1 Grundlagen + Laplace

- Ziel: Beschreibung klassischer Standardmodelle + deren Herleitung
- Laplace Raum: Jedes Ergebnis gleich Wahrscheinlich, d.h. jedes Ereignis ist definiert durch: $\frac{|A|}{|\Omega|} := U_\Omega(A)$
- $\Rightarrow \omega \to \frac{1}{|\Omega|}$ (Im endlichen Raum!)
- Für den unendlichen Raum: $\frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(\Omega)}$

2 Urnenmodell und die Verteilungen

2.1 Generell:

- Trick: Murmelmodell mit Laplace Raum verbinden (d.h. Zahlen durch nummerieren), dann fiktiven Raum auf die möglichen Räume abbilden
- N := Anzahl der Kugeln in der Urne
- F := Menge der verschiedenen Farben der Kugeln in der Urne
- N_f := Anzahl f-farbiger Kugeln
- $\Rightarrow N = \sum_{f \in F} N_f$
- n := Anzahl Ziehungen
- Brauchen noch eine Färbungsfunktion, die von den nummerierten Kugeln auf ihre Farbe abbildet
- $\phi : [1 : N] \to F$ surjektiv und $F_f := \{i \in [1 : N] | \text{i-te Kugel ist f-farbig}\} = \phi^{-1}[\{f\}]$
- $X : \Omega \to \Omega'$, p ist eine Zähldichte mit $p(\omega) = P(\{\omega\})$
- $\Rightarrow p_X$ definiert durch $p_X(\omega') = P(X = \omega') = \sum_{\omega : X(\omega) = \omega'} p(\omega)$
- Dann gilt für alle Ereignisse A: $P_X(A') = \sum_{\omega' \in A'} p_X(\omega')$

2.2 Mit Zurücklegen Mit Reihenfolge:

- $\Omega_{ZR} = F^n$ ist der Raum der Farbenfolgen
- Abbildung $X_{ZR} : [1 : N] \ni (\omega_1, ..., \omega_n) \to (\phi(\omega_1), ..., \phi(\omega_n)) \in F^n$
- $f = (f_1, ..., f_n) \in F^n$ ist eine Farbfolge
- $\Rightarrow P_{ZR}(f) = \prod_{i=1}^n \frac{N_{f_i}}{N}$ Grob gesagt: Das Produkt der Wahrscheinlichkeiten das diese Farbe kommt
- z.B. (R,R,B,G,G) $\Rightarrow \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ wenn es 3 Rote, 2 Blaue und 1 Grüne Kugel gäbe
- **Spezialfall: Bernoulli Verteilung:** Nur zwei Kugeln (Erfolg, Misserfolg) $\Rightarrow p^k \cdot q^{n-k}$ wenn man k mal Erfolg aus n Ziehungen hat

2.3 Mit Zurücklegen Ohne Reihenfolge:

- Reihenfolge ist nun egal, d.h. alle Permutationen einer Folge interessieren und NICHT mehr.
- $P_{Zr}(H) = \binom{n}{H} \cdot \prod_{f \in F} (\frac{N_f}{F})^{H(f)}$, wobei $\binom{n}{H} := \frac{n!}{\prod_{f \in F} H(f)!}$
- wird auch die **Multinominalverteilung** genannt!
- Generell gleiche Formel wie mit Reihenfolge, nur dass am Anfang mit dem Multinominalkoeffizient alle Permutationen raus multipliziert werden!
- z.B. $\frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} \cdot \frac{4}{8}^3 \cdot \frac{1}{8}^1 \cdot \frac{3}{8}^2$ bei 3 Roten, 1 Blauen, 2 Grünen Kugeln
- **Spezialfall: Binominal Verteilung:** Nur zwei Kugeln (Erfolg, Misserfolg) $\Rightarrow B_{n,p}(k) := \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ (Hier normaler Binominalkoeffizient, da die identisch sind!)

2.4 Ohne Zurücklegen Mit Reihenfolge:

- Man geht vom Raum ohne Doppelungen der Nummern aus und macht wieder zwei Abbildungen
- $\Rightarrow P_{zR}(f) = \frac{\prod_{f \in F} (N_f)_{n_f}}{(N)_n}$

2.5 Ohne Zurücklegen Ohne Reihenfolge:

- Genau dasselbe, aber mit zwei anderen ZV (aber wieder Vergröberung zu Histogramm)
- $P_Y(H) = \frac{\prod_{f \in F} \binom{N_f}{h_f}}{\binom{N}{n}}$ auch die **hypergeometrische Verteilung** genannt
- z.B. $\frac{\binom{3}{4} \cdot \binom{28}{7}}{\binom{32}{10}}$ für 3 Asse aus 32 Karten ziehen (N_f ist die Anzahl an Farben, h_f die die man ziehen will daraus)

2.6 Geometrische Verteilung

- Wann das erste mal Erfolg bei einer unendlichen Folge?
- $\Rightarrow P(k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$ k-1 mal Misserfolg und beim k-ten mal Erfolg
- ist ein W-Maß (kann man mittels Geometrischer Reihe beweisen)
- Anmerkung (aber eigentlich ist das klar): ist ein Spezialfall der Bernoulli Verteilung. D.h. mit Reihenfolge mit Zurücklegen
- Beweis, dass es eine Verteilung ist wird mittels der Normierung gemacht (Geometrische Reihe konvergiert gegen 1)

2.7 Poisson-Verteilung

- Wieder ein unendlicher Raum, Idee: Intervalle sehr klein machen und dann fragen, ob dort ein Erfolg ist oder nicht (Erfolgschance muss auch gering sein)
- $\lambda = \alpha \cdot t = n \cdot p$
- $p_n = \frac{\lambda}{n}$ für kleine p_n sehr gute Approximation
- $\Rightarrow P_\lambda(k) = e^{-k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$
- Für kleine p und große n sehr nah an der Binominal Verteilung, dafür aber deutlich schneller berechenbar!

2.8 Gauß-Verteilung

- Normalverteilung, aber hier nicht relevant
- Siehe Erwartungswert + Varianz