1 Grundlagen

- Erwartungswert misst den mittleren Wert einer Zufallsvariable X
- Varianz misst wie stark die Werte von X typischerweise vom Erwartungswert abweichen
- Nicht jede reellwertige ZV X besitzt einen Erwartungswert und eine Varianz (manche haben unendlich als Erwartungswert)

2 Erwartungswert

2.1 Diskrete ZVs

Definition: Erwartungswert Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ eine diskrete ZV

- Dann besitzt **X einen Erwartungswert** wenn $\sum_{x \in X[\Omega]} |x| P(X = x) < \infty$
- In diesem Fall ist nach dem Umordnungsatz: $E(X) = E_p(X) := \sum_{x \in X[\Omega]} |x| P(X = x)$ wohldefiniert und heißt der **Erwartungswert von X bzgl. P**
- $\mathfrak{L}^1(P) := \{X : \Omega \mapsto \mathbb{R} | E_p(|X|) < \infty\} = \mathfrak{L}^1$ bezeichnet die **Menge aller ZVs X für die ein Erwartungswert bzgl. P existiert**

Satz: Rechenregeln für Erwartungswerte Für diskrete ZVs X,Y,$X_n, Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ in $\mathfrak{L}^1$ gilt:

1. **Monotonie:** Aus $X \leq Y$, d.h. $X(\omega) \leq Y(\Omega) \forall \omega \in \Omega$ folgt $E_p(X) \leq E_p(Y)$
2. **Linearität:** $\mathfrak{L}^1(P)$ ist ein reeller Vektorraum und $E_p : \mathfrak{L}^1 \to \mathbb{R}$ ist **linear**: $E_p(c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2) = c_1 \cdot E_p(X_1) + c_2 \cdot E_p(X_2)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
3. $\sigma-$**additivität:** Sind alle $X_n \geq 0$ und ist $X = \sum_{n \geq 1} X_n$ so gilt: $E_p(X) = \sum_{n \geq 1} E_p(X_n)$
4. **Monotone Konvergenz:** Wenn Y_n gegen Y und n gegen ∞ so folgt: $E_p(Y) = \lim_{n \to \infty} E_p(Y_n)$
5. **Produktregel:** Sind X,Y unabhängig so ist $X \cdot Y \in \mathfrak{L}^1(P)$ und es gilt: $E_p(X \cdot Y) = E_p(X) \cdot E_p(Y)$

Beweis: Rechenregeln für Erwartungswerte

1. **Monotonie:** $E_P(X) = \sum_{x \in X[\Omega]} x \cdot P(X = x) = \sum_{x \in X[\Omega], y \in Y[\Omega]} x \cdot P(X = x, Y = y) \leq \sum_{x \in X[\Omega], y \in Y[\Omega]} y \cdot P(X = x, Y = y) = \sum_{y \in X[\Omega]} y \cdot P(Y = y) = E_P(Y)$
2. **Linearität 1:** $E_P(c \cdot X_1) = \sum_{x \in [\Omega]} c \cdot x \cdot P(cX = cx) = \sum_{x \in [\Omega]} c \cdot x \cdot P(X = x) = c \cdot \sum_{x \in [\Omega]} x \cdot P(X = x) = c \cdot E_P(X)$ Außerdem $cX \in \mathcal{L}^1$
3. **Linearität 2:** ???

2.2 Reelle ZVs

Definition: Erwartungswert *gleicher Shit nur einmal approximiert und eimal mit Integral; Keine Aufgabe will das, also lasse ich es raus*

3 Varianz und Kovarianz

Definition: Varianz und Kovarianz Für X,Y $\in \mathfrak{L}^2(P)$ heißt:

- $V(X) = V_p(X) := E_p([X - E_p(X)]^2) = E_p(X^2) - E_p(X)^2$ die Varianz von X bzgl P
- $\sqrt{V(X)}$ die Standardabweichung von X bzgl. P
- $Cov_P(X,Y) := E_p([X - E_p(X)] \cdot [Y - E_p(Y)]) = E_p(XY) - E_p(X)E_p(Y)$ die Kovarianz von X und Y bzgl. P
- Ist $Cov_P(X,Y) = 0$ so ist X und Y unkorreliert
- Bei einer Gleichverteilung ist die Varianz gerade die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelpunkt
- Korrelation: $p(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ (-1 bis 1)

Satz: Rechenregeln für Varianz und Kovarianz Seien X,Y,$X_i \in \mathfrak{L}^2(P)$ und $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ Dann gilt:

1. $aX + b, cY + d$ liegen in $\mathfrak{L}^2(P)$ und $Cov_P(aX + b, cY + d) = ac \cdot Cov_P(X,Y)$. Insbesondere gilt: $V_P(aX + b) = a^2 V_P(X)$
2. $Cov_P(X,Y)^2 \leq V_P(X)V_P(Y)$ Cauchy Schwarz Ungleichung
3. To do
4. Sind X und Y unabhängig, so sind X und Y auch unkorreliert (Umkehrung muss nicht gelten!)

Beweis: Rechenregeln für Varianz und Kovarianz

1. $Cov_P(aX + b, cY + d) = E_P([aX + b] \cdot [cY + d]) - E_P(aX + b) \cdot E_P(cY + d) = a \cdot cE_P(XY) + a \cdot dE_P(X) + b \cdot cE_P(Y) + bd - (a \cdot E_P(X) + b) \cdot (c \cdot E_P(Y) + d) = a \cdot cCov_P(X,Y)$
2. $V_p(aX + b) = E([aX + b - E(aX + b)]^2) = E([aX + b - a \cdot E(X) + b]^2) = E([a \cdot (X - E(X))]^2) = a^2 \cdot V(X)$
3. Cauchy Schwarz Gleichung ist viel zu schwer zum beweisen
4. Viel Index geshifte, siehe Lösung
5. Produktregel von Erwartungswerten + zweite Def. von CoVarianz nutzen!