Prof. Dr. Reinhard Klein
Elena Trunz

Universität Bonn
Institut für Informatik II
14.07.2021

# BA-INF 031/128 – Angewandte Mathematik: Stochastik
# SS 2021
# Mögliche Klausuraufgaben

Stand 14. Juli 2021.

**Hinweise:** Bitte beachten Sie, dass die tatsächlichen Klausuraufgaben von den unten aufgeführten geringfügig abweichen können, e.g. andere Zahlen, Variablen etc. Rechenaufgaben können in anderen Szenarien formuliert werden. Es können auch nur Teilaufgaben verwendet werden oder Teile verschiedener Aufgaben zu einer Aufgaben zusamengefasst werden. „Wahr oder falsch"-Aufgaben können für die Klausur (Multiple Choice Aufgaben) umformuliert werden. Außerdem, kann jede in den unten aufgeführten Aufgaben vorkommende Definition/Satz/Formel/Eigenschaft etc. als Multiple Choice Aufgabe in der Klausur formuliert werden.

## 1. Einleitung

### *Wahr oder falsch?*

Welche der folgenden Aussagen gelten *nicht immer*?

- ☐ Monte-Carlo-Algorithmen terminieren immer, liefern aber manchmal falsche Ergebnisse.
- ☐ Las-Vegas-Algorithmen liefern immer korrekte Ergebnisse, terminieren aber manchmal nicht.
- ☐ Las-Vegas-Algorithmen liefern immer korrekte Ergebnisse.

## 2. Wahrscheinlichkeitsräume

### *Aufgabe 1*

Übungsblatt 2, Aufgabe 1.

### *Aufgabe 2*

Übungsblatt 2, Aufgabe 2.

### *Aufgabe 3*

Übungsblatt 2, Aufgabe 3.

### *Aufgabe 4*

Übungsblatt 2, Aufgabe 4. $\Leftarrow$

## *Aufgabe 5*

Übungsblatt 3, Aufgabe 1.

## *Aufgabe 6*

Übungsblatt 3, Aufgabe 2.

## *Aufgabe 7*

Übungsblatt 3, Aufgabe 3.

## *Aufgabe 8*

Übungsblatt 3, Aufgabe 4.

## *Aufgabe 9*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

a) Seien $A, B \in \mathcal{A}$ beliebige Ereignisse. Definieren Sie den Begrif der Monotonie von W-Maßen.

b) Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ beliebige Ereignisse. Definieren Sie den Begrif der $\sigma$-Subadditivität von W-Maßen.

c) Seien $C, D \in \mathcal{A}$ zwei fast sichere Ereignisse: $P(C) = P(D) = 1$. Zeigen Sie, dass auch $C \cap D$ ein fast sicheres Ereignis ist.

## *Aufgabe 10*

Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums inklusive aller vorkommenden Begriffe.

## *Aufgabe 11*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

(a) Definieren Sie den Begriff der $\sigma$-Stetigkeit. (Es genügt der aufsteigende Fall.)

(b) Beweisen Sie die $\sigma$-Stetigkeit für W-Maße (Übungsblatt 7, Aufgabe 4).

## *Aufgabe 12*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Ferner seien $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie: Aus $A \subseteq B$ folgt $P(A) \leq P(B)$.

(b) Zeigen Sie:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

## *Aufgabe 13*

(a) Definieren Sie den Begriff der $\sigma$-Algebra über einer nichtleeren Menge $\Omega$.

(b) Zeigen Sie: Die Gesamtheit aller $\sigma$-Algebren über $\Omega$ ist unter Durchschnittsbildung abgeschlossen, d.h. ist $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von $\sigma$-Algebren über $\Omega$, so ist auch $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$.

(c) Geben Sie die kleinste und die größte $\sigma$-Algebra über $\Omega$ konkret an.

## *Aufgabe 14*

Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$.

a) Wie heißt das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$?

b) Zeigen Sie: $\emptyset \in \mathcal{A}$.

c) Zeigen Sie: $A, B \in \mathcal{A}$ impliziert $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$ und $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

## *Aufgabe 15*

Definieren Sie den Begriff der Borelschen $\sigma$-Algebra und der Borel-Menge.

## *Aufgabe 16*

a) Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

b) Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsdichte.

## *Wahr oder falsch 1*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ beliebige Ereignisse. Kreuzen Sie die Aussagen an, die *falsch* sein können.

- ☐ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- ☐ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- ☐ $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
- ☐ $P(\bigcup_{i\geq 1} A_i) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$
- ☐ $P(A) = P(B) = 1 \Rightarrow A = B$
- ☐ $P(A \cup B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(B)$
- ☐ $P(A \cup B) = P(A) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$
- ☐ $P\left(B \cup (\bigcup A_i)\right) = P(B) \Rightarrow P(B) \geq P(A_i)$

## *Wahr oder falsch 2*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $A, B \in \mathcal{A}$ wobei $A \neq \emptyset$, sei $C \subseteq \Omega$ und sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$. Kreuzen Sie die Aussagen an, die *falsch* sein können.

- ☐ $A^c \cup B \in \mathcal{A}$ und $A \cap B^c \in \mathcal{A}$

- ☐ $C^c \cup C \in \mathcal{A}$ und $C^c \cap C \in \mathcal{A}$
- ☐ $A \cup C \in \mathcal{A}$
- ☐ $B \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathcal{A}$
- ☐ $(\Omega,\, 2^{\Omega})$ ist ein Ereignisraum.
- ☐ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
- ☐ $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ und $\Omega \in \mathcal{A}$
- ☐ $C^c \in \mathcal{A}$
- ☐ $A \cup B \in \mathcal{A}$
- ☐ $(A,\, \{A \cup D \mid D \in \mathcal{A}\})$ ist ein Ereignisraum.
- ☐ $(C,\, \{C \cap D \mid D \in \mathcal{A}\})$ ist ein Ereignisraum.
- ☐ Wenn $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt sind, gilt $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$.
- ☐ Wenn A und B fast sichere Ereignisse, gilt $P(A \cap B) = P(A \cup B) = 1$
- ☐ $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \geq P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$
- ☐ $\min_i P(A_i) > P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$
- ☐ $A \cap C \in \mathcal{A}$
- ☐ $(\Omega,\, \{\emptyset,\, A,\, \Omega \setminus A,\, \Omega\})$ ist ein Ereignisraum.
- ☐ $(A,\, \{A \cap D \mid D \in \mathcal{A}\})$ ist ein Ereignisraum.
- ☐ $(A \cup B) \cap C \in \mathcal{A}$
- ☐ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ☐ $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \leq P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$
- ☐ Wenn $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt sind, gilt $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$.
- ☐ Wenn $A \subseteq B$ gilt, gilt auch $P(A) \leq P(B)$.

### *Wahr oder falsch 3*

$\Sigma 19$

Tragen Sie für jede wahre Aussage ein W ein, für jede falsche ein F.

- ☐ $(\{0,1\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\})$ ist *kein* Ereignisraum.
- ☐ $(\mathbb{R},\, \{(-\infty, c] \mid c \in \mathbb{R}\})$ ist ein Ereignisraum.
- ☐ $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\Omega = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl}\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ ist ein gültiger Ereignisraum.
- ☐ $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl}\}, \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ keine Primzahl}\}, \mathbb{N}\}$ ist ein gültiger Ereignisraum.
- ☐ $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\Omega = [0;1]$, $\mathcal{A} = \{[a,b] \mid a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a < b \leq 1\}$ ist ein gültiger Ereignisraum.
- ☐ $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\Omega = [0;1]$, $\mathcal{A} = \sigma(\{[\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}] \mid k \in \mathbb{N}\})$ ist ein gültiger Ereignisraum.
- ☐ Die Potenzmenge von $\mathbb{R}$ ist eine $\sigma$-Algebra.
- ☐ Die Potenzmenge einer nichtleeren Menge $\Omega$ ist stets eine $\sigma$-Algebra.
- ☐ Das System aller $\sigma$-Algebren über einer Menge $\Omega$ ist bezüglich Mengeninklusion totalgeordnet, d.h. sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\sigma$-Algeben über $\Omega$, so ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ oder $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

## 3. Zufallsvariable

### *Aufgabe 1*

Übungsblatt 4, Aufgabe 1.

## *Aufgabe 2*

Übungsblatt 4, Aufgabe 2.

## *Aufgabe 3*

Übungsblatt 4, Aufgabe 4.

## *Aufgabe 4*

Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine Zufallsvariable und $P$ ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

$$P'(A') := P(X^{-1}[A']) = P(\{X \in A'\}) =: P(X \in A') \quad \text{für } A' \in \mathcal{A}'$$

ist ein W-maß $P'$ auf $(\Omega', \mathcal{A}')$.

## *Aufgabe 5*

Wann heißt eine Familie von Zufallsvariablen identisch verteilt?

## *Aufgabe 6*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X_1, \ldots, X_n$ seien Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Definieren Sie die Begriffe *Produktabbildung*, *gemeinsame Verteilung* und *Produkt-$\sigma$-Algebra*.

## *Aufgabe 7*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X_1, \ldots, X_n$ seien Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Zeigen Sie: Die Produktabbildung $X := X_1 \otimes \ldots \otimes X_n \colon \Omega \to \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n)$-messbar.

## *Aufgabe 8*

Gegeben ist für die beiden Zufallsvariablen $X_1$ und $X_2$ die gemeinsame Verteilung $P_X$ von $X := X_1 \otimes X_2$ durch

$$P_X = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die beiden eindimensionalen Rand- oder Marginalverteilungen.

(b) Ist die gemeinsame Verteilung durch die Marginalverteilungen eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.

### *Aufgabe 9*

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ zwei Messräume. Sei $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $X : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung.

a) Unter welcher Bedingung ist $X$ eine Zufallsvariable? Geben Sie die Definition möglichst explizit an.
b) Definieren Sie das Bildmaß $P_X$ zu $P$ bezüglich $X$. Geben sie dabei auch den Definitions- und Wertebereich an.

### *Aufgabe 10*

Eine faire Münze wird $n$-mal geworfen. „Zahl“ werde als Erfolg (codiert durch 1) und „Kopf“ als Misserfolg (codiert durch 0) angesehen. Wir betrachten zwei Zufallsvariablen:

$X_1$ : Anzahl der Erfolge.
$X_2$ : Wartezeit bis zum ersten Erfolg.

Aufgaben:

a) Geben Sie den zu $X_1$ und $X_2$ gehörigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und die Messräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ an.
b) Beschreiben Sie $X_1$ und $X_2$ konkret als Abbildungen

$$X_1 : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_1, \mathcal{A}_1), \quad X_2 : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2).$$

$\Sigma 11$

c) Bestimmen Sie die Verteilungen von $X_1$ und $X_2$.
d) Geben Sie die gemeinsame Verteilung $X_1 \otimes X_2$ (ohne Begründung) an.

## 4. Standartmodelle

### *Aufgabe 1*

Übungsblatt 5, Aufgabe 1.

### *Aufgabe 2*

Übungsblatt 5, Aufgabe 2.

### *Aufgabe 3*

Übungsblatt 5, Aufgabe 3.

### *Aufgabe 4*

Übungsblatt 5, Aufgabe 4.

## *Aufgabe 5*

Übungsblatt 6, Aufgabe 1.

## *Aufgabe 6*

Übungsblatt 6, Aufgabe 2.

## *Aufgabe 7*

Übungsblatt 6, Aufgabe 3.

## *Aufgabe 8*

Übungsblatt 6, Aufgabe 4.

## *Aufgabe 9*

Übungsblatt 6, Aufgabe 5.

## *Aufgabe 10*

Übungsblatt 10, Aufgabe 4.

## *Aufgabe 11*

Ein Tutorium besteht aus $n$ Studenten. Jeder Student nimmt mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ an dem Tutorium teil. Diese Wahrscheinlichkeit ist für alle Studenten gleich. Modellieren Sie die Anzahl der anwesenden Studenten mit einem Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen.
b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an.
c) Das Tutorium findet nur statt, wenn mehr als $k$ Studenten anwesend sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit $\hat{p}$, dass dieses stattfindet?

## *Aufgabe 12*

Wir betrachten mehrere Termine des o.g. Tutoriums (vorherige Aufgabe). Sei $\hat{p} \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Tutorium zu einem gewissen Termin stattfindet. Diese Wahrscheinlichkeit ist für alle Termine gleich. Nach wie vielen stattgefundenen Tutorien fällt das erste aus? Modellieren Sie diese Frage mit einen Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen.
b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.
c) Wie groß in Abhängigkeit von $\hat{p}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das sechste oder siebte Tutorium als nächstes ausfällt?

## *Aufgabe 13*

Bei einem Zufallsexperiment wird so lange mit einem fairen Würfel gewürfelt, bis eine Fünf oder eine Sechs geworfen wird. Wir betrachten die Anzahl der Würfe.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen.
b) Geben Sie die Berechnungsformel für die Wahrscheinlichkeit an, dass genau $k \in \mathbb{N}$ mal gewürfelt wird.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier mal gewürfelt werden muss?

## *Aufgabe 14*

Beim Lotto "6 aus 49" wird sechs mal ohne zurücklegen aus einer Urne gezogen, die 49 Kugeln mit den Zahlen von 1 bis 49 enthält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier gezogene Kugeln einen einstelligen Zahlenwert haben (d.h. 1 bis 9 einschließlich)?

a) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt diesem Zufallsexperiment zugrunde?
b) Geben Sie die Berechnungsformel und einen Ausdruck für den exakten Wert an.

## *Aufgabe 15*

Bei einer Tombola werden $N = 100$ Lose verkauft. Davon sind $N_H = 5$ ein Hauptgewinn und $N_G = 20$ ein kleinerer Gewinn. Die restlichen $N_N = 75$ Lose sind Nieten.

Die erste Kundin kauft $n = 10$ Lose (d.h. sie zieht ohne Zurücklegen). Die Reihenfolge ist für den Gewinn irrelevant und wird daher nicht berücksichtigt.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen (mit Begründung!).
b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kundin genau einen Hauptgewinn und zwei kleinere Gewinne zieht? (Es reicht, einen Ausdruck für den exakten Wert anzugeben.)

## *Aufgabe 16*

Man kann die Zahlen 1,...,49 eines Lottoscheins in die drei *disjunkten* Mengen

- $S_0$ := "Zahlen, die weder durch 3 noch durch 7 teilbar sind"
- $S_3$ := "Zahlen, die durch 3, nicht aber durch 7 geteilt werden können"
- $S_7$ := "Zahlen, die durch 7 geteilt werden können"

einteilen mit den Mächtigkeiten $|S_0| = 26$, $|S_3| = 16$ und $|S_7| = 7$. Nun werden gleichverteilt 6 unterschiedliche Felder markiert. Modelliere die Wahrscheinlichkeit, dass genau $H_0$, $H_3$ und $H_7$ Felder in den jeweiligen Mengen markiert wurden.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen (mit Begründung).
b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $H_0 = 3$, $H_3 = 2$, $H_7 = 1$?
**Hinweis:** Es reicht die Darstellung mit Binominalkoeffizienten, ein genaueres Ergebnis wird nicht gebraucht.

## *Aufgabe 17*

Eine Urne enthält 2 rote, 2 weisse und 2 blaue Kugeln. Es werden 3 Kugeln gleichzeitig herausgenommen.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen (mit kurzer Begründung).
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt jede Farbe genau einmal vor? Geben Sie die Berechnungsformel und den exakten Wert an.

## *Aufgabe 18*

In einer rheinschen Kleinstadt sollen sich im letzten Jahr 34.000 Menschen verliebt haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dieser Stadt in der nächsten Stunde mindestens zwei Menschen verlieben?

**Hinweis:** Die Wahrscheinlichkeit sich zu verlieben, soll als konstant angenommen werden. Insbesondere sei sie unabhängig davon, wann die Person sich zuletzt verliebt hat. Außerdem sollen die 34.000 Menschen dem Erwartungswert der Anzunehmenden Verliebten in einem Jahr entsprechen. Zur einfacheren Rechnung kann die Anzahl Stunden im letzten Jahr mit 8.500 angenommen werden.

## *Aufgabe 19*

Eine Kamera ist auf einem Stativ montiert und beobachtet eine statische Szene. In einer Belichtungszeit von zwei Sekunden hat ein Pixel dieser Kamera 5000 Photonen detektiert.

Nun wird noch ein Foto mit einer kürzeren Belichtungszeit von $0,002$ Sekunden aufgenommen. Wie wahrscheinlich ist es, dass der gleiche Pixel in dieser Zeit genau sechs Photonen detektiert? Geben Sie den Ausdruck für den Wert für die Wahrscheinlichkeit (samt Rechnung und Begründung) und nennen Sie das zugrundeliegende Standardmodell beim Namen.

**Hinweis:** Nehmen Sie an, dass die 5000 Photonen bei der ersten Aufnahme genau dem Erwartungswert entsprechen. Es gibt sehr viele unabhängige Ereignisse, die alle mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit dazu führen, dass in einem Zeitintervall ein Photon auf dem Pixel detektiert wird.

## *Aufgabe 20*

Eine Unfallversicherung hat berechnet, dass ein Versicherungsnehmer pro Monat in 1% der Fälle Schäden hat, die durch die Versicherung übernommen werden. Der Versicherungsvertrag laufe über 5 Jahre. Sei $A$ das Ereignis, dass die Versicherung in dieser Zeit höchstens 2-mal zahlen muss.

(a) Benennen Sie allgemein die zugrundeliegende Verteilung und geben Sie die Verteilungsfunktion an.
(b) Geben Sie eine Formel für $P(A)$ an. Sie brauchen den Wert nicht auszurechnen!
(c) Wie lautet das dazugehörige Urnenmodell?
(d) Geben Sie allgemein die Verteilungsfunktion der Poissonverteilung an.
(e) Lässt sich die Verteilung aus (a) auch mit einer Poisson-Verteilung approximieren? Begründen Sie Ihre Antwort!

## *Aufgabe 21*

Eine Urne erhalten 4 blaue, 1 rote und 3 schwarze Kugeln. Wir ziehen mit Zurücklegen. Das Histogramm $H$ beschreibe, dass beim sechsmaligen Ziehen 3-mal eine blaue, 1-mal eine rote und 2-mal eine schwarze Kugel gezogen werde.

(a) Wie lautet das dazugehörige Urnenmodell?
(b) Benennen Sie die zugrundeliegende Verteilung und geben Sie die Verteilungsfunktion für ein allgemeines Histogramm an.
(c) Geben Sie für obiges konkretes $H$ eine Formel für $P(H)$ an und rechnen Sie den Wert aus.

## *Aufgabe 22*

Bei einem Multiple-Choice-Test muss bei jeder Frage genau eine von 5 Auswahlantworten angekreuzt werden. Der Kandidat setzt seine Kreuze willkürlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei 10 Fragen genau 6 Fragen richtig beantwortet?

Geben Sie die Berechnungsformel und einen Ausdruck für den exakten Wert an. Nennen Sie den Namen des zugrundeliegenden Standartmodells.

## *Aufgabe 23*

Es sei $\rho$ eine Zähldichte auf dem endlichen Ergebnisraum $\Omega$. Zeigen Sie: Durch

$$\rho^{\otimes n}(\omega) = \rho^{\otimes n}(\omega_1, \dots, \omega_n) := \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i)$$

wird eine Zähldichte auf $\Omega^n$ definiert.

## *Aufgabe 24*

Zeigen Sie: Die geometrische Verteilung ist eine Verteilung.

$\Sigma 25$

## *Wahr oder falsch*

Wir interpretieren unterschiedliche Verteilungen durch Urnenexperimente. Welche Aussagen sind *richtig*:

- ☐ Die Multinomialverteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
- ☐ Bei der Multinomialverteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen nicht berücksichtigt.
- ☐ Bei der Binomialverteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt.
- ☐ Die Binomialverteilung modelliert eine Ziehung mit Zurücklegen.
- ☐ Bei der Bernoulli-Verteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt.
- ☐ Die Bernoulli-Verteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
- ☐ Die hypergeometrische Verteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
- ☐ Bei der hypergeometrischen Verteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt.
- ☐ Die geometrische Verteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
- ☐ Die geometrische Verteilung modelliert eine Ziehung mit Zurücklegen.

## **5. Bedingte W-keit und Unabhängigkeit**

## *Aufgabe 1*

Übungsblatt 7, Aufgabe 1.

## *Aufgabe 2*

Übungsblatt 7, Aufgabe 2.

## *Aufgabe 3*

Übungsblatt 7, Aufgabe 3.

## *Aufgabe 4*

Übungsblatt 8, Aufgabe 1.

## *Aufgabe 5*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\Omega = \bigsqcup_{i \in I} B_i$ eine disjunkte Zerlegung von $\Omega$ in Ereignisse $B_i \in \mathcal{A}$ mit $P(B_i) > 0$ wobei $I$ eine höchstens abzählbar unendliche Indexmenge ist.

a) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i).$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) > 0$ und alle $k \in I$ gilt

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}{\sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}.$$

## *Aufgabe 6*

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ zwei Zufallsvariablen und $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Unter welcher Bedingung sind $X$ und $Y$ bezüglich $P$ stochastisch unabhängig? (Definition.)

## *Aufgabe 7*

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.Unter welcher Bedingung heißt eine Familie $(Y_i)_{i \in I}$ von ZVs $Y_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ stochastisch unabhängig bezüglich $P$? (Definition.)

## *Aufgabe 8*

Eine Musikanalyse-Software sortiert eine Sammlung von Musikstücken automatisch nach Stilrichtungen. Wir nehmen an, dass 50% der Musikstücke moderne Musik ($M$) sind, 20% klassische Musik ($K$) und der Rest einem anderen Musikstil ($X$) angehört. Der verwendete Algorithmus erkennt die Genres Modern ($m$) und Klassik ($k$) mit 80% Wahrscheinlichkeit korrekt. Der Fall $X$ wird zu 50% als $m$ und zu 50% als $k$ erkannt.

a) Ein Musikstück wird gemäß Gleichverteilung zufällig gewählt und der tatsächliche Stil ($M$, $K$ oder $X$) sowie die Einordnung ($m$ oder $k$) betrachtet. Modellieren Sie dieses Experiment im Wegemodell. Geben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum explizit an.
b) Das gewählte Stück wurde als Klassik ($k$) eingeordnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei dem betrachteten Stück tatsächlich um klassische Musik handelt. Geben Sie den Rechenweg (mit kurzer Begründung) an.

## *Aufgabe 9*

Beim zweimaligen Münzwurf einer fairen Münze betrachten wir die folgenden Ereignisse:

$A$: Beim ersten Wurf fällt Zahl.
$B$: Beim zweiten Wurf fällt Zahl.
$C$: Das Ergebnis beider Würfe ist gleich.

Geben Sie den W-Raum für dieses Experiment an. Ist die Familie $(A, B, C)$ stochastisch unabhängig? Sind die Ereignisse $A, B, C$ paarweise unabhängig?

## *Aufgabe 10*

Ein webbasierter Internetdienstleister kategorisiert Fehler, die zum Ausfall seines Angebots führen, in drei Kategorien. Die folgende Tabelle erfasst die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers der jeweiligen Kategorie. Zusätzlich enthält sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler der Kategorie zu einem Ausfall von weniger bzw. mehr als einem Tag geführt hat.

| Typ des Ausfalls | Wahrscheinlichkeit des Fehlers | Wahrscheinlichkeit, dass Ausfall kürzer als ein Tag | länger als ein Tag |
|---|---|---|---|
| **W**artungsfehler | 2/5 | 7/8 | 1/8 |
| **H**ard und Softwarefehler | 1/5 | 5/8 | 3/8 |
| **A**ngriff auf das System | 2/5 | 1/4 | 3/4 |

a) Modellieren Sie einen zufälligen Ausfall als mehrstufiges Zufallsexperiment mit einem Wegemodell. Wählen Sie als erste Stufe den Typ des Ausfalls (**W**,**H**,**A**) und in der zweiten Stufe die Dauer des Ausfalls (**K**: kürzer als ein Tag, **L**: länger als ein Tag). Sie brauchen den Wahrscheinlichkeitsraum nicht explizit anzugeben.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich bei einem Ausfall, der länger als einen Tag dauert, um einen Wartungsfehler? Bitte geben Sie die Rechnungsformeln (mit Begründung) und Ausdruck für den exakten Wert an.

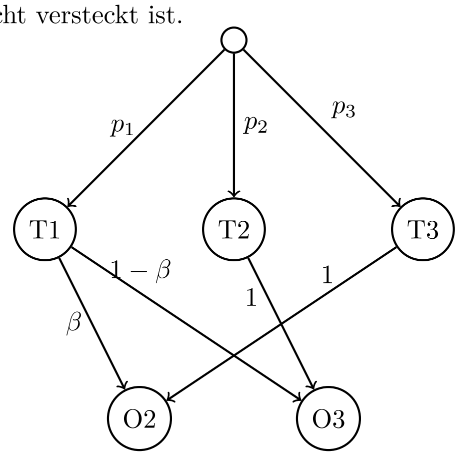
## *Aufgabe 11*

Einem Kandidaten einer Spielshow werden drei Türen präsentiert, hinter denen genau ein Gewinn versteckt ist. Im Unterschied zum Ziegenproblem sind die Wahrscheinlichkeiten den Gewinn hinter den jeweiligen Türen zu finden nicht notwendig gleich und durch $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ gegeben. Im Wissen um die Wahrscheinlichkeiten entscheidet sich der Kandidat für die erste Tür. Daraufhin öffnet der Moderator eine der verbleibenden Türen, hinter denen der Gewinn nicht versteckt ist. Nun hat der Kandidat die Möglichkeit seine Wahl auf die noch verschlossene Tür zu ändern, welche er mit Wahrscheinlichkeit $\alpha$ wahrnimmt. Uns interessiert, ob er schließlich gewinnt.

a) Modellieren Sie dieses Experiment im Wegemodell. Unterscheiden Sie hierbei in der ersten Stufe die Fälle $\{T1, T2, T3\}$ die angeben hinter welcher Tür der Gewinn war und in der zweiten Stufe die Fälle $\{G, V\}$, die für Gewonnen und Verloren stehen. Beachte, dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen von der Wahrscheinlichkeit $\alpha$ abhängt, die angibt ob der Kandidat wechselt.
b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat gewinnt, in Abhängigkeit von $p_1$, $p_2$, $p_3$ und $\alpha$ an.
c) Ist der Kandidat für $p_1 = \frac{1}{2}$ besser beraten zu wechseln, zu verbleiben oder ist es irrelevant?
d) Sei $p_1 = 0.4$, $p_2 = p_3 = 0.3$ und $\alpha = 0.5$. Falls der Kandidat gewonnen hat, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn hinter der ersten Tür war?

## *Aufgabe 12*

a) Einem Kandidaten einer Spielshow werden drei Türen präsentiert, hinter denen genau ein Gewinn versteckt ist. Die Wahrscheinlichkeiten den Gewinn hinter den jeweiligen Türen zu finden nicht notwendig gleich und durch $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ gegeben. Der Kandidat entscheidet sich für die erste Tür. Daraufhin öffnet der Moderator eine der verbleibenden Türen, hinter denen der Gewinn nicht versteckt ist.




Unterscheiden Sie hierbei in der ersten Stufe die Fälle $\{T1, T2, T3\}$ die angeben hinter welcher Tür der Gewinn war und in der zweiten Stufe die Fälle $\{O2, O3\}$, die angeben, welche Tür der Moderator öffnet. Falls beide verbleibenden Türen Nieten sind, also die Wahl des Kandidaten richtig war, öffne der Moderator die Tür 2 mit Wahrscheinlichkeit $\beta$. Wie muss $\beta$ gewählt werden, dass der Kandidat keine Rückschlüsse aus der sich öffnenden Tür auf seine Wahl zu Wechseln schliessen kann?

## *Aufgabe 13*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ zwei unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$P(X + Y = k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n) \cdot P(Y = k - n).$$

**Hinweis:** Führen Sie den Beweis durch Umformungen der rechten Seite der Gleichung.

## *Aufgabe 14*

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $A, B \in \mathcal{A}$. Wann und wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ definiert?

(b) Modellieren Sie das Werfen eines fairen sechsseitigen Würfels durch Angabe eines geeigneten W-Raums.

(c) Geben Sie im Szenario (b) $P_A(B)$ für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4, 5, 6\}$ an.

(c) Welche $B \subseteq [1 : 6]$ sind im Szenario (b) stochastisch unabhängig zu $A = \{1, 2, 3\}$?

## *Aufgabe 15*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Wir wissen, dass für ein festes geeignetes $A \in \mathcal{A}$ die Abbildung $B \mapsto P(B|A)$ wieder ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ beschreibt. Sei weiterhin $A \neq \Omega$. Geben Sie ein $C \in \mathcal{A}$ an, sodass $C \neq \emptyset$ und $P(C|A) = 0$, oder begründen Sie, warum es ein solches $C$ nicht geben kann.

## *Aufgabe 16*

Es sei $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$ und $P$ die Gleichverteilung auf $\Omega$. Betrachten Sie das Ereignis $A := \{\omega \in \Omega \mid 10 \text{ teilt } \omega\}$. Weiterhin bezeichne $B$ ein unbekanntes Ereignis. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B) = \frac{1}{50}$ und $P(B|A) = \frac{1}{20}$ seien gegeben.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$.

## *Aufgabe 17*

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) > 0$. Zeigen Sie: Durch $B \mapsto P(B|A)$ wird ein W-Maß $P_A$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert.

## *Aufgabe 18*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\Omega = \bigsqcup_{i \in I} B_i$ eine disjunkte Zerlegung von $\Omega$ in Ereignisse $B_i \in \mathcal{A}$ mit $P(B_i) > 0$ wobei $I$ eine höchstens abzählbar unendliche Indexmenge ist.

a) Wie lautet die Fallunterscheidungsformel?

b) Wie lautet die Formel von Bayes?

## *Aufgabe 19*

Zeigen Sie: Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, so gilt für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ und $A := A_1 \cap \dots \cap A_n$ mit $P(A) > 0$:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

## *Aufgabe 20*

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Unter welcher Bedingung heißt eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Ereignissen in $\mathcal{A}$ stochastisch unabhängig bezüglich $P$? (Definition.)

$\Sigma 21$

### Wahr oder falsch

Welche Aussagen sind *richtig*:

- ☐ Die Unabhängigkeit einer endlichen Familie von Ereignissen kann nicht durch Betrachtung der paarweisen Unabhängigkeiten erschlossen werden.
- ☐ Sind zwei Zufallsvariable $X$ und $Y$ unkorreliert, so sind $X$ und $Y$ auch unabhängig.
- ☐ Sind zwei Zufallsvariable $X$ und $Y$ unabhängig, so sind $X$ und $Y$ auch unkorreliert.

## 6. Erwartungswert und Varianz

### Aufgabe 1

Übungsblatt 8, Aufgabe 2.

### Aufgabe 2

Übungsblatt 8, Aufgabe 3.

### Aufgabe 3

Übungsblatt 8, Aufgabe 4.

### Aufgabe 4

Übungsblatt 9, Aufgabe 1.

### Aufgabe 5

Übungsblatt 9, Aufgabe 2.

### Aufgabe 6

Übungsblatt 9, Aufgabe 3.

### Aufgabe 7

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ zwei Zufallsvariablen.

a) Unter welcher Bedingung ist der Erwartungswert $\mathbf{E}_P(X)$ wohldefiniert? Geben Sie eine Formel zur Bedingung des Erwartungswertes an.

b) Angenommen der Erwartungswert $\mathbf{E}_P(X)$ ist wohldefiniert. Geben Sie eine Formel zu seiner Berechnung an (Definition).

c) Geben Sie Bedingungen dafür an, dass die Varianz $\mathbf{V}_P(X)$ wohldefiniert ist. Geben Sie die Formel der Definition der Varianz an.

d) Wie lautet die Formel für Standartabweichung von $X$ bzgl. $P$?

## *Aufgabe 8*

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ zwei Zufallsvariablen und $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass $\mathbf{E}_P(X)$, $\mathbf{E}_P(Y)$ und $\mathbf{E}_P(XY)$ existieren.

a) Welche Gleichung drückt aus, dass $X$ und $Y$ unkorreliert sind?

b) Widerlegen Sie mit Hilfe der folgenden gemeinsamen Verteilung von $X$ und $Y$ den Satz: *„Unkorrelierte Zufallsvariablen sind unabhängig“*

| $P(X = x, Y = y)$ | $x = -1$ | $x = 0$ | $x = 1$ |
|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ |
| $y = -\frac{2}{3}$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ |

c) Beweisen Sie: *„Sind $X$, $Y$ unabhängig, dann sind sie unkorreliert.“*

## *Aufgabe 9*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ zwei Zufallsvariablen so dass $\mathbf{E}_P(X)$, $\mathbf{E}_P(Y)$ und $\mathbf{E}_P(XY)$ existieren.

a) Geben Sie die Rechenregel der Linearität des Erwartungswertes als Formel an (ohne Beweis).

b) Beweisen Sie: $\mathbf{E}_P(X + Y) = \mathbf{E}_P(X) + \mathbf{E}_P(Y)$.
**Ansatz:** Schreiben Sie $\mathbf{E}_P(X+Y)$ als Summe über der gemeinsamen Verteilung $P(X = x, Y = y)$ von $X$ und $Y$.

## *Aufgabe 10*

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ zwei Zufallsvariablen und $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass $\mathbf{E}_P(X)$, $\mathbf{E}_P(Y)$ und $\mathbf{E}_P(XY)$ existieren.

a) Geben Sie Bedingungen dafür an, dass die Kovarianz $\mathrm{Cov}_P(X, Y)$ wohldefiniert ist. Geben Sie die Formel der Definition von $\mathrm{Cov}_P(X, Y)$ an.

b) Unter welcher Bedingung sind $X$ und $Y$ unkorreliert?

c) Wie ist der Korrelationskoeffizient von $X$ und $Y$ definiert?

## *Aufgabe 11*

a) Sei $X_1, ..., X_n$ eine endliche Bernoulli-Folge zur Erfolgswahrscheinlichkeit $p$, d.h. $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ ist jeweils eine Zufallsvariable mit $P(X_i = 1) = p$. Welche Zufallsvariable $S$ beschreibt die Anzahl der Erfolge?

b) Berechnen Sie die zu erwartende Erfolgsanzahl.

c) Berechnen Sie die Varianz.

d) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X \in \mathscr{L}^1(P)$ eine Zufallsvariable mit $X[\Omega] \subseteq \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\mathbf{E}_P(X) \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) \; .$$

**Hinweis:** Betrachten Sie die Zeilen-/Spaltensummen der Matrix

$$\begin{pmatrix} P(X=1) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ P(X=2) & P(X=2) & 0 & 0 & \cdots \\ P(X=3) & P(X=3) & P(X=3) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

## *Aufgabe 12*

Es seien $X$ und $Y$ Zufallsvariablen mit $Y = -aX + b$ für eine positive reelle Zahl $a > 0$, eine reelle Zahl $b$ und $\mathbf{V}(X) \neq 0$. Zeigen Sie unter Verwendung der Rechenregeln für $\mathbf{E}$, $\mathbf{V}$ und Cov, dass für den Korrelationskoeffizienten $\rho_{XY}$ gilt: $\rho_{XY} = -1$.

Wie kann diese Aussage geometrisch gedeutet werden?

## *Aufgabe 13*

Ein Adventskalender enthält $N = 24$ Fenster. Hinter jedem Fenster ist, unabhängig von den anderen Fenstern, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_K = 30\%$ ein kleiner Gewinn und mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_G = 10\%$ ein größerer Gewinn. Ansonsten befindet sich hinter dem Fenster nur ein Bild. Wir betrachten die Anzahl der kleinen und größeren Gewinne im Adventskalender als Zufallsgrößen. Der Wert eines kleinen Gewinns beträgt die Hälfte des größeren Gewinns. Der Kalender wird für 15 Euro verkauft. Wie groß darf ein kleiner Gewinn maximal sein, wenn 3 Euro pro Kalender verdient werden sollen?

## *Aufgabe 14*

Sei $X$ eine Zufallsvariable mit $X \in \mathscr{L}^2(P)$. Zeigen Sie:

$$\mathbf{V}_P(X) = \mathbf{E}_P(X^2) - \mathbf{E}_P(X)^2 .$$

## *Aufgabe 15*

Es sei $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein W-Raum mit abzählbarem $\Omega$.

(a) Wie ist $\mathscr{L}^1(P)$ definiert?

(b) Zeigen Sie: $\mathscr{L}^1(P)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c) Zeigen Sie: $\mathbf{E}_P : \mathscr{L}^1(P) \to \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$-linear.

## *Aufgabe 16*

(a) Definieren Sie den Begriff der diskreten Zufallsvariable.

(b) Definieren Sie den Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable.

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Funktion $c \cdot 1_\Omega := (\Omega \ni \omega \to c)$, die alle Ergebnisse auf $c$ abbildet, hat Erwartungswert $c$.

.................................... .................................... – ....................................

## Aufgabe 17

a) Geben Sie die Rechenregel der Monotonie des Erwartungswertes als Formel an (ohne Beweis).
b) Geben Sie die Rechenregel der $\sigma$-Additivität des Erwartungswertes als Formel an (ohne Beweis).
c) Geben Sie die Produktregel des Erwartungswertes als Formel an (ohne Beweis).

## Aufgabe 18

a) Beweisen Sie die Rechenregel der Monotonie des Erwartungswertes.
b) Beweisen Sie die Produktregel des Erwartungswertes.

## Aufgabe 19

Seien $X, Y, X_i \in \mathscr{L}^2(P)$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: $\mathrm{Cov}_P(aX + b, cY + d) = ac\mathrm{Cov}_P(X, Y)$.
b) Wie lautet die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Varianz und Kovarianz?
c) Geben Sie den Satz des Pythagoras für Varianzen als Formel an. Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit der Satz gilt?

## Wahr oder falsch

$\Sigma 20$

a) Welche Aussagen sind *richtig*:
   - ☐ Varianzbildung ist linear.
   - ☐ Jede diskrete Zufallsvariable besitzt einen Erwartungswert.
   - ☐ Alle Zufallsvariablen in $\mathscr{L}^2(P)$ für ein W-Maß $P$ haben einen Erwartungswert.
   - ☐ Alle Zufallsvariablen in $\mathscr{L}^1(P)$ für ein W-Maß $P$ haben eine Varianz.
   - ☐ Wenn $X, Y \in \mathscr{L}^2(P)$ dann gilt $X \cdot Y \in \mathscr{L}^1(P)$.
b) Seien $X, Y, X_i \in \mathcal{L}^2(P)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Kreuzen Sie die Aussagen an, die *falsch* sein können.
   - ☐ $\mathbf{V}_P(aX + b) = a^2\mathbf{V}_P(X)$.
   - ☐ $\mathbf{V}_P(\sum_{i=0}^n X_i) = \sum_{i=0}^n \mathbf{V}_P(X_i)$.
   - ☐ $Cov_P(X, Y)^2 \leq \mathbf{V}_P(X)\mathbf{V}_P(Y)$.

**7. Gesetze der großen Zahl**

## Aufgabe 1

Übungsblatt 9, Aufgabe 4.

## Aufgabe 2

Übungsblatt 10, Aufgabe 1.

## *Aufgabe 3*

Übungsblatt 10, Aufgabe 3.

## *Aufgabe 4*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen. Sei $v > 0$ mit $\mathbf{V}_P(X_i) \leq v$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir betrachten das arithmetische Mittel der Abweichungen vom Erwartungswert:

$$Y_n := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbf{E}_P(X_i)$$

a) Zeigen Sie (mit Begründung), dass für die Varianz von $Y_n$ gilt:

$$\mathbf{V}_P(Y_n) \leq \frac{v}{n}$$

b) Beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen, d.h. zeigen Sie (mit Begründung), dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$P(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$$

**Hinweis:** Die Tschebyscheff-Ungleichung darf ohne Beweis verwendet werden.

## *Aufgabe 5*

a) Formulieren Sie das Schwache Gesetz der großen Zahl.

b) Wenden Sie dieses Gesetz auf $n$ Bernoulli-Versuche $X_1, ..., X_n$ zur Erfolgswahrscheinlichkeit $p$ an: Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich die relative Häufigkeit der Erfolge um mindestens $\varepsilon > 0$ von $p$ unterscheidet.

## *Aufgabe 6*

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ ZVs $\Omega \to \mathbb{R}$.

a) Wann heißt die Folge $(Y_n)_n$ stochastisch konvergent (oder $\boldsymbol{P}$-konvergent) gegen $Y$?

b) Wann konvergiert die Folge $(Y_n)_{n \geq 1}$ $P$-fast sicher gegen $Y$?

## *Aufgabe 7*

Formulieren Sie den Satz über die Tschebyscheff-Ungleichung (ohne Beweis).

## *Aufgabe 8*

a) Geben Sie die Formel der Dichtefunktion zur Standartnormalverteilung an.

b) Geben Sie die Formel der Verteilungsfunktion der Standartnormalverteilung an.

c) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz (ohne Beweis).

### *Wahr oder falsch*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(P)$ wobei $\mathbf{V}_P(X_i) \leq v$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und ein $v > 0$.

Kreuzen Sie bei jeder Teilaufgabe die Aussage an, die **immer zutrifft**.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt

- ☐ $P\left(|\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}_P(X_i))| \geq \frac{1}{n} \cdot \varepsilon\right) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$.
- ☐ $P\left(|\sum_{i=1}^n X_i| \leq n \cdot \varepsilon\right) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$.
- ☐ $P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}_P(X_i))\right| \leq \varepsilon\right) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$.
- ☐ $P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}_P(X_i))\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$.

Σ 9

b) Es gilt

- ☐ $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i + \mathbf{E}_P(X_i)) \to 0 \quad P$-fast sicher für $n \to \infty$.
- ☐ $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}_P(X_i)) \to 0 \quad P$-fast sicher für $n \to \infty$.
- ☐ $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}_P(X_i))^2 \to v \quad P$-fast sicher für $n \to \infty$.
- ☐ $\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}_P(X_i)) \to 0 \quad P$-fast sicher für $n \to \infty$.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$. $X_n \to x$ $P$-fast sicher für $n \to \infty$ gilt genau dann,

- ☐ wenn für das Ereignis $A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = x\}$ gilt $P(A) = 1$.
- ☐ wenn für das Ereignis $A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = x\}$ gilt $A = \Omega$.
- ☐ wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - x| < \varepsilon) = 1$.
- ☐ wenn $P(X_n = x) \to 1$ für $n \to \infty$.

## 8. Markov-Ketten

### *Aufgabe 1*

Übungsblatt 11, Aufgabe 1.

### *Aufgabe 2*

Übungsblatt 11, Aufgabe 2.

### *Aufgabe 3*

Übungsblatt 11, Aufgabe 3.

### *Aufgabe 4*

Übungsblatt 11, Aufgabe 4.

## *Aufgabe 4*

Eine Reihe von Leuten spielt stille Post. Der erste Spieler in der Reihe flüstert dem Nächsten die Nachricht “Ja” zu. Von da an flüstert jeder Mitspieler dem Nächsten die Nachricht zu, die er meint erhalten zu haben. Bei jeder Weitergabe kann es zu Missverständnissen kommen.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% wird aus “Ja” ein “Nein” und mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% ein “Jein”. Ein “Nein” wird zu 20% ein “Ja” und zu “30%” ein “Jein”. “Jein“ wird zu 30% ein “Nein” und zu 30% ein “Ja”.

Da die Spieler flüstern nehmen wir an, dass diese Ereignisse von Spieler zu Spieler unabhängig sind.

a) Stellen Sie einen Übergangsgraphen und eine Übergangsmatrix auf, mit denen sich eine entsprechende Markov-Kette beschreiben lässt.

   **Hinweis:** In der Matrix sollte die erste Zeile “Ja”, die zweite Zeile “Jein” und die dritte Zeile “Nein” beschreiben.

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Spieler dem Nächsten die Nachricht “Ja” weitergibt? (Mit Rechnung und Begründung).

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste, zweite und vierte Spieler die Nachricht “Ja” weitergeben? (Mit Rechnung und Begründung).

d) Wir erhöhen die Anzahl der Mitspieler $n \in \mathbb{N}$. Wie hoch wird für $n \to \infty$ die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende die Nachricht “Ja” ankommt? (Mit Rechnung und Begründung).

## *Aufgabe 5*

Wir betrachten den endlichen Automaten in Abbildung 1. Der endliche Automat erwartet eine Ziffernfolge als Eingabe. Der Initialzustand ist 0 und die Übergänge sorgen dafür, dass in jedem Schritt der Zustand dem Zahlenwert der Eingabe Modulo drei entspricht. Insbesondere ist die Eingabe durch drei teilbar genau dann, wenn der Automat im Zustand 0 endet.

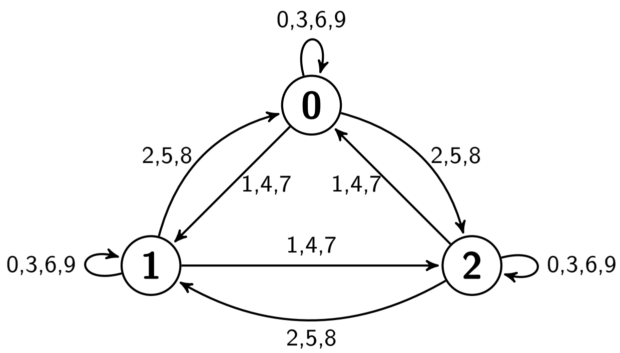


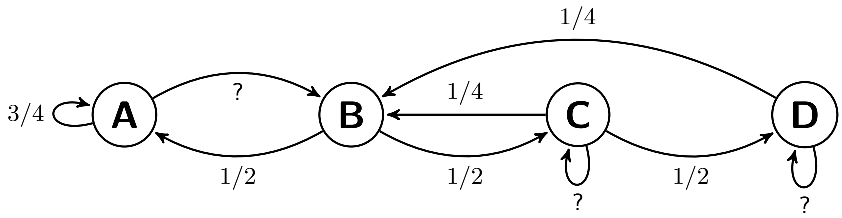

Abbildung 1: Der Graph zur Beschreibung des endlichen Automaten. Die Ziffern an den Kanten zeigen an bei welchen Eingaben welcher Übergang erfolgt.

Dieser endliche Automat wird nun mit einer Folge unabhängiger, zufälliger Ziffern gespeist. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ziffer der Eingabe 0 oder 1 ist, ist jeweils $\frac{2}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit für die restlichen Ziffern $2, \ldots, 9$ ist jeweils $\frac{1}{12}$.

a) Modellieren Sie das Zufallsexperiment durch eine Markov-Kette und geben Sie dabei einen Übergangsgraph und eine Übergangsmatrix an.
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Eingabe mit zwei Ziffern durch drei teilbar ist? Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit durch die Markov-Kette.
c) Ermitten Sie, ob die Markov-Kette eine eindeutige Grenzverteilung hat und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

### *Aufgabe 6*

Wir betrachten das Spiel mehrerer Kinder (A, B, C und D) mit einem Spielzeug. Während dem Spiel nehmen sie sich das Spielzeug gegenseitig ab. Nachdem die beiden grösseren (A und D) es nicht mehr abgeben, greift der Vater hin und wieder ein und gibt das Spielzeug dem kleinsten Kind (B). Das folgende Diagramm stellt den *partiellen* Übergangsgraphen des Spielzeugs dar:




a) Vervollständigen Sie obrigen Übergangsgraphen und geben Sie eine Übergangsmatrix an.
b) Hat diese Übergangsmatrix eine Grenzverteilung, und wenn ja, wieso? Falls möglich, ermittlen Sie die Wahrscheinlichkeit für jedes Kind das Spielzeug nach langer Zeit des Spielens zu haben.

### *Aufgabe 7*

Gegeben sei ein Markovprozess mit 5 Zuständen $A, B, C, D$ und $E$ und der Übergangsmatrix $\Pi$. Falls in einem Schritt die Wahrscheinlichkeit der Zustände durch den Vektor $\rho$ gegeben sind, sind sie im nächsten Schritt durch den Vektor $\rho\Pi$ gegeben.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie den Übergangsgraphen für die Übergangsmatrix $\Pi$ an.
b) Im allgemeinen, unter welchen Bedingungen hat der Markovprozess eine Grenzverteilung nach dem Ergodensatz?
c) Falls im allgemeinen eine eindeutige Grenzverteilung $\rho$ existiert, welche *Gleichungen* legen sie *eindeutig* fest?
d) Welche der folgenden Verteilungen könnte die Grenzvertelung sein:

(i) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (iii) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ (v) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (vi) $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

## *Aufgabe 8*

a) Sei $X_0, X_1, ...$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $V$, d.h. $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (V, 2^V)$. Definieren Sie möglichst genau, wann diese Folge als Markov-Kette bezeichnet werden kann.

b) Gegeben sei eine Übergangsmatrix $\Pi$:

$$\Pi = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie, ob die Übergangsmatrix eine Grenzverteilung hat und begründen Sie Ihre Antwort.

## *Aufgabe 9*

Wir betrachten einen Teil des Internets bestehend aus fünf Webseiten A, B, C, D und E. Die Verlinkungen dieser Webseiten untereinander sind in Abbildung 2 dargestellt. Das Verhalten von Internetnutzern in diesem Teil des Internets soll nun durch eine Markovkette beschrieben werden, wobei wir die Wahrscheinlichkeit, dass über die Adressleiste eine zufällige Seite aufgerufen wird auf null setzen. Das heißt, wenn ein Internetnutzer auf einer Webseite mit $n \in \mathbb{N}$ Links ist, wird er im nächsten Zeitschritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$ immernoch auf dieser Seite sein oder jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$ einem der Links gefolgt sein.

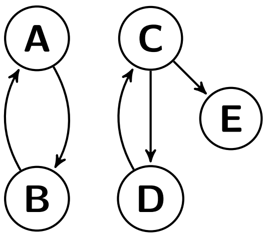



Abbildung 2: Der Webgraph zu den fünf Webseiten. Ein Pfeil bedeutet, dass eine Webseite durch einen Link auf eine andere Seite verweist.

a) Beschreiben Sie die Markovkette $X_0, X_1, \ldots$ die diesen Vorgang modelliert. Geben Sie dabei insbesondere den Übergangsgraph und die Übergangsmatrix $\Pi$ an.

b) Ein Internetnutzer ist auf Webseite $D$. Wie hoch sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten, dass er zwei Zeitschritte später auf Webseite $A$, $D$ oder $E$ ist?

c) Ermitteln Sie, ob die Markov-Kette eine eindeutige Grenzverteilung hat und bestimmen Sie diese gegebenenfalls. Begründen Sie Ihre Antwort.

## *Aufgabe 10*

Sei $X_0, X_1, \ldots$ eine Markovkette auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum $V$ und Übergangsmatrix $\Pi$.

a) Definieren Sie den Begriff der *zeilenstochastischen Matrix.*

b) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen zur Markovkette mit Zustandsraum $V = \{0,1,2,3\}$ und Übergangsmatrix

$$\Pi = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Beweisen Sie folgenden Satz:
Die $n$-te Potenz $\Pi^n$ einer zeilenstochastischen Matrix $\Pi$ enthält an der Position $(x,y)$ die Wahrscheinlichkeit, in genau $n$ Schritten vom Zustand $x \in V$ in den Zustand $y \in V$ zu gelangen, also

$$P^x(X_n = y) \;=\; \Pi^n(x,y),$$

wobei $P^x$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit sicherem Start in $x$ beschreibt, d. h. $P^x(X_0 = x) = 1$.

## *Aufgabe 11*

Σ11

Formulieren Sie den Ergodensatz (ohne Beweis).

### 9. Steilkurs Statistik

## *Aufgabe 1*

Übungsblatt 12, Aufgabe 1.

## *Aufgabe 2*

Übungsblatt 12, Aufgabe 2.

## *Aufgabe 3*

Übungsblatt 12, Aufgabe 3.

## *Aufgabe 4*

Übungsblatt 12, Aufgabe 4.

## *Aufgabe 5*

Eine unfaire Münze wird $n = 1000$ mal geworfen. Sie zeigt dabei $k = 364$ mal Zahl. Geben Sie zu diesem Experiment ein statistisches Modell basierend auf einer Binomialverteilung an und schätzen Sie mit einem Maximum-Likelihood-Schätzer (mit Formel, Rechnung und Begründung) die Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$, dass die Münze bei einem Wurf Zahl zeigt. Geben Sie außerdem an (mit Begründung), ob der gefundene Schätzer erwartungstreu ist.

## *Aufgabe 6*

Ein Zufallsgenerator liefert gleichverteilt natürliche Zahlen aus einem Interval $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Es werden $k$ Zufallszahlen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ generiert. Schätzen Sie die Parameter $a$ und $b$ aus den $(x_i)_{i=1\ldots k}$ mit einem Maximum-Likelihood Schätzer.

a) Geben Sie zu diesem Experiment ein statistisches Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ an.

b) Leiten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für die Intervalgrenzen $a$ und $b$ aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_k$ her.

c) Welche Parameter $\hat{a}$ und $\hat{b}$ schätzt Ihr Schätzer für die Folge $61, 69, 57, 71, 66, 79, 83, 91, 56, 71$?

d) Welche Gleichung müsste dieser Schätzer erfüllen, um erwartungstreu zu sein?

## *Aufgabe 7*

Definieren Sie den Begriff des statistischen Modells inklusive aller vorkommenden Begriffe.

## *Aufgabe 8*

a) Definieren Sie die Begriffe der Statistik und des Schätzers.

b) Wann heißt ein Schätzer Maximum-Likelihood-Schätzer?

## *Wahr oder falsch*

Welche Aussagen sind immer *richtig*:

☐ Erwartungstreue Schätzer haben einen kleineren quadratischen Fehler als nicht erwartungstreue Schätzer.

☐ Likelihood-Funktionen und dazugehörige Log-Likelihood-Funktionen haben dieselben Maximalstellen.

☐ Das Produktmodell eines parametrischen Modells ist wieder parametrisch.

☐ Das Produktmodell eines Standartmodells ist diskret oder stetig.

$\Sigma 10$