Stochastik Aufgabenpool

SS 2020
SS 2021

September 15, 2021

Changelog v12:

- 3.10) c) align P_1 und P_2, d) min mit { schließen
- Abstrahiere `\mc{A}` zu `\A` für $\mathscr{A}$
- 2.18-2.19 korrigiert (nach Rückmeldung von Tutor).

Changelog v11:

- 2.9 Begründung angepasst.
- 3.8 korrigiert.
- 3.10 d) Schritt 1-3 korrigiert/hinzugefügt und Angemerkt das Schritt 4 Fehlt.
- 4.10 c), 4.12 verbessert.
- 4.22 (die neue) Lösung hinzugefügt.
- 5.6 korrigiert: Es lautet X \cup Y nicht X,Y und A und B werden laut Definition nicht benötigt.
- 5.8-5.9 Flüchtigkeitsfehler behoben. (so was wie hoch 2 statt hoch 3)
- 5.12 hinzugefügt.
- 5.14 korrigiert. Die Bedingung $B \in A$ wird nicht benötigt, es muss laut Skript nur $B \in \mathscr{A}$ aber das ist bereits durch die Aufgabenstellung gegeben
- 5.17 korrigiert. Da fehlte an zwei Stellen die Wahrscheinlichkeitsfunktion.
- 6.7-6.8 Lösung hinzugefügt.
- 6.20 korrigiert.
- 8.5, 8.6 Lösung hinzugefügt (es fehlen Graphiken).
- 9.7, 9.8 lösung hinzugefügt.
- Neue Commands zum Kommentieren und einfacher To-Do Anmerkung hinzugefügt.
- Neuer Command für Standard To-Do ”Diagramme hinzufügen” hinzugefügt.

Changelog v10:

- 7.Seminarraum fix: Ändere Mathmode in Text-Command von `\[\]` zu $ $
- Füge `custom-macros.sty` hinzu mit commands wie `\cov` oder `\wraum` zum einfacheren Setzen von häufig auftretenden Formulierungen

Changelog v9:

- clickable table of content
- 2.12 Zwischenschritte hinzugefügt.
- 4.19, 5.16, 5.19 Lösung hinzugefügt.
- 5.12 d) angepasst.
- 5.13 Aufgabenstellung korrigiert.
- 5.15 Korrigiert: P(B—A) statt P(A—B).
- 6.20 weitere Lösungen hinzugefügt.
- 6.20 Zweite Frage korrigiert: Laut Skript hat nicht jede diskrete Zufallsvariable ein Erwartungswert sondern nur wenn ihre Gewichtet Summe kleiner als Unendlich ist.

- 7.3 a), 7.5-7.8 Lösungen hinzugefügt.
- 8.7 Lösungen hinzugefügt (es fehlt Grafik und teil der Aufgabenstellung).
- Kapitel 9 Sortiert.
- (jetzige) 9.3 korrigiert.
- Kommentare zu 9.1 und 9.2 hinzugefügt.
- 8.8, 9.4, 9.9 Lösungen hinzugefügt.

Changelog v8:

- 9.1, 9.2, 9.5 Lösungen hinzugefügt
- 9.4 Lösung hinzugefügt.
- 8.4 Lösung hinzugefügt (es fehlt Grafik).
- 4.2 korrigiert: nach der Zusammenfassung 1¡=i¡=j¡=n+1 statt ¡=n.

Changelog v7:

- 7.1, 7.2 Lösungen hinzugefügt
- 6.2, 6.3 Lösung hinzugefügt.
- 2.9 c) Lösung hinzugefügt.

Changelog v6:

- 5.14 Lösungen hinzugefügt.
- 6.1, 6.4-6.6 Lösungen hinzugefügt

Changelog v5:

- 3.4, 3.10 Lösungen hinzugefügt
- 4.23, 4.24 Lösungen hinzugefügt
- 5.6-5.12, 5.15, 5.17, 5.18, 5.20-5.22 Lösungen hinzugefügt
- 4.12 b) korrigiert: Eingesetzt werden muss $\binom{9}{4}$, nicht $\binom{6}{4}$
- 4.16 b) korrigiert: $\Omega = [0:49]^3$, nicht $[0:6]^3$
- 4.20 ergänzt: alternative Begründung.

Changelog v4:

- 4.18, 5.1-5.5 Lösungen hinzugefügt
- 3.3 korrigiert: Bildmenge von X_2 ist $\{1,2,4\}$, nicht $[2:4]$
- 4.20 korrigiert: gesucht ist $P(X \leq 2)$, nicht $P(X = 2)$
- 4.25 korrigiert: Aussage 6 ist falsch, nicht richtig

Änderungen zwischen dem Aufgabenpool von 2020 zu dem von 2021:

- 4.11 (geändert) //TODO
- 4.12 (geändert) //TODO
- 4.13 (geändert) //TODO
- 4.22 andere Aufgabe
- 7.1-3 (findet man auf nem anderen Übungsblatt)
- 8.1-3 (findet man auf nem anderen Übungsblatt)
- 8.4 (gibts jetzt zweimal, die erste von den beiden ist neu)
- 9.4 (neu)
- 9.5 (ist die alte 4, dafür wurde die alte 5 gestrichen)
- 4.22 (geändert) //TODO
- 5.5 (gestrichen) //TODO
- 6.1-6 (findet man auf nem anderen Übungsblatt)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wahr oder Falsch: Welche der folgenden Aussagen gelten *nicht* immer?

a) Monte-Carlo-Algorithmen terminieren immer, liefern aber manchmal falsche Ergebnisse.
Wahr (gibt stets eine Antwort, aber nicht jede Antwort ist richtig).

b) Las-Vegas-Algorithmen liefern immer korrekte Ergebnisse, terminieren aber manchmal nicht.
Falsch(?). Laufzeit kann beliebig lang sein, aber nicht unendlich → Algorithmus terminiert

c) Las-Vegas-Algorithmen liefern immer korrekte Ergebnisse.
Wahr (gibt stets richtige Antwort oder informiert über Fehlschlag)

2 Wahrscheinlichkeitsräume

2.1 Wahrscheinlichkeitsraum vervollständigen

Betrachte den Ereignisraum

$$\Omega := \{r, g, b, a\},$$

das Mengensystem

$$\mathscr{M} := \{\{r, g\}, \{b\}\} \subseteq 2^{\Omega}$$

und die durch die folgenden Tabelle gegebene Abbildung $P_{\mathscr{M}} : \mathscr{M} \to [0, 1]$:

Ereignis $A \in \mathscr{M}$	Wahrscheinlichkeit $P_{\mathscr{M}}(A)$
$\{r, g\}$	$3/8$
$\{b\}$	$1/4$

T

a) Zeige, dass $\mathscr{M}$ keine σ-Algebra ist.
M ist keine σ-Algebra, da das sichere Ereignis Ω nicht zu M gehört $\to \Omega \notin M$

b) Gebe eine σ-Algebra $\mathscr{A}$ mit $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{A} \subseteq 2^{\Omega}$ an, die so wenig Ereignisse wie möglich enthält.
Wenn $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra ist, impliziert $A, B \in \mathscr{A}$ auch $A \cup B \in \mathscr{A}$, $A \cap B \in \mathscr{A}$, $A \setminus B \in \mathscr{A}$.
Weiterhin muss gelten, dass $\mathscr{A}$ unter abzählbar endlicher Komplementbildung abgeschlossen ist und $\emptyset \in \mathscr{A}$.
$\to \mathscr{A} = \{\emptyset, \{r, g, b, a\}, \{r, g\}, \{b\}, \{b, a\}, \{r, g, a\}, \{b, r, g\}, \{a\}\}$

c) Gebe ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$ an, so dass für alle $A \in \mathscr{M}$ gilt $P_{\mathscr{M}}(A) = P(A)$. Fertige dazu eine Tabelle ähnlich der obigen Tabelle an.
Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich mithilfe der bereits vorgegebenen errechnen

Ereignis $A \in \mathscr{A}$	Wahrscheinlichkeit $P(A)$
$\emptyset$	0
$\{r, g, b, a\}$	1
$\{r, g\}$	$3/8$
$\{b\}$	$1/4$
$\{b, a\}$	$5/8$
$\{r, g, a\}$	$3/4$
$\{b, r, g\}$	$5/8$
$\{a\}$	$3/8$

2.2 Würfelexperiment

Das Zufallsexperiment dieser Aufgabe besteht aus dem siebenmaligen Werfen eines sechsseitigen Würfels.

a) Beschreibe den zugehörigen Ergebnisraum Ω (unter Berücksichtigung der Reihenfolge).
$\Omega = (1:6)^7$
$\omega \in \Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_7)$

b) Beschreibe mengentheoretisch folgende Ereignisse:
A : jede Ziffer $1, 2, \ldots, 6$ kommt bei den sieben Würfen vor.
B : die Augensumme ist gerade.
$A = \{\omega \in \Omega \mid \{\omega_1, \ldots, \omega_7\} = [1:6]\}$

$B = \{\omega \in \Omega \mid (\sum_{i=1}^{7} \omega_i) \; mod \; 2 = 0\}$

c) Bestimme die Kardinalitäten von Ω, A und B.
$|\Omega| = 6^7 = 279.936$

$|A| = 6 * \binom{7}{2} * 5! = 15.120$
$\to$ damit jede Ziffer vorkommt, müssen 5 Zahlen 1x, eine Zahl (d) 2x gewürfelt werden

$\rightarrow$ 6 verschiedene Möglichkeiten für d
$\rightarrow$ d kann an $\binom{7}{2}$ Positionen stehen
$\rightarrow$ für die restlichen 5 Würfe gibt es 5! Möglichkeiten

$|B| = \frac{|\Omega|}{2} = 139.968$

2.3 Abzählbare Durchschnittsbildung

Es sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Zeige, dass $\mathscr{A}$ unter abzählbar unendlicher Durchschnittsbildung abgeschlossen ist.

Abgeschlossenheit unter abzählbar unendlicher Durchschnittsbildung bedeutet, dass jeder beliebige Durchschnitt von Elementen aus $\mathscr{A}$ selbst wieder in $\mathscr{A}$ liegt, also:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathscr{A}$$

Es sei $A_1, A_2, \dots$ eine abzählbar unendliche Folge von Ereignissen aus $\mathscr{A}$. Analog zum Beweis von (b) in Satz 1.2 ist

$$\bigcap_{i \geq 1} A_i = (\bigcup_{i \geq 1} A_i^c)^c \tag{\textit{Behauptung}}$$

Da $\mathscr{A}$ unter Komplementbildung abgeschlossen ist, liegen alle A_i^c in $\mathscr{A}$. Wegen der Abgeschlossenheit unter abzählbar unendlicher Vereinigungsbildung liegt dann auch die Vereinigung all dieser Komplemente wieder in $\mathscr{A}$, also

$$\bigcup_{i \geq 1} A_i^c \in \mathscr{A}.$$

Abschließend wenden wir erneut die Abgeschlossenheit unter Komplementbildung an, und es ergibt sich obige Behauptung, da wir gezeigt haben, dass der von uns erzeugte Durchschnitt wieder in $\mathscr{A}$ liegt. $\square$

2.4 Bonferroni-Ungleichung

Sei $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$. Beweise die Bonferroni-Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \leq j} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Hinweis: Nutze Induktion über $n \in \mathbb{N}$

Ungleichung in Worten: Die aufsummierten W'keiten einer Menge an Ereignissen minus der Summe der W'keiten des Durchschnitts derselben Ereignisse ist kleiner/gleich der W'keit der Vereinigung eben dieser Ereignisse.
Aus der Vorlesung nutzen wir

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1}$$

sowie

$$P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i \geq 1} P(A_i) \tag{2}$$

Induktionsanfang:
n = 1 , trivial $P(A_1) - 0 \leq P(A_1)$
n = 2 , ergibt sich aus (1) (mit $A_1 = A$, $A_2 = B$)

Induktionsschritt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)$$

// Einsetzen der Induktionsvorraussetzung

$$\overset{\text{IV}}{\geq} \left[\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} P(A_i \cap A_j)\right] + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)$$

// Nutzung der Abschätzung (2), Klammern können weggelassen werden

$$\overset{\text{rA}}{\geq} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} P(A_i \cap A_j) + P(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_{n+1})$$

// Zusammenfassen

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n+1} P(A_i \cap A_j)$$

2.5 Zähldichte

Sei Ω höchstens abzählbar unendlich und sei $p : \Omega \to [0,1]$ eine Zähldichte, d.h. $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$.
Sei $\mathscr{G} := \{\{\omega\} \mid \omega \in \Omega\} \subset 2^\Omega$.

a) Gebe die kleinste σ-Algebra $\mathscr{A} := \sigma(\mathscr{G})$ mit $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{A} \subseteq 2^\Omega$ an und beweise, dass es keine kleinere geben kann.
Zur Erinnerung: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$. Aus der Definition von $\mathscr{G}$ folgt, dass es jedes $\omega \in \Omega$ enthält.
Sei $A \subseteq \Omega$ beliebig, dann gilt

$$A = \bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}$$

Da für alle $\omega \in \Omega$ gelten muss $\{\omega\} \in \mathscr{G} \subseteq A$, und $\mathscr{A}$ als σ-Algebra unter abzählbar unendlicher Vereinigung abgeschlossen ist, folgt $A \in \mathscr{A}$. Da A beliebig gewählt wurde folgt $\mathscr{A} \supseteq \{B \subseteq \Omega\} = 2^\Omega$. Offensichtlich ist 2^Ω unter allen mengentheorethischen Operationen abgeschlossen und somit eine σ-Algebra. Es folgt $\mathscr{A} = 2^\Omega$. //TO-DO: genauer erklären

b) Gebe ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ mit $P(\{\omega\}) = p(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und beweise, dass dieses Maß eindeutig bestimmt ist.
Wir definieren:

$$P : \mathscr{A} \to [0,1]$$
$$A \mapsto \sum_{\omega\in A} p(\omega)$$

Offensichtlich erfüllt diese Abbildung $P(\{\omega\}) = p(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Außerdem gilt

$$P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$$

Für paarweise disjunkte (A_i) mit $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathscr{A}$ gilt

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{\omega\in\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i} P(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega\in A_i} P(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(sollte erwähnt werden, da ein Wahrscheinlichkeitsmaß das Kriterium der σ-Additivität erfüllen muss)
Somit ist P das gesuchte Wahrscheinlichkeitsmaß. Weiterhin ist P eindeutig, denn für $A \in \mathscr{A} = 2^\Omega$ muss gelten

$$P(A) = P\left(\bigsqcup_{\omega\in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$$

c) Ein Würfel ist gezinkt. Die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen sind gegeben durch die Zähldichte $p : \{1,\dots,6\} \to [0,1]$ mit

$$p(1) = p(2) = \frac{3}{10} \text{ und } p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{10}$$

Beschreibe einen einzelnen Wurf durch einen Wahrscheinlichkeitsraum und berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $A = \{1,2\}$ und $B = \{1,6\}$.
Wir definieren $\Omega := \{1,\dots,6\}$, $\mathscr{A} = 2^{\Omega}$, P entsprechend der angegebenen Wahrscheinlichkeiten, dann ist $(\Omega,\mathscr{A},P)$ der gesuchte Wahrscheinlichkeitsraum. So ergibt sich:

$$P(A) = p(1) + p(2) = \frac{6}{10}$$
$$P(B) = p(1) + p(6) = \frac{4}{10}$$

2.6 Wahrscheinlichkeitssimplex

In dieser Aufgabe sollst du zeigen, dass die Gesamtheit aller Wahrscheinlichkeitsmaße abgeschlossen unter endlichen Konvexkombinationen ist. Dazu seien $(\Omega,\mathscr{A},P_1)$ und $(\Omega,\mathscr{A},P_2)$ Wahrscheinlichkeitsräume auf der gleichen Ereignis-Algebra und $\alpha \in [0,1]$. Zeige, dass

$$(\Omega,\mathscr{A},\alpha * P_1 + (1-\alpha) * P_2)$$

ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsraum ist. Dabei ist für alle $A \in \mathscr{A}$

$$(\alpha * P_1 + (1-\alpha) * P_2)(A) := \alpha * P_1(A) + (1-\alpha) * P_2(A)$$

Hinweis: Verifiziere, dass alle Eigenschaften aus der Definition von Wahrscheinlichkeitsmaßen gelten.

Normierung: Es soll gelten $P(\Omega) = 1$
Ergibt sich aus

$$(\alpha * P_1 + (1-\alpha) * P_2)(\Omega) := \alpha * P_1(\Omega) + (1-\alpha) * P_2(\Omega) = \alpha * 1 + (1-\alpha) * 1 = 1$$

σ-Additivität: Es soll für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}$ gelten

$$P\left(\bigsqcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(A_i).$$

Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Ereignisse in $\mathscr{A}$. Die σ-Additivität ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
(\alpha * P_1 + (1-\alpha) * P_2)\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &= \alpha * P_1\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) + (1-\alpha) * P_2\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \\
&= \alpha * \sum_{i\geq 1} P_1(A_i) + (1-\alpha) \sum_{i\geq 1} P_2(A_i) \\
&= \sum_{i\geq 1} \alpha * P_1(A_i) + (1-\alpha) * P_2(A_i) \\
&= \sum_{i\geq 1} (\alpha * P_1 + (1-\alpha) * P_2)(A_i)
\end{aligned}$$

2.7 Cantor-Staub

Wir betrachten das Intervall $A_0 := [0,1]$ und das Lebesgue-Maß λ^1 darauf. Ein Intervall $[a,b]$ mit $a,b \in [a,b]$ und $a \leq b$ hat also Maß $\lambda^1([a,b]) = b - a$.

Nun verändern wir A_0 indem wir das mittlere Drittel entfernen. Wir machen also aus A_0 nun $A_1 := [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$. Diesen Vorgang setzen wir rekursiv fort. In jedem Schritt entfernen wir aus jedem verbleibenden Intervall das mittlere Drittel und erhalten z.B.

$$A_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1].$$

Es ergibt sich eine unendliche Folge $A_0, A_1, A_2, \ldots$ mit $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$. Sei $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

Bemerkung: Die Menge C nennt man Cantor-Staub. Sie ist ein Musterbeispiel für eine überabzählbare Nullmenge, also eine Menge mit Maß null.

a) Zeige, dass C mindestens so viele Elemente hat wie die Menge unendlicher Binärstrings $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
Bemerkung: Gemäß Satz 1.1 in Foliensatz 2 folgt daraus, dass C überabzählbar unendlich ist.

$$\omega_n := \sum_{n=1}^{n} \left(b_n * \frac{2}{3^n} \right)$$

Wir nutzen das Wurzelkriterium, welches besagt, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$$

Demnach konvergiert die obige Reihe für $n \to \infty$, denn

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n * \frac{2}{3^n}} \\
&\textit{// möglich, da } b_n \textit{ nur } 1 \textit{ oder } 0 \textit{ sein kann} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{3} \leq \frac{2}{3} \leq 1
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass $\omega_n \in A_n$ gilt, denn nach Konstruktion ist ω_n gerade der linke Endpunkt von einem der Intervalle in A_n. Betrachte den Grenzwert

$$\omega_\infty = \lim_{n\to\infty} \omega_n$$

Da jedes A_n kompakt[1] ist und aufgrund der Monotonie $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ muss gelten $\omega_\infty \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $\omega_\infty \in C$.

b) Zeige, dass $\lambda^1(C) = 0$ ist.
Hinweis: Berechne zunächst $\lambda^1(A_n)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Betrachte dann den Grenzwert.
Um das Maß von A_n zu berechnen, müssen wir die Längen der einzelnen Intervalle in A_n aufsummieren:

$$\lambda(A_n) = 2^n * \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Für $n \to \infty$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Durch die σ-Stetigkeit[2] folgt nun aus $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$

$$\lambda(C) = 0$$

2.8 Party

Drei Informatiker a, b und c sind zu einer Party eingeladen. Sie wissen, dass sie gemeinsam an einem runden Tisch mit 8 Plätzen sitzen werden, wobei der Gastgeber die Tischkarten rein zufällig auf die 8 Plätze verteilen wird. Wie wahrscheinlich ist es, dass a, b und c nebeneinander sitzen?

[1] Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn es zu jeder Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung gibt, siehe z.B. https://www.youtube.com/watch?v=1qqp8XoGL-k

[2] siehe Skript 2, Seite 18/32

a) Beschreibe den W-Raum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
$\Omega = S_8 = \mathrm{Sym}([0:7]) = \{\pi | \pi \text{ ist Permutation von } [0:7]\}$,
$\mathscr{A} = 2^\Omega$,
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

b) Beschreibe das Ereignis A, dass a, b und c nebeneinander sitzen.
$A = \{\pi \in S_8 \mid \exists i \in [0:7] : \{\pi(0), \pi(1), \pi(2)\} = \{i, i+1 \mod 8, i+2 \mod 8\}\}$

c) Bestimme $|\Omega|$, $|A|$ und $P(A)$.
$|\Omega| = 8!$
$|A| = 8 * 3! * 5!$
$\rightarrow$ 8 Möglichkeiten für i, 3! bzw. 5! da Reihenfolge von $\pi(0), \pi(1), \pi(2)$ bzw. Restpermutation irrelevant
$P(A) = \frac{8*3!*5!}{8!} = \frac{1}{7}$

2.9 Wahrscheinlichkeitsräume #1

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Seien $A, B \in \mathscr{A}$ beliebige Ereignisse. Definieren Sie den Begriff der Monotonie von W-Maßen.
Die Monotonie ist definiert als:

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

b) Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ beliebige Ereignisse. Definieren Sie den Begriff der σ-Subadditivität von W-Maßen.
Die σ-Subadditivität ist definiert als:

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

c) Seien $C, D \in \mathscr{A}$ zwei fast sichere Ereignisse: $P(C) = P(D) = 1$. Zeigen Sie, dass auch $C \cap D$ ein fast sicheres Ereignis ist.

$$\begin{aligned}
&\text{Vorrechnung :} \\
&\qquad \text{Monotonie und } C \subseteq C \cup D \\
&\qquad \Rightarrow P(C \cup D) \geq P(C) \\
&\qquad P(\Omega) \geq P(C \cup D) \geq P(C) \\
&\qquad \iff 1 \geq P(C \cup D) \geq 1 \\
&\qquad \iff 1 = P(C \cup D) \\
&\text{Laut Kapitel 2 Satz 1.4 (2) ist :} \\
&\qquad P(C \cup D) + P(C \cap D) = P(C) + P(D) \\
&\qquad \Rightarrow P(C \cup D) + P(C \cap D) = 1 + 1 \\
&\qquad \Rightarrow 1 + P(C \cap D) = 1 + 1 \\
&\qquad \Rightarrow P(C \cap D) = 1
\end{aligned}$$

2.10 Wahrscheinlichkeitsräume #2

Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums inklusive aller vorkommenden Begriffe.
Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist als Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ definiert, wobei

- Ω eine Menge ist, die die relevanten Ergebnisse eines Zufallsexperiments zusammenfasst, sie wird **Ergebnisraum** oder **Stichprobenraum** genannt.
- $\mathscr{A}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von Ω ist ($\mathscr{A} \subseteq 2^\Omega$), sie wird **Ereignissystem** genannt.

- P den Grad der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \in \mathscr{A}$ bewertet, also eine Funktion der Form $P : \mathscr{A} \to [0,1]$. Sie wird **Wahrscheinlichkeitsmaß** oder -**verteilung** genannt, wenn sie die Eigenschaften der Normierung und σ-Additivität erfüllt.

Das Tupel $(\Omega, \mathscr{A})$ wird weiterhin als **Messraum** oder **Ereignisraum** bezeichnet.

2.11 σ-Stetigkeit

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein W-Raum.

a) Definieren Sie den Begriff der σ-Stetigkeit (es genügt der aufsteigende Fall).
Wenn $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ und $A = \cup_{i \geq 1} A_i$ (aufsteigender Fall) bzw. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und $A = \cap_{i \geq 1} A_i$ (absteigender Fall), so gilt:

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$$

b) Beweisen Sie die σ-Stetigkeit für W-Maße.
Sei $A_0 := \emptyset$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{n} B_m \text{ und } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Die Folge $B_1, B_2, \dots$ ist disjunkt, denn für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ gilt

$$B_n \cap B_m = (A_n \setminus A_{n-1}) \cap (A_m \setminus A_{m-1}) \subseteq A_n \setminus A_{m-1} \subseteq A_n \setminus A_{n+1} = \emptyset$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} P(A_n) &= \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{n} B_m\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n} P(B_m) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P(A)
\end{aligned}$$

2.12 Wahrscheinlichkeitsräume #3

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein W-Raum. Ferner seien $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{A}$.

a) Zeigen Sie: Aus $A \subseteq B$ folgt $P(A) \leq P(B)$ (Monotonie)
Aus $A \subseteq B$ folgt wegen der Eigenschaft

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

sowie der Nichtnegativität von Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P\big(A \sqcup (B \setminus A)\big) \\
&= P(A) + P(B \setminus A) - P(A \cap (A \setminus B)) \\
&= P(A) + P(B \setminus A) \\
&\geq P(A)
\end{aligned}$$

$P(B) = P\big(A \sqcup (B \setminus A)\big)$ kann auch gezeigt werden durch:

$$\begin{aligned}
B &= B \\
&= (A \cap \bar{A}) \cup B \\
&= A \sqcup (\bar{A} \cap B)
\end{aligned}$$

da $A \subseteq B$

b) Zeigen Sie:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (\sigma\text{-Subadditivität})$$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) &= P\left(\bigsqcup_{i\geq 1} (A_i \setminus \cup_{j<i} A_j)\right) \\ &= \sum_{i\geq 1} P\big(A_i \setminus \cup_{j<i} A_j\big) \\ &\leq \sum_{i\geq 1} P(A_i) \end{aligned}$$

2.13 σ-Algebren #1

a) Definieren sie den Begriff der σ-Algebra über einer nichtleeren Menge Ω.
Ein System von Teilmengen $\mathscr{A}$ von Ω heißt σ-Algebra über Ω, wenn gilt:

(a) Das sichere Ereignis gehört zu Ω: $\Omega \in \mathscr{A}$

(b) Das Gegenereignis eines Ereignisses aus $\mathscr{A}$ gehört wieder zu $\mathscr{A}$:

$$A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$$

(c) $\mathscr{A}$ ist unter abzählbar unendlicher Vereinigungsbildung abgeschlossen:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathscr{A}$$

b) Zeigen Sie: Die Gesamtheit aller σ-Algebren über Ω ist unter Durchschnittsbildung abgeschlossen, d.h. ist $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren über Ω, so ist auch $\bigcap_{i\in I}(A_i)$ eine σ-Algebra über Ω.
Wir zeigen einfach, dass die obigen Eigenschaften für das Mengensystem $\mathscr{A} := \bigcap_{i\in I}(A_i)$ ebenfalls gelten:

(a) Da Ω in allen $\mathscr{A}_i$ liegt, gilt auch $\Omega \in \mathscr{A}$

(b) Liegt A in $\mathscr{A}$, so muss A auch in allen $\mathscr{A}_i$ enthalten sein. Da jedes dieser $\mathscr{A}_i$ eine σ-Algebra ist und damit unter Komplementbildung abgeschlossen ist, enthalten sie alle auch A^c. Somit gilt $A^c \in \mathscr{A}_i$.

(c) Liegen $A_1, A_2, \dots$ in $\mathscr{A}$, so muss auch $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}_i$ für alle i gelten. Da jedes dieser $\mathscr{A}_i$ unter abzählbar unendlicher Vereinigungsbildung abgeschlossen ist, gilt $\bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathscr{A}_i$ für alle i und somit auch $\bigcup\limits_{j\geq 1} A_j \in \mathscr{A}$.

c) Geben sie die kleinste und größte σ-Algebra über Ω konkret an.
Die kleinste σ-Algebra über Ω ist $\{\emptyset, \Omega\}$,
die größte σ-Algebra über Ω ist 2^{Ω}.

2.14 σ-Algebren #2

Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Ω.

a) Wie heißt das Paar $(\Omega, \mathscr{A})$?
Das Paar $(\Omega, \mathscr{A})$ wird Messraum genannt, die Elemente $A \in \mathscr{A}$ auch messbare Ereignisse.

b) Zeigen Sie: $\emptyset \in \mathscr{A}$
Da $\mathscr{A}$ das sichere Ereignis Ω enthalten und unter Komplementbildung abgeschlossen sein muss, folgt:

$$\Omega \in \mathscr{A} \Rightarrow \Omega^c \in \mathscr{A} \Rightarrow \emptyset \in \mathscr{A}$$

c) Zeigen Sie: $A, B \in \mathscr{A}$ impliziert $A \cup B \in \mathscr{A}$, $A \cap B \in \mathscr{A}$ und $A \setminus B \in \mathscr{A}$

$$A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots \in \mathscr{A}$$
$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathscr{A}$$
$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathscr{A}$$

2.15 Borel

Definieren Sie den Begriff der Borelschen σ-Algebra und der Borel-Menge.
Aus dem Skript:
Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathscr{G} := \{\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] : a_i, b_i \in \mathbb{Q} \wedge a_i < b_i\}$ das System aller achsenparallelen kompakten Quader in $\mathscr{R}^n$ mit rationalen Endpunkten. Dann heißt

$$\mathscr{B}^n := \sigma(\mathscr{G})$$

die **Borelsche σ-Algebra** auf $\mathbb{R}^n$ und jedes $A \in \mathscr{B}^n$ heißt eine **Borel-Menge** (auch borelsche Menge genannt).

2.16 Wahrscheinlichkeitsfunktion/-dichte

a) Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion.
Sei Ω eine höchstens abzählbar unendliche Menge. Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, auch Zähldichte oder Wahrscheinlichkeitsvektor, ist definiert als

$$p : \Omega \to [0,1] \text{ mit } \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

Dabei ist zu beachten, dass Wahrscheinlichkeitsfunktionen nur auf diskreten Grundräumen verwendet werden.

b) Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsdichte.
Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ borelsch, so bestimmt jede Funktion $\rho : \Omega \to [0, \infty)$ mit

$$\{x \in \Omega \mid \rho(x) \leq c\} \in \mathscr{B}^n_\Omega \text{ für alle } c > 0$$ //TO-DO: warum das hier?

sowie

$$\int_\Omega \rho(x)dx = 1$$

genau ein W-Maß P auf $(\Omega, \mathscr{B}^n_\Omega)$ vermöge[3]

$$P(A) = \int_A \rho(x)dx \text{ für } A \in \mathscr{B}^n_\Omega$$

Dabei ist zu beachten, dass Wahrscheinlichkeitsdichten nur auf stetigen Grundräumen verwendet werden.

2.17 Wahr oder Falsch #1

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}$ beliebige Ereignisse. Kreuzen sie die Aussagen an, die *falsch* sein können.

☐ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
Immer richtig, Monotonie von W-Maßen

■ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Kann falsch sein

☐ $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
Immer richtig, Eigenschaft von W-Maßen

☐ $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{i \geq 1} P(A_i)$
Immer richtig, σ-Subadditivität von W-Maßen

[3] eine etwas merkwürdige Schreibweise für "mittels"

- ■ $P(A) = P(B) = 1 \Rightarrow A = B$
  Kann falsch sein, fast sichere Ereignisse müssen nicht zwingend gleich sein
- ☐ $P(A \cup B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(B)$
  Immer richtig
- ☐ $P(A \cup B) = P(A) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$
  Immer richtig
- ☐ $P\big(B \cup (\bigcup A_i)\big) = P(B) \Rightarrow P(B) \geq P(A_i)$
  Immer richtig

2.18 Wahr oder Falsch #2

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $A, B \in \mathscr{A}$, wobei $A \neq \emptyset$, sei $C \subseteq \Omega$ und sei $A_1, A_2, \dots$ eine Folge von Mengen in $\mathscr{A}$. Kreuzen Sie die Aussagen an, die *falsch* sein können.

- ☐ $A^c \cup B \in \mathscr{A}$ und $A \cap B^c \in \mathscr{A}$
  Immer richtig, folgt direkt aus den Eigenschaften einer σ-Algebra.
- ☐ $C^c \cup C \in \mathscr{A}$ und $C^c \cap C \in \mathscr{A}$
  Immer richtig, entspricht $\Omega \in \mathscr{A}$ bzw. $\emptyset \in \mathscr{A}$.
- ■ $A \cup C \in \mathscr{A}$
  Kann falsch sein, da C nicht zwingend in $\mathscr{A}$ enthalten sein muss.
- ☐ $B \cap \big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big) \in \mathscr{A}$
  Immer richtig, folgt direkt aus den Eigenschaften einer σ-Algebra.
- ☐ $(\Omega, 2^{\Omega})$ ist ein Ereignisraum.
  Immer richtig, folgt aus der Definition im Skript.
- ☐ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$
  Immer richtig, da $\mathscr{A}$ unter abzählbar unendlicher Durchschnittsbildung abgeschlossen ist.
- ☐ $\emptyset \in \mathscr{A}, \Omega \setminus A \in \mathscr{A}$ und $\Omega \in \mathscr{A}$
  Immer richtig, folgt direkt aus den Eigenschaften einer σ-Algebra.
- ■ $C^c \in \mathscr{A}$
  Kann falsch sein, da C bzw. C^c nicht zwingend in $\mathscr{A}$ enthalten sein muss.
- ☐ $A \cup B \in \mathscr{A}$
  Immer richtig, folgt direkt aus den Eigenschaften einer σ-Algebra.
- ■ $\big(A, \{A \cup D \mid D \in \mathscr{A}\}\big)$ ist ein Ereignisraum.
  Falsch, da in dem so definierten Ereignissystem die Menge A (wegen $A \cup \emptyset$) enthalten ist, aber A^c nicht enthalten sein kann, wodurch das Mengensystem keine σ-Algebra ist. //TO-DO: check
- ☐ $\big(C, \{C \cap D \mid D \in \mathscr{A}\}\big)$ ist ein Ereignisraum.
  Falsch, Doch ist immer richtig und C Kompliment muss enthalten sein.
- ☐ Wenn $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkt sind, gilt $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big)$.
  Immer richtig.
- ☐ Wenn A und B fast sichere Ereignisse, gilt $P(A \cap B) = P(A \cup B) = 1$
  Immer richtig.
- ☐ $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \geq P\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big)$
  Immer richtig.
- ■ $\min_i P(A_i) > P\big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big)$
  Kann falsch sein, falls $A_1 = A_2 = \dots$ gilt.

- ■ $A \cap C \in \mathscr{A}$
  Kann falsch sein, da C nicht zwingend in $\mathscr{A}$ enthalten sein muss.
- ☐ $(\Omega, \{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\})$ ist ein Ereignisraum.
  Immer richtig, erfüllt alle geforderten Eigenschaften.
- ☐ $(A, \{A \cap D \mid D \in \mathscr{A}\})$ ist ein Ereignisraum.
  Immer richtig. //TO-DO: check
- ■ $(A \cup B) \cap C \in \mathscr{A}$
  Kann falsch sein, analog zu $A \cap C \in \mathscr{A}$.
- ☐ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  Immer richtig.
- ■ $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \leq P\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big)$
  Kann falsch sein.
- ☐ Wenn $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt sind, gilt $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big)$.
  Immer richtig.
- ☐ Wenn $A \subseteq B$ gilt, gilt auch $P(A) \leq P(B)$.
  Immer richtig.

2.19 Wahr oder Falsch #3

Tragen Sie für jede wahre Aussage ein W ein, für jede falsche ein F.

- $\boxed{W}$ $\Big(\{0,1\},\ \{\{0\},\{1\},\{0,1\}\}\Big)$ ist *kein* Ereignisraum.
  Wahr, da $\emptyset$ fehlt.
- $\boxed{F}$ $\Big(\mathbb{R},\ \{(-\infty, c] \mid c \in \mathbb{R}\}\Big)$ ist ein Ereignisraum.
  Falsch, da die Endpunkte der achsenparallelen Quader rational sein müssen.
- $\boxed{W}$ $(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\Omega = \{p = \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl }\}$, $\mathscr{A} = 2^{\Omega}$ ist ein gültiger Ereignisraum.
  Wahr, entspricht der Definition.
- $\boxed{W}$ $(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{A} = \big\{\emptyset, \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl}\}, \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist keine Primzahl}\}, \mathbb{N}\big\}$ ist ein gültiger Ereignisraum.
  Wahr, entspricht der Definition.
- $\boxed{F}$ $(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\Omega = [0;1]$, $\mathscr{A} = \big\{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R},\ 0 \leq a < b \leq 1\big\}$ ist ein gültiger Ereignisraum.
  Falsch, da $\emptyset$ fehlt.
- $\boxed{W}$ $(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\Omega = [0;1]$, $\mathscr{A} = \sigma\Big(\{[\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}] \mid k \in \mathbb{N}\}\Big)$ ist ein gültiger Ereignisraum.
  Wahr, da die σ-Algebra entsprechend erzeugt wird.
- $\boxed{F}$ Die Potenzmenge von $\mathbb{R}$ ist eine σ-Algebra.
  Im Allgemeinen falsch, da nicht angegeben wurde, worüber dieses Mengensystem definiert ist (über $\mathbb{N}$ wäre es beispielsweise keine σ-Algebra).
- $\boxed{F}$ Die Potenzmenge einer nichtleeren Menge Ω ist stets eine σ-Algebra.
  Falsch gilt nur wenn Ω abzählbar unendlich .
- $\boxed{F}$ Das System aller σ-Algebren über einer Menge Ω ist bezüglich Mengeninklusion totalgeordnet, d.h. sind $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ σ-Algebren über Ω, so ist $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ oder $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$.
  Falsch, es ist halbgeordnet.

3 Zufallsvariablen

3.1 Sparversion der Messbarkeitsbedingung

Seien $(\Omega, \mathscr{A})$ und $(\Omega', \mathscr{A}')$ Messräume und sei $X : \Omega \to \Omega'$. Sei $\mathscr{G}' \subseteq 2^{\Omega'}$ ein Mengensystem, das die σ-Algebra erzeugt, d.h. $\sigma(\mathscr{G}') = \mathscr{A}'$. Zeige, dass $X(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$-messbar ist, wenn gilt

$$\forall A' \in \mathscr{G}' : X^{-1}[A'] \in \mathscr{A}$$

Zu zeigen ist

$$\forall A' \in \mathscr{A}' : X^{-1}[A'] \in \mathscr{A}$$

Wir definieren das Mengensystem

$$\mathscr{H}' := \{A' \subseteq \Omega' \mid X^{-1}[A'] \in \mathscr{A}\}$$

also eine Menge, die wiederum alle Mengen aus Ω' enthält, deren Urbilder in $\mathscr{A}$ liegen (oder auch: das Bild von X), wir wollen zeigen, dass es sich dabei um eine σ-Algebra handelt. Die Behauptung ist dann äquivalent zu $\mathscr{H}' \subseteq \mathscr{A}'$ und wir wissen, dass $\mathscr{G}' \subseteq \mathscr{H}'$, d.h. wenn $\mathscr{H}'$ eine σ-Algebra ist folgt

$$\mathscr{A}' = \sigma(\mathscr{G}') \subseteq \mathscr{H}'$$

Gezeigt werden müssen die drei Eigenschaften einer σ-Algebra[4]

(a) **Das sichere Ereignis gehört zu $\mathscr{H}'$: $\Omega' \in \mathscr{H}'$**
Es gilt $X^{-1}[\Omega'] \in \mathscr{A}' = \Omega \in \mathscr{A}$ (folgt aus der Definition von $\mathscr{H}'$ und unserer Bedingung)

(b) **Abschluss unter Komplementbildung:** Sei $A' \in \mathscr{H}'$. Dann gilt für das Komplement

$$X^{-1}[A'^C] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \notin A'\} = (X^{-1}[A'])^C \in \mathscr{A}$$

denn $\mathscr{A}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung, somit ist auch $A'^C \in \mathscr{H}'$.

(c) **Abschluss unter abzählbar unendlicher Vereinigung:** Sei $A'_1, A'_2, \dots \in \mathscr{H}$. Dann ist

$$X^{-1}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right] = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in \mathbb{N} X(\omega) \in A'_i\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}[A'_i] \in \mathscr{A}$$

denn $\mathscr{A}$ ist abgeschlossen unter abzählbar unendlicher Vereinigung. Somit ist auch

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i \in \mathscr{H}'$$

3.2 Augenzahlen sortieren

Ein fairer, sechsseitiger Würfel werde dreimal geworfen. Y sei die Zufallsvariable, die einem Tripel gewürfelter Augenzahlen das schwach monotom steigende Tripel zuordnet (z.B. $Y(5,2,5) = (2,5,5)$).

a) Beschreibe Y konkret als Abbildung $Y : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega', \mathscr{A}')$.
$\Omega = [1:6]^3$, $\mathscr{A} = 2^{\Omega}$, $P =$ Gleichverteilung
$\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3\}$, $\mathscr{A}' = 2^{\Omega}$, $P = ?$

$$Y : (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto (\min\ \omega_i,\ \text{Rest}, \max\ \omega_i) \text{ mit } i \in \mathbb{N}, i \leq 3$$

[4] siehe Skript 2, Seite 11/32

b) Bestimme die Verteilung von Y.
Hinweis: Betrachte die Anzahl unterschiedlicher Augenzahlen.
Wir teilen die Ergebnismenge anhand der Anzahl verschiedener Augenzahlen auf:

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(a,a,a) \in \Omega \mid a \in [1:6]\} \\
\Omega_2 &= \{(a,a,b) \in \Omega \mid a,b \in [1:6], a<b\} \\
&\quad \cup \{(a,b,b) \in \Omega \mid a,b \in [1:6], a<b\} \\
\Omega_3 &= \{(a,b,c) \in \Omega \mid a,b,c \in [1:6], a<b<c\}
\end{aligned}
$$

Anschließend betrachten wir die Kardinalität des jeweiligen Urbildes:

$$
\begin{aligned}
\left|Y_{-1}[(a,a,a)]\right| &= 1 \\
\left|Y_{-1}[(a,a,b)]\right| &= \left|Y_{-1}[(a,b,b)]\right| = 3 \\
\left|Y_{-1}[(a,b,c)]\right| &= 6
\end{aligned}
$$

Beispielsweise ist das Urbild von $(1,1,6)$ die Menge $\{(1,1,6),(1,6,1),(6,1,1)\}$.
Es gilt $|\Omega| = 6^3 = 216$. Es folgt:

$$
P_Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{für } \omega \in \Omega_1' \\ \frac{5}{36} & \text{für } \omega \in \Omega_2' \\ \frac{30}{36} & \text{für } \omega \in \Omega_3' \end{cases}
$$

3.3 Randverteilung

a) Zwei Würfel, auf deren Seiten jeweils drei Einsen und drei Zweien sind, werden geworfen. Es bezeichne X_1 die Augensumme und X_2 das Augenprodukt eines Würfelwurfes mit beiden Würfeln. Bestimme die Zähldichte p_X für die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2.
Zur Erinnerung: Die Zähldichte $p_X(y)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert y annimmt.
Wir können die Würfel wie Münzen behandeln (mit möglichen Ergebnissen aus $\{1,2\}$ statt $\{0,1\}$). Wir definieren:

$$
\begin{aligned}
X_1 : &\{1,2\}^2 \to [2:4] \\
&(\omega_1,\omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2 \text{ // \textit{Syntax richtig?}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_2 : &\{1,2\}^2 \to \{1,2,4\} \\
&(\omega_1,\omega_2) \mapsto \omega_1 * \omega_2 \text{ // \textit{Syntax richtig?}}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
X_1(1,1) &= 2 & X_2(1,1) &= 1 \\
X_1(1,2) &= 3 & X_2(1,2) &= 2 \\
X_1(2,1) &= 3 & X_2(2,1) &= 2 \\
X_1(2,2) &= 4 & X_2(2,2) &= 4
\end{aligned}
$$

und damit

$$
p_X = [2:4]x[1:4] \to [0,1]
$$

X_1 \ X_2	1	2	4
2	$\frac{1}{4}$	0	0
3	0	$\frac{2}{4}$	0
4	0	0	$\frac{1}{4}$

b) Gegeben sei folgende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion q_Y der Zufallsvariablen Y_1 und Y_2:

$$q_Y = \begin{cases} 0,2 & \text{falls } y_1 = 1, y_2 = 1, \\ 0,3 & \text{falls } y_1 = 2, y_2 = 1, \\ 0,45 & \text{falls } y_1 = 1, y_2 = 2, \\ 0,05 & \text{falls } y_1 = 2, y_2 = 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Randverteilung von Y_1 und Y_2.

y_1 \ y_2	1	2	Σ
1	0,2	0,45	0,65
2	0,3	0,05	0,35
Σ	0,5	0,5	1

3.4 Wahrscheinlichkeitsmaße

Sei $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega', \mathscr{A}')$ eine Zufallsvariable und P ein W-Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$. Zeigen Sie:

$$P'(A') := P\big(X^{-1}[A']\big) = P\big(\{X \in A'\}\big) =: P(X \in A') \text{ für } A' \in \mathscr{A}'$$

ist ein W-Maß P' auf $(\Omega', \mathscr{A}')$.
P' ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega', \mathscr{A}')$, wenn gilt

- Normierung: $P'(\Omega') = 1$
- σ-Additivität: Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A}'$ gilt

$$P\left(\bigsqcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

Die Normierung ist gegeben, da

$$P'(\Omega') = \underbrace{P(X \in \Omega')}_{=X^{-1}[\Omega']} = P(\Omega) = 1$$

Die σ-Additivität ist gegeben, da

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i\geq 1} A'_i\right) &= P\left(X^{-1} \bigcup_{i\geq 1} A'_i\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i\geq 1} X^{-1} A'_i\right) \\ &= \sum_{i\geq 1} P(X^{-1} A'_i) = \sum_{i\geq 1} P'(A'_i) \end{aligned}$$

Also ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

3.5 Identische Verteilung

Wann heißt eine Familie von Zufallsvariablen identisch verteilt?
Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in I}$, die alle in denselben Messraum abbilden, heißt **identisch verteilt**, wenn alle Verteilungen $P_i \circ X_i^{-1}$ übereinstimmen, vereinfacht gesagt also, wenn jedes durch die Zufallsvariablen beschriebene Ereignis mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt (beispielsweise eine gerade oder ungerade Zahl mit einem fairen Würfel zu würfeln).

3.6 Produktabbildung, gemeinsame Verteilung, Produkt-σ-Algebra

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein W-Raum und $X_1, \ldots, X_n$ seien Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega_i, \mathscr{A}_i)$. Definieren Sie die Begriffe *Produktabbildung*, *gemeinsame Verteilung* und *Produkt-σ-Algebra*.
Aus dem Skript:
Die **Produktabbildung** $X := X_1 \otimes \cdots \otimes X_n : \Omega \to \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, definiert durch

$$X(\omega) := \big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$$

ist eine Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to \big(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n,\ \mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n\big)$ deren Verteilung P_X die **gemeinsame Verteilung** genannt wird.

Hier ist

$$\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n := \sigma\left(\bigcup_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}[A_j]\right) \subseteq 2^{\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n}$$

Die **Produkt-σ-Algebra**, bei der alle Projektionen $\pi_j : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \omega_j$ $(\mathscr{A}, \mathscr{A}_j)$-messbar sind. //TO-DO: genauer erklären

3.7 Messbarkeit

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein W-Raum und $X_1, \ldots, X_n$ seien Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega_i, \mathscr{A}_i)$. Zeigen Sie: Die Produktabbildung

$$X := X_1 \otimes \cdots \otimes X_n : \Omega \to \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$$

ist $(\mathscr{A}, \mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n)$-messbar.
Beweis aus dem Skript:

- $\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$ wird erzeugt von allen $A_1 \times \cdots \times A_n$, wobei $A_i \in \mathscr{A}_i$, für alle $i \in [1:n]$.
- $X^{-1}[A_1 \times \cdots \times A_n] = X_1^{-1}[A_1] \cap \cdots \cap X_n^{-1}[A_n]$.
- Wegen der $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$-Messbarkeit von $X_i = \pi_i \circ X$ liegt $X_i^{-1}[A_i]$ in $\mathscr{A}$.
- Da $\mathscr{A}$ unter endlicher Durchschnittsbildung abgeschlossen ist, liegt auch $X^{-1}[A_1 \times \cdots \times A_n$ in $\mathscr{A}$.
- Nach der Sparversion der Messbarkeitsbedingung[5] ist X also $(\mathscr{A}, \mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n)$-messbar. □

3.8 Randverteilung, Marginalverteilung

Gegeben ist für die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 die gemeinsame Verteilung P_X von $X := X_1 \otimes X_2$ durch

$$P_X = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die beiden eindimensionalen Rand- oder Marginalverteilungen.
Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{i,j} = P(X_1 = i, X_2 = j)$, die Randverteilungen $p_{i,\cdot}$ und $p_{\cdot,j}$ ergeben sich durch

$$p_{i,\cdot} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{j=1}^{4} p_{i,j} \text{ bzw.}$$

$$p_{\cdot,j} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^{4} p_{i,j}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 2 & 1 & 1 & \end{array}$$

[5] siehe Skript 3, Seite 5/19

b) Ist die gemeinsame Verteilung durch die Marginalverteilung eindeutig bestimmt? Begründen Sie ihre Antwort.
Nein, es ist möglich mehrere verschiedene gemeinsame Verteilungen zur selben Randverteilung zu erzeugen. Z.. Läast sich Zeile 1 und 4 der gemeinsamen Verteilung vertauschen und man erhält immer noch die selbe Randverteilung.

3.9 Zufallsvariablen, Bildmaß

Seien $(\Omega, \mathscr{A})$ und $(\Omega', \mathscr{A}')$ zwei Messräume. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{A})$. Sei $X : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung.

a) Unter welchen Bedingungen ist X eine Zufallsvariable? Geben Sie die Definition möglichst explizit an.
Die Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ heißt $(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$-messbar oder auch Zufallsvariable, wenn das X-Urbild von jedem $A' \in \mathscr{A}'$ zu $\mathscr{A}$ gehört:

$$\forall A' \in \mathscr{A}' : \quad X^{-1}[A'] := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A'\} \in \mathscr{A}'$$

b) Definieren Sie das Bildmaß P_X zu P bezüglich X. Geben Sie dabei auch den Definitions- und Wertebereich an.
Das Bildmaß zu P bzgl. X ist definiert als ein Wahrscheinlichkeitsmaß P' auf $(\Omega', \mathscr{A}')$:

$$P'(A') := P\big(X^{-1}[A']\big) = P\big(\{X \in A'\}\big) =: P(X \in A') \quad \text{für } A' \in \mathscr{A}'$$

Das Bildmaß zu P bzgl. X wird auch Verteilung von X genannt und manchmal mit P_X oder $P \circ X^{-1}$ bezeichnet. Der Definitionsbereich unseres Bildmaßes ist $\mathscr{A}'$, der Wertebereich ist $[0,1]$.

3.10 Münzwurf //TODO

Eine faire Münze wird n-mal geworfen. "Zahl" werde als Erfolg (codiert durch 1) und Kopf als Misserfolg (codiert durch 0) angesehen. Wir betrachten zwei Zufallsvariablen:

X_1 : Anzahl der Erfolge.

X_2 : Wartezeit bis zum ersten Erfolg.

Aufgaben:

a) Geben Sie den zu X_1 und X_2 gehörigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ und die Messräume $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ an.
Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ergibt sich aus $\Omega = \{0,1\}^n$, $\mathscr{A} = 2^\Omega$, P gleichverteilt.

$(\Omega_1, \mathscr{A}_1) : \Omega_1 = [0 : n], \mathscr{A}_1 = 2^{\Omega_1}$
$(\Omega_2, \mathscr{A}_2) : \Omega_2 = [1 : n+1], \mathscr{A}_2 = 2^{\Omega_2}$

b) Beschreiben Sie X_1 und X_2 konkret als Abbildungen

$$X_1 : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega_1, \mathscr{A}_1), \quad X_2 : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega_2, \mathscr{A}_2)$$

$x_1 : \{0,1\}^n \to [0 : n]$
$x_1 : (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \omega_1 + \cdots + \omega_n$

$x_2 : \{0,1\}^n \to [1 : n+1]$
$$x_2 : (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \begin{cases} \min\{j \mid \omega_j = 1\} & \text{,falls } (\omega_1, \dots, \omega_n) \neq (0, \dots, 0) \\ n+1 & \text{,sonst} \end{cases}$$

c) Bestimmen Sie die Verteilungen von X_1 und X_2.

$$P_1(k) = P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\right\}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \quad ,k \in [0:n]$$

$$\begin{aligned} P_2(j) &= P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{j-1} \omega_i = 0\,, \omega_j = 1\right\}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j} \ ,\forall j \in [1:n] \\ P_2(n+1) &= P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0\right\}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

d) Geben Sie die gemeinsame Verteilung $X_1 \otimes X_2$ (ohne Begründung) an.

$$\begin{aligned} X_1 \otimes X_2 : \{0,1\}^n &\to [0:n] \times [1:n+1] \\ X : (\omega_1, \ldots, \omega_n) &\mapsto \left(\omega_1 + \cdots + \omega_n,\ \min\{j \mid \omega_j = 1\}\right) \end{aligned}$$

$p_X(0,n) = 0$ da wenn 0 Treffer, es auch nach n Schritten kein Treffer gab
$p_X(k,n+1) = 0$ da wenn es nach n schritten kein Treffer gab, die Anzahl der treffer = 0 ist
$p_X(0,n+1) = (\frac{1}{2})^n = 2^{-n}$ nach Pfadregel $p_X(k,h) =$ /Tja, das steht zwar auf den Folien, aber boar keine Ahnung wieso das gilt...

y

4 Standardmodelle

4.1 Bildmaß

Wir ziehen $n \in \mathbb{N}$ mal mit zurücklegen aus einer Urne mit $m \in \mathbb{N}$ unterscheidbaren Kugeln und beachten die Reihenfolge.

a) Gib einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ an, der dieses Experiment beschreibt.
Es handelt sich um eine Gleichverteilung auf $[1:m]^n$, d.h.

$$\Omega := [1:m]^n, \quad \mathscr{A} := 2^\Omega, \quad P : \mathscr{A} \to [0,1]$$

mit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{m^n}$.

b) Gib eine Zufallsvariable $X : \Omega \to [0:n]$ an, die den Ausgang des Experiments auf die Anzahl der Fälle abbildet, in denen die gezogene Kugel gerade erst zurückgelegt wurde.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to [0:n] \\ (\omega_1, \dots, \omega_n) &\mapsto \left| \left\{ i \in \{2, \dots, n\} \mid \omega_{i-1} = \omega_i \right\} \right| \end{aligned}$$

c) Gib das Bildmaß P_X an, indem du für $k \in [0:n-1]$ die Wahrscheinlichkeit

$$P(X = k) := P_X\left(\{k\}\right) := P\left(X^{-1}\left(\{k\}\right)\right)$$

ausrechnest. Gib für $n = 3$, $m = 2$ und $k = 1$ das Ergebnis $X^{-1}\left(\{k\}\right)$ und $P(X = k)$ explizit an.

Sei $k \in [0:n-1]$. Bei jeder Ziehung außer der ersten ist die Wahrscheinlichkeit, die gleiche Kugel wie bei der vorherigen zu ziehen, gleich $\frac{1}{m}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass das bei $n-1$ Ziehungen genau k mal geschieht, ist durch eine Binomialverteilung gegeben:

$$P(X = k) = \binom{n-1}{k} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^k \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1-k}$$

Im Fall $n = 3$, $m = 2$ und $k = 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} X^{-1}\left[\{k\}\right] &= \left\{(1,1,2),\ (2,1,1),\ (1,2,2),\ (2,2,1)\right\} \\ P(X = 1) &= \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4.2 Multiple-Choice mit Vorwissen

Bei einer Klausur werden 18 Multiple-Choice-Fragen mit jeweils 4 angebotenen Antworten gestellt, von denen jeweils genau eine Antwort richtig ist. Zum Bestehen der Klausur benötigt man mindestens 11 richtige Antworten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Student die Klausur, welcher bei jeder Frage

a) rein zufällig eine der vier Antworten ankreuzt?

b) einen der vier Vorschläge als falsch erkennt und rein zufällig eine der übrigen Antworten auswählt?

c) zwei der vier Vorschläge als falsch erkennt und rein zufällig eine der übrigen Antworten auswählt?

Gib zu jedem Fall einen Wahrscheinlichkeitsraum an, der das Experiment korrekt beschreibt.
Wir definieren für alle drei Fälle den Ergebnisraum $\Omega = [0:18]$, die Ereignis-Algebra $\mathscr{A} = 2^\Omega$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_i = B_{18,p_i} \text{ mit}$$
$$B_{18,p_i}(k) = \binom{18}{k} \cdot p_i^k \cdot (1-p_i)^{18-k},$$

in Worten also die Wahrscheinlichkeit, genau k richtige und $18-k$ falsche Antworten zu erraten, abhängig von der Wahrscheinlichkeit p_i, aus den möglichen Optionen die Richtige zu wählen. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten π_i ergeben sich also aus

$$\pi_i = \sum_{k=11}^{18} B_{18,p_i}(k) = \sum_{k=11}^{18} \binom{18}{k} \cdot p_i^k \cdot (1-p_i)^{18-k}$$

a) mit $p_1 = 0{,}25 \rightarrow \pi_1 \approx 0{,}0012440$

b) mit $p_2 = \frac{1}{3} \rightarrow \pi_2 \approx 0{,}0144336$

c) mit $p_3 = 0{,}5 \rightarrow \pi_3 \approx 0{,}24034120$

4.3 Prüfung ohne Vorwissen

Eine Stochastik-Prüfung besteht aus 12 Fragen, welche mit *ja* oder *nein* zu beantworten sind. Sie gilt bei mindestens 8 richtigen Antworten als bestanden.

Gib bei jeder Teilaufgabe den passenden Wahrscheinlichkeitsraum an und achte speziell darauf, welche Verteilungen aus der Vorlesungen die dargestellten Sachverhalte am besten modelliert.

a) Manche Studenten kreuzen auf gut Glück die Antworten an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bestehen sie die Prüfung?
Das richtige Modell ist hier die Binomialverteilung, d.h. Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge mit zwei Zuständen (Erfolg/Misserfolg). Der Wahrscheinlichkeitsraum ist also

$$(\Omega, \mathscr{A}, P) = \left([0:12], 2^\Omega, B_{12,\frac{1}{2}}\right),$$

die Wahrscheinlichkeit, genau k richtige Antworten zu erhalten, ist demnach

$$P\big(\{k\}\big) := P(\text{genau } k \text{ Antworten sind richtig}) = \binom{12}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} = \binom{12}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\text{mind. 8 Antworten sind richtig}) &= P\big(\{8\}\big) + P\big(\{9\}\big) + P\big(\{10\}\big) + P\big(\{11\}\big) + P\big(\{12\}\big) \\ &= \left(\binom{12}{8} + \binom{12}{9} + \binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \\ &\approx 0{,}1938 \end{aligned}$$

b) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn sie immerhin 2 Fragen mit Sicherheit beantworten können und nur den Rest zufällig ankreuzen?
Lösungsweg wie bei a), nur dass diesmal 6 von 10 Fragen richtig beantwortet werden müssen, also $P = B_{10,\frac{1}{2}}$. Es folgt

$$\begin{aligned} P(\text{mind. 6 Antworten sind richtig}) &= P\big(\{6\}\big) + P\big(\{7\}\big) + P\big(\{8\}\big) + P\big(\{9\}\big) + P\big(\{10\}\big) \\ &= \left(\binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ &\approx 0{,}3770 \end{aligned}$$

c) Falls jemand gar nichts weiß, wäre es dann (im Vergleich zu (a)) für sie oder ihn günstiger, zufällig 6-mal *ja* und 6-mal *nein* anzukreuzen - vorausgesetzt, dass für genau 6 Fragen die richtige Antwort *ja* lautet?
Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ist gegeben durch

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_{12}) \in \{0,1\} : \sum_{i=1}^{12} \omega_i = 6 \right\}, \quad \mathscr{A} = 2^{\Omega}, \quad P = \mathit{Gleichverteilung}$$

Es gibt insgesamt $|\Omega| = \binom{12}{6} = 924$ mögliche Antwortmuster. Gesucht sind diejenigen Muster, die an mindestens 8 Positionen mit der richtigen Lösung übereinstimmen. Da unser Student genau 6 Aufgaben mit *ja* oder *nein* beantwortet, gilt, dass jeder "aktiv gemachte" Fehler (eine *nein*-Frage mit ja beantworten) automatisch einen zweiten Fehler nach sich zieht, in dem Sinne also doppelt zählt.
Es gibt also $\binom{6}{k} \cdot \binom{6}{k}$ Möglichkeiten, $2k$ Fehler zu machen. Da insgesamt höchstens $12 - 8 = 4$ Fehler (also $k = 2$) gemacht werden dürfen, folgt

$$\begin{aligned} P(\text{mind. 8 richtige Antworten}) &= P(X \geq 8) \\ &= \frac{\#\ \mathit{günstige\ Möglichkeiten}}{\#\ \mathit{alle\ Möglichkeiten}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{2} \binom{6}{k} \cdot \binom{6}{k}}{\binom{12}{6}} \\ &\approx 0{,}2835 \end{aligned}$$

4.4 Adventskalender

Ein Adventskalender enthält $N = 24$ Fenster. Hinter jedem Fenster ist, unabhängig von den anderen Fenstern, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_k = 30\%$ ein kleiner Gewinn und mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_G = 10\%$ ein größerer Gewinn. Ansonsten befindet sich hinter dem Fenster nur ein Bild. Wir betrachten die Anzahl der kleinen und größeren Gewinne im Adventskalender als Zufallsgrößen.

a) Gib einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.
Da die Wahrscheinlichkeiten für die unterschiedlichen Preise unabhängig sind und wir die Reihenfolge nicht berücksichtigen wollen, handelt es sich hierbei um eine Multinomialverteilung. Der Ergebnisraum enthält Histogramme, die σ-Algebra ist seine Potenzmenge und das Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \Omega \to [0,1]$ definieren wir über die Zähldichte $p : \Omega \to [0,1]$:

$$\begin{aligned} \Omega &:= [0:24]^2 \\ \mathscr{A} &:= 2^{\Omega} \\ p_N &:= 1 - p_K - p_G = 60\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall (H_K, H_G) \in \Omega : p(H_K, H_G) &:= \binom{N}{H_K, H_G, N - (H_K + H_G)} \cdot p_K^{H_K} \cdot p_G^{H_G} \cdot p_N^{N-(H_K+H_G)} \\ &= \frac{24}{H_K! \cdot H_G! \cdot (24 - (H_K + H_G))!} \cdot p_K^{H_K} \cdot p_G^{H_G} \cdot p_N^{24-(H_K+H_G)} \end{aligned}$$

$$\forall A \in \mathscr{A} : P(A) := \sum_{\omega \in \mathscr{A}} p(\omega)$$

Zur Erinnerung: Die Multinomialverteilung oben ist einfach definiert als $\binom{N}{k,j,\dots} := \frac{N}{k! \cdot j! \cdot \dots}$.
Sieht alles erst mal etwas böse aus, ergibt aber schnell Sinn, wenn man es sich an der b) klarmacht.

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kalender genau fünf kleine Gewinne und genau drei große Gewinne enthält?.
Es ist nach der Wahrscheinlichkeit des Histogramms mit $H_K = 5$ und $H_G = 3$ gefragt. Diese erhalten wir durch

$$p(5,3) = \frac{24!}{5! \cdot 3! \cdot 16!} \cdot p_K^5 \cdot p_G^3 \cdot p_N^{16} = \frac{24!}{5! \cdot 3! \cdot 16!} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}6^{16} \approx 0{,}0283$$

4.5 Zweikampf

Wegen seiner überlegenen Körpergröße und -stärke besteht eine Wahrscheinlichkeit von $P(S) = 0,6$, dass Boguslaw im Kampf gegen Andrzej siegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kampf zwischen beiden unentschieden ausgeht, sei $P(U) = 0,1$ und die Wahrscheinlichkeit, dass Boguslaw verliert, sei $P(V) = 0,3$. Die drei Wahrscheinlichkeiten seien konstant. Wie wahrscheinlich ist es, dass Andrzej von zehn Kämpfen gegen Boguslaw nur drei siegreich für sich entscheiden kann, zwei unentschieden ausgehen und fünf für ihn verlorengehen?
Wir haben ein Experiment mit mehreren Ausgängen, konstanten Wahrscheinlichkeiten und ohne Beachtung der Reihenfolge. Wir verwenden also eine Multinomialverteilung auf $\left([0:10]^3, 2^\Omega, P\right)$, wobei P über die Zähldichte der Multinomialverteilung

$$p(H) = \binom{n}{H} \cdot \prod_{f \in F} P(f)^{H(f)}$$

definiert ist. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit des Histogramms (5, 2, 3):

$$\begin{aligned} p(5,\,2,\,3) &= \binom{10}{5,\,2,\,3} \cdot 0,6^5 \cdot 0,1^2 \cdot 0,3^3 \\ &= \frac{10!}{5! \cdot 2! \cdot 3!} \cdot 0,6^5 \cdot 0,1^2 \cdot 0,3^3 \\ &\approx 0,0529 \end{aligned}$$

Achtet hier auf die Aufgabenstellung! Hier wird die Wahrscheinlichkeit für Andrzej gefragt, und nicht für Boguslaw (also Andrzej gewinnt → Boguslaw verliert)

4.6 Karten

Aus einem Skatblatt (32 Karten) zieht ein Spieler 9 Karten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er mindestens 2 Asse?
Das richtige Modell für diese Aufgabe ist die hypergeometrische Verteilung, da wir Karten ziehen ohne Zurücklegen, jede Karte die gleiche Wahrscheinlichkeit hat und wir die Reihenfolge nicht beachten. Der Wahrscheinlichkeitsraum ist in diesem Fall $([0:4], 2^\Omega, P)$. Auch hier ist die P über eine Dichtefunktion definiert:

$$p(H) = \frac{\prod_{f \in F} \binom{N_f}{h_f}}{\binom{N}{n}}$$

Das Ereignis "mindestens 2 Asse" heißt, wir ziehen entweder 2, 3 oder 4 Asse (und 7/6/5 andere Karten), insgesamt ergibt sich also

$$P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{4} \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{28}{9-k}}{\binom{32}{9}} \approx 0,3105$$

4.7 Schwarzgeld

Adolf und Harald wollen Schwarzgeld in die Schweiz schmuggeln. Sie befinden sich in einem Reisebus mit weiteren 23 Reisenden, die kein Schwarzgeld bei sich haben. An der Grenze werden drei Personen zufällig ausgewählt und genau durchsucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden

a) weder Adolf noch Harald erwischt?
Auch hier ziehen wir ohne Zurücklegen und jede Person hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, kontrolliert zu werden (→ hypergeometrische Verteilung). Der Wahrscheinlichkeitsraum ist also gegeben durch $([0:2], 2^\Omega, P)$ mit P wie oben definiert als Dichtefunktion der Form

$$p(H) = \frac{\prod_{f \in F} \binom{N_f}{h_f}}{\binom{N}{n}}$$

Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass keiner von beiden erwischt wird, durch

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{23}{3}}{\binom{25}{3}} = 0,77$$

b) Adolf und Harald erwischt?
Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus

$$P(X=2)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{23}{1}}{\binom{25}{3}}=0,01$$

4.8 Defekte Glühbirnen

Eine Firma stellt Glühbirnen her, von denen 2% defekt sind.

a) Wie viele Glühbirnen müssen mindestens produziert werden, damit mit 90%iger Wahrscheinlichkeit zumindest eine defekte dabei ist?
Die Glühbirnen sind alle unabhängig voneinander und besitzen die Wahrscheinlichkeit, defekt oder nicht defekt zu sein (zwei Zustände), daher wird die Binomialverteilung verwendet. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A =$ "Mindestens eine Glühbirne defekt" lässt sich nur schwer berechnen. Deshalb ist es sinnvoll, diese Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis $\bar{A} =$ "Keine Glühbirne ist defekt" zu berechnen

$$P(\bar{A})=\binom{n}{0}\cdot 0.02^0\cdot(1-0.02)^{n-0}=0.98^n$$

Nun müssen wir noch n (die Anzahl der Glühbirnen) berechnen. Es gilt $P(A)=1-P(\bar{A})=0.9$

$$\begin{aligned} & 1-0.98^n=0.9 \\ \Leftrightarrow\quad & 0.98^n=0.1 \\ \Leftrightarrow\quad & n\cdot\ln(0.98)=\ln(0.1) \\ \Leftrightarrow\quad & n=\frac{\ln(0.1)}{\ln(0.98)}\approx 114 \end{aligned}$$

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 200 zufällig gewählten Glühbirnen keine defekte zu finden ist?

$$P(X=0)=\binom{200}{0}\cdot 0.02^0\cdot(1-0.02)^{200-0}=0.018$$

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 zufällig gewählten Glühbirnen genau 2 defekt sind?

$$P(X=2)=\binom{100}{2}\cdot 0.02^2\cdot(1-0.02)^{100-2}=0.027$$

4.9 Geigerzähler

Eine Probe Uran 238 enthält 10^{21} Atome (ca. 0,4 Gramm). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Atom innerhalb einer bestimmten Sekunde zerfällt beträgt $4,92\cdot 10^{-18}$. Ein Geigerzähler ist auf die Probe gerichtet und so eingestellt, dass er einen Zerfall in der Probe mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,1\%$ detektiert. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Sekunde genau vier Zerfallsprozesse detektiert werden?

Hinweis: Nimm an, dass die Zerfallsprozesse unabhängig voneinander sind und dass die Anzahl der Uranatome über den betrachteten Zeitraum konstant ist.
Aufgrund der beschriebenen Annahmen (unabhängig, konstant) und der Tatsache, dass n sehr groß ist, kann man das Experiment durch eine Poisson-Verteilung[6] beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Atom in einer bestimmten Sekunde zerfällt und detektiert wird beträgt

$$\begin{aligned} p := & P(\text{Zerfall wird detektiert} \cap \text{Atom zerfällt}) \\ = & P(\text{Atom zerfällt})\cdot P(\text{Zerfall wird detektiert} \mid \text{Atom zerfällt}) \\ = & 4.92\cdot 10^{-18}\cdot 0.001 = 4.92\cdot 10^{-21} \end{aligned}$$

[6] siehe z.B. https://www.youtube.com/watch?v=UESWARetzXU

Zur Erinnerung: $P(A|B)$ heißt "Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B" und wird berechnet mit $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ (hier nicht weiter relevant).
Damit sind alle Größen bekannt, die wir zum konstruieren der Poisson-Verteilung benötigen:

$$\begin{aligned} p =& 4.92\cdot 10^{-21} \\ n :=& 10^{21} \\ \lambda :=& n\cdot p = 4.92 \\ k :=& 4 \end{aligned}$$

$$P_\lambda(k) := \exp(-\lambda)\cdot \frac{\lambda^k}{k!} \approx 17.8\%$$

4.10 Tutorium (Wiederholung)

Ein Tutorium besteht aus n Studenten. Jeder Student nimmt mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ an dem Tutorium teil. Diese Wahrscheinlichkeit ist für alle Studenten gleich. Modelliere die Anzahl der anwesenden Studenten mit einem Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Nenne das passende Standardmodell beim Namen.
Studenten sind alle unabhängig voneinander, gleichbleibende Bedingungen und zwei verschiedene Zustände
$\rightarrow$ Binomialverteilung

b) Gib einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ an.

$$\begin{aligned} \Omega :=& [0:n] \\ \mathscr{A} :=& 2^\Omega \\ P(k) =& \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

c) Das Tutorium findet nur statt, wenn mehr als k Studenten anwesend sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit $\hat{p}$, dass dieses stattfindet?
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich durch

$$\hat{p} = P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i}\cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = 1 - P(X \leq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$$

4.11 Tutorium 2 (Wiederholung)

Wir betrachten mehrere Termine des o.g. Tutoriums (vorherige Aufgabe 4.10). Sei $\hat{p} \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Tutorium zu einem gewissen Termin stattfindet. Diese Wahrscheinlichkeit ist für alle Termine gleich. Nach wie vielen stattgefundenen Tutorien fällt das erste aus? Modelliere diese Frage mit einen Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Nenne das passende Standardmodell beim Namen.
Warten auf den ersten Treffer in unbeeinflusst voneinander ablaufenden Treffer/Niete-Versuchen
$\rightarrow$ geometrische Verteilung

b) Gib einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{A}}, \hat{P})$ an, der dieses Zufallsexperiment beschreibt.

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} :=& \mathbb{N} \\ \hat{\mathscr{A}} :=& 2^{\hat{\Omega}} \\ \hat{P}(k) =& \neg\hat{p}\cdot(1-\neg\hat{p})^{k-1} \\ =& (1-\hat{p})\cdot\hat{p}^{k-1} \\ =& \hat{p}^{k-1} * (1-\hat{p}) \end{aligned}$$

c) Wie groß in Abhängigkeit von $\hat{p}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das sechste oder siebte Tutorium als nächstes ausfällt?

$$\hat{P}(5) + \hat{P}(6) = \hat{p}^5 \cdot (1-\hat{p}) + \hat{p}^6 \cdot (1-\hat{p}) = \hat{p}^5 - \hat{p}^7$$

4.12 Multiple Choice, willkürlich

Bei einem Multiple-Choice-Test muss bei jeder Frage genau eine von 5 Auswahlantworten angekreuzt werden. Der Kandidat setzt seine Kreuze willkürlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei 10 Fragen genau 6 Fragen richtig beantwortet?

Geben Sie die Berechnungsformel und einen Ausdruck für den exakten Wert an. Nennen Sie den Namen des zugrundeliegenden Standardmodells.
Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge mit zwei Zuständen
$\rightarrow$ Binomialverteilung

Der Wahrscheinlichkeitsraum ist also

$$\begin{aligned} \Omega &:= [0:10] \\ \mathscr{A} &:= 2^{\Omega} \\ P(k) &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{mit } p = 0.2 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, genau 6 Fragen richtig zu beantworten, ergibt sich demnach durch

$$P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot 0.2^6 \cdot 0.8^4 \approx 0.0055$$

4.13 Würfelexperiment

Bei einem Würfelexperiment wird so lange mit einem fairen Würfel gewürfelt, bis eine Fünf oder eine Sechs geworfen wird. Wir betrachten die Anzahl der Würfe.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen.
Warten auf den ersten Treffer in unbeeinflusst voneinander ablaufenden Treffer/Niete-Versuchen
$\rightarrow$ geometrische Verteilung

b) Geben Sie die Berechnungsformel für die Wahrscheinlichkeit an, dass genau $k \in \mathbb{N}$ mal gewürfelt wird.
Die Wahrscheinlichkeit mit $p = \frac{1}{3}$ (W-keit, eine 5 oder 6 zu würfeln) ergibt sich durch

$$P(X=k) = p * (1-p)^{k-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(X=k) &= \frac{1}{3} * \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{3} * \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier mal gewürfelt werden muss?

$$P(4) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81} \approx 0.0988$$

4.14 Lotto

Beim Lotte "6 aus 49" wird sechs mal ohne Zurücklegen aus einer Urne gezogen, die 49 Kugeln mit den Zahlen von 1 bis 49 enthält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier gezogene Kugeln einen einstelligen Zahlenwert haben (d.h. 1 bis 9 einschließlich)?

a) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt diesem Zufallsexperiment zugrunde?
Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge, jede Kugel hat die gleiche Wahrscheinlichkeit
$\rightarrow$ hypergeometrische Verteilung

b) Geben Sie die Berechnungsformel und einen Ausdruck für den exakten Wert an.
Es gibt 9 einstellige Kugeln und es wird sechs mal gezogen, der Wahrscheinlichkeitsraum ist also gegeben durch $([0:6], 2^{\Omega}, P)$ mit P als Dichtefunktion der Form

$$p(H) = \frac{\prod_{f\in F}\binom{N_f}{h_f}}{\binom{N}{n}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, genau 4 einstellige Kugeln zu ziehen, ist demnach

$$P(X=4) = \frac{\binom{9}{4}\cdot\binom{40}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0.007$$

4.15 Tombola

Bei einer Tombola werden $N = 100$ Lose verkauft. Davon sind $N_H = 5$ ein Hauptgewinn und $N_G = 20$ ein kleinerer Gewinn. Die restlichen $N_N = 75$ Lose sind Nieten.

Die erste Kundin kauft $n = 10$ Lose (d.h. sie zieht ohne Zurücklegen). Die Reihenfolge ist für den Gewinn irrelevant und wird daher nicht berücksichtigt.

a) Nennen Sie das passenden Standardmodell beim Namen (mit Begründung).
Gesucht ist die Anzahl der "Kugeln" einer bestimmten Farbkombination (Hauptgewinn, Gewinn, Niete) nach n Zügen *ohne* zurücklegen.
$\rightarrow$ multivariate hypergeometrische Verteilung

b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.
Sei N_j die Anzahl der Kugeln einer Farbe j und $N_1 + \cdots + N_j = N$ die Gesamtanzahl der Kugeln.

$$\begin{aligned} \Omega &:= [0:5]\times[0:20]\times[0:75] \\ \mathscr{A} &:= 2^{\Omega} \\ P\big(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3\big) &= \frac{\binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}\binom{N_3}{k_3}}{\binom{N}{n}} \end{aligned}$$

//TO-DO Omega angepasst
wie wäre $\Omega = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 | a \in [0:5], b \in [0:10], c \in [0:10], a+b+c = 10\}$?

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kundin genau einen Hauptgewinn und zwei kleinere Gewinne zieht? (Es reicht, einen Ausdruck für die exakten Werte anzugeben.)

$$P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 7) = \frac{\binom{5}{1}\binom{20}{2}\binom{75}{7}}{\binom{100}{10}} \approx 0.1089$$

4.16 Lotto, disjunkte Mengen

Man kann die Zahlen $1,\ldots,49$ eines Lottoscheins in die drei *disjunkten* Mengen

- $S_0 :=$ "Zahlen, die weder durch 3 noch durch 7 teilbar sind"
- $S_3 :=$ "Zahlen, die durch 3, aber nicht durch 7 geteilt werden können"
- $S_7 :=$ "Zahlen, die durch 7 geteilt werden können"

einteilen mit den Mächtigkeiten $|S_0| = 26$, $|S_3| = 16$ und $|S_7| = 7$. Nun werden gleichverteilt 6 unterschiedliche Felder markiert. Modelliere die Wahrscheinlichkeit, dass genau H_0, H_3 und H_7 Felder in den jeweiligen Mengen markiert wurden.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen (mit Begründung).
Auch wenn wir die Felder gleichverteilt markieren, haben wir durch die Prämisse nur *unterschiedliche* Felder zu markieren, insgesamt keine konstante Wahrscheinlichkeit für jeden "Zug". Wir haben also ein Experiment mit mehreren Ausgängen, aber ohne konstante Wahrscheinlichkeiten
$\rightarrow$ multivariate hypergeometrische Verteilung

b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.

$$\begin{aligned} \Omega &:= [0:26] \times [0:16] \times [0:7] \\ \mathscr{A} &:= 2^{\Omega} \\ P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3) &= \frac{\binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}\binom{N_3}{k_3}}{\binom{N}{n}} \end{aligned}$$

//TO-DO Omega aus dem Skript
mit N_j gleich der Anzahl der Kugeln einer Farbe j, $N_1 + \cdots + N_s = N$ gleich der Gesamtanzahl aller Kugeln und $k_1 + \cdots + k_s = n$ gleich der Anzahl der Züge.

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $H_0 = 3$, $H_3 = 2$, $H_7 = 1$?
Hinweis: Es reicht die Darstellung mit Binomialkoeffizienten, ein genaueres Ergebnis wird hier nicht gebraucht.

$$\begin{aligned} P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1) &= \frac{\binom{26}{3}\binom{16}{2}\binom{7}{1}}{\binom{49}{6}} \\ &\approx 0.1561 \end{aligned}$$

4.17 Urne #1

Eine Urne enthält 2 rote, 2 weiße und 2 blaue Kugeln. Es werden 3 Kugeln gleichzeitig herausgenommen.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen (mit Begründung).
Gleichzeitiges Ziehen entspricht effektiv Ziehen ohne Zurücklegen. Wir haben also ein Experiment mit mehreren Ausgängen, aber ohne konstante Wahrscheinlichkeit
$\rightarrow$ multivariate hypergeometrische Verteilung

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt jede Farbe genau einmal vor? Geben Sie die Berechnungsformel und den exakten Wert an.

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{8}{20} = 0.4$$

4.18 Kleinstadt

In einer rheinischen Kleinstadt sollen sich im letzten Jahr 34.000 Menschen verliebt haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dieser Stadt in der nächsten Stunde mindestens zwei Menschen verlieben?

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit sich zu verlieben, soll als konstant angenommen werden. Insbesondere sei sie unabhängig davon, wann die Person sich zuletzt verliebt hat. Außerdem sollen die 34.000 Menschen dem Erwartungswert der anzunehmenden Verliebten in einem Jahr entsprechen. Zur einfacheren Rechnung kann die Anzahl Stunden im letzten Jahr mit 8.500 angenommen werden.
Wir approximieren die Wahrscheinlichkeit mithilfe der Poisson-Verteilung. Der Erwartungswert der anzunehmenden Verliebten in einer Stunde entspricht $\lambda = \frac{34000}{8500} = 4$. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 verliebte Menschen in der nächsten Stunde ergibt sich also aus

$$\begin{aligned} P_\lambda(X \geq 2) &= 1 - P_\lambda(X < 2) \\ &= 1 - P_\lambda(X = 0) - P_\lambda(X = 1) \\ &= 1 - \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!}\right) - \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!}\right) \\ &= 1 - \left(e^{-4} \cdot \frac{4^0}{0!}\right) - \left(e^{-4} \cdot \frac{4^1}{1!}\right) \\ &= 1 - e^{-4} + 4e^{-4} \\ &= 1 - 5e^{-4} \approx 0.9084 \end{aligned}$$

4.19 Kamera

Eine Kamera ist auf einem Stativ montiert und beobachtet eine statische Szene. In einer Belichtungszeit von zwei Sekunden hat ein Pixel dieser Kamera 5000 Photonen detektiert.

Nun wird noch ein Foto mit einer kürzeren Belichtungszeit von $0,002$ Sekunden aufgenommen. Wie wahrscheinlich ist es, dass der gleiche Pixel in dieser Zeit genau sechs Photonen detektiert? Geben Sie den Ausdruck für den Wert für die Wahrscheinlichkeit (samt Rechnung und Begründung) und nennen Sie das zugrundeliegende Standardmodell beim Namen.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die 5000 Photonen bei der ersten Aufnahme genau dem Erwartungswert entsprechen. Es gibt sehr viele unabhängige Ereignisse, die alle mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit dazu führen, dass in einem Zeitintervall ein Photon auf dem Pixel detektiert wird.
Wir nutzen die Poisson-Verteilung mit Erwartungswert gleich lambda.
Poisson-verteilung:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}$$

Laut Hinweis ist: $E_2(x) = 5000$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow E_{0.002(x)} = \frac{5000}{2/0.002} = \frac{5000}{1000} = 5 \\ &\Rightarrow P(X = k) = e^{-5} * \frac{5^k}{k!} \\ &\Rightarrow P(X = 6) = e^{-5} * \frac{5^6}{6!} \\ &\qquad = 0,15 = 15\% \end{aligned}$$

4.20 Versicherung

Eine Unfallversicherung hat berechnet, dass ein Versicherungsnehmer pro Monat in 1% der Fälle Schäden hat, die durch die Versicherung übernommen werden. Der Versicherungsvertrag laufe über 5 Jahre. Sei A das Ereignis, dass die Versicherung in dieser Zeit höchstens 2-mal zahlen muss.

a) Benennen Sie die allgemeine zugrundeliegende Verteilung und geben Sie die Verteilungsfunktion an.
Gesucht ist die Anzahl "Kugeln einer Farbe" (Versicherungsnehmer baut Unfall) bei konstanter Wahrscheinlichkeit $\rightarrow$ Binomialverteilung
Die Wahrscheinlichkeit, nach n Zügen genau k Kugeln der gesuchten Farbe zu erhalten, ergibt sich also durch

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

b) Geben Sie eine Formel für $P(A)$ an. Sie brauchen den Wert nicht auszurechnen.
5 Jahre entsprechen 60 Monaten, also $n=60$.

$$\begin{aligned}P(A)&=P(X\leq 2)\\&=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\\&=\binom{60}{0}0.01^0\cdot 0.99^{60}+\binom{60}{1}0.01^1\cdot 0.99^{59}+\binom{60}{2}0.01^2\cdot 0.99^{58}\\&\approx 0.9776\end{aligned}$$

c) Wie lautet das dazugehörige Urnenmodell?
Ziehen mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge. Betrachtet wird die Anzahl der Kugeln einer Farbe.

d) Geben Sie allgemein die Verteilungsfunktion der Poisson-Verteilung an.
Die Poisson-Verteilung wird vor allem dort eingesetzt, wo die Häufigkeit eines Ereignisses über eine gewisse Zeit betrachtet wird und n sehr groß ist. Sie wird durch folgende Formel berechnet:

$$P(X=k)=\exp(-\lambda)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

Wobei $\lambda=n\cdot p$

e) Lässt sich die Verteilung aus a) auch mit einer Poisson-Verteilung approximieren? Begründen Sie ihre Antwort.

$$\begin{aligned}n&=60\\p&=0.01\\\lambda&=p\cdot n=0.6\\k&=0;1;2\end{aligned}$$

$$P_\lambda(0)+P_\lambda(1)+P_\lambda(2)=\sum_{k=0}^{3}\exp(-0.6)\cdot\frac{0.6^k}{k!}\approx 0.9769$$

Die gesuchte Verteilung ließe sich approximieren (hier am Beispiel des Ereignisses A), da wir alle nötigen Werte zur Verfügung haben bzw. sie errechnen können, das Ergebnis liegt allerdings ein wenig unter dem tatsächlichen Wert.
Alternative Begründung: Wir können Poisson nehmen, da n relativ groß und p relativ klein ist.

4.21 Urne #2

Eine Urne enthält 4 blaue, 1 rote und 3 schwarze Kugeln. Wir ziehen mit Zurücklegen. Das Histogramm H beschreibe, dass beim sechsmaligen Ziehen 3-mal eine blaue, 1-mal eine rote und 2-mal eine schwarze Kugel gezogen werde.

a) Wie lautet das dazugehörige Urnenmodell?
Ziehen mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge. Betrachtet wird die Anzahl der Kugeln einer Farbkombination.

b) Benennen Sie die zugrundeliegende Verteilung und geben Sie die Verteilungsfunktion für ein allgemeines Histogramm an.
Multinomialverteilung, mit P definiert als:

$$P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \binom{n}{k_1, \dots, k_n} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$$

mit $p_i = \frac{N_i}{N}$, wobei N_i die Anzahl der Kugeln einer Farbe i bzw. N die Anzahl aller Kugeln und n die Anzahl der Züge ist.

c) Geben Sie für obiges konkretes H eine Formel $P(H)$ und rechnen Sie den Wert aus.

$$\begin{aligned} P(H) &= P(X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 2) \\ &= \binom{6}{3,1,2} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \\ &= \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{64} \\ &= 60 \cdot \frac{9}{4096} = \frac{540}{4096} \approx 0.1318 \end{aligned}$$

4.22 Multiple-Choice-Test

Bei einem Multiple-Choice-Test muss bei jeder Frage genau eine von 5 Auswahlantworten angekreuzt werden. Der Kandidat setzt seine Kreuze willkürlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei 10 Fragen genau 6 Fragen richtig beantwortet? Geben Sie die Berechnungsformel und einen Ausdruck für den exakten Wert an. Nennen Sie den Namen des zugrundeliegenden Standartmodells.
Binomialverteilt

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k} \\ P(X = 6) &= \binom{10}{6} * (\frac{1}{5})^6 * (1 - \frac{1}{5})^{10-6} \\ P(X = 6) &= \binom{10}{6} * (\frac{1}{5})^6 * (\frac{4}{5})^4 \end{aligned}$$

4.22 Rubbellos

Ein Rubbellos habe 7 Felder, von denen 3 eine Krone und 4 eine Ente zeigen. Der Spieler darf genau 3 Felder frei rubbeln. Trifft er alle Kronen, so hat er gewonnen.

a) Wie lautet das dazugehörige Urnenmodell?
Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge. Betrachtet wird die Anzahl der Kugeln einer Farbe.

b) Benennen Sie allgemein die zugrundeliegende Verteilung und geben Sie die Verteilungsfunktion an.
Hypergeometrische Verteilung, mit P definiert als

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{M-k}}{\binom{N}{M}}$$

mit N gleich der Anzahl aller Kugeln, M gleich der Anzahl der Kugeln der betrachteten Farbe und n gleich der Anzahl der Züge.

c) Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit.

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35} \approx 0.0286$$

4.23 Zähldichte

Es sei ρ eine Zähldichte auf dem endlichen Ergebnisraum Ω. Zeigen Sie: Durch

$$\rho^{\otimes n}(\omega) = \rho^{\otimes n}(\omega_1, \dots, \omega_n) := \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i)$$

wird eine Zähldichte auf Ω^n definiert.
Zur Erinnerung: Eine Funktion $\rho : \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$ heißt Zähldichte.

$\rho^{\otimes n}$ ist Zähldichte, denn $\rho^{\otimes n}(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega^n$ (da ρ eine Zähldichte ist).
Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega^n} \rho^{\otimes n}(\omega) &= \sum_{\omega_1 \in \Omega} \cdots \sum_{\omega_n \in \Omega} \rho(\omega_1) \cdot \ldots \cdot \rho(\omega_n) \\
&= \Big(\sum_{\omega_1 \in \Omega} \rho(\omega_1) \Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\sum_{\omega_n \in \Omega} \rho(\omega_n) \Big) \\
&= 1
\end{aligned}$$

4.24 Geometrische Verteilung

Zeigen Sie: Die geometrische Verteilung ist eine Verteilung.
(Aus Skript) Wegen $P(k) \geq 0$ bleibt zu zeigen, dass $P(\mathbb{N}) = 1$. Dies folgt aber aus $0 < p < 1$ und den Eigenschaften der geometrischen Reihe.

$$\begin{aligned}
P(\mathbb{N}) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(k) = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot (1-p)^{k-1} \\
&= p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \\
&= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1
\end{aligned}$$

4.25 Wahr oder falsch

Wir interpretieren unterschiedliche Verteilungen durch Urnenexperimente. Welche Aussagen sind *richtig*:

- ☐ Die Multinomialverteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
  Falsch, es modelliert die Ziehung mit Zurücklegen.

- ■ Bei der Multinomialverteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen nicht berücksichtigt.
  Richtig, nur die Art der gezogenen "Kugeln" ist relevant.

- ☐ Bei der Binomialverteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt.
  Falsch, die Reihenfolge ist bei der Binomialverteilung irrelevant.

- ■ Die Binomialverteilung modelliert eine Ziehung mit Zurücklegen.
  Richtig.

■ Bei der Bernoulli-Verteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt.
Richtig.

□ Die Bernoulli-Verteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
Falsch, Bernoulli ist mit Zurücklegen (laut Skript).

■ Die hypergeometrische Verteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
Richtig.

□ Bei der hypergeometrischen Verteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt.
Falsch, die Reihenfolge ist bei der hypergeometrischen Verteilung irrelevant.

□ Die geometrische Verteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
Falsch, dies wäre die negative hypergeometrische Verteilung.

■ Die geometrische Verteilung modelliert eine Ziehung mit Zurücklegen.
Richtig.

4.26 Urnenmodell, abgeleitete Verteilungen (Merkzettel)

- Anzahl Kugeln einer Farbe
  - mit Zurücklegen
    $\rightarrow$ Binomialverteilung
    $$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$
    bei einmaliger Ziehung auch Bernoulli-Verteilung genannt.
  - ohne Zurücklegen
    $\rightarrow$ hypergeometrische Verteilung
    $$P(X=k)=\frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{n-k}}{\binom{N}{M}}$$

- Wartezeit für eine Anzahl k von Kugeln einer Farbe
  - mit Zurücklegen
    $\rightarrow$ negative Binomialverteilung
  - mit Zurücklegen, Spezialfall $k=1$
    $\rightarrow$ geometrische Verteilung
  - ohne Zurücklegen
    $\rightarrow$ negative hypergeometrische Verteilung

- Anzahl der Kugeln einer Farbkombination
  - mit Zurücklegen
    $\rightarrow$ Multinomialverteilung
    $$P(X_1=k_1,\dots,X_s=k_s)=\binom{n}{k_1,\dots,k_s}p_1^{k_1}\dots p_s^{k_s}$$
  - ohne Zurücklegen
    $\rightarrow$ multivariate hypergeometrische Verteilung
    $$P(X_1=k_1,\dots,X_s=k_s)=\frac{\binom{N_1}{k_1}\dots\binom{N_s}{k_s}}{\binom{N}{n}}$$

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

5.1 Krank oder nicht Krank

Von 10.000 Personen haben durchschnittlich zwei eine spezielle Krankheit. Ein Standardtest ist positiv bei 97% der Kranken und 0,2% der Gesunden.

Bei Lord Derpington ist das Ergebnis des Tests positiv. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich die Krankheit hat.
Sei Ω die endliche Menge aller Menschen, $\mathscr{A} = 2^{\Omega}$, und P die Gleichverteilung. Die Menge Ω zerfällt disjunkt in die Teilmenge K der Personen, die diese spezielle Krankheit haben, und ihr Komplement G (gesunde Personen). Es gilt $P(K) = \frac{2}{10000}$ und folglich $P(G) = \frac{9998}{10000}$.
Nun definieren wir eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \{+,-\}$, die das Ergebnis des Standardtests beschreibt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
P(+|K) &:= P(X^{-1}|K) = \frac{|X^{-1}(+) \cap K|}{|K|} = \frac{97}{100}, \\
P(+|G) &:= P(X^{-1}|G) = \frac{|X^{-1}(+) \cap G|}{|G|} = \frac{2}{1000}.
\end{aligned}$$

Zur Erinnerung: $P(A|B)$ beschreibt die bedingte Wahrscheinlichkeit von A falls B eingetreten ist. $P(+|K)$ ist also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Test anschlägt $(+)$ unter der Bedingung, dass die Person krank (K) ist.
Nun wenden wir die Bayessche Formel an:

$$P\big(K|X^{-1}[+]\big) = \frac{P(+|K) \cdot P(K)}{P(+|K) \cdot P(K) + P(+|G) \cdot P(G)} = \frac{0.97 \cdot \frac{2}{10000}}{0.97 \cdot \frac{2}{10000} + \frac{2}{1000} \cdot \frac{9998}{10000}} \approx 0.088$$

// Warum $X^{-1}[+]$?

5.2 Mendacium

Derp hat sich im großen Park von Mendacium verlaufen. Von den Besuchern im Park sind zwei Drittel Touristen. Fragen nach der Richtung werden von diesen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ richtig beantwortet. Dabei sind Antworten auf wiederholte Fragen unabhängig, auch wenn die Frage und die Person dieselben sind. Wenn man hingegen einen Mendacier fragt, ist die Antwort immer falsch.

a) Derp fragt k-mal dieselbe Person, ob sich der Ausgang in Richtung Osten oder Westen befindet. Jedes Mal erhält er als Antwort Osten. Wie groß ist in Abhängigkeit von k - die Wahrscheinlichkeiten, dass die richtige Antwort "Osten" ist?
Sei T das Ereignis, dass der Passant ein Tourist ist, und M, dass er Mendacier ist. Bei n gestellten Fragen ist $\Omega_n = \{T,M\} \times \{W,L\}^n, \mathscr{A}_n = 2^{\Omega_n}$. Wir schreiben kurz

$$P(T) := P\Big(\{T\} \times \{W,L\}^n\Big) \quad \text{und} \quad P(kX) = P\Big(\{T,M\} \times \{\underbrace{XX\ldots X}_{k\text{-mal}}\}\Big), X \in \{W,L\}$$

Mit den vorgegebenen Werten

$$\begin{aligned}
P(T) &= \frac{2}{3}, & P(W|T) &= \frac{3}{4}, & P(L|T) &= \frac{1}{4}, \\
P(M) &= \frac{1}{3}, & P(W|M) &= 0, & P(L|M) &= 1
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$P\Big(kW|\{kW,kL\}\Big) = \frac{P(T) \cdot P(W|T)^k}{\Big(P(W|T)^k + P(L|T)^k\Big) \cdot P(T) + P(L|M)^k P(M)}$$

b) Berechne diese Wahrscheinlichkeit für $k \in [1:4]$.
Einsetzen in die obige Formel ergibt:

$$P\big(W|\{W,L\}\big) = \frac{\frac{2}{3}\cdot(\frac{3}{4})^1}{\big((\frac{3}{4})^1+(\frac{1}{4})^1\big)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$
$$P\big(2W|\{2W,2L\}\big) = \frac{\frac{2}{3}\cdot(\frac{3}{4})^2}{\big((\frac{3}{4})^2+(\frac{1}{4})^2\big)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{24}{18} = \frac{1}{2}$$
$$P\big(3W|\{3W,3L\}\big) = \frac{\frac{2}{3}\cdot(\frac{3}{4})^3}{\big((\frac{3}{4})^3+(\frac{1}{4})^3\big)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{9}{32}}{\frac{7}{27}+\frac{8}{24}} = \frac{9}{20}$$
$$P\big(4W|\{4W,4L\}\big) = \frac{\frac{2}{3}\cdot(\frac{3}{4})^4}{\big((\frac{3}{4})^4+(\frac{1}{4})^4\big)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = woooosh = \frac{27}{70}$$

c) Derp fragt viermal dieselbe Person und erhält die Antwortfolge ”Osten, Osten, Osten, Westen”. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nach diesen vier Antworten die Richtung ”Osten” richtig?
Da der Mendacier nie die Wahrheit sagt und es nur zwei mögliche Antworten gibt, muss es sich bei einer abweichenden Antwort auf dieselbe Frage um einen Touristen handeln.

$$\begin{aligned}P\big(WWWL|\{WWWL,LLLW\}\big) &= \frac{P(T\ \ WWWL)}{P\big(\{T\ \ WWWL,\ T\ \ LLLW\}\big)} \text{ //wtf}\\ &= \frac{P(W|T)^3\cdot P(L|T)}{P(W|T)^3\cdot P(L|T)+P(L|T)^3\cdot P(W|T)}\\ &= \frac{\frac{27}{2^8}}{\frac{30}{2^8}} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}\end{aligned}$$

Hinweis: Verwende in dieser Aufgabe bedingte Wahrscheinlichkeiten und das Wegemodell.

5.3 Wettervorhersage

Im Mittel sagt der Wetterbericht für den kompletten Tag zu 60% gutes (G) und zu 40% schlechtes (S) Wetter vorher. Die Trefferquote liegt für die Vorhersage ”gut” (g) bei 80% und für die Vorhersage ”schlecht” (s) bei 90%.

a) Modelliere dieses Experiment im Wegemodell. Gib den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathscr{A},P)$ dabei explizit an.
Sei $\Omega := \{G,S\}\times\{g,s\}$ und $\mathscr{A} := 2^\Omega$. Um das Wahrscheinlichkeitsmaß $P:\mathscr{A}\to[0,1]$ anzugeben schreiben wir für $Y\in\{G,S\}$ und $y\in\{g,s\}$ kurz:

$$P(Y) := P\big(\{Y\}\times\{g,s\}\big),\quad P(y) := P\big(\{G,S\}\times\{y\}\big)$$

$$\begin{aligned}P(G) &= 0.6, & P(S) &= 0.4\\ P(g|G) &= 0.8, & P(s|G) &= 0.2\\ P(g|S) &= 0.1, & P(s|S) &= 0.9\end{aligned}$$

Für eine Zeichnung siehe Figure 1 //TO-DO: mit tikz selber zeichnen

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag gutes Wetter ist?
Wir verwenden die Fallunterscheidungsformel:

$$P(g) = P(g|G)\cdot P(G)+P(g|S)\cdot P(S) = 0.8\cdot 0.6+0.1\cdot 0.4 = 0.52$$

c) Heute sei gutes Wetter. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lautete der gestrige Wetterbericht ”gut”?
Wir verwenden die Formel von Bayes:

$$P(G|g) = \frac{P(g|G)\cdot P(G)}{P(g)} = \frac{0.8\cdot 0.6}{0.52} = \frac{12}{13}$$

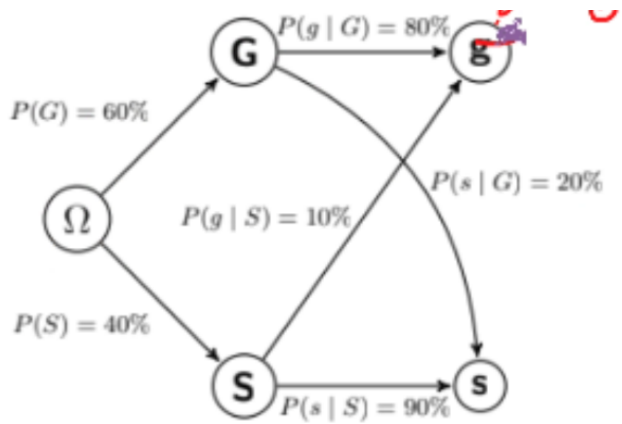


Figure 1: Gezeichnetes Wegemodell zu Aufgabe 5.3 a)

5.4 Unabhängigkeit und Normalverteilung

Wir betrachten eine zweidimensionale, gaußsche Normalverteilung $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ mit $\Omega := \mathbb{R}^2$, $\mathscr{A} := \mathscr{B}^2_{\mathbb{R}^2}$ und für $A \in \mathscr{A}$

$$P(A) = \frac{1}{2\pi} \int \int_A \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx\,dy.$$

Zeige, dass die Zufallsvariablen

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto y \qquad\qquad (x,y) \mapsto y$$

unabhängig sind.

Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig. Laut dem Satz von Folie 30 in Foliensatz 5 reicht es aus, folgendes zu zeigen:

$$P(X \leq x_0, Y \leq y_0) = P(X \leq x_0) \cdot P(Y \leq y_0)$$

Wir rechnen also nach:

$$\begin{aligned}
P(X \leq x_0, Y \leq y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{(\infty, x_0] \times (\infty, y_0]} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{y_0} \left(\int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dy \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_0} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \right) \\
&= P(X \leq x_0) \cdot P(Y \leq y_0)
\end{aligned}$$

5.5 Unabhängigkeitskriterium

Beweise den diskreten Fall des Satzes auf Folie 30 von Foliensatz 5. Sei also $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $Y_1, \ldots, Y_n$ eine endliche Familie von Zufallsvariablen $Y_i : (\Omega, 2^\Omega) \to (\Omega_i, 2^{\Omega_i})$. Zeige, dass $(Y_i)_{i \in [1:n]}$ genau dann unabhängig ist, wenn für alle $\omega_i \in \Omega_i$ gilt

$$P(Y_1 = \omega_1, \ldots, Y_n = \omega_n) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = \omega_i)$$

"Genau dann, wenn" $\rightarrow$ wir müssen beide Richtungen zeigen.

"$\Rightarrow$" Sei $(Y_i)_{i\in[1:n]}$ unabhängig.
Zu zeigen ist für alle $\omega_i \in \Omega_i$:

$$P(Y_1 = \omega_1, \dots, Y_n = \omega_n) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = \omega_i)$$

Dies folgt mit der Wahl $J = [1:n]$ und $A_i = \{\omega_i\}$ aber direkt aus der Definition der Unabhängigkeit.

"$\Leftarrow$" Es gelte die gerade bewiesene Richtung.
Zu zeigen ist, dass $(Y_i)_{i\in[1:n]}$ unabhängig ist. Sei also $J = \{j_1, \dots, j_{|J|}\} \subset [1:n]$ und für $j \in J$ sei $A_j \in \mathscr{A}_j$. Sei außerdem $K := \{k_1, \dots, k_{|K|}\} := J^C \subset [1:n]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{j\in J} P(Y_j \in A_j) &= \prod_{j\in J} \sum_{\omega_j \in A_j} P(Y_j = \omega_j) \\
&= \left(\prod_{j\in J} \sum_{\omega_j \in A_j} P(Y_j = \omega_j) \right) \cdot \left(\prod_{k\in K} \sum_{\omega_k \in \Omega_k} P(Y_k = \omega_k) \right) \\
&= \sum_{\omega_{j_1} \in A_{j_1}} \cdots \sum_{\omega_{j_{|J|}} \in A_{j_{|J|}}} \sum_{\omega_{k_1} \in \Omega_{k_1}} \cdots \sum_{\omega_{k_{|K|}} \in \Omega_{k_{|K|}}} \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = \omega_i) \\
&= \sum_{\omega_{j_1} \in A_{j_1}} \cdots \sum_{\omega_{j_{|J|}} \in A_{j_{|J|}}} \sum_{\omega_{k_1} \in \Omega_{k_1}} \cdots \sum_{\omega_{k_{|K|}} \in \Omega_{k_{|K|}}} P(Y_1 = \omega_1, \dots, Y_n = \omega_n) \\
&= P\left(\left(\bigcap_{j\in J} \{Y_j \in A_j\} \right) \cap \left(\bigcap_{k\in K} \{Y_k \in \Omega_k\} \right) \right) \\
&= \left(\bigcap_{j\in J} \{Y_j \in A_j\} \right)
\end{aligned}$$

5.5 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\Omega = \bigsqcup_{i\in I} B_i$ eine disjunkte Zerlegung von Ω in Ereignisse $B_i \in \mathscr{A}$ mit $P(B_i) > 0$, wobei I eine höchstens abzählbar unendliche Indexmenge ist.

a) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathscr{A}$ gilt

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

(Fallunterscheidungsformel)
folgt aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und der σ-Additivität von P:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} P(B_i) \cdot P(A|B_i) &= \sum_{i\in I} P(B_i) \cdot \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} \\
&= \sum_{i\in I} P(A \cap B_i) \\
&= P\left(\bigsqcup_{i\in I} A \cap B_i \right) \\
&= P(A)
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathscr{A}$ mit $P(A) > 0$ und alle $k \in I$ gilt

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i\in I} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$

folgt aus a) und der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
P(B_k|A) &= \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A|B_i)} \\
&= \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}
\end{aligned}$$

$P(B_k \cap A) = P(B_k) \cdot P(A|B_k)$ erhalten wir durch Umstellung der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

5.6 Definition stochastische Unabhängigkeit, ZV

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ zwei Zufallsvariablen und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Unter welchen Bedingungen sind X und Y bezüglich P stochastisch unabhängig? (Definition)
Sie sind stochastisch unabhängig wenn gilt

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$$

5.7 Definition stochastische Unabhängigkeit, Familie von ZVs

Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Unter welchen Bedingungen heißt eine Familie $(Y_i)_{i \in I}$ von ZVs $Y_i : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ stochastisch unabhängig bezüglich P? (Definition)
Die Familie heißt stochastisch unabhängig wenn für jede endliche Teilmenge $\emptyset \neq J \subseteq I$ und alle $A_j \in \mathscr{A}_j$ mit $j \in J$ gilt:

$$P\left(\bigcap_{j \in J} \{Y_j \in A_j\} \right) = \prod_{j \in J} P(Y_j \in A_j)$$

5.8 Musikanalyse-Software//TO-DO

Eine Musikanalyse-Software sortiert eine Sammlung von Musikstücken automatisch nach Stilrichtungen. Wir nehmen an, dass 50% der Musikstücke moderne Musik sind (M), 20% klassische Musik (K) und der Rest einem anderen Musikstil (X) angehört. Der verwendete Algorithmus erkennt die Genres Modern (m) und Klassik (k) mit 80% Wahrscheinlichkeit korrekt. Der Fall X wird zu 50% als m und zu 50% als k erkannt.

a) Ein Musikstück wird gemäß Gleichverteilung zufällig gewählt und der tatsächliche Stil (M, K oder X) sowie die Einordnung (m, k oder x) betrachtet. Modellieren Sie dieses Experiment im Wegemodell. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum explizit an.

$P(M) = 0.5$	$P(m\|M) = 0.8$	$P(k\|K) = 0.8$	$P(m\|X) = 0.5$
$P(K) = 0.2$	$P(k\|M) = 0.2$	$P(m\|K) = 0.2$	$P(k\|X) = 0.5$
$P(X) = 0.3$			

//TO-DO das ist kein Wahrscheinlichkeitsraum!
Für eine Zeichnung siehe Figure 2. //TO-DO: mit tikz selber zeichnen

b) Das gewählte Stück wurde als Klassik (k) eingeordnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei dem betrachteten Stück tatsächlich um klassische Musik handelt. Geben Sie den Rechenweg (mit kurzer Begründung) an.

$$\begin{aligned}
P(K|k) &= \frac{P(K) \cdot P(k|K)}{P(k)} \\
&= \frac{P(K) \cdot P(k|K)}{P(K) \cdot P(k|K) + P(M) \cdot P(k|M) + P(X) \cdot P(k|X)} \\
&= \frac{0,2 \cdot 0,8}{0,2 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,5} \\
&\approx 0.39
\end{aligned}$$

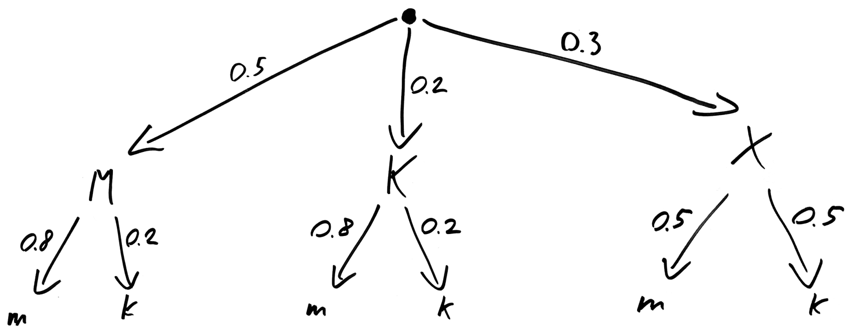


Figure 2: Gezeichnetes Wegemodell zu Aufgabe 5.9 a)

5.9 Stochastische Unabhängigkeit, Münzwurf

Beim zweimaligen Münzwurf einer fairen Münze betrachten wir die folgenden Ereignisse:

A : Beim ersten Wurf fällt Zahl.

B : Beim zweiten Wurf fällt Zahl.

C : Das Ergebnis beider Würfe ist gleich.

Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Experiment an. Ist die Familie (A,B,C) stochastisch unabhängig? Sind die Ereignisse (A,B,C) paarweise unabhängig?
Wahrscheinlichkeitsraum:
$\Omega = \{K,Z\}^2, \mathscr{A} = 2^\Omega, P \textit{ gleichverteilt}$

Damit die Familie (A,B,C) stochastisch unabhängig sind, muss $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ gelten.

$$P(A \cap B \cap C) = P\big(\{(Z,Z)\}\big) = \frac{1}{4}$$
$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ nicht stochastisch unabhängig

Sie sind paarweise unabhängig, da der Schnitt paarweise immer nur ein Element enthält.

5.10 Internetdienstleister

Ein webbasierter Internetdienstleister kategorisiert Fehler, die zum Ausfall seines Angebots führen, in drei Kategorien. Die folgende Tabelle erfasst die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers der jeweiligen Kategorie. Zusätzlich enthält sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler der Kategorie zu einem Ausfall von weniger bzw. mehr als einem Tag geführt hat.

Typ des Ausfalls	Wahrscheinlichkeit des Fehlers	Wahrscheinlichkeit, dass Ausfall	
		kürzer als ein Tag	länger als ein Tag
Wartungsfehler	2/5	7/8	1/8
Hard- und Softwarefehler	1/5	5/8	3/8
Angriff auf das System	2/5	1/4	3/4

a) Modellieren Sie einen zufälligen Ausfall als mehrstufiges Zufallsexperiment mit einem Wegemodell. Wählen Sie als erste Stufe des Typ des Ausfalls (**W, H, A**) und in der zweiten Stufe die Dauer des Ausfalls (**k**: kürzer als ein Tag, **l**: länger als ein Tag). Sie brauchen den Wahrscheinlichkeitsraum nicht explizit anzugeben.
Für eine Zeichnung siehe Figure 3. //TO-DO: mit tikz selber zeichnen

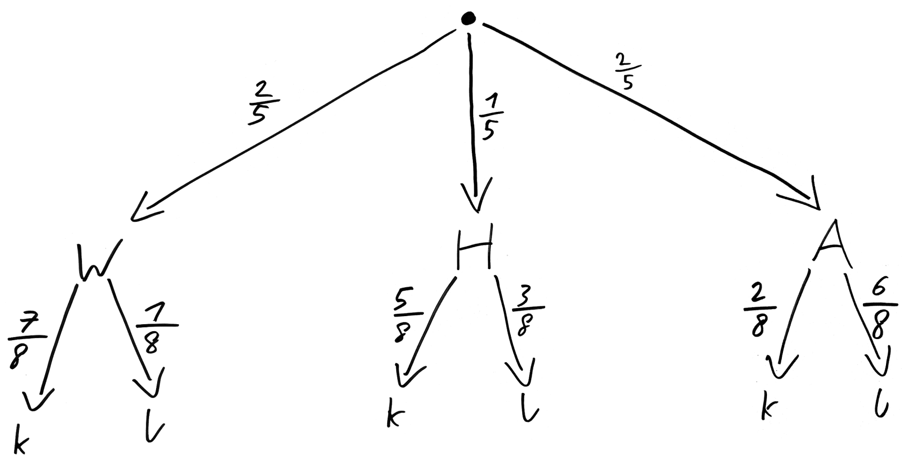


Figure 3: Gezeichnetes Wegemodell zu Aufgabe 5.11 a)

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich bei einem Ausfall, der länger als einen Tag dauert, um einen Wartungsfehler? Bitte geben Sie die Rechnungsformel (mit Begründung) und Ausdruck für den exakten Wert an.

$$\begin{aligned} P(W|l) &= \frac{P(W) \cdot P(l|W)}{P(l)} \\ &= \frac{P(W) \cdot P(l|W)}{P(W)\dot{P}(l|W) + P(H) \cdot P(l|H) + P(A) \cdot P(l|A)} \\ &\approx 0.1176 \end{aligned}$$

5.11 Abgewandeltes Ziegenproblem #1

Einem Kandidaten einer Spielshow werden drei Türen präsentiert, hinter denen genau ein Gewinn versteckt ist. Im Unterschied zum Ziegenproblem sind die Wahrscheinlichkeiten, den Gewinn hinter den jeweiligen Türen zu finden, allerdings nicht notwendig gleich und mit $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ gegeben. Im Wissen um die Wahrscheinlichkeiten entscheidet sich der Kandidat für die erste Tür. Daraufhin öffnet der Moderator eine der verbleibenden Türen, hinter denen der Gewinn nicht versteckt ist. Nun hat der Kandidat die Möglichkeit, seine Wahl auf die noch verschlossene Tür zu ändern, welche er mit der Wahrscheinlichkeit α wahrnimmt. Uns interessiert, ob er schließlich gewinnt.

a) Modellieren Sie dieses Experiment im Wegemodell. Unterscheiden Sie hierbei in der ersten Stufe die Fälle $\{T1, T2, T3\}$ die angeben, hinter welcher Tür der Gewinn war und in der zweiten Stufe die Fälle $\{G, V\}$, die für Gewonnen oder Verloren stehen. Beachte, dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen von der Wahrscheinlichkeit α abhängt, die angibt, ob der Kandidat wechselt.
Für eine Zeichnung siehe Figure 4. //TO-DO: mit tikz selber zeichnen

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat gewinnt, in Abhängigkeit von p_1, p_2, p_3 und α an.

$$\begin{aligned} P(G) &= P(T_1) \cdot P(G|T_1) + P(T_2) \cdot P(G|T_2) + P(T_3) \cdot P(G|T_3) \\ &= p_1 \cdot (1-\alpha) + (p_2 + p_3) \cdot \alpha \end{aligned}$$

c) Ist der Kandidat für $p_1 = \frac{1}{2}$ besser beraten zu wechseln, zu verbleiben oder ist es irrelevant?

$$\begin{aligned} P(G) &= p_1 \cdot (1-\alpha) + (p_2 + p_3) \cdot \alpha \\ &= \frac{1-\alpha}{2} + (p_2 + p_3) \cdot \alpha \\ &= (\frac{1}{2}) \cdot (1-\alpha) + (\frac{1}{2}) \cdot \alpha \quad \Rightarrow \text{ es ist egal} \end{aligned}$$

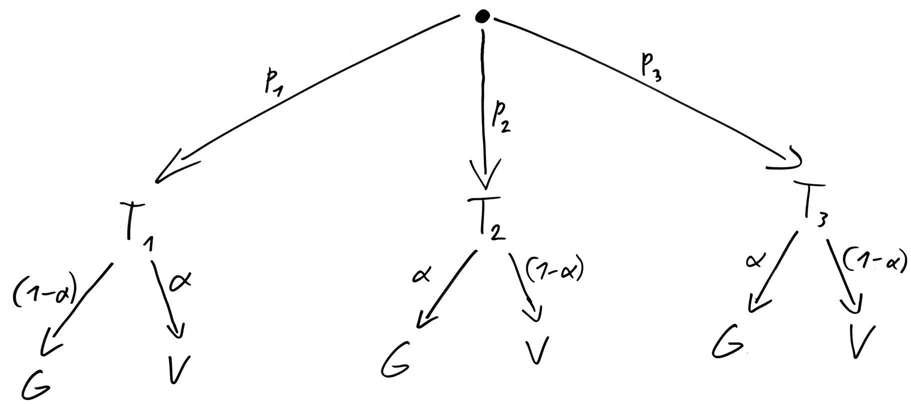


Figure 4: Gezeichnetes Wegemodell zu Aufgabe 5.12 a)

d) Sei $p_1 = 0.4$, $p_2 = p_3 = 0.3$ und $\alpha = 0.5$. Falls der Kandidat gewonnen hat, wie groß war die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn hinter der ersten Türe war?

$$P(T_1|G) = \frac{P(G \cap T_1)}{P(G)} = \frac{0.4 \cdot (1-0.5)}{0.4 \cdot (1-0.5) + (0.3+0.3) \cdot 0.5} = 0.4$$

5.12 Abgewandeltes Ziegenproblem #2

Einem Kandidaten einer Spielshow werden drei Türen präsentiert, hinter denen genau ein Gewinn versteckt ist. Die Wahrscheinlichkeiten, den Gewinn hinter den jeweiligen Türen selber zu finden, ist nicht notwendigerweise gleich und durch $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ gegeben. Der Kandidat entscheidet sich für die erste Tür. Daraufhin öffnet der Moderator eine der verbleibenden Türen, hinter denen der Gewinn nicht versteckt ist.

HIER TIKZ DIAGRAMM (S.14, Nr.13)

Unterscheiden Sie hierbei in der ersten Stufe die Fälle $\{T1, T2, T3\}$ die angeben hinter welcher Tür der Gewinn war und in der zweiten Stufe die Fälle O2,O3, die angeben, welche Tür der Moderator öffnet. Falls beide verbleibenden Türen Nieten sind, also die Wahl des Kandidaten richtig war, öffne der Moderator die Tür 2 mit Wahrscheinlichkeit β. Wie muss β gewählt werden, dass der Kandidat keine Rückschlüsse aus der sich öffnenden Tür auf seine Wahl zu Wechseln schliessen kann?

Wir betrachten das die beiden Ereignisse O2 und O3 nicht auseinander gehalten werden können. Da zu setzen wir $P(O_2) = P(0_3)$:

$$\begin{aligned}
P(O_2) &= P(O_3) \\
\Rightarrow p_1 * \beta + p_3 * 1 &= p_1 * (1-\beta) + p_2 * 1 \\
\Rightarrow p_1\beta + p_3 &= p_1 - p_1\beta + p_2 \\
\Rightarrow p_1\beta + p_1\beta &= p_1 + p_2 - p_3 \\
\Rightarrow \beta &= \frac{p_1 + p_2 - p_3}{2p_1} = \frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_3}{2p_1}
\end{aligned}$$

was passiert wenn $P(T_1|O_3) = P(T_2|O_3)$

$$\begin{aligned}
P(T_1|O_3) &= P(T_2|O_3) \\
\Rightarrow \frac{P(O_3|T_1}{P(O_3} &= \frac{P(O_3|T_2)}{P(O_3} \\
\Rightarrow P(O_3|T_1) &= P(O_3|T_2) \\
\Rightarrow 1-\beta &= 1 \\
\Rightarrow \beta &= 0
\end{aligned}$$

5.13 Addieren zweier ZV

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ zwei unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$P(X+Y=k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X=n) \cdot P(Y=k-n)$$

Hinweis: Führen Sie den Beweis durch Umformungen der rechten Seite der Gleichung.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X=n) \cdot P(Y=k-n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X=n \cap Y=k-n) \quad \textit{// da X und Y unabhängig} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X=n \cap Y=k-X) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X=n \cap X+Y=k) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X \in \mathbb{Z} \cap X+Y=k) \\
&= P(X+Y=k)
\end{aligned}$$

5.14 Bedingte Wahrscheinlichkeit

a) Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathscr{A}$. Wann und wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ definiert?

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ für } P(A) > 0$$

b) Modellieren Sie das Werfen eines fairen sechsseitigen Würfels durch Angabe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes.
$\Omega = [1:6], \mathscr{A} = 2^{\Omega}, P\ \textit{gleichverteilt}$

c) Geben Sie im Szenario (b) $P_A(B)$ für $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{3,4,5,6\}$ an.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

c) Welche $B \subseteq [1:6]$ sind im Szenario (b) stochastisch unabhängig zu $A = \{1,2,3\}$?
$B = \{1,2,3,4,5,6\}$

5.15 Neubewertung von Ereignissen

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir wissen, dass für ein festes geeignetes $A \in \mathscr{A}$ die Abbildung $B \mapsto P(B|A)$ wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ beschreibt. Sei weiterhin $A \neq \Omega$. Geben Sie ein $C \in \mathscr{A}$ an, sodass $C \neq \emptyset$ und $P(C|A) = 0$, oder begründen Sie, warum es ein solches C nicht geben kann.

$$\begin{aligned}
&P(C|A) = 0 \\
\Rightarrow &0 = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \\
\Rightarrow &\emptyset = A \cap C \\
\Rightarrow &A^c \cup \emptyset = A^c \cup A \cap C \\
\Rightarrow &A^c = C
\end{aligned}$$

5.16 Bedingte Wahrscheinlichsformel umformen

Es sei $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$ und P die Gleichverteilung auf Ω. Betrachten Sie das Ereignis $A := \{\omega \in \Omega \mid 10 \text{ teilt } \omega\}$ Weiterhin bezeichne B ein unbekanntes Ereignis. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B) = \frac{1}{50}$ und $P(B|A) = \frac{1}{20}$ seien gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \\ \frac{1}{50} &= \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{10}}{x} \\ \frac{1}{\frac{1}{50}} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{10} &= x \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5.17 Wahrscheinlichkeitsmaß nachweis

Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathscr{A}$ mit $P(A) > 0$. Zeigen Sie: Durch $B \mapsto P(B|A)$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_A auf $(\Omega, \mathscr{A})$ definiert.
Normierung:

$$P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = 1$$

σ-Additivität:
Sei $B = \bigsqcup\limits_{i \geq 1} B_i, \;\; B_i \in \mathscr{A}$. Dann gilt mit σ-Additivität von P:

$$\begin{aligned} P_A(B) &= P_A\left(\bigsqcup_{i \geq 1} B_i\right) \\ &= \frac{P\left(A \cap \left(\bigsqcup_{i \geq 1} B_i\right)\right)}{P(A)} \\ &= \frac{P\left(\bigsqcup_{i \geq 1} A \cap B_i\right)}{P(A)} \\ &= \frac{\sum_{i \geq 1} P(A \cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i \geq 1} P_A(B_i) \end{aligned}$$

5.18 Formel von Bayes

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\Omega = \bigsqcup_{i \in I} B_i$ eine disjunkte Zerlegung von Ω in Ereignisse $B_i \in \mathscr{A}$ mit $P(B_i) > 0$ wobei I eine höchstens abzählbar unendliche Indexmenge ist.

a) Wie lautete die Fallunterscheidungsformel?
Für alle $A \in \mathscr{A}$ gilt:
$P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) P(A|B_i)$.

b) Wie lautet die Formel von Bayes?
Für alle $A \in \mathscr{A}$ mit $P(A) > 0$ und alle $k \in I$ gilt:
$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i \in I} P(B_i)P(A|B_i).}$

5.19 Multiplikationsformel

Zeigen Sie: Ist $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, so gilt für $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ und $A := A_1 \cap \cdots \cap A_n$ mit $P(A) > 0$:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

(Multiplikationsformel) Bis auf den letzten Teil lässt sich alles wegkürzen.

$$\begin{aligned} &\cancel{P(A_1)} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \cdot \cdots \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)}{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}} \\ =&P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ =&P(A) \end{aligned}$$

5.20 Stochastische Unabhängigkeit

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Unter welchen Bedingungen heißt eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Ereignissen in $\mathscr{A}$ stochastisch unabhängig bezüglich P? (Definition)
Eine derartige Familie heißt unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge $\emptyset \neq J \subseteq I$ gilt:

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_i\right) = \prod_{j \in J} P(A_i)$$

5.21 Wahr oder Falsch

Welche Aussagen sind *richtig*:

- ■ Die Unabhängigkeit einer endlichen Familie von Ereignissen kann nicht durch Betrachtung der paarweisen Unabhängigkeit erschlossen werden.
  Richtig.
- ☐ Sind zwei Zufallsvariablen X und Y unkorreliert, so sind X und Y auch unabhängig.
  Falsch.
- ■ Sind zwei Zufallsvariablen X und Y unabhängig, so sind X und Y auch unkorreliert.
  Richtig.

6 Erwartungswert und Varianz

6.1 Glücksspiel

a) Ein Spiel bestehe aus dem Wurf zweier fairer Würfel. Ein Spieler bezahlt einem Veranstalter einen Spieleinsatz von 1€ pro Spiel. Fällt $(6,6)$, erhält der Spieler 10€, fällt nur eine Sechs, erhält er 2€, ansonsten nichts. Welchen Gewinn kann der Veranstalter pro Spiel erwarten?
$\Omega = [1:6]^2$
$\mathscr{A} = 2^\Omega$
P ist die Gleichverteilung
Betrachte die ZV die beschreibt, wie viel Gewinn wir machen:

$$\begin{aligned} X :& \Omega \to \{-1,1,9\} \\ & \omega \mapsto \begin{cases} 9 & \text{für} \omega = (6,6) \\ 1 & \text{für} (\omega_1 = 6 \vee \omega_2 = 6) \vee \omega_1 \neq \omega_2 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$E(X)$ existiert, da Ω endlich ist.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X[\Omega]} x \cdot P(X = x) \\ &= 9 \cdot P(X=9) + 1 \cdot P(X=1) + 1 \cdot P(X=-1) \\ &= 9 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{5+5}{36} + (-1) \cdot \frac{36-1-10}{36} \\ &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus den Kardinalitäten der Urbilder der Zufallsvariable, da wir eine Gleichverteilung benutzen. Wir machen also $\frac{1}{6}$ Verlust, somit macht der Veranstalter ebenso viel Gewinn

b) Derp wirft eine faire Münze solange, bis Wappen erscheint, höchstens jedoch 6 Mal. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Würfe an. Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechne den Erwartungswert $\mathbf{E}_P(X)$.
Die gefragte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist geometrisch verteilt, d.h. es gilt für $k \in [1:5]$

$$P(X=k) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$$

und

$$\begin{aligned} P(X=6) &= 1 - P(X<6) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 - \left(\frac{1-\frac{1}{2^6}}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = 2 - 2 \cdot \frac{63}{2^6} = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

Nun ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P(X) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{32} \\ &= \frac{16}{32} + \frac{16}{32} + \frac{12}{32} + \frac{8}{32} + \frac{5}{32} + \frac{6}{32} \\ &= \frac{63}{32} \approx 1.97 \end{aligned}$$

6.2 Erwartungswert und Varianz der Poissonverteilung

Sei $\lambda > 0, \Omega := \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $\mathscr{A} := 2^{\Omega}$. Wir betrachten die Zähldichte der Poissonverteilung, das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß und die Identität der Zufallsvariable:

$$P_\lambda : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to [0,1] \qquad P : \mathscr{A} \to [0,1] \qquad X : \Omega \to \Omega$$

$$k \mapsto e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad A \mapsto \sum_{\omega \in A} P_\lambda(\omega) \qquad k \mapsto k$$

Zeige, dass die Poissonverteilung Erwartungswert und Varianz λ hat, d.h. $\mathbf{E}_P(X) = \mathbf{V}_P(X) = \lambda$.

Hinweis: Verwende die Reihendarstellung der Exponentialfunktion und ihrer Ableitung $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Verwende für die Varianz $\mathbf{V}_P(X) = \mathbf{E}_P(X^2) - \mathbf{E}_P(X)^2$ (ohne Beweis).

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$E_p(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k * P_\lambda(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k * \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} * \lambda * \sum_{k=1}^{\infty} k * \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)! * k} = e^{-\lambda} * \lambda * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} * \lambda * e^{\lambda} = \lambda$

$E_P(X)^2 = \lambda^2$

$E_P(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 * P_\lambda(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 * e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} * \lambda * \sum_{k=1}^{\infty} k * \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} * \lambda * e^{\lambda} * (\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda$

$V_P(X) = E_P(X^2) - E_P(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

6.3 Erwartungswert und Varianz der geometrischen Verteilung

Es sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, das heißt $P(X = n) = p \cdot (1-p)^{n-1}$. Zeige für Erwartungswert $\mathbf{E}_P(X) = \frac{1}{p}$ und Varianz $\mathbf{V}_P(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Hinweis: Benutze die geometrische Reihe und ihre Ableitungen:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Verwende für die Varianz $\mathbf{V}_P(X) = \mathbf{E}_P(X^2) - \mathbf{E}_P(X)^2$ (ohne Beweis).

$$\begin{aligned}
E_p(X) &= \sum_i x_i * P(X = x_i) \\
&= \sum_i x_i * p(1-p)^{x_i - 1} \\
&= p * \sum_{n=1}^{\infty} n * (1-p)^{n-1} \quad \alpha = 1-p \\
&= p * \frac{1}{(1-\alpha)^2} = p * \frac{1}{(1-(1-p))^2} = p * \frac{1}{1-1+p^2} = \frac{1}{p} \\
E_p(X)^2 &= \frac{1}{p^2} \\
E_p(X^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 * p(1-p)^{n-1} \\
&= p \sum_{n=1}^{\infty} n^2 * (1-p)^{n-1} \\
&= p \sum_{n=1}^{\infty} (n(n+1) - n) * (1-p)^{n-1} \\
&= p \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) * (1-p)^{n-1} - n * (1-p)^{n-1} \\
&= p \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) * (1-p)^{n-1} - p * \sum_{n=1}^{\infty} n * (1-p)^{n-1} \\
&= p \sum_{n=1}^{\infty} \left(n(n+1) * (1-p)^{n-1} \right) - \frac{1}{p} \qquad \text{siehe}: E_p(X) \\
&= p * \frac{2}{(1-(1-p))^3} - \frac{1}{p} \\
&= p * \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2} \\
V_p(X) &= E_p\left(X^2\right) - E_p(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

6.4 Augenzahlen durchwürfeln

Mit einem fairen Würfel wird so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \dots, 6$ mindestens einmal erschienen ist.
$P := U_\Omega$ mit $\Omega = [1:6]^{\mathbb{N}}$. Angenommen es wurden bereits $i-1$ unterschiedliche Zahlen geworfen. Die Wahrscheinlichkeit im nächsten Wurf die i-te noch nicht geworfene Zahl zu erhalten ist

$$\frac{6-(i-1)}{6} = \frac{7-i}{6}$$

Daher ist jedes Y_i geometrisch verteilt mit eben dieser Erfolgschance, d.h.

$$P(Y_i = n) = \left(1 - \frac{7-i}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{7-i}{6}$$

a) Wie groß ist der Erwartungswert der Zahl der benötigten Würfe?
Nun ergibt sich sofort der Erwartungswert

$$\mathbf{E}_P\left(\sum_{i=1}^{6} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{6}{7-i} = 14.7$$

b) Wie groß ist die Varianz der Zahl der Würfe, die man braucht, wenn gerade das zweite verschiedene Wurfergebnis beobachtet wurde, bis das dritte kommt?
Die Zufallsvariable, deren Varianz gefragt ist, ist Y_3. Es gilt

$$\mathbf{V}_P(Y_3) = \frac{1-\frac{4}{6}}{(\frac{4}{6})^2} = \frac{36}{6}\cdot\frac{2}{16} = \frac{3}{4}$$

Hinweis: Betrachte die Zufallsvariable X_i, $i = 1,\dots,6$, die die Zahl der Würfe bezeichne bis die i-te verschiedene Zahl geworfen ist. Definiere die Zufallsvariablen $Y_1 := 1$, $Y_i := X_i - X_{i-1}$ für $i = 2,\dots,6$ und verwende Aufgabe 3).

6.5 Rechenregeln zur Kovarianz

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y, X_1, \dots, X_n \in \mathscr{L}^2(P)$ reelle Zufallsvariablen für die das zweite Moment existiert.

a) Zeige, dass gilt

$$\mathbf{V}_P\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_P(X_i) + \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^n \mathrm{Cov}_P(X_i, X_j)$$

Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_P\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \mathbf{E}_P\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i - \mathbf{E}_P\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right)^2\right)\\
&= \mathbf{E}_P\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i - \mathbf{E}_P(X_i)\right)^2\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^n \left(X_i - \mathbf{E}_P(X_i)\right)^2 + \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^n \left(\left(X_i - \mathbf{E}_P(X_i)\right)\cdot\left(X_j - \mathbf{E}_P(X_j)\right)\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_P(X_i) + \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^n \mathbf{V}_P \cdot \mathrm{Cov}(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

b) Angenommen, X, Y sind unabhängig. Zeigen dass X, Y dann auch unkorreliert sind.
Man muss sich eigentlich nur an die richtigen Eigenschaften und Begrifflichkeiten erinnern. Laut Produktregel[7] gilt für unabhängiges X, Y, dass $\mathbf{E}_P(X\cdot Y) = \mathbf{E}_P(X)\cdot\mathbf{E}_P(Y)$. Nun folgt für die Kovarianz:

$$(X,Y) = \mathbf{E}_P(X\cdot Y) - \mathbf{E}_P(X)\cdot\mathbf{E}_P(Y) = 0$$

6.6 Korrelationskoeffizient

Es seien X und Y Zufallsvariablen auf dem Raum $([1:n], 2^{[1:n}, P)$. Zeichnet man jedes Paar $(X(\omega), Y(\omega))$ als Punkt in der Ebene, so ist das Paar der Zufallsvariablen durch eine Punktmenge beschrieben (vgl. Folie 6.22).

a) Es sei $n = 5$, P gleichverteilt. Es seien X und Y gegeben durch

$X(1) = 5$	$X(2) = 4$	$X(3) = 3$	$X(4) = 2$	$X(5) = 1$
$Y(1) = -10$	$Y(2) = -8$	$Y(3) = -6$	$Y(4) = -4$	$Y(5) = -2$

Um den Korrelationskoeffizienten zu berechnen, werden die Varianzen X, Y sowie die Covarianz $\mathrm{Cov}(x, y)$ benötigt. Die Varianz einer Zufallsvariable berechnet sich durch

$$\mathrm{Var}(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

[7] siehe Foliensatz 6, Folie 6

Berechne also zunächst die Erwartungswerte von X,Y:

$$E(X) = \frac{5+4+3+2+1}{5} = 3$$
$$E(Y) = \frac{-10-8-6-4-2}{5} = -6$$

Aus den Erwartungswerten ergibt sich für die Varianz nun:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{5}\left(2^2+1^2+0^2+1^2+2^2\right) = 2$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{5}\left(4^2+2^2+0^2+2^2+4^2\right) = 8$$

Die Covarianz von X,Y wird berechnet durch

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

Berechne also $E(X,Y)$. Zunächst:

X	5	4	3	2	1
Y	-10	-8	-6	-4	-2
XY	-50	-32	-18	-8	-2

Daraus jetzt:

$$E(XY) = \frac{-50-32-18-8-2}{5} = -22$$

Nun kann die Covarianz berechnet werden:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = -22+18 = -4$$

Schlussendlich kann nun der Korrelationskoeffizient berechnet werden:

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{2\cdot 8}} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{16}} = \frac{-4}{4} = -1\end{aligned}$$

b) Es sei $n = 100$, P gleichverteilt. Es seien X und Y gegeben durch

$$X(1) = 4 \qquad X(7) = -2 \qquad X(19) = -4 \qquad X(99) = 2$$
$$Y(1) = 4 \qquad Y(7) = 0 \qquad Y(19) = -1 \qquad Y(99) = 1$$

Alle anderen Werte von X und Y seien 0. Berechne $E(X), E(Y).V(X), V(Y), \mathrm{Cov}(X,Y)$ und ρ_{XY}.

$$E(X) = \frac{4-2-4+2}{100} = \frac{0}{100} = 0$$

$$E(Y) = \frac{4-1+1}{100} = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$V(X) = \frac{1}{100}(4^2+2^2+4^2+2^2) = \frac{40}{100} = 0.4$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{100}\Big((4-0.4)^2+(0-0.4)^2+(-1-0.4)^2+(1-0.4)^2\Big) \\ &= \frac{1}{100}\cdot 17.84 = 0.1784 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{100}\Big(\Big(X(i)-E(X)\Big)\cdot\Big(Y(i)-E(Y)\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{100}(15.84+0.08+4.16+1.92+0) \\ &= \frac{1}{100}\cdot 22 = 0.22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= \frac{\text{Cov(X,Y)}}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}} \\ &= \frac{0.22}{\sqrt{0.4\cdot 0.1784}} \approx 0.82356 \end{aligned}$$

c) Es sei $n=4$ und P auf $[1:4]$ gegeben durch $P(1)=P(2)=\frac{2}{5}$ und $P(3)=P(4)=\frac{1}{10}$. Es seien X und Y gegeben durch

$X(1)=1$	$X(2)=-1$	$X(3)=2$	$X(4)=-2$
$Y(1)=-1$	$Y(2)=1$	$Y(3)=2$	$Y(4)=-2$

Zeige, dass X und Y unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.
Damit X,Y unkorreliert sind, muss $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ gelten.

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{4}{10}\cdot 1+\frac{4}{10}\cdot(-1)+\frac{1}{10}\cdot 2+\frac{1}{10}\cdot(-2) = 0 \\ E(Y) &= \frac{4}{10}\cdot(-1)+\frac{4}{10}\cdot 1+\frac{1}{10}\cdot 2+\frac{1}{10}\cdot(-2) = 0 \\ E(X,Y) &= \frac{8}{10}\cdot(-1)+\frac{2}{10}\cdot(-4) = 0 \\ \mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y) = 0 \end{aligned}$$

Somit sind X,Y unkorreliert. Sie sind unabhängig, wenn gilt: $\forall a,b : P(X=a,Y=b) = P(X=a)P(Y=b)$. Allerdings gilt für $X=1, Y=1$

$$\begin{aligned} P(X=1,Y=1) &= \frac{4}{10} \\ P(X=1)P(Y=1) &= \frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{16}{100} \end{aligned}$$

Da $\frac{4}{10} \neq \frac{16}{100}$ sind X,Y nicht unabhängig.

6.7 Definition von Erwartungswert, Standardabweichung und Varianz sowie Wohldefiniertheit dieser

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ zwei Zufallsvariablen.

a) Unter welcher Bedingung ist der Erwartungswert $E_P(X)$ wohldefiniert? Geben Sie eine Formel zur Bedingung des Erwartungswertes an.
Der Erwartungswert ist nach dem Umordnungssatz wohldefiniert wenn:

$$\sum_{x \in X[\Omega]} |x| * P(X = x) < \infty$$

b) Angenommen der Erwartungswert $E_P(X)$ ist wohldefiniert. Geben Sie eine Formel zu seiner Berechnung an (Definition).

$$E_P(X) = \sum_{x \in X[\Omega]} x * P(X = x)$$

c) Geben Sie Bedingungen dafür an, dass die Varianz $V_P(X)$ wohldefiniert ist. Geben Sie die Formel der Definition der Varianz an.
Die Varianz ist wohldefiniert wenn ein wohldefinierter Erwartungswert zu X existiert (?)

$$V_P(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

d) Wie lautet die Formel für Standartabweichung von X bzgl. P?

$$\sigma_P(X) = \sqrt{V_P(X)}$$

6.8 Unkorreliert und Unabhängig: Was folgt aus Was

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ zwei Zufallsvariablen und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass $E_P(X)$, $E_P(Y)$ und $E_P(XY)$ existieren.

a) Welche Gleichung drückt aus, dass X und Y unkorreliert sind?
X und Y sind unkorreliert wenn:

$$Cov_P(X, Y) = 0$$

b) Widerlegen Sie mit Hilfe der folgenden gemeinsamen Verteilung von X und Y den Satz: "Unkorrelierte Zufallsvariablen sind unabhängig“

$P(X = x, Y = y)$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
$y = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$y = -\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0

$$\begin{aligned}
Cov_P(X,Y) =& E_P(XY) - E_P(X)E_P(Y) \\
=& (\frac{1}{3} * (-1) * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * 0 * 0 + \frac{1}{3} * 1 * \frac{1}{3} + (-\frac{2}{3}) * (-1) * 0 + (-\frac{2}{3}) * 0 * \frac{1}{3} + (-\frac{2}{3}) * 1 * 0) \\
& - ((-1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3}) * (\frac{1}{3} * \frac{2}{3} - \frac{2}{3} * \frac{1}{3}) \\
=& (-\frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9} + 0 + 0 + 0) - (0) \\
=& 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ X und Y sind unkorreliert

Annahme: X und Y sind unabhängig. Dann gilt folgendes:

$$\Rightarrow E_P(Y = \frac{1}{3}|X = -1) = E_P(Y = \frac{1}{3}|X = 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = 0$$

$\Rightarrow$ das ist offensichtlich falsch

$\Rightarrow$ Annahme falsch

$\Rightarrow$ X und Y sind Abhängig

$\Rightarrow$ Der Satz ist per Gegenbeispiel widerlegt

c) Beweisen Sie: "Sind X, Y unabhängig, dann sind sie unkorreliert."

X und Y sind unabhänging

$$\Rightarrow E_P(XY) = E_P(X) * E_P(Y)$$

$$\Longleftrightarrow E_P(XY) - E_P(X) * E_P(Y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow Cov_P(X) = 0$$

6.9 Aufgabe //TO-DO

6.10 Aufgabe //TO-DO

Seien $X, Y\Omega :\rightarrow \mathbb{N}$ zwei Zufallsvariablen und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass $EP(X), EP(Y)$ und $EP(XY)$ existieren.

a) Geben Sie Bedingungen dafür an, dass die Kovarianz $\mathrm{Cov}_P(X,Y)$ wohldefiniert ist. Geben Sie die Formel der Definition von $\mathrm{Cov}_P(X,Y)$ an.
$Cov_P(X,Y)$ wohldefiniert wenn:

$$|X * Y| \leq X^2 * Y^2$$

Formel der Definition von $CovP(X,Y)$:

$$\mathrm{Cov}_P(X,Y) = P(X * Y) - E(X) * E(Y)$$

b) Unter welcher Bedingung sind X und Y unkorreliert?
X,Y unkorreliert wenn:

$$\mathrm{Cov}_P(X,Y) = 0$$

c) Wie ist der Korrelationskoeffizient von X und Y definiert?
Korrelationskoeffizient ρ:

$$\rho(X,Y) = \mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X) * \sigma(Y)}$$

6.11 Bernoulli-Folge //TO-DO

a) Sei $X_1,...,X_n$ eine endliche Bernoulli-Folge zur Erfolgswahrscheinlichkeit p, d.h. $X_i : \omega \to 0,1$ ist jeweils eine Zufallsvariable mit $P(X_i = 1) = p$. Welche Zufallsvariable S beschreibt die Anzahl der Erfolge?

$$S := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

b) Berechnen Sie die zu erwartende Erfolgsanzahl.

$$\begin{aligned} E_P(S) &= \sum_{i=1}^{n} E_P(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 1 * P(X_i = 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p = n * p \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie die Varianz

$$\begin{aligned} V_P(S) &= E(S^2) - E(S)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (E(X_i))^2) - (n * p)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} ((1^2 * E(X_i) = 1)^2) - (n * p)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (p^2) - (n * p)^2 \\ &= n * p^2 - n^2 * p^2 \\ &= (\frac{1}{n} - 1) * n^2 * p^2 \end{aligned}$$

d) Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein W-Raum und $X \in Ł^1(P)$ eine Zufallsvariable mit $X[\Omega] \subset \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$E_P(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

sei S(X) = $\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$

$$\begin{aligned} E_P(X) &= \text{Zeilensummen} \\ S(X) &= \text{Spaltensumme} \end{aligned}$$

6.12 Aufgabe //TO-DO

6.13 Aufgabe //TO-DO

6.14 Aufgabe //TO-DO

6.15 Aufgabe //TO-DO

6.16 Aufgabe //TO-DO

6.17 Aufgabe //TO-DO

6.18 Aufgabe //TO-DO

6.19 Aufgabe //TO-DO

6.20 Wahr oder falsch

a) Welche Aussagen sind *richtig*?

- ■ Varianzbildung ist linear.
  Richtig da 2) Rechenregel für Varianz und Kovariantz
- □ Jede diskrete Zufallsvariable besitzt einen Erwartungswert.
  Falsch, es exekutiert nur eine Erwartungswert für die Zufallsvaiable wenn $\sum_{x \in X[\Omega]} |x| P(X = x) < \infty$ für sie gilt.
- ■ Alle Zufallsvariablen in $\mathscr{L}^2(P)$ für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P haben einen Erwartungswert.
  Richtig da $\mathscr{L}^2$ laut Folie 17 Teilmenge von $\mathscr{L}^1$ und $\mathscr{L}^1$ die Menge ist die alle Funktionenn beinhaltet die Ein Erwartungswert haben
- □ Alle Zufallsvariablen in $\mathscr{L}^1(P)$ für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P haben eine Varianz.
  Falsch, da implikation aus Frage davor nur in eine Richtung gilt. Wenn also ZV in $\mathscr{L}^1$ muss zwar ein Erwartungswert nicht aber unbedingt eine Varianz existieren.
- ■ Wenn $X, Y \in \mathscr{L}^2(P)$ dann gilt $X \cdot Y \in \mathscr{L}^1(P)$.
  Richtig, da auf Folie 17 gezeigt wurde dass wegen $|XY| \leq X^2 + Y^2$ folgt aus $X, Y \in \mathscr{L}^2(P) \Rightarrow X \cdot Y \in \mathscr{L}^1(P)$

b) Seien $X, Y, X_i \in \mathscr{L}^2(P)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Kreuzen Sie die Aussagen an, die *falsch* sein können.

- □ $V_P(aX + b) = a^2 V_P(X)$.
  Richtig, da Rechenregel zu Varianzen: lineare Transformation
- ■ $V_P\left(\sum_{i=0}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V_P(X_i)$.
  Falsch: ist zwar Satz des Pythagoras aber gilt nur wenn $X_1, \ldots, X_n$ paarweise unkorreliert sind.
- □ $\mathrm{Cov}_P(X, Y)^2 \leq V_P(X) \cdot V_P(Y)$.
  Richtig, da Cauchy-Schwarz-Ungleichung

7 Gesetze der großen Zahlen

7.1 Repräsentative Umfrage

Bei einer repräsentativen Umfrage werden $n \in \mathbb{N}$ Bürger gebeten die amtierende Regierung mit Schulnoten von 1 (sehr gut) bis 6 (ungenügend) zu bewerten.

Sei Ω die Menge aller Bürger und $Y_1, \ldots, Y_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit Gleichverteilung auf Ω bezüglich einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^n, 2^{\Omega^n}, P)$. Dabei gibt Y_i an wer der i-te Teilnehmer der Umfrage ist.

a) Sei $X : \Omega \to \{1, \ldots, 6\}$eine Abbildung, die einem Bürger $\omega \in \Omega$ die Schulnote $X(\omega)$ zuordnet, die er der Regierung gibt. Erläutere die Bedeutung der folgenden Zufallsvariablen:

$$x_1 := X(Y_1) \qquad X_n := \tfrac{1}{n} * \textstyle\sum_{i=1}^{n} X(Y_i)$$

Gehe dabei insbesondere auf die Erwartungswerte $E_P(X_1)$ und $E_P(X_n)$ ein.

X_1 ist die Note, die der erste Umfrageteilnehmer Y_1 der bisherigen Regierung gegeben hat. X_n ist die Durchschnittsnote (arithmetisches Mittel), ausgerechnet über alle Umfrageteilnehmer $Y_1, \ldots, Y_n$. Der Erwartungswert $E_P(X_1)$ ist die tatsächliche Durchschnittsnote, die man erhalöten würde, wenn man alle Bürger befragen würde, denn Y_1 ist gleichverteilt auf Ω und somit:

$$E_P(X_1) = E_P(X(Y_1)) = \tfrac{1}{|\Omega|} * \textstyle\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

Da $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und identisch verteilt sind, gilt gleiches für $X(Y_1), \ldots, X(Y_n)$ und somit:

$$E_P(X_n) = \tfrac{1}{n} * \textstyle\sum_{i=1}^{n} E_P(X(Y_i)) = \tfrac{1}{n} * \textstyle\sum_{i=1}^{n} E_P(X_1) = E_P(X_1)$$

b) Gebe ohne Kenntnis der Verteilung von X_1 auf $\{1, .., 6\}$ eine Zahl $v \in \mathbb{R}$ an, sodass gilt

$$V_P(X_1) \leq v$$

Wir nutzen aus, dass X_1 auf $\{1, \ldots, 6\}$ abbildet (und sonst nichts). Man beachte, dass dann auch $E_P(X_1) \in [1, 6]$ gelten muss, denn der Erwartungswert entsteht durch eine Konvexkombination von Werten aus [1,6]. Es folgt

$$\begin{aligned} V_P(X_1) &= \sum_{x=1}^{6} P(X_1 = x) \cdot (x - E_P(X_1))^2 \\ &\leq \sum_{x=1}^{6} P(X_1 = x) \cdot 5^2 \leq 25 =: v \end{aligned}$$

Bemerkung: Bessere Schranken sind möglich. Die kleinstmögliche Schranke ist $\frac{25}{4}$. Wir beweisen allgemeiner, dass die Varianz einer Zufallsvariable Z auf dem Intervall $[a, b]$ maximal $\frac{(a-b)^2}{4}$ ist.

Beweis: Wir betrachten die folgende Funktion, die für $E_P(Z)$ den Wert $V_P(Z)$ annimmt:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto E_P((Z - t)^2) \end{aligned}$$

Nun leiten wir g ab um ein Minimum zu finden:

$$\begin{aligned} g(t) &= E_P(Z^2) - 2 \cdot t \cdot E_P(Z) + t^2 \\ g'(t) &= -2 \cdot E_P(Z) + 2 \cdot t \\ g''(t) &= 2 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$g'(t) = 0 \iff t = E_P(Z)$$

Somit liegt bei $E_P(Z)$ ein globales Minimum von g (denn $g'' \equiv 2 > 0$). Insbesondere folgt daraus:

$$V_P(Z) = g(E_P(Z)) \leq g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Nun wenden wir unser Wissen an, dass Z nur Werte zwischen a und b annimmt und erhalten:

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = E_P\left(\left(Z - \frac{a+b}{2}\right)^2\right) \leq E_P\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right) = \frac{(b-a)^2}{4}$$

c) Sei $\varepsilon > 0$. Zeige, dass gilt

$$P(|X_n - E_P(X_1)| \geq \varepsilon)) \leq \tfrac{v}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

Rechne $\frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$ für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $n = 1000$ aus. Was bedeutet das?
Hinweis: Verwende das schwache Gesetz der großen Zahlen.

Da $(Y_i)_{i \in \{1,..,n\}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen ist, gilt gleiches für $(X(Y_i))_{i \in \{1,..,n\}}$. Da v eine obere Schranke für alle $i \in \{1,..,n\}$ ist, ist es auch eine obere Schranke für $V_P(X(Y_i))$ für alle $i \in \{1,..,n\}$, denn die Zufallsvariablen sind identisch verteilt. Mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen (Foliensatz 7, Folie 5) folgt nun für alle $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X(Y_i) - E_P(X(Y_i)))\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X(Y_i) - E_P(X(Y_i)))\right| \geq \varepsilon \\ \iff & \left|\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X(Y_i)\right) - E_P(X_1)\right| \geq \varepsilon \\ \iff & |X_n - E_P(X_1)| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

Es bleiben die Zahlen einzusetzen. Wir verwenden die bestmögliche Schranke für die Varianz:

$$P(|X_n - E_P(X_1)| \geq \varepsilon) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2} = \frac{25}{4} \cdot \frac{2^2}{1000} = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40} = 2{,}5\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Schätzung der Schulnote um eine halbe Notenstufe oder mehr von der tatsächlichen Schulnote $E_P(X_1)$ abweicht, beträgt also schlimmstenfalls 2,5%.

7.2 Seminarvortrag

Die Zufallsvariablen V und D über Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ geben die Länge eines Seminarvortrages und der anschließenden Diskussion an, wobei $E_P(V) = 30$ [min], $E_P(D) = 15$ [min], $\rho_P(V,D) = -0.5$. (Tendenz: je länger der Vortrag, desto kürzer die Diskussion.)

a) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz der Gesamtdauer $G := V + D$.

Es gilt:

$$E_P(G) = E_P(V+D) = E_P(V) + E_P(D) = 45[min]$$
$$COV_P(V,D) = \rho_P(V,D) \cdot \sqrt{V_P(V) \cdot V_P(P)} = -0.5 \cdot 4 \cdot 3[min^2] = -6[min^2]$$
$$V_P(G) = V_P(V+D) = V_P(V) + V_P(D) + 2 \cdot COV_P(V,D) = (16+9-2\cdot 6)[min^2] = 13[min^2]$$

b) Der Seminarraum ist nur für 60 Minuten reserviert. Gebe anhand der Tschebyscheff-Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass die Veranstaltung vorzeitig abgebrochen werden muss.

Wir setzen $\varepsilon = 15$ [min] und erhalten:

$$P(G > 600) \leq P(|G - E_P(G)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V_P(G)}{\varepsilon^2} = \frac{13}{15^2} = 5,78\%$$

7.3 Versandaktion //TO-DO

Ein Versandhandel führt eine Werbeaktion durch. Die ersten 1000 Einsender einer Bestellung erhalten eine exklusive Damen- bzw. Herrenuhr. Nimm an, dass beide Geschlechter mit der gleichen Wahrscheinlichkeit Bestellungen aufgeben und dass die Bestellungen unabhängig sind. Wie viele Damen und Herren-uhren muss der Versandhandel beschaffen, damit der Vorrat mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% reicht? Schätze diese Anzahl anhand:

a) der Tschebyscheff-Ungleichung.

$$E(X) = n * p = 1000 * \frac{1}{2} = 500$$
$$V(x) = n * p(1-p) = 1000 * \frac{1}{4} = 250$$

Tschebyscheff-Ungleichung: $P(|X - E_P(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

$$\Rightarrow P(|X-500| \geq \varepsilon) \leq \frac{250}{\varepsilon^2} = 1 - 98\% \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{\frac{250}{0,02}} = 112$$
$$\Rightarrow P(|X-500| \geq 112) \leq 0,02$$

$\Rightarrow$ das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, das die benötigten Uhren pro Geschlecht um mehr als 112 von 500 abweichen kleiner als 0,02 ist.

$\Rightarrow$ man kann also mit 98% Wahrscheinlichkeit sagen, dass 612 Uhren pro Geschlecht reichen.

b) der Normalapproximation.

Normalapproximation: $N_{E_P(X_1), \frac{V_P(X_1)}{n}} \approx \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} X_i$

$//TO-DO$

7.4 Mittel der Abweichungen vom Erwartungswert //TO-DO

Sei (Ω, A, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $n \in N$ und seien $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen. Sei $v > 0$ mit $V_P(X_i) \leq v$ für alle $i \in 1, ..., n$. Wir betrachten das arithmetische Mittel der Abweichungen vom Erwartungswert:

$$Y_n := \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} X_i - E_P(X_i)$$

a) Zeigen Sie (mit Begründung), dass für die Varianz von Y_n gilt

$$V_P(Y_n) \leq \frac{v}{n}$$

$$0 = 0$$

b) Beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen, d.h. zeigen Sie (mit Begründung), dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

7.5 Schwache Gesetz der großen Zahl

a) Formulieren Sie das Schwache Gesetz der großen Zahl.

$$P(\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} |X_i - E_P(X_i)| \geq \varepsilon) \leq \frac{v}{n * \varepsilon^2} \quad \to^{n \to \infty} \ 0$$

b) Wenden Sie dieses Gesetz auf n Bernoulli-Versuche $X_1, ..., X_n$ zur Erfolgswahrscheinlichkeit p an: Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich die relative Häufigkeit der Erfolge um mindestens $\varepsilon > 0$ von p unterscheide

$$v = V_P(X) = p * (1 - p)$$
$$E(X) = p$$

$$\Rightarrow P(\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} |X_i - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p * (1 - p)}{n * \varepsilon^2}$$
$$\Rightarrow P(|Y_i - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n * \varepsilon^2}$$
$$\text{denn } p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$$

7.6 Konvergenz

Es sei (Ω, A, P) W-Raum, $Y, Y_1, Y_2, ...$ ZVs $\Omega \to \mathbb{R}$.

a) Wann heißt die Folge $(Y_n)_n$ stochastisch konvergent (oder P-konvergent) gegen Y ?

$$Y_n \to^P Y \iff \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P(|Y_n - Y| < \varepsilon) = 1$$

b) Wann konvergiert die Folge $(Y_n)_{n \leq 1}$ P-fast sicher gegen Y ?

$$(Y_n)_{n \leq 1} \to^P Y \iff P(A) = 1$$
$$\text{wobei } A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\}$$

7.7 Tschebyscheff-Ungleichung

Formulieren Sie den Satz über die Tschebyscheff-Ungleichung (ohne Beweis).

$$P(|X - E_P(X) \geq \varepsilon|) \leq \frac{V_P(X)}{\varepsilon^2}$$

7.8 Standardnormalverteilung

a) Geben Sie die Formel der Dichtefunktion zur Standardnormalverteilung an.

$$\phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

b) Geben Sie die Formel der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an.

$$\Phi_{0,1}(c) = N_{0,1}((-\infty, c]) = \int_{-\infty}^{c} \phi_{0,1}(x) dx$$

c) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz (ohne Beweis). Satz. Es sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter reellwertiger ZVs in $L^2(P)$ mit $E_P(X_i) = m$ und $V_P(X_i) = v > 0$. Sei $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ die n-te Partialsumme und

$$S_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}} * \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m}{\sqrt{v}}$$

die Standardisierung von S_n. Bezeichnet F_n die Verteilungsfunktion von S_n^*, so konvergiert F_n im Supremumsabstand gegen die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung:

$$\lim_{n\to\infty} d(F_n, \Phi) = 0$$

8 Markov-Ketten

8.1 PageRank //TO-DO

Übungsblatt 11, Aufgabe 1

8.2 Voraussetzung des Ergodensatzes //TO-DO

Übungsblatt 11, Aufgabe 2

8.3 Münzspiel //TO-DO

Übungsblatt 11, Aufgabe 3

8.4 Blumen kreuzen //TO-DO

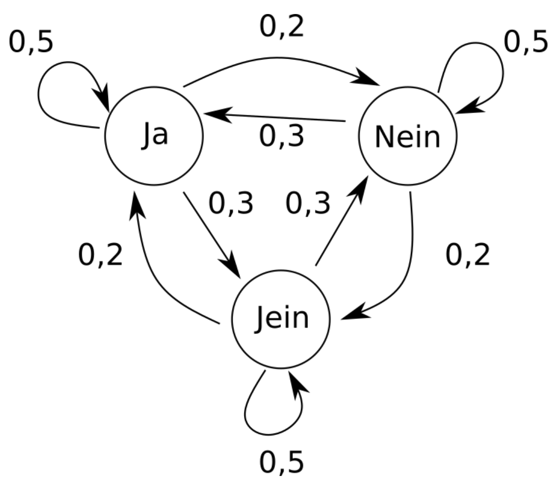
Übungsblatt 11, Aufgabe 4

8.4 Stille Post

Eine Reihe von Leuten spielt stille Post. Der erste Spieler in der Reihe flüstert dem Nächsten die Nachricht "Ja" zu. Von da an flüstert jeder Mitspieler dem Nächsten die Nachricht zu, die er meint erhalten zu haben. Bei jeder Weitergabe kann es zu Missverständnissen kommen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% wird aus "Ja" ein "Nein" und mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% ein "Jein". Ein "Nein" wird zu 20% ein "Ja" und zu "30%" ein "Jein". "Jein" wird zu 30% ein "Nein" und zu 30% ein "Ja".

Da die Spieler flüstern nehmen wir an, dass diese Ereignisse von Spieler zu Spieler unabhängig sind.

a) Stellen Sie einen Übergangsgraphen und eine Übergangsmatrix auf, mit denen sich eine entsprechende Markov-Kette beschreiben lässt. Hinweis: In der Matrix sollte die erste Zeile "Ja", die zweite Zeile "Jein" und die dritte Zeile "Nein" beschreiben.



//TO-DO das Diagramm ist leider Falsch

$$M = \begin{pmatrix} 50\% & 30\% & 20\% \\ 20\% & 30\% & 50\% \\ 30\% & 40\% & 30\% \end{pmatrix}$$

//TO-DO Die Matrix ist nicht so wie in der Aufgabenstellung gewünscht angefertigt deshalb sind alle Rechnungen mit Folgefehlern b

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Spieler dem Nächsten die Nachricht "Ja" weitergibt? (Mit Rechnung und Begründung).

$$\begin{aligned} t_0 &= \begin{pmatrix} 100\% & 0\% & 0\% \end{pmatrix} \\ t_2 &= t_0 * M^2 \\ &= t_0 * \begin{pmatrix} 0,37 & 0,32 & 0,31 \\ 0,31 & 0,35 & 0,34 \\ 0,32 & 0,33 & 0,35 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,37 & 0,32 & 0,31 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow P(Ja_{t_2}) &= 37\% \end{aligned}$$

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste, zweite und vierte Spieler die Nachricht "Ja" weitergeben? (Mit Rechnung und Begründung).

$$\begin{aligned} P(Ja_{t_0}) &= 100\% \text{ Da Aufgabenstellung} \\ t_1 &= t_0 * M = \begin{pmatrix} 50\% & 30\% & 20\% \end{pmatrix} \\ \Rightarrow P(Ja_{t_1}) &= 50\% \\ t_3 &= t_2 * M = \begin{pmatrix} 0,342 & 0,331 & 0,327 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow P(Ja_{t_4}) &= 34,2\% \end{aligned}$$

d) Wir erhöhen die Anzahl der Mitspieler $n \in N$. Wie hoch wird für $n \to \infty$ die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende die Nachricht "Ja" ankommt? (Mit Rechnung und Begründung).

Mit Ergodensatz: Wähle $L = 1$, berchen M^1.

$$M^1 = M = \begin{pmatrix} 50\% & 30\% & 20\% \\ 20\% & 30\% & 50\% \\ 30\% & 40\% & 30\% \end{pmatrix}$$

Alle ein Träge sind Posiv $\Rightarrow$ Laut Ergodensatz existiert eindeutige Grenzverteilung p.

$$\begin{aligned} & p * M = p \\ \iff & (p * M)^T = p^T \\ \iff & M^T * p^T = p^T \\ \iff & M^T * p^T - p^T = 0 \\ \iff & (M^T - E) * p^T = 0 \text{ wobei E die Einheitsmatrix ist} \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} p_1 * (50\% - 1) & p_2 * 20\% & p_3 * 30\% \\ p_1 * 30\% & p_2 * (30\% - 1) & p_3 * 40\% \\ p_1 * 20\% & p_2 * 50\% & p_3 * (30\% - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & p_1 = p_2 = p_3 \end{aligned}$$

da aber p ein Statistischer Vektor, muss

$$\begin{aligned} & p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ \Rightarrow & p_1 = p_2 = p_3 = 1/3 \end{aligned}$$

Da p die grenzverteilung ist wird bei $n \to \infty$

$$\begin{aligned} P(Ja_{t_\infty}) &= t_{\inf} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= p * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1/3 \end{aligned}$$

8.5 Dreiteilen //TO-DO Diagramm texten

Wir betrachten den endlichen Automaten in Abbildung 1. Der endliche Automat erwartet eine Ziffernfolge als Eingabe. Der Initialzustand ist 0 und die Übergänge sorgen dafür, dass in jedem Schritt der Zustand dem Zahlenwert der Eingabe Modulo drei entspricht. Insbesondere ist die Eingabe durch drei teilbar genau dann, wenn der Automat im Zustand 0 endet.
c

Dieser endliche Automat wird nun mit einer Folge unabhängiger, zufälliger Ziffern gespeist. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ziffer der Eingabe 0 oder 1 ist, ist jeweils $\frac{2}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit für die restlichen Ziffern $2,\ldots,9$ ist jeweils $\frac{1}{12}$.

a) Modellieren Sie das Zufallsexperiment durch eine Markov-Kette und geben Sie dabei einen Übergangsgraph und eine Übergangsmatrix an.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{4}{12} & \frac{3}{12} \\ \frac{3}{12} & \frac{5}{12} & \frac{4}{12} \\ \frac{4}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} * \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

//TO-DO Diagramm texten

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Eingabe mit zwei Ziffern durch drei teilbar ist? Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit durch die Markov-Kette.

$$\begin{aligned} t_2 &= t_0 * M^2 \\ t_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M^2 &= \frac{1}{144} \begin{pmatrix} 49 & 49 & 46 \\ 46 & 49 & 49 \\ 49 & 46 & 49 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow t_2 &= \frac{1}{144} \begin{pmatrix} 49 & 49 & 46 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow p(h) &= \frac{49}{144} \end{aligned}$$

c) Ermitteln Sie, ob die Markov-Kette eine eindeutige Grenzverteilung hat und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.
Wähle $L = 1$, da M^1 keine nicht Positiven Einträge hat gilt Ergodensatz. Daraus folgt es existiert Grenzverteilung p mit:

$$\begin{aligned} & p * M = p \\ \Rightarrow & p * \begin{pmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \\ 4 & 3 & -7 \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow & p_1 = p_2 = p_3 \\ \Rightarrow & p = \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8.6 Ein Kinderspiel //TO-DO Diagramm texten

Wir betrachten das Spiel mehrerer Kinder (A, B, C und D) mit einem Spielzeug. Während dem Spiel nehmen sie sich das Spielzeug gegenseitig ab. Nachdem die beiden grösseren (A und D) es nicht mehr abgeben, greift der Vater hin und wieder ein und gibt das Spielzeug dem kleinsten Kind (B). Das folgende Diagramm stellt den partiellen Übergangsgraphen des Spielzeugs dar:
//TO-DO Diagramm texten

a) Vervollständigen Sie obrigen Übergangsgraphen und geben Sie eine Übergangsmatrix an.
//TO-DO Diagramm texten
$A \rightarrow B = \frac{1}{4}$

$C \rightarrow C = \frac{1}{4}$
$D \rightarrow D = \frac{3}{4}$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

b) Hat diese Übergangsmatrix eine Grenzverteilung, und wenn ja, wieso? Falls möglich, ermittlen Sie die Wahrscheinlichkeit für jedes Kind das Spielzeug nach langer Zeit des Spielens zu haben.
Berachte Ergodensatze für L=3 und Π=M. Dann hat M^L keine Einträge die nicht größer als Null sind. Damit folgt mit Ergodensatz: Es exestiert Grenzverteilung p mit:

$$p * M = p \iff p * \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ mit Gauß folgt } p_1 = p_2 = p_3 = p_4$$

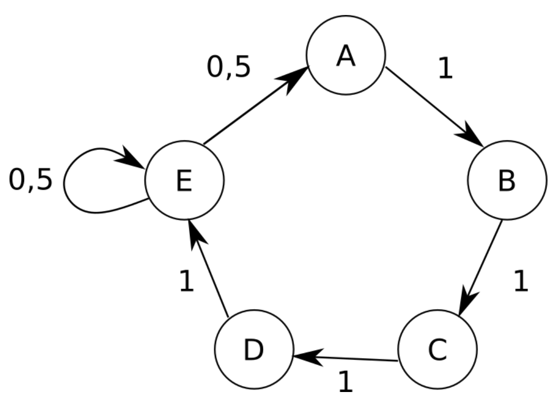
$$\text{da } \sum_{i=1}^{4} p_i = 1 \text{ muss } p = \frac{1}{4} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8.7 Fragen zur Grenzverteilungen //TO-DO Diagramm texten

Gegeben sei ein Markovprozess mit 5 Zuständen A, B, C, D und E und der Übergangsmatrix Π. Falls in einem Schritt die Wahrscheinlichkeit der Zustände durch den Vektor p gegeben sind, sind sie im nächsten Schritt durch den Vektor $p\Pi$ gegeben.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie den Übergangsgraphen für die Übergangsmatrix Π an



b) Im allgemeinen, unter welchen Bedingungen hat der Markovprozess eine Grenzverteilung nach dem Ergodensatz
Falls ein Π zeilenstochastisch ist und ein $L \geq 1$ exestiert so das Π^L nur noch Einträge erhält die größer als Null sind.

c) Falls im allgemeinen eine eindeutige Grenzverteilung p existiert, welche Gleichungen legen sie eindeutig fest?
$p * \Pi = p$ (p ist Zeilenvektor)

d) Welche der folgenden Verteilungen könnte die Grenzverteilung sein: Vektoren texen
Richtige Verteilung: i)

ii) geht nicht, da sie nicht Spaltenstochstisch ist.
iii) geht nicht da sich der unterste eintrag des Vektor bei der Mutilpikation mit Π sich verändert.
iv) geht nicht, da sie nicht Spaltenstochstisch ist.
v) geht nicht da sich der unterste eintrag des Vektor bei der Mutilpikation mit Π sich verändert.
vi geht nicht da nicht Spaltenstochstisch ist

8.8 Def. Markov-Kette und Grenzverteilung

a) Sei $X_0, X_1, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, A, P) mit Werten in V , d.h. $X_i : (\Omega, A) \to (V, 2^V)$. Definieren Sie möglichst genau, wann diese Folge als Markov-Kette bezeichnet werden kann.

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit von X_{i+1} hängt nur von X_i und nicht von dessen Vorgängern ab.
- Die bedingten Verteilungen hängen nicht vom Zeitpunkt n ab.

b) Gegeben sei eine Übergangsmatrix Π:

$$\Pi = \frac{1}{4} * \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie, ob die Übergangsmatrix eine Grenzverteilung hat und begründen Sie Ihre Antwort
Sei $L = 2$

$$\Pi^2 = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 11 & 3 & 2 \\ 10 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Damit Existiert L, so dass Π^L keine Einträge besitzt die Null oder kleiner sind. Damit Lässt sich der Ergodensatz anwenden und dieser Besagt dass ein Grenzberteilung für Π existieren muss

8.9 Aufgabe //TO-DO

8.10 Aufgabe //TO-DO

8.11 Aufgabe //TO-DO

9 Steilkurs Statistik

9.1 Statistik einer unfairen Münze

Das Ergebnisse stimmt, die wollen aber laut meinem Tutor auch noch die Ableitung sehen mit dem man auch x/n kommt
Eine Münze wird sechs mal geworfen. Die beobachtete Ergebnisfolge ist

Zahl, Zahl, Kopf, Zahl, Kopf, Zahl.

Schätze die Wahrscheinlichkeit $\Theta \in [0,1]$ mit der die Münze bei einmaligem Wurf Kopf zeigt unter der Annahme, dass die sechs Würfe voneinander unabhängig waren. Benutze hierfür ein geeignetes statistisches Modell und den Maximum-Likelihood-Schätzer.

Gegeben:
Münze wird 6 Mal geworfen
Ergebnisse = {Zahl, Zahl, Kopf, Zahl, Kopf, Zahl}

Gesucht:
Wahrscheinlichkeit $\Theta \in [0,1]$ beim einmaligen Wurf, Kopf zu erzielen.

Aus der Beobachtung folgt:
n = 6
{Zahl, Zahl, Kopf, Zahl, Kopf, Zahl} x = 2, also zwei Mal Kopf

Maximum Likehood Schätzer:
Θ (X_1, X_2, ..., X_n) = $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{x}{n}$

Für x = 2 bei n = 6 Würfen folgt:
$\theta = \frac{x}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} =$ 33,3 Prozent
Die Wahrscheinlichkeit, dass beim einmaligen Wurf ein Kopf rausgekommen ist: P(Kopf) = 33,3 Prozent

9.2 Statistik einer unfairen Münze 2

auch hier ist das Ergebnisse korrekt obwohl das nicht die Angedachte Methode ist. Eigentlich soll hier ein Log-Likehood-Schätzer auf der geometrischen Verteilung angewendet werden kommt aber das selbe raus.
Eine unfaire Münze wird so lange geworfen bis sie zum ersten mal Kopf zeigt. Das geschieht beim vierten Wurf. Bestimme, unter Verwendung eines geeignetes statistischen Modells, den Maximum-Likelihood- Schätzer für die Wahrscheinlichkeit $\Theta \in [0,1]$, dass die Münze bei einem Wurf Kopf zeigt.

Gegeben:
4-maliger Wurf mit einer unfairen Münze
Ergebnisse = {Zahl, Zahl, Zahl, Kopf}

Gesucht:
Wahrscheinlichkeit $\Theta \in [0,1]$ beim einmaligen Wurf, Kopf zu erzielen.

Lösung:
Aus der Beobachtung folgt:
n = 4 {Zahl, Zahl, Zahl, Kopf}
x = 1, also einmal Kopf.

Maximum Likehood Schätzer:
$\Theta(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{x}{n}$

Für x = 1 bei n = 4 Würfen folgt:

$\Theta = \frac{x}{n} = \frac{1}{4}$ = 25 Prozent

Die Wahrscheinlichkeit, dass beim einmaligen Wurf ein Kopf rausgekommen ist:
P(Kopf) = $\frac{1}{4}$ = 25 Prozent

9.3 Statistik einer unfairen Münze 3

Um eine unfaire Münze zu vermessen wird sie n mal geworfen, wobei k mal Kopf erscheint. Danach wird sie zusätzlich so lange geworfen, bis sie das nächste mal Kopf zeigt, was nach m Würfen eintritt. Seien X und Y Zufallsvariablen für den Ausgang der beiden Experimente und sei p $\in$ [0, 1] die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze in einem Wurf Kopf anzeigt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das gemessene Ereignis:

$$P(X=k,Y=m) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \dot{} (1-p)^{m-1} p = \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k+m-1}$$

Schätze p mit einem Maximum-Likelihood-Schätzer. Was ergibt sich für den Fall n = 10, k = 8 und m = 8?
Gegeben:
n = 10 Würfe
k = 8 Kopf
m = 8 Serien von Kopf

Gesucht: Die Wahrscheinlichkeit von Kopf mit dessen Ergebnis.

Lösung:

$$P(\text{Kopf}) = \binom{n}{k} * (\theta^{k+1} * (1-\theta)^{n-k+m-1})$$

Bestimme Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} * \log(P(x,\theta)) &= \frac{d}{d\theta} * (\log(\theta^{k+1}) + \log(1-\Theta)^{n-k+m-1}) \\
&= \frac{d}{d\theta} \binom{n}{k} ((k+1) * log(\theta) + (n-k+m-1) * log(1-\Theta)) \\
&= \binom{n}{k} ((k+1) * \frac{1}{\theta} - (n-k+m-1) * \frac{1}{1-\theta})
\end{aligned}$$

Nullstelle bestimmen:

$$\begin{aligned}
0 &= (k+1) * \frac{1}{\theta} - (n-k+m-1) * \frac{1}{1-\theta} \\
\Rightarrow (k+1) * \frac{1}{\theta} &= (n-k+m-1) * \frac{1}{1-\theta} \\
\Rightarrow (k+1) * (1-\theta) &= \theta n - \theta k + \theta m - \theta \\
\Rightarrow k + k * \theta + 1 - \theta &= \theta n - \theta k + \theta m - \theta \\
\Rightarrow k+1 &= \theta n + \theta m \\
\Rightarrow k+1 &= \theta(n+m) \\
\Rightarrow \frac{k+1}{n+m} &= \theta
\end{aligned}$$

Für n = 10, k = 8, m =8 folgt:

$$\theta = \frac{8+1}{10+8} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Die Wahrscheinlichkeit für das gemessene Ergebnis ist 50 %

9.4 ML-Schätzung für Poisson-Verteilung

Es sei L_x die Likelihood-Funktion zu einer Stichprobe $x \in \mathbb{N}$ mit $L_x(a) = P_a(x)$ für reelle $a > 0$. Dabei bezeichne P_a die Poissonverteilung zum Parameter $a > 0$. Bestimme die Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{a}(x)$ von a.

Possonverteilung:

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda}$$

Betrachte log-Likelihood-Schätzer: (Folgende Umformung möglich weil: $a > 0 \ \& \ x > 0$)

$$\begin{aligned}
\ln(P_a(x)) &= \ln(\frac{a^x}{x!} * e^{-a}) \\
&= \ln(\frac{a^x}{x!}) * \ln(e^{-a}) \\
&= \ln(a^x) - \ln(x!) - a \\
&= x * \ln(a) - \ln(x!) - a
\end{aligned}$$

Berechne Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}\ln(P_a(x)) &= \frac{d}{da} x * \ln(a) - \ln(x!) - a \\
&= \frac{x}{a} - 1
\end{aligned}$$

Berechnet Extrema (Nullstellen):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{x}{a} - 1 \\
\Rightarrow 1 &= \frac{x}{a} \\
\Rightarrow a &= x \\
&\Rightarrow \text{Extremum an } a
\end{aligned}$$

Berechen zweite Ableitung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}\frac{d}{da}\ln(P_a(x)) &= \frac{d}{da}\frac{x}{a} - 1 \\
&= -\frac{1}{a^2} < 0 \\
&\Rightarrow \text{alle Extrema sind Maxima}
\end{aligned}$$

Betrachte Randstellen:

$$\begin{aligned}
a = 0 &\rightarrow \text{fehler: ln(0)=?} \\
a = 1 &\rightarrow x * \ln(1) - \ln(x!) - 1 \\
&\qquad = -ln(x!) - 1 \\
&\qquad < x * \ln(x) - \ln(x!) - x \quad \text{da } \ln(x) > 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Randstellen brauchen nicht weiter betrachtet zu werden

Lösung: $\hat{a}(x) = x$

9.5 Erwartungstreuer Schätzer einer unfairen Münze

Eine unfaire Münze wird n = 1000 mal geworfen. Sie zeigt dabei k = 364 mal Zahl. Geben Sie zu diesem Experiment ein statistisches Modell basierend auf einer Binomialverteilung an und schätzen Sie mit einem Maximum-Likelihood-Schätzer (mit Formel,Rechnung und Begründung) die Wahrscheinlichkeit p $\in$ [0, 1], dass die Münze bei einem Wurf Zahl zeigt. Geben Sie außerdem an (mit Begründung), ob der gefundene Schätzer erwartungstreu ist.

Als statistisches Modell wählen wir das Binomialmodell mit der Likelihood-Funktion

$$p(k,\theta) = \binom{N}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$$

Zur Maximum-Likelihood-Schätzer-Bestimmung bei k Erfolgen betrachten wir die Nullstellen der Ableitung der Logarithmischen-Likelihood-Funktion:

$$0 = \frac{d}{d\theta}log(p(k,\theta))$$

Mit der ketten Regel erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\theta}(k*log(\theta)+log(1-\theta)*(n-k)) \\ \Rightarrow 0 &= \frac{d}{d\theta}(k*log(\theta)+(n-k)*log(1-\theta)) \end{aligned}$$

da wir wissen, dass $\frac{d}{dx}log(x) = 1/x$, folgt daraus:

$$\begin{aligned} 0 &= k*\frac{1}{\theta}+(n-k)*\frac{1}{1-\theta}*\frac{d}{dx}(1-\theta) \\ \Rightarrow 0 &= k*\frac{1}{\theta}+(n-k)*\frac{1}{1-\theta}*(0-1) \\ \Rightarrow 0 &= \frac{k}{\theta}-\frac{n-k}{1-\theta} \end{aligned}$$

Da wir nicht durch 0 dividieren dürfen folgt:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \theta \neq 0 \;\; \& \;\; \theta \neq 1 \\ &\Rightarrow 0 = k(1-\theta)-(n-k)*\theta \\ &\qquad = k-\theta*k-\theta*n+\theta*k \\ &\qquad = k-\theta*n \\ &\Rightarrow \theta = \frac{k}{n} \end{aligned}$$

Wenn wir das in die nächst höhere Ableitung einsetzen erhalten wir ein Negatives Ergebnis, daher wissen wir, dass an dieser Stelle ein Maximum vorliegt. Daraus Folgt:

$$T(k) = \frac{k}{n}$$

Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit $p = P(Zahl) = \frac{k}{n} = \frac{364}{1000} = 0,364$

Test der Erwartungstreue:

Für die Erwartungstreue muss gezeigt werden, dass $E[T(x)] = p$ ist, wobei p der Erfolgswahrscheinlichkeit der unfairen Münze beschreibt, also die Wahrscheinlichkeit für Zahl und x ist die gegebene Stichprobe, also ein Tupel der Form $(x_1, x_2, \dots, x_{1000})$ mit $x_i \in \{0,1\}, i \leq 1000$.

Wir definieren K als Zufallsvariable, die jedem Tupel x, die Anzahl der Erfolge zuweist, formal: $K(x) = \sum_{i=1}^{1000} x_i$.

T(x) lässt sich dann anders schreiben als $T(x) = \frac{K(x)}{n}$.

Wofür haben wir das jetzt gemacht?

K(x) ist nun eine binomailverteilte Zufallsvariable. Von der können wir den Erwartungswert bestimmen, nämlich $E[K(x)] = n \cdot p$.

Da die Herleitung für diese Formel lang ist, wird hier nur auf den Wikipediaartikel mit der Herleitung verwiesen: `https://de.wikipedia.org/wiki/Binomialverteilung#Erwartungswert`

Nun wollen wir den Erwartungswert von T(x) bestimmen:

$$\begin{aligned} E[T(x)] = E[\frac{K(x)}{n}] &\overset{)^1}{=} \frac{1}{n} E[K(x)] \\ &\overset{)^2}{=} \frac{1}{n} n \cdot p = p \end{aligned}$$

$)^1$: Linearität des Erwartungswertes ausgenutzt.
$)^2$: Oben angegebene Formel für Erwartungswert von Binomialverteilung eingesetzt.
Wir sehen, dass also, dass $E(T(x)) = p$ und somit ist der Schätzer erwartungstreu.

9.6 Schätzen des Zufallszahlenbereichs //TO-DO

Ein Zufallsgenerator liefert gleichverteilt natürliche Zahlen aus einem Interval [a, b] mit $a, b \in N$. Es werden k Zufallszahlen $x_1, \ldots, x_k \in N$ generiert. Schätzen Sie die Parameter a und b aus den $(x_i)_{i=1\ldots k}$ mit einem Maximum-Likelihood Schätzer.

a) Geben Sie zu diesem Experiment ein statistisches Modell $(\chi, \mathscr{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ an.
Produktmodel

$$\begin{aligned} \chi &= [a:b]^n \\ \mathscr{A} &= \mathscr{B}^{\circ n}_{[a:b]^n} \\ (P_\theta)_{\theta \in \Theta} &= (\mathscr{U}^{\circ n}_{[a:b]^n})_{a>b} \end{aligned}$$

b) Leiten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für die Intervalgrenzen a und b aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_k$ her.

c) Welche Parameter $\hat{a}$ und $\hat{b}$ schätzt Ihr Schätzer für die Folge 61, 69, 57, 71, 66, 79, 83, 91, 56, 71?

d) Welche Gleichung müsste dieser Schätzer erfüllen, um erwartungstreu zu sein?

9.7 Definition eines statistischen Modells

Definieren Sie den Begriff des statistischen Modells inklusive aller vorkommenden Begriffe.
Ein statistisches Modell ist ein Tripel $M = (\chi, \mathscr{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ bestehend aus

- einem Stichprobenraum χ
- einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ auf χ
- einer Familie $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ von W-Maßen auf $(\chi, \mathscr{A}), |\Theta| > 2$.

9.8 Definition von Statistik, Schätzer und MLS

a) Definieren Sie die Begriffe der Statistik und des Schätzers.
Es sei $(\chi, \mathscr{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ ein statistisches Modell und (Σ, S) ein Messraum

- Eine beliebige ZV $S : (\chi, \mathscr{A}) \to (\Sigma, S)$ heißt eine Statistik
- Sei $\tau : \Theta \to \Sigma$ eine Abbildung, die jedem $\theta \in \Theta$ eine Kenngröße $\tau(\theta) \in \Sigma$ zuordnet. Eine Statistik $T : X \to \Sigma$ heißt dann ein Schätzer für τ

b) Wann heißt ein Schätzer Maximum-Likelihood-Schätzer?
Ein Schätzer $T : X \to \Theta$ für θ heißt Maximum-Likelihood-Schätzer, wenn für jedes $x \in X$ stets $\tau(x)$ eine Maximalstelle von p(x, ·) ist, d.h.:

$$p(x, T(x)) = \max_{\theta \in \Theta} p(x, \theta).$$

9.9 Wahr oder falsch

- ☐ Erwartungstreue Schätzer haben einen kleineren quadratischen Fehler als nicht erwartungstreue Schätzer.
  Kommt darauf an, siehe Beispiel: ”Ein neuer Schätzer” aus dem Skript.
- ■ Likelihood-Funktionen und dazugehörige Log-Likelihood-Funktionen haben dieselben Maximalstellen
  Richtig, da Monotonie der Logarithmus-Funktion gilt
- ■ Das Produktmodell eines parametrischen Modells ist wieder parametrisch
  Richtig, da Bemerkung zu Produktmodelle
- ■ Das Produktmodell eines Standartmodells ist diskret oder stetig.
  Richtig, da Bemerkung zu Produktmodelle. Es ist wieder ein Standartmodell und somit diskret oder stetig