1 Grundlagen

- stellt relative Häufigkeit mit Erwartungswert mathematisch in Verbindung
- empirisch die Vermutung das mit hohem n die relative Häufigkeit gegen den Erwartungswert geht

2 Stochastische Konvergenz + Schwaches Gesetz der großen Zahlen

2.1 Definition: Stochastische Konvergenz

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $Y, Y_1, Y_2 \dots$ ZVs $\Omega \to \mathbb{R}$.

- Die Folge $(Y_n)_n$ heißt stochastisch konvergent gegen Y, kurz: $Y_n \overset{P}{\to} Y$ wenn für alle $\epsilon > 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} P(|(Y_n - Y)| < \epsilon) = 1$, wobei $Y_n := \frac{1}{n}\sum_{i\geq 1}^{n} X_i$ ist und $Y := E_p(X_1)$

2.2 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Es sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge paarweise unkorrelierter ZVs mit beschränkten Varianzen (d.h. die existieren) für alle i.

- Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel der ersten n zentralisierten ZVs mindestens um ϵ von Null abweicht, nach oben beschränkt durch $\frac{v}{(n\epsilon^2)}$:
- $P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E_p(X_i))| \geq \epsilon) \leq \frac{v}{n\epsilon^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ (v = Varianz)
- Grob gesprochen: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E_p(X_i)) \overset{P}{\to} 0$
- Sind alle Erwartungswerte $E_P(X_i)$ gleich, so folgt insbesondere: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to^P E_P(X_1)$

In Deutsch: Die Wahrscheinlichkeit das die Folge von ZVs sich um epsilon um den Erwartungswert unterscheidet ist beschränkt durch die Tschebyscheff Ungleichung + geht für hohe n gegen Unendlich. (Schwaches Konvergenz Kriterium, da es immer noch möglich ist sich weiter von dem Erwartungswert zu entfernen)

2.3 Tschebyscheff-Ungleichung

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $X \in \mathcal{L}^2(P), \epsilon > 0$ Dann gilt:

- $P(|X - E_P(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V_P(X)}{\epsilon^2}$

In Deutsch: Ist eine obere Grenze, dass sich die Wahrscheinlichkeit dass eine ZVs-den Erwartungswert um epsilon unterscheidet immer durch die Varianz durch epsilon quadrat nach oben beschränkt ist. (Sehr sinnvoll wenn man wissen will wie wahrscheinlich es ist, dass etwas um epsilon um den Erwartungswert abweicht)

3 Fast sichere Konvergenz + Großes Gesetz der Zahlen

3.1 Fast sichere Konvergenz

Seien $Y, Y_1, Y_2 \dots$ reelle ZVs auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

- Die Folge $(Y_n)_{n \geq 1}$ konvergiert $P-$fast sicher gegen Y wenn für die Menge $A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\}$ aller Stellen $\omega \in \Omega$ an denen punktweise Konvergenz herrscht gilt: $P(A) = 1$

In Deutsch: Die Zufallsvariablen vom Ereignis konvergieren gegen dieses (werden immer kleiner).

3.2 Starkes Gesetz der großen Zahlen

Sei $(X_i)_{i \geq 1}$ eine Folge paarweise unkorrelierter ZVs in $\mathfrak{L}^2(P)$ mit beschränkten Varianzen

- $\sup_{i \geq 1} V_p(X_i) \leq v \leq \infty$. Dann gilt: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E_p(X_i)) \to 0$ P-Fast sicher

In Deutsch: Relative Häufigkeit konvergiert gegen den Erwartungswert

4 Verteilungsfunktion der Gauß-Glocke + Zentraler Grenzwertsatz

4.1 Verteilungsfunktion der Gauß-Glocke

Definition: Ist P ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so heißt:

- $F_p := (\mathbb{R} \ni c \mapsto P((-\infty, c])) \in [0, 1]$ die Verteilungsfunktion zu P
- Die Funktion $\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ist die Dichtefunktion zur Standardnormalverteilung $\mathcal{N}_{0,1}$
- Für $c \in \mathbb{R}$ setze $\Phi(c) := \mathcal{N}_{0,1}((-\infty, c]) = \int_{-\infty}^{c} \phi(x) dx$

4.2 Zentraler Grenzwertsatz

Es sei $(X_i)_{i \geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter reelwertiger ZVs im $\mathcal{L}^2(P)$ mit $E_p(X_i) = m$ und $V_p(X_i) = v > 0$. Sei $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ die n-te Partaialsumme und $S_n^A = \frac{1}{\sqrt{(n)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m}{\sqrt{(v)}}$ die Standardisierung von S_n. Bezeichne F_n die Verteilungsfunktion von S_n^A so konvergiert F_n im Supremumsabstand gegen die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung: $\lim_{n \to \infty} d(F_n, \Phi) = 0$