Kapitel 8: Markov-Ketten

Spartak Ehrlich
Stocha ist doof

1 Grundlagen

- geht um ZVs die eine einfache Form von stochastischer Abhängigkeit haben
- und zwar ist die Zufallsvariable $n+1$ nur abhängig von der ZV n
- bei diesen ZVs interessieren wir uns für das Langzeitkonvergenzverhalten (Markov-Ketten)

2 Stochastische Matrizen und Markov-Ketten

2.1 Definition: Stochastische Matrizen

Sei $V \neq \emptyset$ und $\prod = (\prod(x,y))_{x,y \in V}$ eine reellwertige Matrix.

- $\prod$ heißt zeilenstochastisch, wenn in jeder Zeile der Matrix $\prod$ eine W-Funktion auf V steht. Das heißt:
  - alle Einträge von $\prod$ liegen im Intervall $[0:1]: \prod \in [0:1]^{V \times V}$
  - für alle $x \in V$ ist $\sum_{y \in V} \prod(x,y) = 1$
- Wir betrachten den Zufallsprozess in V bei der jedem Schritt die Wahrscheinlichkeit $\prod(x,y)$ vom Zustand x zum Zustand y springt. Symbolisch mit: $x \overset{\prod(x,y)}{\rightarrow} y$

2.2 Definition: Markov Kette

- Eine Folge von $X_0, X_1, \dots$ von ZVs auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in V, d.h. $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (V, 2^V)$ heißt **Markov-Kette mit Zustandsraum V und Übergangmatrix $\prod$**, wenn für alle $n \geq 0$ und für alle $x_0, \dots, x_{n+1} \in V$ folgende Markov Eigenschaft gilt: $P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$ sofern $P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0$ ist.
- Die Verteilung $\alpha := P \circ X_0^{-1}$ von X_0 heißt **Startverteilung der Markov-Kette**

2.3 Satz: Matrixpotenzen

Die n-te Potenz $\prod^n$ der zeilenstochastischen Matrix $\prod$ enthält an der Position (x,y) die Wahrscheinlichkeit, in genau n Schritten vom Zustand x in den Zustand y zu gelangen:

- $P^x(X_n = y) = \prod^n(x,y)$

2.4 Ergodensatz:

Es sei $\prod = \pi_{i,j} \in [0:1]^{n \times n}$ zeilenstochastisch. Ferner gebe es ein $L \geq 1$, sodass alle Einträge in $\prod^L$ positiv sind. Dann gibt es eine W-Funktion $p = (p_1, \dots, p_N)$ die sog. Grenzverteilung mit folgenden Eigenschaften:

- $\lim_{m \to \infty} \prod^m =: \prod^\infty$ existiert und in jeder Zeile von $\prod^\infty$ steht die Grenzverteilung.
- Die Matrixfolge $(\prod^m)_{m \geq 1}$ konvergiert exponentiell schnell gegen $\prod^\infty$
- Die Grenzverteilung p ist die eindeutig bestimme W-Funktion mit $p \prod = p$