Kapitel 9: Steilkurs Statistik

Spartak Ehrlich
Stocha ist doof

1 Grundlagen

- Gehen andersherum an Zufallsexperimente an. D.h. wissen nichts über W-Maße, ermitteln diese empirisch (meistens wissen wir die Verteilung aber nicht P)
- z.B. N Orangen, davon f faule, und $g = N - f$ gute. N bekannt, f und g nicht. Wie soll der Empfänger n Stichproben schätzen?
- z.B. Werfen einer Reißzwecke (Oben oder Unten). Wie kann man p nach n-maligem Werfen abschätzen?
- $\Rightarrow$ Hauptaufgabe ist:
  - Parameterschätzung: W-Maß schätzen
  - Konfidenzbereiche: Man schätzt nicht W sondern ein Intervall, wo die Parameter höchst wahrscheinlich liegen
  - Testen von Hypothesen: Hier geht es um statistische Entscheidungsverfahren (z.B. Soll die Orangenlieferung akzeptiert werden oder nicht?)

2 Statistisches Modell

2.1 Definition: Statistisches Modell

Ein statistisches Modell ist ein Tripel $\mathcal{M} = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ bestehend aus:

- einem Stichprobenraum $\mathcal{X}$
- einer $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{X}$ und
- einer Familie $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ von W-Maßen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A}), |\Theta| \geq 2$

Statt Ω nutzen wir $\mathcal{X}$ als Stichprobenraum, da Ω die detaillierte Beschreibung und $\mathcal{X}$ die tatsächliche Beobachtung ist. Außerdem schreiben wir E_θ statt $E_{P\theta}$ und V_θ statt $V_{P\theta}$

2.2 Modellklassen

Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches Modell

- Ist $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ so heißt das statische Modell, parametrisches Modell (für $d = 1$ ein einparametrisches Modell)
- $\mathcal{M}$ heißt ein diskretes Modell, wenn $\mathcal{X}$ diskret ist, d.h. $|\mathcal{X}| \leq |\mathbb{N}|$ und $\mathcal{A} = 2^{\mathcal{X}}$ ist. Dann ist jedes P_θ durch die W-Funktion: $p_\theta : x \mapsto p_\theta(x) := P_\theta(\{x\})$
- M heißt ein stetiges Modell, wenn $\mathcal{X}$ eine Borel-Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, $\mathcal{A} = B^n_{\mathcal{X}}$, die auf $\mathcal{X}$ eingeschränkte Borel-σ-Algebra von $\mathbb{R}^n$ und jedes P_θ eine Dichtefunktion p_θ besitzt
- Ist $\mathcal{M}$ diskret oder stetig, so sprechen wir von $\mathcal{M}$ als ein Standardmodell

2.3 Produktmodelle

Oft werden statistische Modelle betrachtet, die die unabhängige Wiederholung von identischen Einzelexperimenten beschreiben. Das führt zu folgender Definition

Definition Ist $(E, \mathcal{E}, (Q_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und $n \geq 2$ so heißt:

- $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta}) := (E^n, \mathcal{E}^{\otimes n}, (Q_\theta^{\otimes n})_{\theta\in\Theta})$ das dazugehörige **n-fache Produktmodell**
- In dem Fall bezeichne $X_i : \mathcal{X} \to E$ die Projektion auf die i-te Koordinate. Diese Projektion beschreibt den Ausgang des i-ten Teilexperiments. Die $X_1, \ldots, X_n$ sind dann bzgl. jedes $P_\theta = Q_\theta^{\otimes n}$ unabhängig und identisch verteilt mit Verteilung Q_θ

2.4 Statistiken und Schätzer

Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und $(\Sigma, \mathcal{S})$ ein Messraum.

- Eine beliebige ZV S:$(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to (\Sigma, \mathcal{S})$ heißt eine Statistik
- Sei $\tau : \Theta \mapsto \Sigma$ eine Abbildung, die jedem $\theta \in \Theta$ eine Kenngröße $\tau(\theta) \in \Sigma$ zuordnet. Eine Statistik T:$\mathcal{X} \to \Sigma$ heißt dann ein Schätzer für τ (Oft ist $\tau = id_\Theta$; T heißt dann auch Schätzer für θ)

Bemerkung: Neue Namensgebung Statistik statt ZVs, Schätzer statt Statistik wegen neuer Interpretationen:

- **ZVs**: beschreibt unvorhersehbare Ergebnisse
- **Statistik**: ist eine vom Statistiker wohlkonstruierte Abbildung, die aus den Beobachtungsdaten Essentielles extrahiert.
- Statistiken gibt es viele, ein **Schätzer** ist zugeschnitten auf das Schätzen von τ

2.5 Maximum Likelihood Schätzer

Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches **Standardmodell**; dann ist jedes P_θ durch eine W-Funktion oder Dichte p_θ gekennzeichnet.

- **Idee:** Wird $x \in \mathcal{X}$ beobachtet, so bestimme den Schätzwert $T(x) \in \Theta$ so, dass:
- $p_{T(x)}(x) = max_{\theta\in\Theta} p_\theta(x)$
- Bemerkung: Da im stetigen Modell $P_\theta(\{x\})$ typischerweise gleich Null ist, sind wir zu Dichten übergegangen.

Definition: Die Funktion $p : \mathcal{X} \times \Theta \to [0, \infty)$ mit

- $p(x, \theta) := p_\theta(x)$ heißt die zugehörige **Likelihood-Funktion**
- $p(x, \dot{}) : \Theta \to [0, \infty)$ heißt die **Likelihood-Funktion zum Beobachtungswert** $x \in \mathcal{X}$

Definition: Ein Schätzer $T : \mathcal{X} \to \Theta$ für θ heißt **Maximum-Likelihood-Schätzer**, kurz MLE, wenn für jedes $x \in \mathcal{X}$ stets $T(x)$ eine Maximalstelle von $p(x, \dot{})$ ist,d.h:

- $p(x, T(x)) = max_{\theta\in\Theta} p_\theta(x)$
- **Bemerkung:** Zur MLE-Bestimmung ist es oft bequem mit dem **Log MLE** zuarbeiten $log p(x, \dot{})$, da wegen der Monotonie der Log Funktion diese dieselben Maximalstellen besitzt.

3 Bonus (glaube Def. ist falsch)

Def. Erwartungstreu + Konsistent

- **Erwartungstreu:** Falls der Schätzer den Erwartungswert Theta hat. D.h. $E_\theta(T) = \theta$
- **Konsistenz:** Wenn der Schätzer Erwartungstreu ist und zusätzlich die Varianz von T für n gegen unendlich gegen 0 geht: $Var_\theta(T) \rightarrow^{n \rightarrow \infty} 0$