment wird durch W-Raum beschrieben. Teilexperimente mittels ZV (d.h. n Zufallsvariablen, erste wird aufgedeckt $\Rightarrow$ alle anderen von der erste Abhängig, da sie nicht unabhängig sind)
- Wahrscheinlichkeiten für mehrstufige Modelle: Wenn wir einen Produktraum an ZV haben (die abhängig sind), dann ist die erste ZV gegeben durch unser W-Maß (P), alle anderen jedoch abhängig vom Ergebnis der ZV davor.
- D.h. die Wahrscheinlichkeiten sind bedingt durch alle Zufallsvariablen davor!

Multiplikationsformel:

- Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, so gilt für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ und $A := A_1 \cap \dots \cap A_n$ mit $P(A) > 0 :$
- $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$ wenn $A := A_1 \cap \dots \cap A_n$ und $P(A) > 0$
- Beweis: Def. einsetzen von bedingter Wahrscheinlichkeit + Kürzen

Beispiel: Ziegenproblem

- $a :=$ Auto, $n_1 :=$ Niete 1, $n_2 :=$ Niete 2, n =3
- $\Omega = \{a, n_1, n_2\}^3$
- $X_1 : (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto \omega_1$ (gleichverteilt); Falls $\omega_1 = a$ dann kann der Moderator aus den Nieten ziehen: $\Rightarrow X_2 : (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto \omega_2$ führt zu verschiedenen Verteilungen (bedingt nach 1)
- Hier ist es wichtig eine Fallunterscheidung nach dem Verhalten des Teilnehmers zu machen (immer Tür behalten/Zufall/wechseln entscheiden)
- $\Rightarrow$ Mittels Baumdiagrammen kann man sehen, dass die dritte Variante die beste ist ($\frac{1}{3}$ vs $\frac{1}{2}$ vs $\frac{2}{3}$)

4 Stochastische Unabhängigkeit

Definition: Stochastische Unabhängigkeit

- Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig wenn die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A nicht beeinflusst wird, dass B eingetreten ist und umgekehrt. $P(A|B) = P(A)$ & $P(B|A) = P(B)$
- $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (aus Definition)

Unabhängigkeit von Ereignisfamilien

- Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Ereignissen in $\mathcal{A}$ heißt stochastisch unabhängig bezüglich P, wenn für jede endliche Teilmenge $\emptyset \neq J \subseteq I$ gilt:
- $P(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$

Unabhängigkeit von ZV-Familien

- Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Eine Familie $(Y_i)_{i \in I}$ von ZVs: $Y_i : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\Omega_I, \mathcal{A}_i)$ heißt unabhängig bezüglich P wenn für jede endliche Teilmenge $\emptyset \neq J \subseteq I$ und alle $A_j \in \mathcal{A}_j$ mit $j \in J$ gilt: $P(\cap_{\{Y_j \in A_j\}}) = \prod P(Y_j \in A_j)$