|| := Lösung verglichen mit Stocha Discord Pool

V := Ich selbst kann die Aufgabe gut lösen

1) Einleitung

Welche der folgenden Aussagen gelten *nicht immer*?

∀,

- ☐ Monte-Carlo-Algorithmen terminieren immer, liefern aber manchmal falsche Ergebnisse.
- ☒ Las-Vegas-Algorithmen liefern immer korrekte Ergebnisse, terminieren aber manchmal nicht. X
- ☐ Las-Vegas-Algorithmen liefern immer korrekte Ergebnisse. ∀

2) Wahrscheinlichkeitsräume

1)

Aufgabe 1 (Wahrscheinlichkeitsraum vervollständigen, *1+2+2=5 Punkte*)

Betrachte den Ereignisraum

$$\Omega := \{r, g, b, a\},$$

das Mengensystem

$$\mathcal{M} := \{\{r,g\},\{b\}\} \subseteq 2^{\Omega}$$

und die durch folgende Tabelle gegebene Abbildung $P_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0,1]$:

Ereignis $A \in \mathcal{M}$	Wahrscheinlichkeit $P_{\mathcal{M}}(A)$
$\{r, g\}$	$3/8$
$\{b\}$	$1/4$

a) Zeige, dass $\mathcal{M}$ keine σ-Algebra ist.
b) Gebe eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$, die so wenig Ereignisse wie möglich enthält, an.
c) Gebe ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ an, so dass für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt $P_{\mathcal{M}}(A) = P(A)$. Fertige dazu eine Tabelle ähnlich der obigen Tabelle an.

a) Jede σ-Algebra muss die drei Bedingungen die in der Vorlesung genannt waren erfüllen. $\mathcal{M}$ ist keine σ-Algebra da es schon die erste Bedingung nicht erfüllt. $\Omega \notin M$

b) $\mathcal{A}$ muss zuerstmal alle Eigenschaften einer σ-Algebra erfüllen. Diese wären:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$; Sicheres Ereignis gehört zu $\mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$; Gegenereignis eines Ereignisses aus $\mathcal{A}$ gehört wieder zu $\mathcal{A}$.
3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_I \in \mathcal{A}$; $\mathcal{A}$ ist unter abzählbar unendlicher Vereinigungsbildung abgeschlossen.

M erfüllt Eigenschaft 2 mit seinen Elementen. Deswegen muss $\mathcal{A}$ auch Eigenschaft 1 erfüllen und somit $\Omega \in A$ sein. Nun braucht auch das Omega gemäß Eigenschaft 2 ein Gegenereignis. Daraus folgt, dass auch $\emptyset \in \mathcal{A}$.
Außerdem braucht $\{r, g\}$ gemäß 2 ein Gegenereignis. D.h. $\{b, a\} \in \mathcal{A}$.
Nun ist jedoch Eigenschaft 3 nicht erfüllt. Somit muss noch $\{r, g, b\} \in \mathcal{A}$ gelten. Dadurch ist wiederum Eigenschaft 2 nicht erfüllt, deswegen muss auch $\{a\}$ nun rein. Durch $\{a\}$ muss nun aber auch wieder $\{r, g, a\} \in \mathcal{A}$ gelten(Eigenschaft 3).
Danach sind alle Eigenschaften erfüllt, somit sieht $\mathcal{A}$ wie folgt aus:
$\mathcal{A} := \{\emptyset, \Omega, \{r, g\}, \{b\}, \{r, g, b\}, \{a\}, \{r, g, a\}, \{b, a\}\}$
Desweiteren gilt: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$

c) Tabelle:

Ereignis $A \in \mathcal{A}$	Wahrscheinlichkeit $P(A)$
{r,g}	$\frac{3}{8}$
{b}	$\frac{1}{4}$
{r,g,b}	$\frac{5}{8}$
{a}	$\frac{3}{8}$
{r,g,a}	$\frac{6}{8}$
{b,a}	$\frac{5}{8}$
$\emptyset$	0
Ω	1

2)

Aufgabe 2 (Würfelexperiment, *1+1.5+1.5=4 Punkte*)

Das Zufallsexperiment dieser Aufgabe besteht aus dem siebenmaligen Werfen eines sechsseitigen Würfels.

a) Beschreibe den zugehörigen Ergebnisraum Ω (unter Berücksichtigung der Reihenfolge).
b) Beschreibe mengentheoretisch folgende Ereignisse:
  A : jede Ziffer $1, 2, \ldots, 6$ kommt bei den sieben Würfen vor.
  B : die Augensumme ist gerade.
c) Bestimme die Kardinalitäten von Ω, A und B.

a) $(\Omega, \mathcal{A})$; wobei $\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}^7$ ist. ✓

b) $A := \{\omega \in \Omega | \forall x \in \{1,2,..,5,6\} : \exists w_i, i \in \{1,2,..,6,7\} : w_i = x\}$ (✓)
Jede Ziffer kommt bei den sieben Würfen vor.
$B := \{\omega \in \Omega | \sum_{i=0}^{7} w_i \equiv 0 \pmod 2\}$ ✓
Die Augensumme ist gerade.

c)

- Für $|\Omega|$ kann man das Zählerprinzip der Kombinatorik anwenden: $|\Omega| = 6{*}6{*}6{*}6{*}6{*}6{*}6 = 6^7 = 279.936$ ✓

- Für $|A|$:
Überlegung: Wenn genau eine Zahl doppelt ist, dann müssten die anderen 5 Zahlen genau einmal vorhanden sein, und somit hat man die gewünschte Menge aus der A.
D.h. zuerstmal nutze ich die Kombinatorik um herrauszufinden wie viele Möglichkeiten es gibt das genau eine Zahl doppelt ist. Dies spiegelt das Urnenmodell ohne Beachtung der Reihenfolge(x,x==x,x) und ohne zurücklegen(Elemente sind nicht unterscheidbar) wieder. Dies wäre dann $\binom{n}{k}$ wobei $n = 7$ und $k = 2$ sind. Das wären $\binom{7}{2}$ Möglichkeiten.
Nun habe ich jedoch 6 verschiedene Zahlen die doppelt sein könnten, somit muss ich die $\binom{n}{k} * 6$ rechnen.
Als letzten Schritt muss man nur noch die Anzahl an verschiedenen Möglichkeiten für die restlichen 5 Zahlen auf die restlichen 5 Stellen berechnen und diese mal den doppelten Möglichkeiten multiplizieren.
Dies ist jedoch auch trivial, da es eine einfach Permutaion ist und dies per Kombinatorik 5! Möglichkeiten wären.
Daraus folgt: $|A| = \binom{7}{2} * 6 * 5! = 15.210$ Möglichkeiten. ✓

- Für $|B| = \frac{|\Omega|}{2} = \frac{279.936}{2} = 139.968$. Begründung: Gerade Augensumme+gerade=Gerade; ungerade+ungerade=gerade; gerade+ungerade=ungerade; ungerade+gerade=ungerade;
D.h. nach zwei Würfen hat man die gleiche Anzahl an geraden wie ungeraden Augensummen. Nun kann man für den nächsten Wurf die gleiche Logik nehmen wie oben, d.h. es sind gleich viele gerade wie ungerade Zahlen die in Kombination mit 3 gerade und 3 ungeraden Zahlen genommen werden.(und es können nur die vier Kombinationen oben kommen, und zwar in gleichen Teilen)
Somit bleibt die Anzahl an geraden gleich der Anzahl an ungeraden Augensummen auch bei x-Würfen gleich.

✓ 4/4

3)

Aufgabe 3 (Abzählbare Durchschnittsbildung, *3 Punkte*)

Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Zeige, dass $\mathcal{A}$ unter abzählbar unendlicher Durchschnittsbildung abgeschlossen ist.

Wir wissen durch die Vorlesung das wenn $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i\geq 1} A_I \in \mathcal{A}$.
Durch die Eigenschaft 2 folgt ~~dann~~ für jedes $A_1, A_2 ... \in \mathcal{A}$ auch ~~die~~ das Gegen~~wahrscheinlichkeit~~ereignis $A_1^c, A_2^c ... \in \mathcal{A}$ liegt.
Desweiteren bedeutet durch nochmaliger Anwendung der ~~zweiten~~ dritten Eigenschaft, dass auch $A_1^c, A_2^c, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i\geq 1} A_I^c \in \mathcal{A}$ liegt.
Wenn man nun von der Union der Gegenereignissen das Komplement unter Verwendung der Regel zwei macht, kommt man auf: $\left(\bigcup_{i\geq 1} A_I^c\right)^c \in \mathcal{A}$. Durch Anwendung des De-morgansche Gesetzes kann man nun das Komplement rein ziehen und kommt auf: $\left(\bigcup_{i\geq 1} A_I^c\right)^c = \bigcap_{i\geq 1} A_I \in \mathcal{A}$, was zeigt das eine abzählbar unendliche Durchschnittsbildung ebenfalls abgeschlossen unter der σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist. $\square$ 3/3

4)

Bonusaufgabe 4 (Bonferroni-Ungleichung, *4 Punkte*)

Sei $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $A_1, ..., A_n \subseteq \Omega$. Beweise die Bonferroni-Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Hinweis: Nutze Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Ungleichung in Worten: Die aufsummierten W'keiten einer Menge an Ereignissen minus der Summe der W'keiten des Durchschnitts derselben Ereignisse ist kleiner/gleich der W'keit der Vereinigung eben dieser Ereignisse.
Aus der Vorlesung nutzen wir

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1}$$

sowie

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i) \tag{2}$$

Induktionsanfang:
n = 1 , trivial $P(A_1) - 0 \leq P(A_1)$
n = 2 , ergibt sich aus (1) (mit $A_1 = A, A_2 = B$)

Induktionsschritt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)$$

// Einsetzen der Induktionsvorraussetzung

$$\overset{\text{IV}}{\geq} \left[\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} P(A_i \cap A_j)\right] + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)$$

// Nutzung der Abschätzung (2), Klammern können weggelassen werden

$$\overset{\text{rA}}{\geq} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} P(A_i \cap A_j) + P(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_{n+1})$$

// Zusammenfassen

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n+1} P(A_i \cap A_j)$$

5

Aufgabe 1 (Zähldichten, *2+2+1=5 Punkte*)

Sei Ω höchstens abzählbar unendlich und sei $p : \Omega \to [0,1]$ eine Zähldichte, d.h. $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$. Sei $\mathcal{G} := \{\{\omega\} \mid \omega \in \Omega\} \subset 2^\Omega$.

a) Gib die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{G})$ mit $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ an und beweise, dass es keine kleinere geben kann.

b) Gib ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ mit $P(\{\omega\}) = p(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ an und beweise, dass dieses Maß eindeutig bestimmt ist.

c) Ein Würfel ist gezinkt. Die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen sind gegeben durch die Zähldichte $p : \{1,\dots,6\} \to [0,1]$ mit

$$p(1) = p(2) = \frac{3}{10} \text{ und } p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{10}.$$

Beschreibe einen einzelnen Wurf durch einen Wahrscheinlichkeitsraum und berechne die Wahrscheinlickeiten für die Ereignisse $A = \{1,2\}$ und $B = \{1,6\}$.

a) G besteht aus allen Einteiligen Teilmengen aus Omega
Die einzige Menge die mit diesen Teilmengen abgeschlossen unter Durchschnitt/Vereinigungsbildung ist, ist die Potenzmenge.
Also A = 2^Omega (Und diese erfüllt alle Eigenschaften von einer Sigma Algebra)

b) Man definiere sich einfach $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ mit $P(A) = \sum\limits_{\omega\in A} p(\omega)$.
Man sieht leicht das wenn man $A = \{\omega\}$ setzt die Bedingung $P(\{\omega\}) = p(\omega)$ gilt. Desweiteren gilt durch die Definition der Zähldichte das auch $P(\Omega) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$. σ-Add.
Es bleibt nur noch zu zeigen, dass dieses Maß eindeutig ist. Dies folgt jedoch aus der Defintion der Zähldichte, da für jedes Ereignis A, die Zähldichte die Wahrscheinlichkeit eindeutig definiert. (✓)

c) Das Wahrscheinlichkeitsraum Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist definiert als:
$\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}, \mathcal{A} := 2^\Omega$(weil das ein Diskretel Fall ist), $P := P$ aus der Teilaufgabe b(wegen dem Beweis aus der b, bzw, der Regel 2 aus Seite 32 in den Folien)
Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:
$P(A) = P(\{1,2\}) = P(1) + P(2) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 60\%$
$P(B) = P(\{1,6\}) = P(1) + P(6) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 40\%$ ✓

3/4

6

In dieser Aufgabe sollst du zeigen, dass die Gesamtheit aller Wahrscheinlichkeitsmaße abgeschlossen unter endlichen Konvexkombinationen ist. Dazu seien $(\Omega, \mathcal{A}, P_1)$ und $(\Omega, \mathcal{A}, P_2)$ Wahrscheinlichkeitsräume auf der gleichen Ereignis-Algebra und $\alpha \in [0, 1]$. Zeige, dass

$$(\Omega, \mathcal{A}, \alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_2)$$

ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsraum ist. Dabei ist für alle $A \in \mathcal{A}$

$$(\alpha \cdot P_1 + (1 - \alpha) \cdot P_2)(A) := \alpha \cdot P_1(A) + (1 - \alpha) \cdot P_2(A).$$

Hinweis: Verifiziere, dass alle Eigenschaften aus der Definition von Wahrscheinlichkeitsmaßen gelten.

Da ja alle drei Räume auf dem selben $\Omega, \mathcal{A}$ sind, muss nur die Eigenschaften eines gültigen Wahrscheinlichkeitmaß gezeigt werden.
Zz:
1. Normierung: $P(\Omega) = 1$
2. σ-Additivität: Für paarweise disjunkte Ereigbnisse $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$:
$P(\sqcup_{i\geq 1} A_i) = \sum\limits_{i\geq 1} P(A_i)$
auch für $(\Omega, \mathcal{A}, \alpha * P_1 + (1 - \alpha) * P_2)$ gilt.
Beweis:
Sei $A = \Omega \in \mathcal{A}$.
Da P_1, P_2 gültige Wahrscheinlichkeitmaße sind, muss für das definierte A gelten: $P_1(A) = P_1(\Omega) = 1 = P_2(\Omega) = P_2(A)$. Setze man nun für ein beliebiges $\alpha \in [0, 1]$ die Definition ein, sofolgt: $\alpha * P_1(\Omega) + (1 - \alpha) * P_2(\Omega) =^{Def.} \alpha * 1 + (1 - \alpha) * 1 = \alpha + 1 - \alpha = 1$ Somit ist die Normierung für $(\Omega, \mathcal{A}, \alpha * P_1 + (1 - \alpha) * P_2)$ bewiesen.
Bleibt nur noch Eigenschaft 2 zu zeigen:

Sei nun $A_j = \sqcup_{i\geq 1} A_i$, dass Element, was die disjunkte vereinigung beliebiger Elemente $A_1, A_2, .. \in \mathcal{A}$ representiert.
Es gilt für P_1, P_2 die σ-Additivität, da diese gültige Wahrscheinlichkeitmaße sind.
Somit folgt für beliebige $\alpha \in [0, 1]$:
$\alpha * P_1(A_j) + (1 - \alpha) * P_2(A_j) =^{Def.} \alpha * P_1(\sqcup_{i\geq 1} A_i) + (1 - \alpha) * P_2(\sqcup_{i\geq 1} A_i) =^{S.a.} \alpha * (\sum\limits_{i\geq 1} P_1(A_i)) + (1 - \alpha) * (\sum\limits_{i\geq 1} P_2(A_i)) =^{S.a.} \alpha * P_1(A_j) + (1 - \alpha) * P_2(A_j)$
$S.a.$:=σ-Additivität von P_1, P_2.
Darausfolgt, das auch Eigenschaft zwei gilt, und somit $(\Omega, \mathcal{A}, \alpha * P_1 + (1 - \alpha) * P_2)$ ein gültiger Wahrscheinlichkeitsraum ist.

✓ 4/4

7)

Drei Informatiker a, b und c sind zu einer Party eingeladen. Sie wissen, dass sie gemeinsam an einem runden Tisch mit 8 Plätzen sitzen werden, wobei der Gastgeber die Tischkarten rein zufällig auf die 8 Plätze verteilen wird. Wie wahrscheinlich ist es, dass a, b und c nebeneinander sitzen?

a) Beschreibe den W-Raum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
$\Omega = S_8 = \mathrm{Sym}([0:7]) = \{\pi | \pi \text{ ist Permutation von } [0:7]\}$,
$\mathscr{A} = 2^{\Omega}$,
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

b) Beschreibe das Ereignis A, dass a, b und c nebeneinander sitzen.
$A = \{\pi \in S_8 \mid \exists i \in [0:7] : \{\pi(0), \pi(1), \pi(2)\} = \{i, i+1 \mod 8, i+2 \mod 8\}\}$

c) Bestimme $|\Omega|$, $|A|$ und $P(A)$.
$|\Omega| = 8!$
$|A| = 8 * 3! * 5!$
$\rightarrow$ 8 Möglichkeiten für i, 3! bzw. 5! da Reihenfolge von $\pi(0), \pi(1), \pi(2)$ bzw. Restpermutation irrelevant
$P(A) = \frac{8*3!*5!}{8!} = \frac{1}{7}$

8)

Wir betrachten das Intervall $A_0 := [0,1]$ und das Lebesgue-Maß λ^1 darauf. Ein Intervall $[a,b]$ mit $a, b \in [0,1]$ und $a \leq b$ hat also Maß $\lambda^1([a,b]) = b - a$.

Nun verändern wir A_0 indem wir das mittlere Drittel entfernen. Wir machen also aus A_0 nun $A_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Diesen Vorgang setzen wir rekursiv fort. In jedem Schritt entfernen wir aus jedem verbleibenden Intervall das mittlere Drittel und erhalten z.B.

$$A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Es ergibt sich eine unendliche Folge $A_0, A_1, A_2, \ldots$ mit $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$. Sei $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

a) Zeige, dass C mindestens so viele Elemente hat wie die Menge unendlicher Binärstrings $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Bemerkung: Gemäß Satz 1.1 in Foliensatz 2 folgt daraus, dass C überabzählbar unendlich ist.

b) Zeige, dass $\lambda^1(C) = 0$ ist.

Hinweis: Berechne zunächst $\lambda^1(A_n)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Betrachte dann den Grenzwert.

Bemerkung: Die Menge C nennt man Cantor-Staub. Sie ist ein Musterbeispiel für eine überabzählbare Nullmenge, also eine Menge mit Maß null.

a)

$$\omega_n := \sum_{n=1}^{n} \left(b_n * \frac{2}{3^n} \right)$$

Wir nutzen das Wurzelkriterium, welches besagt, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$$

Demnach konvergiert die obige Reihe für $n \to \infty$, denn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n * \frac{2}{3^n}}$$

// möglich, da b_n nur 1 oder 0 sein kann

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{3} \leq \frac{2}{3} \leq 1$$

Wir stellen fest, dass $\omega_n \in A_n$ gilt, denn nach Konstruktion ist ω_n gerade der linke Endpunkt von einem der Intervalle in A_n. Betrachte den Grenzwert

$$\omega_\infty = \lim_{n\to\infty} \omega_n$$

Da jedes A_n kompakt[1] ist und aufgrund der Monotonie $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ muss gelten $\omega_\infty \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $\omega_\infty \in C$.

b)

Hinweis: Berechne zunächst $\lambda(A_n)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Betrachte dann den Grenzwert.

Um das Maß von A_n zu berechnen, müssen wir die Längen der einzelnen Intervalle in A_n aufsummieren:

$$\lambda(A_n) = 2^n * \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Für $n \to \infty$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Durch die σ-Stetigkeit[2] folgt nun aus $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$

$$\lambda(C) = 0$$

4)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

a) Seien $A, B \in \mathcal{A}$ beliebige Ereignisse. Definieren Sie den Begrif der Monotonie von W-Maßen.

b) Seien $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ beliebige Ereignisse. Definieren Sie den Begrif der σ-Subadditivität von W-Maßen.

c) Seien $C, D \in \mathcal{A}$ zwei fast sichere Ereignisse: $P(C) = P(D) = 1$. Zeigen Sie, dass auch $C \cap D$ ein fast sicheres Ereignis ist.

a) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

b) $P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$

c) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \underset{\parallel}{P(A \cup B)}$ $\Rightarrow$ da $A \cup B < 1$

$\Leftrightarrow$ $1 = 1 + 1 - 1$

$\hookrightarrow \{A \cup B\} \subseteq \Omega$

// nach a

$P(A \cup B) \leq P(\Omega)$

$1 \leq 1$

Kann auch nicht kleiner als 1 sein, da sonst P(A schnitt B) > 1!

10)

Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums inklusive aller vorkommenden Begriffe.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω := Ergebnissraum

$\mathcal{A}$:= Ereignissalgebra (Sigma Algebra)

11) P := W-Maß

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

(a) Definieren Sie den Begriff der σ-Stetigkeit. (Es genügt der aufsteigende Fall.)

(b) Beweisen Sie die σ-Stetigkeit für W-Maße (Übungsblatt 7, Aufgabe 4).

a) $A_1 \subseteq A_2 \ldots$ und $A = \bigcup_{i \geq 1} A_i$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P(A)$

b)

3 Bonusaufgabe 4 (σ-Stetigkeit)

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \overset{(a)}{=} \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1}) \cup A_1 \overset{(b)}{=:} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$P(A) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \overset{(c)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} P(B_n) \overset{(d)}{=} \lim_{N \to \infty} P(A_N)$$

(a) gilt, da $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A_{n+1} = A_n \cup (A_{n+1} \setminus A_n)$
(b) $B_n := A_n \setminus A_{n-1}\ \forall n \geq 2$ und $B_1 := A_1$
(c) gilt wegen der σ-Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes, denn $B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$
(d) Es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = P(\bigcup_{n=1}^{N} B_n) = P(A_N)$

12) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Ferner seien $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie: Aus $A \subseteq B$ folgt $P(A) \leq P(B)$. (Monotonie)

(b) Zeigen Sie: sigma Subadditivität

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

a) $P(B) = P(A \sqcup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$

b) $P(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = P(\bigsqcup_{i\geq 1} (A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j))$

$= \sum_{i\geq 1} P(A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$

13)

(a) Definieren Sie den Begriff der σ-Algebra über einer nichtleeren Menge Ω.

(b) Zeigen Sie: Die Gesamtheit aller σ-Algebren über Ω ist unter Durchschnittsbildung abgeschlossen, d.h. ist $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren über Ω, so ist auch $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra über Ω.

(c) Geben Sie die kleinste und die größte σ-Algebra über Ω konkret an.

a) 1. $\Omega \in \mathcal{A}$

2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

3. $A_1, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A}$

b) Drei Eigenschaften beweisen
1. Omega Teil von allen
2. Für jede Menge A die Teil vom ganzen ist, ist sie auch Teil von allen davor (gleiches gilt für Gegenereigniss) + 3. Durchschnittsbildung!

c) Kleinste: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$

größte: $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

14)

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω.

a) Wie heißt das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$?

b) Zeigen Sie: $\emptyset \in \mathcal{A}$.

c) Zeigen Sie: $A, B \in \mathcal{A}$ impliziert $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$ und $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

a) Messraum / Ereignisraum

b) $\left.\begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{A} \\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \Omega^c \in \mathcal{A} = \emptyset \in \mathcal{A}$

c) $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \ldots \cup \in \mathcal{A}$

$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$

$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$

15)

Definieren Sie den Begriff der Borelschen σ-Algebra und der Borel-Menge.

$\mathcal{B}^n := \sigma(\mathcal{G}) \qquad \mathcal{G} := \{\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] : a_i, b_i \in \mathbb{Q} \wedge a_i < b_i\}$

$A \in \mathcal{B}^n$

16)

a) Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion. Zähldichte!

b) Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsdichte.

a) $p : \Omega \longrightarrow [0,1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

b) $p : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ mit $\{x \in \Omega \mid p(x) \leq c\}$ $c > 0$

$\int_\Omega p(x)\,dx = 1$

und $P(A) = \int_A p(x)\,dx \quad A \in \mathcal{B}^n_\Omega$

17)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ beliebige Ereignisse. Kreuzen Sie die Aussagen an, die *falsch* sein können.

- ☐ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- ☒ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- ☐ $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
- ☐ $P(\bigcup_{i\geq 1} A_i) \leq \sum_{i\geq 1} P(A_i)$
- ■ $P(A) = P(B) = 1 \Rightarrow A = B$
- ☐ $P(A \cup B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(B)$
- ☐ $P(A \cup B) = P(A) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$
- ☐ $P(B \cup (\bigcup A_i)) = P(B) \Rightarrow P(B) \geq P(A_i)$

18)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $A, B \in \mathcal{A}$ wobei $A \neq \emptyset$, sei $C \subseteq \Omega$ und sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$. Kreuzen Sie die Aussagen an, die *falsch* sein können.

- ☐ $A^c \cup B \in \mathcal{A}$ und $A \cap B^c \in \mathcal{A}$
- ☐ $C^c \cup C \in \mathcal{A}$ und $C^c \cap C \in \mathcal{A}$ $\quad \Omega \quad \emptyset$
- ■ $A \cup C \in \mathcal{A}$
- ☐ $B \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \in \mathcal{A}$
- ☐ $(\Omega, 2^{\Omega})$ ist ein Ereignisraum.
- ☐ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
- ☐ $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ und $\Omega \in \mathcal{A}$
- ■ $C^c \in \mathcal{A}$
- ☐ $A \cup B \in \mathcal{A}$
- ☐ $(A, \{A \cup D \mid D \in \mathcal{A}\})$ ist ein Ereignisraum.
- ■ $(C, \{C \cap D \mid D \in \mathcal{A}\})$ ist ein Ereignisraum.
- ☐ Wenn $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt sind, gilt $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$.
- ☐ Wenn A und B fast sichere Ereignisse, gilt $P(A \cap B) = P(A \cup B) = 1$
- ☐ $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \geq P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$
- ■ $\min_i P(A_i) > P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$
- ■ $A \cap C \in \mathcal{A}$
- ☐ $(\Omega, \{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\})$ ist ein Ereignisraum.
- ■ $(A, \{A \cap D \mid D \in \mathcal{A}\})$ ist ein Ereignisraum.
- ■ $(A \cup B) \cap C \in \mathcal{A}$
- ☐ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ■ $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \leq P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$
- ☐ Wenn $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt sind, gilt $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$.
- ☐ Wenn $A \subseteq B$ gilt, gilt auch $P(A) \leq P(B)$.

7)

Tragen Sie für jede wahre Aussage ein W ein, für jede falsche ein F.

W $(\{0,1\},\{\{0\},\{1\},\{0,1\}\})$ ist *kein* Ereignisraum.
F $(\mathbb{R}, \{(-\infty, c] \mid c \in \mathbb{R}\})$ ist ein Ereignisraum.
W $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\Omega = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl}\}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ ist ein gültiger Ereignisraum.
W $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl}\}, \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ keine Primzahl}\}, \mathbb{N}\}$ ist ein gültiger Ereignisraum.
F $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\Omega = [0;1]$, $\mathcal{A} = \{[a,b] \mid a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a < b \leq 1\}$ ist ein gültiger Ereignisraum.
W $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\Omega = [0;1]$, $\mathcal{A} = \sigma(\{[\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}] \mid k \in \mathbb{N}\})$ ist ein gültiger Ereignisraum.
F Die Potenzmenge von $\mathbb{R}$ ist eine σ-Algebra.
F Die Potenzmenge einer nichtleeren Menge Ω ist stets eine σ-Algebra.
F Das System aller σ-Algebren über einer Menge Ω ist bezüglich Mengeninklusion totalgeordnet, d.h. sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Algeben über Ω, so ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ oder $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Bereich 3: ZV

1) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ Messräume und sei $X : \Omega \to \Omega'$. Sei $\mathcal{G}' \subseteq 2^{\Omega'}$ ein Mengensystem, das die σ-Algebra $\mathcal{A}'$ erzeugt, d.h. $\sigma(\mathcal{G}') = \mathcal{A}'$. Zeige, dass X $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar ist wenn gilt

$$\forall A' \in \mathcal{G}' : X^{-1}[A'] \in \mathcal{A}.$$

2) Ein fairer, sechsseitiger Würfel werde dreimal geworfen. Y sei die Zufallsvariable, die einem Tripel gewürfelter Augenzahlen das zugehörige schwach monoton steigende Tripel zuordnet (z.B. $Y(5,2,5) = (2,5,5)$).

a) Beschreibe Y konkret als Abbildung $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$.
b) Bestimme die Verteilung von Y.

Hinweis: Betrachte die Anzahl unterschiedlicher Augenzahlen.

a) $\Omega := [1:6]^3, \mathcal{A} := 2^\Omega$
$\Omega' := \{\omega \in \Omega | w_1 \leq w_2 \leq w_3\}, \mathcal{A}' := 2^{\Omega'}$
$Y : \Omega \to \Omega', (w_1, w_2, w_3) \mapsto (w_i, w_j, w_k) | w_i := \min\{w_1, w_2, w_3\}; w_k := \max\{w_1, w_2, w_3\}; w_j := (\min\{w_1, w_2, w_3\} \cup \max\{w_1, w_2, w_3\})^c$

b) Generell hat man durch die Abbildung Y einen Informationsverlust.
D.h. verschiedene Paare werden auf das selbe abgebildet. Z.B. (5,5,2), (2,5,5), (5,2,5) wird alles auf (2,5,5) abgebildet.
Desweiteren ist es keine Gleichverteilung, da z.B. für (2,2,5) drei verschiedene Möglichkeiten, aber für (1,1,1) nur eine exestiert, die darauf abbilden.
Man kann nun 4 verschiedene Klassen von Fällen bestimmen, die alle Elemente aus Ω für Ω' eindeutig zuordnet:
1. $A := \{(a,a,a) | a \in [1:6]\}$ Klasse wo nur eine Zahl ist.
2. $B := \{(a,a,b) | a, b \in [1:6] \wedge a < b\}$ Klasse wo zweimal die selbe Zahl ist und diese kleiner als die andere ist.
3. $C := \{(a,b,b) | a, b \in [1:6] \wedge a < b\}$ Klasse wo zweimal die selbe Zahl ist und diese größer als die andere ist.
4. $D := \{(a,b,c) | a, b, c \in [1:6] \wedge a < b < c\}$ Klasse wo alle drei Zahlen unterschiedlich sind.
Um nun auf die Verteilung zu kommen, muss man nur noch herrausfinden, wie viele verschiedene Möglichkeiten auf diese 4 Klassen abbilden.
$|A| = 1$, da es nur ein paar gibt was darauf abbildet und zwar: (a,a,a)
$|B| = 3$, da es drei paare gibt die auf das selbe abbilden: (a,a,b), (a,b,a), (b,a,a)
$|C| = 3$, da es wieder nur drei paare gibt die darauf abbilden: (a,b,b,), (b,a,b), (b,b,a)
$|D| = 6$, da es sechs verschiedene paare gibt die darauf abbilden: (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)

$\Rightarrow$
$A + \cdot\ 6$
$B + \cdot \binom{6}{2}$
$C + \cdot \binom{6}{2}$
$D + \cdot \binom{6}{3}$

3)

a) Zwei Würfel, auf deren Seiten jeweils drei Einsen und drei Zweien sind, werden geworfen. Es bezeichne X_1 die Augensumme und X_2 das Augenprodukt eines Würfelwurfes mit beiden Würfeln. Bestimme die Zähldichte p_X für die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2.

b) Gegeben sei folgende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion q_Y der Zufallsvariablen Y_1 und Y_2:

$$q_Y = \begin{cases} 0,2 & \text{falls } y_1 = 1, y_2 = 1, \\ 0,3 & \text{falls } y_1 = 2, y_2 = 1, \\ 0,45 & \text{falls } y_1 = 1, y_2 = 2, \\ 0,05 & \text{falls } y_1 = 2, y_2 = 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Randverteilungen von Y_1 und Y_2.

a) Sei $\Omega := \{1,2\}^2$, $\mathcal{A} := 2^\Omega$ und P eine Gleichverteilung.
Man definiere nun die Zufallsvariablen:
$X_1 : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ mit $\Omega \ni (w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2$
$X_2 : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ mit $\Omega \ni (w_1, w_2) \mapsto w_1 * w_2$
Möglichkeiten für X_1 für zwei Würfel ($W_1 :=$ Würfel 1, $W_2 :=$ Würfel 2):
$W_1 = 1, W_2 = 1 \Rightarrow$ Augensumme=2, Augenprodukt=1
$W_1 = 1, W_2 = 2 \Rightarrow$ Augensumme=3, Augenprodukt=2
$W_1 = 2, W_2 = 1 \Rightarrow$ Augensumme=3, Augenprodukt=2

$W_1 = 2, W_2 = 2 \Rightarrow$ Augensumme=4, Augenprodukt=4
Daraus folgt($P_1 := P_{X_1}$):
$P_1(2) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$
$P_1(3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$
$P_1(4) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$
Daraus folgt($P_2 := P_{X_2}$)):
$P_2(1) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$
$P_2(2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$
$P_2(4) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$
Man kann nun p_x bestimmen mittels der Produktabbildung der beiden Zufallsvariablen:
$X = X_1 \otimes X_2 : \{0,1\}^2 \mapsto \{2,3,4\} \times \{1,2,4\}$

$$P_X := \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 4 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \end{array} \cdot \frac{1}{4}$$

b) x-Achse:=Y_2,y-Achse:=Y_1

$$q_y := \begin{array}{c|cc|c} & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 0{,}2 & 0{,}45 & 0{,}65 \\ 2 & 0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}35 \\ \hline & 0{,}5 & 0{,}5 & \end{array}$$

Randverteilung für Y_1:

$P(Y_1 = 1) = P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) + P(Y_1 = 1, Y_2 = 2) = 0,2 + 0,45 = 0,65 = 65\%$

$P(Y_1 = 2) = P(Y_1 = 2, Y_2 = 1) + P(Y_1 = 2, Y_2 = 2) = 0,3 + 0,05 = 0,35 = 35\%$

Randverteilung für Y_2:

$P(Y_2 = 1) = P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) + P(Y_1 = 2, Y_2 = 1) = 0,2 + 0,3 = 0,5 = 50\%$

$P(Y_2 = 2) = P(Y_1 = 2, Y_2 = 2) + P(Y_1 = 1, Y_2 = 2) = 0,45 + 0,05 = 0,5 = 50\%$

4) Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine Zufallsvariable und P ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

$$P'(A') := P(X^{-1}[A']) = P(\{X \in A'\}) =: P(X \in A') \quad \text{für } A' \in \mathcal{A}'$$

ist ein W-maß P' auf $(\Omega', \mathcal{A}')$.

Zz: (N) $\wedge$ σ-Add

(N): $P'(\Omega') = P(\{X \in \Omega\}) = P(\Omega) = 1$

σ-Add:

Seien $A_1', A_2' \ldots \in \mathcal{A}'$ paarweise disjunkt

so sind auch $X^{-1}[A_1] \ldots$ disjunkt

$\Rightarrow P'(\bigsqcup_{i \geq 1} A_i') = P(X^{-1}[\bigsqcup_{i \geq 1} A_i']) = P(\bigsqcup_{i \geq 1} X^{-1}[A_i'])$

$= \sum_{i \geq 1} P(X^{-1}[A_i']) = \sum_{i \geq 1} P'(A_i')$

5) Wann heißt eine Familie von Zufallsvariablen identisch verteilt?

Wenn alle Verteilungen P_xi übereinstimmen

$P_i \circ X_i^{-1}$

6) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X_1, \ldots, X_n$ seien Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Definieren Sie die Begriffe *Produktabbildung*, *gemeinsame Verteilung* und *Produkt-σ-Algebra*.

Hat man Ereignisse, die von mehreren ZVs abhängen, so reicht nicht die Kenntnis der einzelnen Verteilungen aus. (Ein Beispiel dazu findet sich auf der letzten Folie dieses Kapitels.) Man braucht vielmehr folgendes Konzept.
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X_1, \ldots, X_n$ seien ZVs $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$.
Die **Produktabbildung** $X := X_1 \otimes \ldots \otimes X_n : \Omega \to \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$, definiert durch

$$X(\omega) := (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

ist eine Zufallsvariable $X\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n, \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n)$, deren Verteilung P_X die **gemeinsame Verteilung** der $X_1, \ldots, X_n$ genannt wird.
Hier ist die **Produkt-σ-Algebra**

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n := \sigma\Big(\bigcup_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}[\mathcal{A}_j]\Big) \subseteq 2^{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n}$$

die **kleinsteσ-Algebra**, bei der alle Projektionen $\pi_j : (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \omega_j$ $(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$-messbar sind.

7) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X_1, \ldots, X_n$ seien Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Zeigen Sie: Die Produktabbildung $X := X_1 \otimes \ldots \otimes X_n \colon \Omega \to \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n)$-messbar.

Beweis.

- $\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$ wird erzeugt von allen $A_1 \times \ldots \times A_n$, wobei $A_i \in \mathcal{A}_i$, für alle $i \in [1 : n]$.
- $X^{-1}[A_1 \times \ldots \times A_n] = X_1^{-1}[A_1] \cap \ldots \cap X_n^{-1}[A_n]$.
- Wegen der $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i)$-Messbarkeit von $X_i = \pi_i \circ X$ liegt $X_i^{-1}[A_i]$ in $\mathcal{A}$.
- Da $\mathcal{A}$ unter endlicher Durchschnittsbildung abgeschlossen ist, liegt auch $X^{-1}[A_1 \times \ldots \times A_n]$ in $\mathcal{A}$.
- Nach der Sparversion der Messbarkeitsbedingung (siehe Folie 5) ist X also $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n)$-messbar.

8) Gegeben ist für die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 die gemeinsame Verteilung P_X von $X := X_1 \otimes X_2$ durch

$$P_X = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die beiden eindimensionalen Rand- oder Marginalverteilungen.

(b) Ist die gemeinsame Verteilung durch die Marginalverteilungen eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & 1 \\ & & & & 3 \\ & & & & 3 \\ & & & & 1 \\ \hline 4 & 2 & 1 & 1 & \end{array} \quad \cdot \frac{1}{8}$$

b) Nein man kann durch die Maginale Verteilung nicht direkt auf die gemeinsame Verteilung schließen. Gegenbeispiel:

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 4 & \end{array} \neq \begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 & \end{array}$$

9) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ zwei Messräume. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $X : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung.

a) Unter welcher Bedingung ist X eine Zufallsvariable? Geben Sie die Definition möglichst explizit an.

b) Definieren Sie das Bildmaß P_X zu P bezüglich X. Geben sie dabei auch den Definitions- und Wertebereich an.

a) $\forall A' \in \mathcal{A}' : X^{-1}[A'] := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A'\} \in \mathcal{A}$

b) $P'(A') = P(X^{-1}[A']) = P(\{X \in A'\}) =: P(X = A')$

$A' \in \mathcal{A}'$

Wert: $\forall A' \in \mathcal{A}'$ Vert. von X

Def: $\forall A \in \mathcal{A} \; \exists A' \in \mathcal{A}' : X^{-1}[A'] = A$ $P(X)$

10)

Eine faire Münze wird n-mal geworfen. „Zahl“ werde als Erfolg (codiert durch 1) und „Kopf“ als Misserfolg (codiert durch 0) angesehen. Wir betrachten zwei Zufallsvariablen:

X_1 : Anzahl der Erfolge.

X_2 : Wartezeit bis zum ersten Erfolg.

Aufgaben:

a) Geben Sie den zu X_1 und X_2 gehörigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und die Messräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ an.

b) Beschreiben Sie X_1 und X_2 konkret als Abbildungen

$$X_1 : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_1, \mathcal{A}_1), \quad X_2 : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2).$$

$\Sigma 11$

c) Bestimmen Sie die Verteilungen von X_1 und X_2.

d) Geben Sie die gemeinsame Verteilung $X_1 \otimes X_2$ (ohne Begründung) an.

a) $\Omega = \{0,1\}^n \quad \mathcal{A} = 2^{\Omega} \quad P = \frac{\omega}{|\Omega|}$

$\Omega_1 = [0:n] \quad \mathcal{A}_1 = 2^{\Omega_1}$

$\Omega_2 = [1:n+1] \quad \mathcal{A}_2 = 2^{\Omega_2}$

b) $X_1 : \Omega \ni (\omega_1, \dots \omega_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \omega_i$

$X_2 : \Omega \ni (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \begin{cases} \min\{j \in [1:n] \mid \omega_j = 1\}, & \omega \neq (0, \dots, 0) \\ n+1 \end{cases}$

c)

$P_1(k) = \binom{n}{k} \cdot 2^{-n}$

$P_2(j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j$

d)

$p_X(k,h) = \binom{n-h}{k-1} \cdot 2^{-n}$

Bereich 4

1)

Wir ziehen $n \in \mathbb{N}$ mal mit zurücklegen aus einer Urne mit $m \in \mathbb{N}$ unterscheidbaren Kugeln und beachten die Reihenfolge.

a) Gib einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ an, der dieses Experiment beschreibt.
Es handelt sich um eine Gleichverteilung auf $[1:m]^n$, d.h.

$$\Omega := [1:m]^n, \quad \mathscr{A} := 2^\Omega, \quad P : \mathscr{A} \to [0,1]$$

mit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{m^n}$.

b) Gib eine Zufallsvariable $X : \Omega \to [0:n]$ an, die den Ausgang des Experiments auf die Anzahl der Fälle abbildet, in denen die gezogene Kugel gerade erst zurückgelegt wurde.

$$X : \Omega \to [0:n]$$
$$(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \left|\{i \in \{2, \dots, n\} \mid \omega_{i-1} = \omega_i\}\right|$$

c) Gib das Bildmaß P_X an, indem du für $k \in [0:n-1]$ die Wahrscheinlichkeit

$$P(X = k) := P_X(\{k\}) := P\left(X^{-1}(\{k\})\right)$$

ausrechnest. Gib für $n = 3$, $m = 2$ und $k = 1$ das Ergebnis $X^{-1}(\{k\})$ und $P(X = k)$ explizit an.

Sei $k \in [0:n-1]$. Bei jeder Ziehung außer der ersten ist die Wahrscheinlichkeit, die gleiche Kugel wie bei der vorherigen zu ziehen, gleich $\frac{1}{m}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass das bei $n-1$ Ziehungen genau k mal geschieht, ist durch eine Binomialverteilung gegeben:

$$P(X = k) = \binom{n-1}{k} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^k \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1-k}$$

Im Fall $n = 3$, $m = 2$ und $k = 1$ ergibt sich:

$$X^{-1}[\{k\}] = \{(1,1,2), (2,1,1), (1,2,2), (2,2,1)\}$$
$$P(X = 1) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Binominal

2)

Bei einer Klausur werden 18 Multiple-Choice-Fragen mit jeweils 4 angebotenen Antworten gestellt, von denen jeweils genau eine Antwort richtig ist. Zum Bestehen der Klausur benötigt man mindestens 11 richtige Antworten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Student die Klausur, welcher bei jeder Frage

a) rein zufällig eine der vier Antworten ankreuzt?
b) einen der vier Vorschläge als falsch erkennt und rein zufällig eine der übrigen Antworten auswählt?
c) zwei der vier Vorschläge als falsch erkennt und rein zufällig eine der übrigen Antworten auswählt?

Gib zu jedem Fall einen Wahrscheinlichkeitsraum, der das Experiment korrekt beschreibt.

Wir lösen alle Teilaufgaben simultan: Es handelt sich hierbei um eine Anwendung der Binomialverteilung mit $n = 18$ und Erfolgswahrscheinlichkeiten $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, bzw. $p_3 = \frac{1}{2}$. Gesucht ist also in Aufgabe i), $i \in \{1, 2, 3\}$, die Wahrscheinlichkeit

$$\pi_i = \sum_{k=11}^{18} B_{18,p_i}(k) = \sum_{k=11}^{18} \binom{18}{k} \cdot p_i^k \cdot (1 - p_i)^{18-k}.$$

Ausrechnen ergibt:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\approx 0,0012440 \\ \pi_2 &\approx 0,0144336 \\ \pi_3 &\approx 0,2403412 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsräume nutzen $\Omega = [0 : 18]$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ und $P_i := B_{18,p_i}$.

3

Eine Stochastik-Prüfung besteht aus 12 Fragen, die mit *ja* oder *nein* zu beantworten sind. Sie gilt bei mindestens 8 richtigen Antworten als bestanden.

Gib bei jeder Teilaufgabe den passenden Wahrscheinlichkeitsraum an und achte speziell darauf, welche Verteilung aus der Vorlesung die dargestellten Sachverhalte am besten modelliert.

a) Manche Studenten kreuzen auf gut Glück die Antworten an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bestehen sie die Prüfung?

b) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn sie immerhin 2 Fragen mit Sicherheit beantworten können und nur den Rest zufällig ankreuzen?

c) Falls jemand gar nichts weiß, wäre es dann (im Vergleich zu 1.) für sie oder ihn günstiger, zufällig 6-mal *ja* und 6-mal *nein* anzukreuzen – vorausgesetzt, dass für genau 6 Fragen die richtige Antwort *ja* lautet?

a)
Das richtige Modell für diese Aufgabe ist die Binomialverteilung, d.h. Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge mit zwei Zuständen ("Erfolg", "Misserfolg"). Der Wahrscheinlichkeitsraum ist also $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0 : 12], 2^\Omega, B_{12,\frac{1}{2}})$.
Daraus ergibt sich:

$$P(\{k\}) := P(\text{genau } k \text{ Antworten sind richtig}) = \binom{12}{k} \cdot (\tfrac{1}{2})^k \cdot (\tfrac{1}{2})^{12-k} = \binom{12}{k} \cdot \frac{1}{2^{12}}.$$

$$\begin{aligned} &P(\text{mind. 8 richtige Antworten}) \\ =&P(\{8\}) + P(\{9\}) + P(\{10\}) + P(\{11\}) + P(\{12\}) \\ =&\frac{1}{2^{12}} \cdot \left(\binom{12}{8} + \binom{12}{9} + \binom{12}{10} + \binom{12}{11} + \binom{12}{12}\right) \\ \approx&0,1938 \end{aligned}$$

b)
Diesmal müssen von 10 Fragen 6 richtig beantwortet werden, also $P = B_{10,\frac{1}{2}}$.

$$P(\{k\}) := P(\text{genau } k \text{ geratene Antworten sind richtig}) = \binom{10}{k} \cdot \frac{1}{2^{10}}.$$

$$\begin{aligned} &P(\text{mind. 6richtige geratene Antworten}) \\ =&P(\{6\}) + P(\{7\}) + P(\{8\}) + P(\{9\}) + P(\{10\}) \\ =&\frac{1}{2^{10}} \cdot \left(\binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}\right) \\ \approx&0,3770 \end{aligned}$$

c)
Der Wahrscheinlichkeitsraum ist gegeben durch

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega_1, ..., \omega_{12}) \in \{0,1\}^{12} \;:\; \sum_{i=1}^{12} \omega_i = 6 \right\},$$

$\mathcal{A} = 2^\Omega$, $P =$ Gleichverteilung.
Insgesamt: $|\Omega| = \binom{12}{6} = 924$ mögliche Antwortmuster
Gesucht: mindestens 8 Positionen mit der richtigen Lösung
Es gilt : Jeder "aktiv gemachte" Fehler zieht einen zweiten nach sich, zählt also doppelt!

Also gibt es $\binom{6}{k} \cdot \binom{6}{k}$ Möglichkeiten, $2k$ Fehler zu machen. Da höchstens $12 - 8 = 4$ Fehler gemacht werden dürfen, gilt also:

$$P(X \geq 8) = \frac{\sum_{k=0}^{2} \binom{6}{k}\binom{6}{k}}{\binom{12}{6}} \approx 0,2835$$

4) Ein Adventskalender enthält $N = 24$ Fenster. Hinter jedem Fenster ist, unabhängig von den anderen Fenstern, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_K = 30\%$ ein kleiner Gewinn und mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_G = 10\%$ ein größerer Gewinn. Ansonsten befindet sich hinter dem Fenster nur ein Bild. Wir betrachten die Anzahl der kleinen und größeren Gewinne im Adventskalender als Zufallsgrößen.

a) Gib einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kalender genau fünf kleine Gewinne und genau drei große Gewinne enthält?

a)
Es handelt sich um eine Multinomialverteilung.
Der Ergebnisraum enthält Histogramme, die σ-Algebra ist seine Potenzmenge und das Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ definieren wir über Zähldichte $p : \Omega \to [0,1]$.

$$\Omega := [0:24]^2$$
$$\mathcal{A} := 2^\Omega$$
$$p_N := 1 - p_K - p_G = 60\%$$
$$\forall (H_K, H_G) \in \Omega : \; p(H_K, H_G) := \binom{N}{H_K,\, H_G,\, N-(H_K+H_G)} \cdot p_K^{H_K} \cdot p_G^{H_G} \cdot p_N^{N-(H_K+H_G)}$$
$$= \frac{24!}{H_K! \cdot H_G! \cdot (24-(H_K+H_G))!} \cdot p_K^{H_K} \cdot p_G^{H_G} \cdot p_N^{24-(H_K+H_G)}$$
$$\forall A \in \mathcal{A} : \; P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

b)
Es ist nach der Wahrscheinlichkeit des Histograms mit

$$H_K = 5, \qquad H_G = 3$$

gefragt. Diese ist gegeben durch:

$$p(5,3) = \frac{24!}{5! \cdot 3! \cdot 16!} \cdot p_K^5 \cdot p_G^3 \cdot p_N^{16} = \frac{24!}{5! \cdot 3! \cdot 16!} \cdot 0,3^5 \cdot \frac{1}{1000} \cdot 0,60^{16}$$

5)

Wegen seiner überlegenen Körpergröße und -stärke besteht eine Wahrscheinlichkeit von P(S) = 0,6, dass Boguslaw im Kampf gegen Andrzej siegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kampf zwischen beiden unentschieden ausgeht, sei P(U) = 0,1 und die Wahrscheinlichkeit, dass Boguslaw verliert, sei P(V) = 0,3. Die drei Wahrscheinlichkeiten seien konstant. Wie wahrscheinlich ist es, dass Andrzej von zehn Kämpfen gegen Boguslaw nur drei siegreich für sich entscheiden kann, zwei unentschieden ausgehen und fünf für ihn verlorengehen?

Gesucht: P(A), wobei A für das Ereigniss steht, dass Andrej von zehn Kämpfen drei gewinnt, 2 unentschieden holt und 5 verliert.
Man kann dieses Problem als Urnenmodell mit Zurücklegen und ohne Betrachtung der Reihenfolge lösen, also mit der Mulitnominalverteilung.
Man betrachte dafür eine Urne mit 10 Kugeln, wovon 6 blau(Sieg für Boguslaw), 3 rote(Sieg für Andrzej) und 2 graue(Unentschieden) sind.
Es gilt: $N_{blau} = 6, N_{rot} = 3, N_{grau} = 1, N = 10 = 6 + 3 + 1$.
Man zieht nun 10 mal($n = 10$) aus dieser Urne mit zurücklegen und ohne betrachtung der Reihenfolge.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für $A = (5 * blau, 3 * rot, 2 * grau)$(5 Niederlagen, 3 Siege, 2 Unentschieden).
Per Mulitnominalverteilung gilt: $P(A) = \frac{10!}{5!*3!*2!} * (\frac{6}{10})^5 * (\frac{3}{10})^3 * (\frac{1}{10})^2 \approx 0,0530$ 29

2 /

$\Omega = \{S, N, U\}^{10}$ $A = 2^{\Omega}$ $P = ?$

6)

Aus einem Skatblatt (32 Karten) zieht ein Spieler 9 Karten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er mindestens 2 Asse?

Gesucht: P(A), wobei A für das Ergeiniss, dass man mind. 2 Asse in den 9 gezogen Karten, steht.
Man kann dieses Problem lösen mit der Hypergeometrischen Verteilung aus der Vorlesung.
Dazu betrache man das Urnenmodell ohne Zurücklegen und ohne Betrachtung der Reihenfolge.
Die Urne hat 32 Kugeln(die 32 verschiedenen Karten), wovon 4 blau(Ass) und 28 rot(kein Ass) sind.
D.h.: $N = 32, N_{blau} = 4, N_{rot} = 28$. Von diesen 32 Kugeln werden 9 gezogen(9 Karten für den Spieler), d.h. $n = 9$.
Außerdem kann man P(A) auch darstellen als die Summe der einzigen Ereignisse das man genau 2, 3, 4 mal ein Ass zieht(man kann dies tun, da die Hypergeometrischen Verteilung eine Verteilung ist).
Also gilt: P(A)= P(genau 2 Asse) + P(genau 3 Asse) + P(genau 4 Asse)
P(genau k Asse), kann man darstellen als ziehen von $h_{blau} = k, h_{rot} = n - k$ Kugeln.
Daraus folgt: $P(A) = \frac{\binom{4}{2}*\binom{28}{7}}{\binom{32}{9}} + \frac{\binom{4}{3}*\binom{28}{6}}{\binom{32}{9}} + \frac{\binom{4}{4}*\binom{28}{5}}{\binom{32}{9}} = \frac{5583}{17980} \approx 0,3105$ ✓ 2/2

7)

Adolf und Harald wollen Schwarzgeld in die Schweiz schmuggeln. Sie befinden sich in einem Reisebus mit weiteren 23 Reisenden, die kein Schwarzgeld bei sich haben. An der Grenze werden drei Personen zufällig ausgewählt und genau durchsucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden

a) weder Adolf noch Harald,
b) Adolf und Harald,

erwischt?

$25 = n$
$2 = y$
$23 = r$
$k = 3$

R? Nein
Z? Nein
=> Hypergeom.

$a = \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{23}{3}}{\binom{25}{3}}$

$b = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{23}{1}}{\binom{25}{3}}$

8

Eine Firma stellt Glühbirnen her, von denen 2% defekt sind.

a) Wie viele Glühbirnen müssen mindestens produziert werden, damit mit 90%iger Wahrscheinlichkeit zumindest eine defekte dabei ist?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 200 zufällig gewählten Glühbirnen keine defekte zu finden ist?

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 zufällig gewählten Glühbirnen genau 2 defekt sind?

4.a) Gesucht: P(A), wobei A das Ereigniss ist, dass aussagt wie viele Glühbirnen mind. produziert werden müssen damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% eine Defekte dabei ist.
Man kann für dieses Experiment die Binominalverteilung nutzen, denn dieses Experiment spiegelt das Urnenmodell ohne betrachtung der Reihenfolge und ohne zurücklegen wieder.
Außerdem hat man nur zwei Möglichkeiten: Erfolg(Glühbirne ganz), Misserfolg(Glühbirne defekt).
Man muss nun die Formel der Binominalverteilung auflösen nach n, wobei $k = n$ ist(P(keine Defekte dabei)).
$0,1 = \binom{n}{n} * 0,98^n * 0,02^{n-n} = 1 * 0,98^n * 1 = 0,98^n \Rightarrow n \approx 114$
D.h. nach 114 ganzen Glühbirnen ist die Wahrscheinlichkeit das eine defekte dabei ist gleich 90%(die 0,1 sind das Gegenteil von den 90%).

4.b) Gesucht: P(B), wobei B das Ereigniss ist, dass aus 200 Glühbirnen keine Defekt ist.
Man kann für diese Teilaufgabe auch die Binominalverteilung nutzen(gleiche Begründung wie bei der a).
Hierbei ist nun $n = 200, k = 200$(200 ganze Birnen, keine Defekt).
$P(B) = \binom{200}{200} * 0,98^{200} * 0,02^0 = 1 * 0,98^{200} * 1 \approx 0,0176$

4.c) Gesucht: P(C), wobei C das Ereigniss ist, dass aus 100 Glühbirnen genau 2 Defekt sind.
Hier kann man nun auch wieder die Binominalverteilung nutzen.
Hierbei ist nun $n = 100, k = 98$(98 ganze Birnen).
$P(C) = \binom{100}{98} * 0,98^{98} * 0,02^2 = \frac{100*99}{2} * 0,98^{98} * 0,02^2 \approx 0,2734$

6/6

Anmerkung: Zu a/b kann man auch die Geometrische Verteilung nutzen
Bei c nicht, wegen den Kombinationen!

9)

Eine Probe Uran 238 enthält 10^{21} Atome (ca. 0,4 Gramm). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Atom innerhalb einer bestimmten Sekunde zerfällt beträgt $4,92 \cdot 10^{-18}$. Ein Geigerzähler ist auf die Probe gerichtet und so eingestellt, dass er einen Zerfall in der Probe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1% detektiert. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Sekunde genau vier Zerfallsprozesse detektiert werden?

Hinweis: Nimm an, dass die Zerfallsprozesse unabhängig voneinander sind und dass die Anzahl der Uranatome über den betrachteten Zeitraum konstant ist.

$$n = 10^{21}, k = 4, p = 4,92 * 10^{-21} = 4,92 * 10^{-18} * 0,001$$

Jedoch kann man da p sehr klein ist, dies mit einer Poisson Verteilung approximieren:
$\lambda = n * p = 10^{21} * 4,92 * 10^{-21} = 4,92$
Daraus folgt laut Vorlesung:
$P(A) = B_{10^{21}/4,92*10^{-21}}(4) \approx P_{4,92}(4) \approx e^{-4,92} * \frac{4,92^4}{4!} \approx 0,1782$
Zur Vollständigkeit trotzdem nochmal die Formel vom der Binominalverteilung:
$B_{10^{21}/4,92*10^{-21}}(4) = \binom{10^{21}}{4} * (4,92 * 10^{-21})^4 * (1 - 4,92 * 10^{-21})^{10^{21}-4}$

3

10) Ein Rubbellos habe 7 Felder, von denen 3 eine Krone und 4 eine Ente zeigen. Der Spieler darf genau 3 Felder freirubbeln. Trifft er alle Kronen, so hat er gewonnen.

(a) Wie lautet das dazugehörige Urnenmodell?

(b) Benenne allgemein die zugrundeliegende Verteilung und gib die Verteilungsfunktion an.

(c) Berechne die Gewinnwahrscheinlichkeit.

$N = 7$
$r = 3$
$b = 4$
$n = 3$

a) R ? N
Z ? N

b) => Hypergeo $P(A) = \frac{\prod_{f \in F} \binom{N_f}{H_f}}{\binom{N}{n}}$

c) $\frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$

11) Ein Tutorium besteht aus n Studenten. Jeder Student nimmt mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ an dem Tutorium teil. Diese Wahrscheinlichkeit ist für alle Studenten gleich. Modellieren Sie die Anzahl der anwesenden Studenten mit einem Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen.

b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an.

c) Das Tutorium findet nur statt, wenn mehr als k Studenten anwesend sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit $\hat{p}$, dass dieses stattfindet?

3.a) Hier ist es die Binominalverteilung, da diese Aufgabe gleich dem Urnenmodell mit zurücklegen und ohne beachtung der Reihenfolge gleicht(und es der spezialfall mit 2 Kugeln ist).
Man kann es wie folgt interpretieren:
Es gibt zwei Kugeln(0,1). Die 1 steht dabei für Erfolg(Student nimmt an Tutorium teil) und die 0 für Misserfolg(Student nimmt nicht am Tutorium teil).
Wichtig ist hier auch noch zu erwähnen das man dieses Modell nur nehmen kann, da die Wahrscheinlichkeit für jeden Studenten gleich ist(p).

3.b) $\Omega := [0 : n]$ (soll für die Anzahl an Studenten im Tutorium stehen)
$\mathcal{A} := 2^{\Omega}$
$P := B_{n,p}$

3.c) Man kann nun die Binominalverteilung nutzen um dies zu berechnen.
Da das Tutorium mehr als k Teilnehmer braucht um stattzufinden muss man die Summe von den Wahrscheinlichkeiten das genau (k+1) bis n Studenten teilnehmen nehmen.
$\hat{p} = \sum_{i=k+1}^{n} P(i) = \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i} * p^i * (1-p)^{n-i}$

12)

Wir betrachten mehrere Termine des o.g. Tutoriums (vorherige Aufgabe). Sei $\hat{p} \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Tutorium zu einem gewissen Termin stattfindet. Diese Wahrscheinlichkeit ist für alle Termine gleich. Nach wie vielen stattgefundenen Tutorien fällt das erste aus? Modellieren Sie diese Frage mit einen Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen.

b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.

c) Wie groß in Abhängigkeit von $\hat{p}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das sechste oder siebte Tutorium als nächstes ausfällt?

4.a) Hier ist das Standartmodell die geometrische Verteilung, da wir einen unendlichen Messraum haben und uns intressieren wann das erste mal Erfolg eintritt.
Dementsprechend definiere man 1:=Erfolg(Tutorium fällt aus) und 0:=Misserfolg(Tutorium findet statt).
k soll für die Zahl stehen ab wann der erste Erfolg eintritt.
Da $\hat{p}$ die Wahrscheinlichkeit für Misserfolg angibt(laut Aufgabe), definiere ich $p' = 1 - \hat{p}$ und rechne damit.

besser

4.b) $\hat{\Omega} := [0:\infty)$ (soll für erster Erfolg nach x Schritten stehen) $\Rightarrow \mathbb{N}$
$\hat{\mathcal{A}} := 2^{\hat{\Omega}}$
$\hat{P}(k) := p' * (1-p')^{k-1}$(soll heißen erstmals im k-ten Versuch Erfolg zu haben)

4.c) $P(6) = p' * (1-p')^5$
$P(7) = p' * (1-p')^6$
Daraus folgt:
$P(6 \vee 7) = p' * (1-p')^5 + p' * (1-p')^6$

13)

Bei einem Zufallsexperiment wird so lange mit einem fairen Würfel gewürfelt, bis eine Fünf oder eine Sechs geworfen wird. Wir betrachten die Anzahl der Würfe.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen.

b) Geben Sie die Berechnungsformel für die Wahrscheinlichkeit an, dass genau $k \in \mathbb{N}$ mal gewürfelt wird.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier mal gewürfelt werden muss?

a) Geometrische Verteilung

b) $p(k) = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^1$

c) $\left(\frac{4}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^1 = \frac{8}{81} \approx 9{,}8\%$

14) Beim Lotto "6 aus 49" wird sechs mal ohne zurücklegen aus einer Urne gezogen, die 49 Kugeln mit den Zahlen von 1 bis 49 enthält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier gezogene Kugeln einen einstelligen Zahlenwert haben (d.h. 1 bis 9 einschließlich)?

a) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt diesem Zufallsexperiment zugrunde?
b) Geben Sie die Berechnungsformel und einen Ausdruck für den exakten Wert an.

A) Ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge ==> Hypergeometrische Verteilung

b) $N = 49 \quad g = 9$
$r = 40 \quad n = 6 \Rightarrow \dfrac{\binom{9}{4} \cdot \binom{40}{2}}{\binom{49}{6}}$

15) Bei einer Tombola werden $N = 100$ Lose verkauft. Davon sind $N_H = 5$ ein Hauptgewinn und $N_G = 20$ ein kleinerer Gewinn. Die restlichen $N_N = 75$ Lose sind Nieten.

Die erste Kundin kauft $n = 10$ Lose (d.h. sie zieht ohne Zurücklegen). Die Reihenfolge ist für den Gewinn irrelevant und wird daher nicht berücksichtigt.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen (mit Begründung!).
b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kundin genau einen Hauptgewinn und zwei kleinere Gewinne zieht? (Es reicht, einen Ausdruck für den exakten Wert anzugeben.)

a) Reihenfolge egal, ohne Zurückziehen ==> Hypergeometrische Verteilung

b) $\Omega = [0:5] \times [0:20] \times [0:75]$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, $P = ?$

c) $\dfrac{\binom{5}{1} \cdot \binom{20}{2} \cdot \binom{75}{7}}{\binom{100}{10}}$

16) Man kann die Zahlen 1,...,49 eines Lottoscheins in die drei *disjunkten* Mengen

- $S_0 :=$ "Zahlen, die weder durch 3 noch durch 7 teilbar sind"
- $S_3 :=$ "Zahlen, die durch 3, nicht aber durch 7 geteilt werden können"
- $S_7 :=$ "Zahlen, die durch 7 geteilt werden können"

einteilen mit den Mächtigkeiten $|S_0| = 26$, $|S_3| = 16$ und $|S_7| = 7$. Nun werden gleichverteilt 6 unterschiedliche Felder markiert. Modelliere die Wahrscheinlichkeit, dass genau H_0, H_3 und H_7 Felder in den jeweiligen Mengen markiert wurden.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen (mit Begründung).

b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $H_0 = 3$, $H_3 = 2$, $H_7 = 1$?
Hinweis: Es reicht die Darstellung mit Binominalkoeffizienten, ein genaueres Ergebnis wird nicht gebraucht.

a) Reihenfolge? Nein (uns interessiert das ein Feld markiert ist, nicht in welcher Reihenfolge), Zurücklegen? Nein (ein Feld kann nicht doppelt markiert werden) ==> Hypergeometrische Verteilung

b) $\Omega = [0:26] \times [0:16] \times [0:7]$ $\mathcal{A} = 2^\Omega$ $P = $ Hypergeo.

c) $$\frac{\binom{26}{3} \cdot \binom{16}{2} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{49}{6}}$$

17) Eine Urne enthält 2 rote, 2 weisse und 2 blaue Kugeln. Es werden 3 Kugeln gleichzeitig herausgenommen.

a) Nennen Sie das passende Standardmodell beim Namen (mit kurzer Begründung).

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt jede Farbe genau einmal vor? Geben Sie die Berechnungsformel und den exakten Wert an.

a) Zurücklegen? Nein, weil gleichzeitig genommen. Reihenfolge? Nein, weil gleichzeitig ==> Hypergeometrische Verteilung

b) $$\frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{6}{3}}$$

18) In einer rheinschen Kleinstadt sollen sich im letzten Jahr 34.000 Menschen verliebt haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dieser Stadt in der nächsten Stunde mindestens zwei Menschen verlieben?

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit sich zu verlieben, soll als konstant angenommen werden. Insbesondere sei sie unabhängig davon, wann die Person sich zuletzt verliebt hat. Außerdem sollen die 34.000 Menschen dem Erwartungswert der Anzunehmenden Verliebten in einem Jahr entsprechen. Zur einfacheren Rechnung kann die Anzahl Stunden im letzten Jahr mit 8.500 angenommen werden.

$\lambda = E = \frac{34k}{8{,}5k} = 4 \Rightarrow P_\lambda(X \geq 2) = 1 - P_\lambda(X < 2)$

$P_\lambda(K = 1) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

1 l)

Eine Kamera ist auf einem Stativ montiert und beobachtet eine statische Szene. In einer Belichtungszeit von zwei Sekunden hat ein Pixel dieser Kamera 5000 Photonen detektiert.

Nun wird noch ein Foto mit einer kürzeren Belichtungszeit von 0,002 Sekunden aufgenommen. Wie wahrscheinlich ist es, dass der gleiche Pixel in dieser Zeit genau sechs Photonen detektiert? Geben Sie den Ausdruck für den Wert für die Wahrscheinlichkeit (samt Rechnung und Begründung) und nennen Sie das zugrundeliegende Standardmodell beim Namen.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die 5000 Photonen bei der ersten Aufnahme genau dem Erwartungswert entsprechen. Es gibt sehr viele unabhängige Ereignisse, die alle mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit dazu führen, dass in einem Zeitintervall ein Photon auf dem Pixel detektiert wird.

$\lambda = n \cdot p = 5$ $\qquad e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$5.000 : 1000 = 5$

$P_5(X=6) = e^{-5} \cdot \frac{5^6}{6!}$

2 D)

Eine Unfallversicherung hat berechnet, dass ein Versicherungsnehmer pro Monat in 1% der Fälle Schäden hat, die durch die Versicherung übernommen werden. Der Versicherungsvertrag laufe über 5 Jahre. Sei A das Ereignis, dass die Versicherung in dieser Zeit höchstens 2-mal zahlen muss.

(a) Benennen Sie allgemein die zugrundeliegende Verteilung und geben Sie die Verteilungsfunktion an.

(b) Geben Sie eine Formel für $P(A)$ an. Sie brauchen den Wert nicht auszurechnen!

(c) Wie lautet das dazugehörige Urnenmodell?

(d) Geben Sie allgemein die Verteilungsfunktion der Poissonverteilung an.

(e) Lässt sich die Verteilung aus (a) auch mit einer Poisson-Verteilung approximieren? Begründen Sie Ihre Antwort!

$n = 60 \qquad p = 1\%$

a) Reihenfolge? Nein, juckt nicht wann er einen Unfall hat; Zurücklegen? Ja kann doppelt Unfall haben (oder mehr) ==> Binominalverteilung!

$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

b) $P(A) = P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} B_{n,p}(i)$

c) d) $p_\lambda(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \lambda = n \cdot p$

e) p hinreichend klein, aber n nicht groß genug ==> ungenau

21)

Eine Urne erhalten 4 blaue, 1 rote und 3 schwarze Kugeln. Wir ziehen mit Zurücklegen. Das Histogramm H beschreibe, dass beim sechsmaligen Ziehen 3-mal eine blaue, 1-mal eine rote und 2-mal eine schwarze Kugel gezogen werde.

(a) Wie lautet das dazugehörige Urnenmodell?

(b) Benennen Sie die zugrundeliegende Verteilung und geben Sie die Verteilungsfunktion für ein allgemeines Histogramm an.

(c) Geben Sie für obiges konkretes H eine Formel für $P(H)$ an und rechnen Sie den Wert aus.

Mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge wegen Histogramm H
==> Multinominalverteilung

b) $\binom{n}{H} \cdot \prod_{k \in F} \left(\frac{N_k}{N}\right)^{H(k)}$

c) $\frac{6!}{3!\,1!\,2!} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2$

$\approx 0{,}13\,\%$

22)

Bei einem Multiple-Choice-Test muss bei jeder Frage genau eine von 5 Auswahlantworten angekreuzt werden. Der Kandidat setzt seine Kreuze willkürlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei 10 Fragen genau 6 Fragen richtig beantwortet?

Geben Sie die Berechnungsformel und einen Ausdruck für den exakten Wert an. Nennen Sie den Namen des zugrundeliegenden Standartmodells.

Reihenfolge? Nein, muss 6 richtig haben; Zurücklegen? Ja weil jede Wahrscheinlichkeit unabhängig voneinander
==> Multi Spezialfall: Binominalverteilung

$p = \frac{1}{5}$

$B_{10,p}(6) = \binom{10}{6} \cdot p^6 \cdot (1-p)^4$

23)

Es sei ρ eine Zähldichte auf dem endlichen Ergebnisraum Ω. Zeigen Sie: Durch

$$\rho^{\otimes n}(\omega) = \rho^{\otimes n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) := \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i)$$

wird eine Zähldichte auf Ω^n definiert.

Zur Erinnerung: Eine Funktion $\rho : \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$ heißt Zähldichte.

$\rho^{\otimes n}$ ist Zähldichte, denn $\rho^{\otimes n}(\omega) \geq 0 \;\; \forall \omega \in \Omega^n$ (da ρ eine Zähldichte ist).
Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega^n} \rho^{\otimes n}(\omega) &= \sum_{\omega_1 \in \Omega} \cdots \sum_{\omega_n \in \Omega} \rho(\omega_1) \cdot \ldots \cdot \rho(\omega_n) \\ &= \Big(\sum_{\omega_1 \in \Omega} \rho(\omega_1) \Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\sum_{\omega_n \in \Omega} \rho(\omega_n) \Big) \\ &= 1 \end{aligned}$$

24)

Zeigen Sie: Die geometrische Verteilung ist eine Verteilung.

(Aus Skript) Wegen $P(k) \geq 0$ bleibt zu zeigen, dass $P(\mathbb{N}) = 1$. Dies folgt aber aus $0 < p < 1$ und den Eigenschaften der geometrischen Reihe.

$$\begin{aligned} P(\mathbb{N}) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(k) = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot (1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \\ &= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1 \end{aligned}$$

25)

Wir interpretieren unterschiedliche Verteilungen durch Urnenexperimente. Welche Aussagen sind *richtig*:

- ☐ Die Multinomialverteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
- ☐ Bei der Multinomialverteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen nicht berücksichtigt.
- ☐ Bei der Binomialverteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt.
- ☐ Die Binomialverteilung modelliert eine Ziehung mit Zurücklegen.
- ☐ Bei der Bernoulli-Verteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt.
- ☐ Die Bernoulli-Verteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
- ☐ Die hypergeometrische Verteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
- ☐ Bei der hypergeometrischen Verteilung wird die Reihenfolge der Ziehungen berücksichtigt.
- ☐ Die geometrische Verteilung modelliert eine Ziehung ohne Zurücklegen.
- ☐ Die geometrische Verteilung modelliert eine Ziehung mit Zurücklegen.

5. K-W

1) Von 10.000 Personen habe durchschnittlich zwei eine spezielle Krankheit. Ein Standardtest ist positiv bei 97% der Kranken und 0,2% der Gesunden.

Bei Lord Derpington ist das Ergebnis des Tests positiv. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich die Krankheit hat?

Zuerstmal definiere ich mir ein paar Variablen/Ereignisse:
K :=Ereigniss das eine Person krank ist.
$\overline{K}$:=Ereigniss das eine Person gesund ist.
Pos :=Ereigniss das eine Person positiv getestet wird.
$\overline{Pos}$:=Ereigniss das eine Person negativ getestet wird.
Aus der Aufgabe weiß man das: $P(K) = 0,02\% = 0,0002$
$P(\overline{K}) = 1 - 0,02\% = 98,98\% = 0,9998.$
Außerdem weiß man das: $P(Pos|K) = \frac{P(Pos \cap K)}{P(K)} = 97\% = 0,97$
$P(Pos|\overline{K}) = \frac{P(Pos \cap \overline{K})}{P(\overline{K})} = 0,2\% = 0,002$
Gesucht ist nun: $P(K|Pos) = \frac{P(K \cap Pos)}{P(Pos)}$
Um dies auszurechnen kann man nun die Formel von Bayes nutzen(da $P(Pos) > 0$ und nur 2 verschiedene Ereignisse für Pos mit $P(Pos), P(\overline{Pos}) > 0$):
$P(K|Pos) = \frac{P(K)*P(Pos|K)}{P(K)*P(Pos|K)+P(\overline{K})*P(Pos|\overline{K})} = \frac{0,0002*0,97}{0,0002*0,97+0,9998*0,002} = \frac{485}{5484} \approx 0,0884 = 8,84\%$
Somit hat Lord Derpington mit einer Wahrscheinlichkeit von 8,84% die Krankheit. 4/4

2)

Derp hat sich im großen Park von Mendacium verlaufen. Von den Besuchern im Park sind zwei Drittel Touristen. Fragen nach der Richtung werden von diesen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ richtig beantwortet. Dabei sind Antworten auf wiederholte Fragen unabhängig, auch wenn die Frage und die Person dieselben sind. Wenn man hingegen einen Mendacier fragt, ist die Antwort immer falsch.

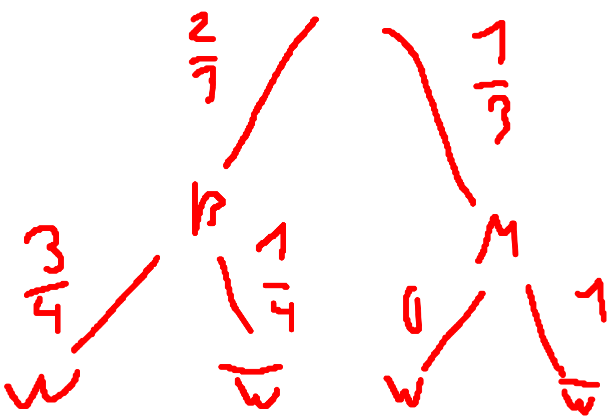
a) Derp fragt k-mal dieselbe Person, ob sich der Ausgang in Richtung Osten oder Westen befindet. Jedes Mal erhält er als Antwort "Osten". Wie groß ist – in Abhängigkeit von k – die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort "Osten" richtig ist?

b) Berechne diese Wahrscheinlichkeiten für $k \in [1:4]$.

c) Derp fragt viermal dieselbe Person und erhält die Antwortfolge "Osten, Osten, Osten, Westen". Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nach diesen vier Antworten die Richtung Osten richtig?

Hinweis: Verwende in dieser Aufgabe bedingte Wahrscheinlichkeiten und das Wegemodell.

a)



$$P(K) = \frac{P(B) \cdot P(W|B)^K}{P(B) \cdot (P(W|B)^K + P(\bar{W}|B)^K + P(M) \cdot P(\bar{W}|M)^K}$$

b) einsetzen

$P(1) = \frac{1}{2}$

$P(2) = \frac{1}{2}$

$P(3) = \frac{9}{20}$

$P(4) = \frac{27}{70}$

c) $\frac{|\text{günstig}|}{|\text{Alle}|}$

$$\Rightarrow P(WWW\bar{W}) = \frac{P(W)^3 \cdot P(\bar{W})}{P(W)^3 \cdot P(\bar{W}) + P(W) \cdot P(\bar{W})^3}$$

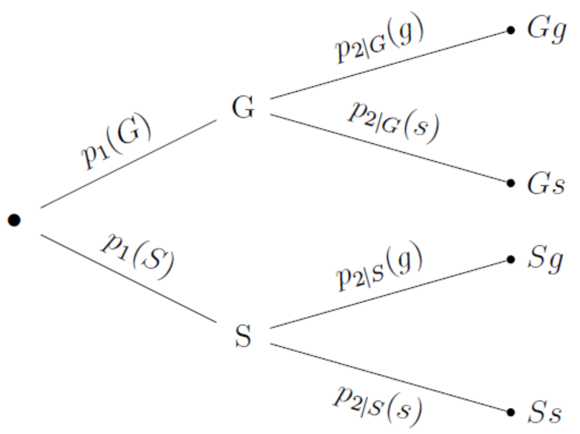
Med. hier egal da er es nicht sein kann (verschiedene Antwort)

3)

Im Mittel sagt der Wetterbericht für den kommenden Tag zu 60% gutes (G) und zu 40% schlechtes (S) Wetter vorher. Die Trefferquote liegt für die Vorhersage "gut" (g) bei 80% und für die Vorhersage "schlecht" (s) bei 90%.

a) Modelliere dieses Experiment im Wegemodell. Gib den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dabei explizit an.
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag gutes Wetter ist?
c) Heute sei gutes Wetter. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lautete der gestrige Wetterbericht "gut"?

3.a) $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\Omega_1 = \{S, G\}$, $\Omega_2 = \{s, g\}$
$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, $\mathcal{A}_{1,2} = 2^{\Omega_{1,2}}$ ← ?
$p_1(G) = 0,6$, $p_1(S) = 0,4$, $p_{2|G}(g) = 0,8$, $p_{2|G}(s) = 0,2$, $p_{2|S}(s) = 0,9$, $p_{2|S}(g) = 0,1$
$X_1 : \Omega \to \Omega_1$, $X_2 : \Omega \to \Omega_2$
Mehrstufiges Modell als Baumdiagramm:



$P(G) := P(G \times \{s,g\})$
Sowas ist nötig
(-1) (bzw. gut)

VR

3.b) Man muss die Wahrscheinlichkeiten der Pfade zusammen addieren, wo am Ende gutes Wetter raus kommt.
Das sind die beiden Wege: Gutes Wetter vorrausgesagt + gutes Wetter eingetreten.
Und: schlechtes Wetter vorrausgesagt + guter Wetter eingetreten.
D.h. $P(xg) = P(Gg) + P(Sg) = p_1(G) * p_{2|G}(g) + p_1(S) * p_{2|S}(g) = 0,6 * 0,8 + 0,4 * 0,1 = 0,52 = 52\%$ ✓
($P(xg)$:=Gutes Wetter an einem Tag)

3.c) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass gestern gesagt wurde das, dass Wetter heute gut wird und es ist heute gut.
Man kann sich dafür das Baummodell anschauen:

Man ist entweder in Gg oder in Sg(da heute ja das Wetter gut ist).
Die Wahrscheinlichkeit das man in Gg ist, ist: $0,6 * 0,8 = \frac{12}{25}$
Und die Wahrscheinlichkeit das man in Sg ist, ist: $0,4 * 0,1 = \frac{1}{25}$
Wenn man nun das Verhältniss aussrechnet(gewünschter Fall geteilt durch alle Fälle): $\frac{12}{25} / \frac{13}{25} \approx 0,9231 = 92,31\%$
✓

Anmerkung zu A: Ich muss P() definieren, damit p_1 etc. Sinn machen
D.h. P(G) = P(G x {s,g}), P(S) = P(S x{s,g})
Außerdem bei c: "Günstige Fälle" durch "Alle Fälle"

4) Beweise den diskreten Fall des Satzes auf Folie 30 von Foliensatz 5. Sei also $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein endlicher W-Raum und $Y_1, \dots, Y_n$ eine endliche Familie von Zufallsvariablen $Y_i : (\Omega, 2^\Omega) \to (\Omega_i, 2^{\Omega_i})$. Zeige, dass $(Y_i)_{i\in[1:n]}$ genau dann unabhängig ist, wenn für alle $\omega_i \in \Omega_i$ gilt

$$P(Y_1 = \omega_1, \dots, Y_n = \omega_n) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = \omega_i).$$

"$\Rightarrow$" Sei $(Y_i)_{i\in[1:n]}$ unabhängig.
Zu zeigen ist für alle $\omega_i \in \Omega_i$:

$$P(Y_1 = \omega_1, \dots, Y_n = \omega_n) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = \omega_i)$$

Dies folgt mit der Wahl $J = [1 : n]$ und $A_i = \{\omega_i\}$ aber direkt aus der Definition der Unabhängigkeit.

"$\Leftarrow$" Es gelte die gerade bewiesene Gleichung.
Zu zeigen ist, dass $(Y_i)_{i\in[1:n]}$ unabhängig ist. Sei also $J = \{j_1, \dots, j_{|J|}\} \subset [1 : n]$ und für $j \in J$ sei $A_j \in \mathcal{A}_j$. Sei außerdem $K := \{k_1, \dots, k_{|K|}\} := J^C \subset [1 : n]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{j\in J} P(Y_j \in A_j) &= \prod_{j\in J} \sum_{\omega_j \in A_j} P(Y_j = \omega_j) \\
&= \left(\prod_{j\in J} \sum_{\omega_j \in A_j} P(Y_j = \omega_j)\right) \cdot \left(\prod_{k\in K} \sum_{\omega_k \in \Omega_k} P(Y_j = \omega_k)\right) \\
&= \sum_{\omega_{j_1} \in A_{j_1}} \cdots \sum_{\omega_{j_{|J|}} \in A_{j_{|J|}}} \sum_{\omega \in \Omega_{k_1}} \cdots \sum_{\omega_{k_{|K|}} \in \Omega_{k_{|K|}}} \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = \omega_i) \\
&= \sum_{\omega_{j_1} \in A_{j_1}} \cdots \sum_{\omega_{j_{|J|}} \in A_{j_{|J|}}} \sum_{\omega \in \Omega_{k_1}} \cdots \sum_{\omega_{k_{|K|}} \in \Omega_{k_{|K|}}} P(Y_1 = \omega_1, \dots, Y_n = \omega_n) \\
&= P\left(\left(\bigcap_{j\in J} \{Y_j \in A_j\}\right) \cap \left(\bigcap_{k\in K} \{Y_k \in \Omega_k\}\right)\right) \\
&= P\left(\bigcap \{Y_i \in A_i\}\right)
\end{aligned}$$

5)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\Omega = \bigsqcup_{i\in I} B_i$ eine disjunkte Zerlegung von Ω in Ereignisse $B_i \in \mathcal{A}$ mit $P(B_i) > 0$ wobei I eine höchstens abzählbar unendliche Indexmenge ist.

a) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i).$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) > 0$ und alle $k \in I$ gilt

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}{\sum_{i\in I} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}.$$

a)

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$

$\Leftrightarrow$

Def.

$$= \sum_{i\in I} \cancel{P(B_i)} \cdot \frac{P(A \cap B_i)}{\cancel{P(B_i)}}$$

sigma add.

$$= \sum_{i\in I} P(A \cap B_i) = P\Big(\bigsqcup_{i\in I} A \cap B_i\Big) = P(A)$$

$\square$

b)

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i\in I} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$$

$$= \frac{P(B_k \cap A) \cdot P(B_k)}{\sum_{i\in I} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i) \cdot P(B_k)} = \frac{P(B_k) \cdot P(A \mid B_k)}{\sum_{i\in I} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}$$

6)

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ zwei Zufallsvariablen und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Unter welcher Bedingung sind X und Y bezüglich P stochastisch unabhängig? (Definition.)

$\forall w \in \Omega$:

$$P(X \in w, Y \in w) = P(w \in X) \cdot P(w \in Y)$$

7)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Unter welcher Bedingung heißt eine Familie $(Y_i)_{i \in I}$ von ZVs $Y_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ stochastisch unabhängig bezüglich P? (Definition.)

$\forall$ Teilmengen $\emptyset \neq J \subseteq I$ und alle $A_j \in \mathcal{A}_j$ mit $j \in J$:

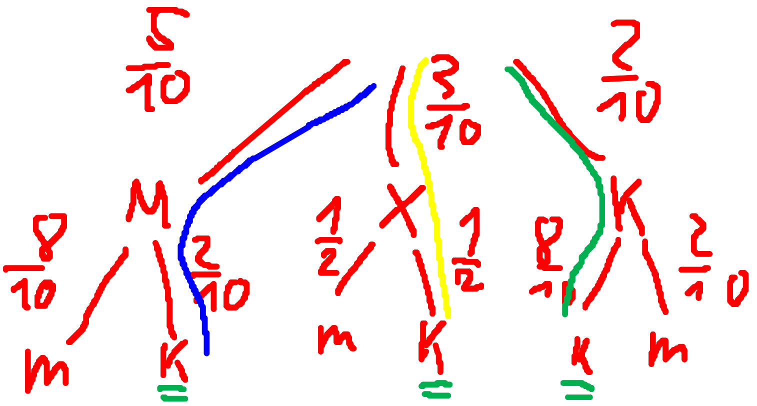
$$P\left(\bigcap_{j \in J} \{Y_i \in A_j\}\right) = \prod_{j \in J} P(Y_j \in A_j)$$

8)

Eine Musikanalyse-Software sortiert eine Sammlung von Musikstücken automatisch nach Stilrichtungen. Wir nehmen an, dass 50% der Musikstücke moderne Musik (M) sind, 20% klassische Musik (K) und der Rest einem anderen Musikstil (X) angehört. Der verwendete Algorithmus erkennt die Genres Modern (m) und Klassik (k) mit 80% Wahrscheinlichkeit korrekt. Der Fall X wird zu 50% als m und zu 50% als k erkannt.

a) Ein Musikstück wird gemäß Gleichverteilung zufällig gewählt und der tatsächliche Stil (M, K oder X) sowie die Einordnung (m oder k) betrachtet. Modellieren Sie dieses Experiment im Wegemodell. Geben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum explizit an.

b) Das gewählte Stück wurde als Klassik (k) eingeordnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei dem betrachteten Stück tatsächlich um klassische Musik handelt. Geben Sie den Rechenweg (mit kurzer Begründung) an.



$\Omega = \{M, K, X\} \times \{m, k\}$

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

$P = P(M \times \{m, k\}) = \frac{5}{10}$

$P(K \times \{m, k\}) = \frac{2}{10}$

$P(X \times \{m, k\}) = \frac{3}{10}$

$X_i : \Omega \ni (w_1, w_2) \mapsto w_i$

$i \in \{1, 2\}$ $\quad \Omega_1 = \{M, K, X\}$ $\quad \Omega_2 = \{m, k\}$

$p_1 = P \quad p_{2|M}(m) = \frac{8}{10} \quad \ldots$

b) gesucht: $P(K \mid k) \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(K) \cdot P(k \mid K)}{\sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(k \mid B_i)}$

Alle Wege die zu kleinem k führen ==> Also Kk Xk Mk unten im Bruch!

$\Rightarrow \dfrac{\setminus}{\setminus + \setminus + \setminus} \approx 39\%$

9)

Beim zweimaligen Münzwurf einer fairen Münze betrachten wir die folgenden Ereignisse:

A : Beim ersten Wurf fällt Zahl. 00, 01 $\Rightarrow \frac{1}{2}$

B : Beim zweiten Wurf fällt Zahl. 00, 10 $\Rightarrow \frac{1}{2}$

C : Das Ergebnis beider Würfe ist gleich. 00, 11 $\Rightarrow \frac{1}{2}$

Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Experiment an. Ist die Familie (A,B,C) stochastisch unabhängig? Sind die Ereignisse (A,B,C) paarweise unabhängig?

Wahrscheinlichkeitsraum:

$\Omega = \{K,Z\}^2, \mathscr{A} = 2^{\Omega}, P$ *gleichverteilt*

Damit die Familie (A,B,C) stochastisch unabhängig sind, muss $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ gelten.

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{(Z,Z)\}) = \frac{1}{4}$$
$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Paarweise müssten sie auch unabhängig sein

$\Rightarrow$ nicht stochastisch unabhängig

Sie sind paarweise unabhängig, da der Schnitt paarweise immer nur ein Element enthält.

10)

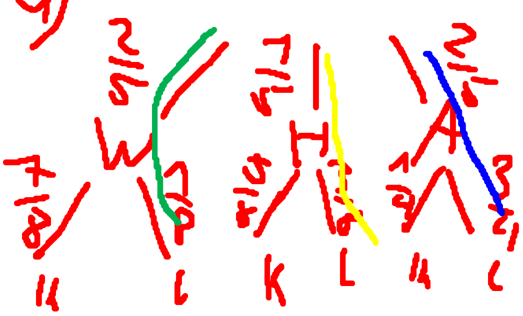
Ein webbasierter Internetdienstleister kategorisiert Fehler, die zum Ausfall seines Angebots führen, in drei Kategorien. Die folgende Tabelle erfasst die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers der jeweiligen Kategorie. Zusätzlich enthält sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler der Kategorie zu einem Ausfall von weniger bzw. mehr als einem Tag geführt hat.

Typ des Ausfalls	Wahrscheinlichkeit des Fehlers	Wahrscheinlichkeit, dass Ausfall kürzer als ein Tag	länger als ein Tag
Wartungsfehler	2/5	7/8	1/8
Hard und Softwarefehler	1/5	5/8	3/8
Angriff auf das System	2/5	1/4	3/4

a) Modellieren Sie einen zufälligen Ausfall als mehrstufiges Zufallsexperiment mit einem Wegemodell. Wählen Sie als erste Stufe den Typ des Ausfalls (**W**,**H**,**A**) und in der zweiten Stufe die Dauer des Ausfalls (**K**: kürzer als ein Tag, **L**: länger als ein Tag). Sie brauchen den Wahrscheinlichkeitsraum nicht explizit anzugeben.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich bei einem Ausfall, der länger als einen Tag dauert, um einen Wartungsfehler? Bitte geben Sie die Rechnungsformeln (mit Begründung) und Ausdruck für den exakten Wert an.

a)



b) $$P(W|L) = \frac{P(W) \cdot P(L|W)}{\sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(L|B_i)}$$

$+ \quad +$

$\approx 11,76$

Wahrscheinlichkeit von Wartungsfehler unter der Bedingung dass es ein Langerfehler war
==> Formel von Bayes fürs umdrehen

11)

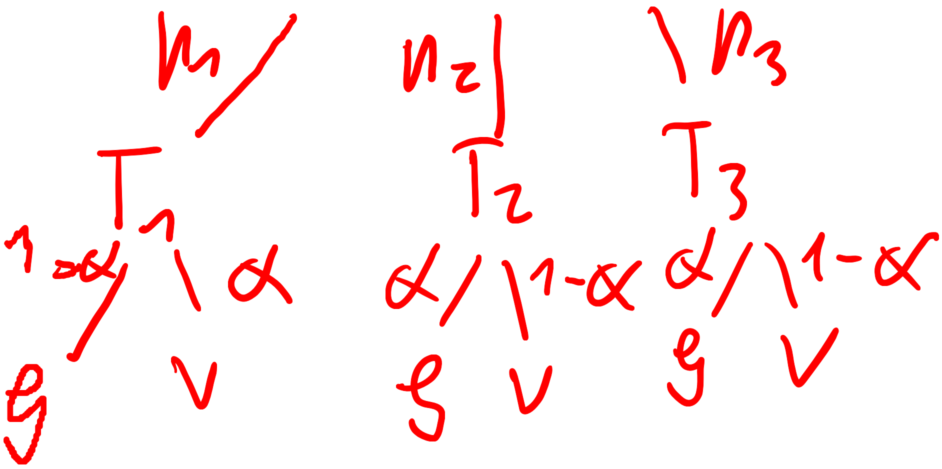
Einem Kandidaten einer Spielshow werden drei Türen präsentiert, hinter denen genau ein Gewinn versteckt ist. Im Unterschied zum Ziegenproblem sind die Wahrscheinlichkeiten den Gewinn hinter den jeweiligen Türen zu finden nicht notwendig gleich und durch $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ gegeben. Im Wissen um die Wahrscheinlichkeiten entscheidet sich der Kandidat für die erste Tür. Daraufhin öffnet der Moderator eine der verbleibenden Türen, hinter denen der Gewinn nicht versteckt ist. Nun hat der Kandidat die Möglichkeit seine Wahl auf die noch verschlossene Tür zu ändern, welche er mit Wahrscheinlichkeit α wahrnimmt. Uns interessiert, ob er schließlich gewinnt.

a) Modellieren Sie dieses Experiment im Wegemodell. Unterscheiden Sie hierbei in der ersten Stufe die Fälle $\{T1, T2, T3\}$ die angeben hinter welcher Tür der Gewinn war und in der zweiten Stufe die Fälle $\{G, V\}$, die für Gewonnen und Verloren stehen. Beachte, dass die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen von der Wahrscheinlichkeit α abhängt, die angibt ob der Kandidat wechselt.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat gewinnt, in Abhängigkeit von p_1, p_2, p_3 und α an.

c) Ist der Kandidat für $p_1 = \frac{1}{2}$ besser beraten zu wechseln, zu verbleiben oder ist es irrelevant?

d) Sei $p_1 = 0.4$, $p_2 = p_3 = 0.3$ und $\alpha = 0.5$. Falls der Kandidat gewonnen hat, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn hinter der ersten Tür war?



T_1 = gew
T_2, T_3 = Niete

b) $p_1 \cdot (1-\alpha) + p_2 \cdot \alpha + p_3 \cdot \alpha$

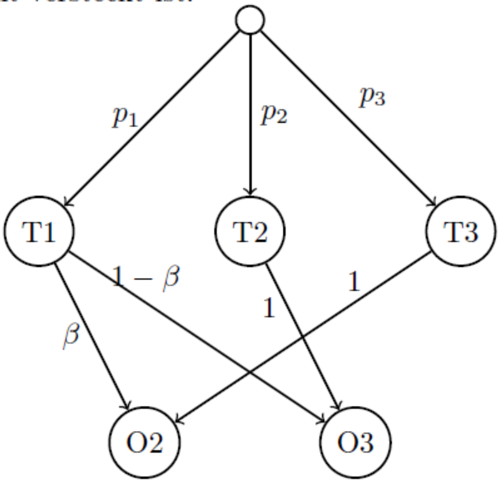
c) in b einsetzen und auflösen
==> ist egal

d) $$P(T_1 | g) = \frac{p_1 \cdot (1-\alpha)}{p_1 \cdot (1-\alpha) + p_2 \cdot \alpha + p_3 \cdot \alpha}$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}5}{0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}5} = \underline{\underline{0{,}4}}$$

12)

a) Einem Kandidaten einer Spielshow werden drei Türen präsentiert, hinter denen genau ein Gewinn versteckt ist. Die Wahrscheinlichkeiten den Gewinn hinter den jeweiligen Türen zu finden nicht notwendig gleich und durch $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq 0$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ gegeben. Der Kandidat entscheidet sich für die erste Tür. Daraufhin öffnet der Moderator eine der verbleibenden Türen, hinter denen der Gewinn nicht versteckt ist.



Unterscheiden Sie hierbei in der ersten Stufe die Fälle $\{T1, T2, T3\}$ die angeben hinter welcher Tür der Gewinn war und in der zweiten Stufe die Fälle $\{O2, O3\}$, die angeben, welche Tür der Moderator öffnet. Falls beide verbleibenden Türen Nieten sind, also die Wahl des Kandidaten richtig war, öffne der Moderator die Tür 2 mit Wahrscheinlichkeit β. Wie muss β gewählt werden, dass der Kandidat keine Rückschlüsse aus der sich öffnenden Tür auf seine Wahl zu Wechseln schliessen kann?

$p(O2) = p(O3)$

$p_1 \beta + p_3 = p_1(1-\beta) + p_2$

$= p_1 - p_1\beta + p_2 \quad \mid -p_1\beta - p_3$

$\beta \cdot p_1 \cdot 2 = p_1 + p_2 - p_3 \quad \mid :2 : p_1$

$\beta = \frac{p_1 + p_2 - p_3}{2 p_1}$

13)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ zwei unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$P(X + Y = k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n) \cdot P(Y = k - n).$$

Hinweis: Führen Sie den Beweis durch Umformungen der rechten Seite der Gleichung.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n) \cdot P(Y = k - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n \cap Y = k - n) \quad \textit{// da X und Y unabhängig}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n \cap Y = k - X)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n \cap X + Y = k)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X \in \mathbb{Z} \cap X + Y = k)$$

$$= P(X + Y = k)$$

14)

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $A, B \in \mathcal{A}$. Wann und wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ definiert?

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$
$$P(A) > 0$$

Wenn A eingetreten ist, d.h. P(A) = 1
d.h. wir haben ein neues W-Maß P_A(B)

(b) Modellieren Sie das Werfen eines fairen sechsseitigen Würfels durch Angabe eines geeigneten W-Raums.

(c) Geben Sie im Szenario (b) $P_A(B)$ für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4, 5, 6\}$ an.

(~~e~~ d) Welche $B \subseteq [1:6]$ sind im Szenario (b) stochastisch unabhängig zu $A = \{1, 2, 3\}$?

b) $\Omega = [1:6]$ $\mathcal{A} = 2^\Omega$ $P = \omega \mapsto \frac{1}{|\Omega|}$

c) $P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

d) $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

15) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Wir wissen, dass für ein festes geeignetes $A \in \mathcal{A}$ die Abbildung $B \mapsto P(B|A)$ wieder ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ beschreibt. Sei weiterhin $A \neq \Omega$. Geben Sie ein $C \in \mathcal{A}$ an, sodass $C \neq \emptyset$ und $P(C|A) = 0$, oder begründen Sie, warum es ein solches C nicht geben kann.

$$C \neq \emptyset \wedge \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = 0 \Rightarrow P(C \cap A) = 0$$
$$\Rightarrow C \cap A = \emptyset$$
$$\Rightarrow C := A^C \Rightarrow A \cap A^C = \emptyset$$

16)

Es sei $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$ und P die Gleichverteilung auf Ω. Betrachten Sie das Ereignis $A := \{\omega \in \Omega |\ 10 \text{ teilt } \omega\}$ Weiterhin bezeichne B ein unbekanntes Ereignis. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B) = \frac{1}{50}$ und $P(B|A) = \frac{1}{20}$ seien gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) \cdot P(A)}{P(B) \cdot P(A)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{50} = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{10}}{P(B)} \Rightarrow \underline{\underline{P(B) = \frac{1}{4}}}$$

17)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) > 0$. Zeigen Sie: Durch $B \mapsto P(B|A)$ wird ein W-Maß P_A auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert.

$$P_A(\Omega) = P(\Omega|A) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = 1$$

(N)

(σ)

$B = \bigsqcup_{i \geq 1} B_i \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} P_A(B) &= P_A(\sqcup_{i\geq 1} B_i) = \frac{P(A \cap \sqcup_{i \geq 1} B_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(\sqcup_{i\geq 1} A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{\sum_{i \geq 1} P(A \cap B_i)}{P(A)} \\ &= \sum_{i \geq 1} P_A(B_i). \end{aligned}$$

18)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\Omega = \bigsqcup_{i \in I} B_i$ eine disjunkte Zerlegung von Ω in Ereignisse $B_i \in \mathcal{A}$ mit $P(B_i) > 0$ wobei I eine höchstens abzählbar unendliche Indexmenge ist.

a) Wie lautet die Fallunterscheidungsformel?

b) Wie lautet die Formel von Bayes?

a) $P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A|B_i) \quad | \quad \forall A \in \mathcal{A}$

b) $$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A|B_i)} \quad \forall A \in \mathcal{A},\ P(A) > 0$$

19)

Zeigen Sie: Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, so gilt für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ und $A := A_1 \cap \ldots \cap A_n$ mit $P(A) > 0$:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

$$P(A) = \cancel{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_2 \cap A_1)}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{P(A_3 \cap (A_1 \cap A_2))}{\cancel{P(A_2 \cap A_1)}} \cdot \ldots \frac{P(A_n \cap [A_1 \ldots \cap A_{n-1}])}{\cancel{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}} = P(A)$$

Unter dem Bruch kürzt sich alles Weg am Ende bleibt nur noch die Def. von A oben stehen

$\square$

20)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum. Unter welcher Bedingung heißt eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Ereignissen in $\mathcal{A}$ stochastisch unabhängig bezüglich P? (Definition.)

$$P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} P(A_j) \qquad \forall \emptyset \neq J \subseteq I$$

21)

Welche Aussagen sind *richtig*:

- [x] Die Unabhängigkeit einer endlichen Familie von Ereignissen kann nicht durch Betrachtung der paarweisen Unabhängigkeiten erschlossen werden.
- [ ] Sind zwei Zufallsvariable X und Y unkorreliert, so sind X und Y auch unabhängig.
- [x] Sind zwei Zufallsvariable X und Y unabhängig, so sind X und Y auch unkorreliert.

---

6. EW + Var.

1)

a) Ein Spiel bestehe aus dem Wurf zweier fairer Würfel. Ein Spieler bezahlt einem Veranstalter einen Spieleinsatz von 1 € pro Spiel. Fällt $(6, 6)$, erhält der Spieler 10 €, fällt nur eine Sechs, erhält er 2 €, sonst nichts. Welchen Gewinn kann der Veranstalter pro Spiel erwarten?

b) Derp wirft eine faire Münze solange, bis Wappen erscheint, höchstens jedoch 6 Mal. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Würfe an. Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und berechne den Erwartungswert $\mathbf{E}_P(X)$.

3 | 0 | 4 | 3 | 10

1.a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$
$\mathcal{A} = 2^\Omega$
$P = \frac{|\omega|}{|\Omega|}$
$X : \Omega \to \Omega'$
$\Omega' = \{-9, -1, 1\}$
$P(X = -9) := \frac{1}{36}, P(X = -1) := \frac{10}{36}, P(X = +1) := \frac{25}{36}$
Generell soll die ZV X das Experiment beschreiben, weiß nicht genau wie man das schöner machen kann
Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten kann man ausrechnen indem man sich die Verteilung anguckt:
Es gibt nur eine Möglichkeit aus den 36 die Doppel 6 zu kriegen.
Es gibt 10 Möglichkeiten eine 6 zu kriegen und zwar:
Erster Wurf eine Zahl außer 6 und danach eine 6(das sind 5 Möglichkeiten).
Und die Spiegelbilder davon, d.h. erster Wurf eine 6 und zweiter eine andere Zahl als eine 6(sind auch 5 Möglichkeiten).
Daraus folgt das es insgesamt 10 Möglichkeiten sind. Die Nieten sind dementsprechend der Rest(36-10-1=25).
Damit kann man nun den Erwartungswert ausrechnen: $E_p(X) = \frac{1}{36} * -9 + \frac{10}{36} * -1 + \frac{25}{36} * 1 = \frac{1}{6}$
D.h. der Veranstalter macht pro Spiel ein Gewinn von $\frac{1}{6} \approx 0,17$ Euro. Anmerkung: Das ist ja die Sicht des Veranstalters, deswegen ist für ihn eine Niete ein Gewinn und eine Gewinn für den Teilnehmer eine Niete.

0,1

1.b) $\Omega = \{\cancel{1},\cancel{2}\}^6$ $P : \omega \to \frac{1}{|\Omega|}$

$\mathcal{A} = 2^\Omega$

X ist eine ZV die angibt nach wie vielen Würfen Wappen kommt(max. 6).

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

Was ist P?(-1)

Erklärung: Die Wahrscheinlichkeit für Wappen ist immer $\frac{1}{2}$ in jedem Wurf.
Für jedes Wappen im i-ten Schritt gibt es immer nur eine Folge:
Und zwar i-1 mal Zahl(nicht Wappen) und dann im i-ten Versuch Wappen.
Außer im letzten Versuch, weil wenn im 6-ten Versuch nicht Wappen kommt, wird das Experiment ja trotzdem beendet.
D.h. hier sind es zwei Pfade, einmal 5-mal Zahl+ 1-mal Wappen und 6-mal Zahl.
Dementsprechend kann man die Wahrscheinlichkeit bis zum 5-ten Versuch so ausrechnen(i-1 mal Zahl, danach Erfolg): $\frac{1}{2}^{i-1} * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}^i$

Erwartungswert:

$E_p(X) = 1 * \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{4} + 3 * \frac{1}{8} + 4 * \frac{1}{16} + 5 * \frac{1}{32} + 6 * \frac{1}{32} = \frac{63}{32} \approx 1,969$

D.h. nach Durchschnittlich 1,969 Würfen erscheint Wappen.

3/4

2) Es sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, das heißt $P(X = n) = p \cdot (1-p)^{n-1}$. Zeige für Erwartungswert $\mathbf{E}_P(X) = \frac{1}{p}$ und Varianz $\mathbf{V}_P(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Hinweis: Benutze die geometrische Reihe und ihre Ableitungen:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Für die Varianz kannst du $\mathbf{V}_P(X) = \mathbf{E}_P(X^2) - \mathbf{E}_P(X)^2$ nutzen (ohne Beweis).

Zuerstmal den Erwartungswert berechnen:

$$\begin{aligned} E_p(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} n * P(X=n) \\ &=^{Def.} \sum_{n=1}^{\infty} n * p * (1-p)^{n-1} \\ &=^{Dist.} p * \sum_{n=1}^{\infty} n * (1-p)^{n-1} \\ &=^{gesch.Form} p * \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\ &= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Nun für die Varianz berechne ich noch $E_p(X^2)$:

$n^2 \cdot x' = n^2 \cdot x' + nx' - nx'$

$(n^2+n) \cdot x' - n \cdot x'$

$n \cdot (n+1) \cdot x' - nx'$

$$\begin{aligned} E_p(X^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 * P(X=n) \\ &=^{Def.} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 * p * (1-p)^{n-1} \\ &=^{Dist.} p * \sum_{n=1}^{\infty} n^2 * (1-p)^{n-1} \\ &=^{An.} p * (\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) * n * (1-p)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n * (1-p)^{n-1}) \\ &=^{gesch.Form} p * (\frac{2}{(1-(1-p))^3} - \frac{1}{(1-(1-p))^2}) \\ &= p * (\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2}) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Als letztes kann man nun mit dem Tipp die Varianz berechnen:

$$Var_P(X) =^{Tipp} E_p(X^2) - E_p(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

✓ 4

An.:=Anmerkung:
Falls der Schritt nicht klar ist, hier die grobe Idee und zwar ohne Summen/unnötige Variablen(x' soll hier für $(1-p)^{n+1}$ stehen):
$n^2 * x' = n^2 * x' + n * x' - n * x' = (n^2+n) * x' - n * x' = (n+1) * n * x' - n * x'$

3) Mit einem fairen Würfel wird so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \dots, 6$ mindestens einmal gekommen ist.

a) Wie groß ist der Erwartungswert der Zahl der benötigten Würfe?
b) Wie groß ist die Varianz der Zahl der Würfe, die man braucht, wenn gerade das zweite verschiedene Wurfergebnis beobachtet wurde, bis das dritte kommt?

Hinweis: Betrachte die Zufallsvariable X_i, $i = 1, \dots, 6$, die die Zahl der Würfe bezeichne bis die i-te verschiedene Zahl geworfen ist. Definiere die Zufallsvariablen $Y_1 := 1$, $Y_i := X_i - X_{i-1}$ für $i = 2, \dots, 6$, und verwende Aufgabe 3.

Wenn man sich das Modell wie im Hinweis anguckt, fällt auf das jede der Zufallsvariablen Y_i geometrisch verteilt ist.
D.h. man darf hier das Modell der geometrischen Verteilung nutzen.
Daraus folgt für den Erwartungswert das $E_p(Y_i) = \frac{1}{p_i}$
Außerdem ist $p_i = \frac{6-(i-1)}{6} = \frac{7-i}{6}$

4.a) $E_p(\sum_{i=1}^{6} Y_i) =^{Lin.} \sum_{i=1}^{6} E_p(Y_i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{6}{7-i} = \frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14,7$
D.h. man benötigt durchschnittlich 14,7 Würfe um alle Zahlen mind. 1-mal zu würfeln.

4.b) Man kann nun die Varianz aus der geometrischen Verteilung nehmen:
$Var(Y_3) = \frac{1-p_3}{p_3^2} = \frac{1-\frac{4}{6}}{(\frac{4}{6})^2} = \frac{3}{4}$ ✓

4) Sei $\lambda > 0$, $\Omega := \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $\mathcal{A} := 2^{\Omega}$. Wir betrachten die Zähldichte der Poissonverteilung, das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß und die Identität als Zufallsvariable:

$$P_\lambda : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to [0,1], \quad k \mapsto e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad P : \mathcal{A} \to [0,1], \quad A \mapsto \sum_{\omega \in A} P_\lambda(\omega) \qquad X : \Omega \to \Omega, \quad k \mapsto k$$

Zeige, dass die Poissonverteilung Erwartungswert und Varianz λ hat, d.h. $\mathbf{E}_P(X) = \mathbf{V}_P(X) = \lambda$.

Hinweis: Verwende die Reihendarstellung der Exponentialfunktion und ihrer Ableitung $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Verwende für die Varianz $\mathbf{V}_P(X) = \mathbf{E}_P(X^2) - \mathbf{E}_P(X)^2$ (ohne Beweis).

X ist diskret da Definitionsbereich abzählbar unendlich. Zuerst ist die absolute Konvergenz des Erwartungswerts zu zeigen. Weil aber $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 0$ folgt diese direkt aus der Konvergenz des Erwartungswerts, somit

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_P(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} && (1)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} && (2)\\
&= e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} && (3)\\
&= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} && (4)\\
&= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} && (5)\\
&= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} && (6)\\
&= e^0 \cdot \lambda = \lambda && (7)
\end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass die Varianz ebenfalls λ ist (absolute Konvergenz ist klar)

$$\mathbf{E}_P(X^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \tag{8}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \tag{9}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \tag{10}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} + \frac{\lambda^n}{n!} \tag{11}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda (\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}) \tag{12}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + e^{\lambda}) \tag{13}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda (\lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + e^{\lambda}) \tag{14}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda (\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + e^{\lambda}) \tag{15}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda (\lambda \cdot e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda \tag{16}$$

Somit

$$\mathbf{V}_P(X) = \mathbf{E}_P(X^2) - \lambda^2 \tag{17}$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda = \mathbf{E}_P(X) \tag{18}$$

5) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y, X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}^2(P)$ reelle Zufallsvariablen für die das zweite Moment existiert.

a) Zeige, dass gilt

$$\mathbf{V}_P\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_P(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n \mathrm{Cov}_P(X_i, X_j).$$

b) Angenommen X, Y sind unabhängig. Zeige, dass X, Y dann auch unkorreliert sind.

1.a) Zz: $V_P(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n V_P(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n Cov_P(X_i, X_j)$

$$\begin{aligned}
V_P(\sum_{i=1}^n X_i) &= E_p([\sum_{i=1}^n X_i - E_p(\sum_{i=1}^n X_i)]^2) \\
&= E_p([\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n E_p(X_i)]^2) \\
&= E_p([\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n E_p(X_i)] * [\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n E_p(X_j)]) \\
&= \sum_{i,j=1}^n E_p([X_i - E_p(X_i)] * [X_j - E_p(X_j)]) \\
&= \sum_{i=1}^n E_p([X_i - E_p(X_i)] * [X_i - E_p(X_i)]) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n E_p([X_i - E_p(X_i)] * [X_j - E_p(X_j)]) \\
&= \sum_{i=1}^n E_p([X_i - E_p(X_i)]^2) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n E_p([X_i - E_p(X_i)] * [X_j - E_p(X_j)]) \\
&= \sum_{i=1}^n V_P(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n Cov_P(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

1.b) Zz: X, Y unabhängig $\Rightarrow Cov_P(X,Y) = 0$
Da X,Y unabhängig sind, kann man die Produktregel für Erwartungswerte nutzen:
$Cov_P(X,Y) = E_p(X,Y) - E_p(X) * E_p(Y) = E_p(X) * E_p(Y) - E_p(X) * E_p(Y) = 0$
$Cov_P(X,Y) = 0 \leftrightarrow$ unkorreliert

6

Es seien X und Y Zufallsvariablen auf dem Raum $([1:n], 2^{[1:n]}, P)$. Zeichnet man jedes Paar $(X(\omega), Y(\omega))$ als Punkt in der Ebene, so ist das Paar der Zufallsvariablen durch eine Punktmenge beschrieben (vgl. Folie 6.22).

a) Es sei $n = 5$, P gleichverteilt. Es seien X und Y gegeben durch

$X(1) = 5$	$X(2) = 4$	$X(3) = 3$	$X(4) = 2$	$X(5) = 1$
$Y(1) = -10$	$Y(2) = -8$	$Y(3) = -6$	$Y(4) = -4$	$Y(5) = -2$

Zeichne die Punktmenge und berechne den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} von X und Y.

b) Es sei $n = 100$, P gleichverteilt. Es seien X und Y gegeben durch

$X(1) = 4$	$X(7) = -2$	$X(19) = -4$	$X(99) = 2$
$Y(1) = 4$	$Y(7) = 0$	$Y(19) = -1$	$Y(99) = 1$

Alle anderen Werte von X und Y seien 0. Berechne $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, $Cov(X,Y)$ und ρ_{XY}.

c) Es sei $n = 4$ und P auf $[1:4]$ gegeben durch $P(1) = P(2) = \frac{2}{5}$ und $P(3) = P(4) = \frac{1}{10}$. Weiterhin seien X und Y gegeben durch

$X(1) = 1$	$X(2) = -1$	$X(3) = 2$	$X(4) = -2$
$Y(1) = -1$	$Y(2) = 1$	$Y(3) = 2$	$Y(4) = -2$

Zeige, dass X und Y unkorreliert sind, aber nicht unabhängig sind.

a)

Es gilt offensichtlich $Y = -2X$. Damit liegen die Punktepaare $(X(\omega), Y(\omega))$ auf einer Geraden und es sollte $|\rho_{XY}| = 1$ gelten. Da die Tendenz abwärts gerichtet ist, sollte $\rho_{XY} = -1$ gelten. Dies rechenen wir nun nach. Es gilt

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= Var(-2 \cdot X) = (-2)^2 \cdot Var(X) = 4 \cdot Var(X) \\
Cov(X,Y) &= Cov(X, -2 \cdot X) = -2 \cdot Cov(X,X) = -2 \cdot Var(X) \\
\rho_{XY} &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{-2 \cdot Var(X)}{2 \cdot Var(X)} = -1
\end{aligned}$$

b)

Es ist $n = 100$. Bei dieser Aufgabe soll einfach mal ganz konkret gerechnet werden:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X(i) = \frac{1}{100}(4-2-4+2) = 0 \\
E(Y) &= \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} Y(i) = \frac{1}{100}(4-1+1) = \frac{1}{25} \\
Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{100}(16+4+16+4) = \frac{2}{5} \\
Var(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{100}(16+1+1) - \frac{1}{125} = \frac{9}{50} - \frac{1}{125} = \frac{43}{250} \\
\sigma_X &= \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{2}{5}} \\
\sigma_Y &= \sqrt{Var(Y)} = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{43}{10}} \\
Cov(X,Y) &= E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = \frac{1}{100}(16+0+4+2) = \frac{11}{50} \\
\rho_{XY} &= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} = \frac{\frac{11}{50}}{\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{43}{10}}} = \frac{11}{2\sqrt{43}} \approx 0.84
\end{aligned}$$

---

c)

Man berechnet $E(X) = E(Y) = 0$ und

$$Cov(X,Y) = E(XY) = (-1)\frac{2}{5} + (-1)\frac{2}{5} + 4\frac{1}{10} + 4\frac{1}{10} = 0.$$

Also sind X und Y unkorreliert. Die Abhängigkeit von X und Y folgt z.B. aus

$$P(X=1, Y=-1) = \frac{2}{5} \neq \frac{4}{25} = P(X=1)P(Y=-1).$$

7) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ zwei Zufallsvariablen.

a) Unter welcher Bedingung ist der Erwartungswert $\mathbf{E}_P(X)$ wohldefiniert? Geben Sie eine Formel zur Bedingung des Erwartungswertes an.

b) Angenommen der Erwartungswert $\mathbf{E}_P(X)$ ist wohldefiniert. Geben Sie eine Formel zu seiner Berechnung an (Definition).

c) Geben Sie Bedingungen dafür an, dass die Varianz $\mathbf{V}_P(X)$ wohldefiniert ist. Geben Sie die Formel der Definition der Varianz an.

d) Wie lautet die Formel für Standartabweichung von X bzgl. P?

a) $\sum_{x \in X[\Omega]} |x| \cdot P(X=x) < \infty$

b) $\Rightarrow$ $E(X) = E_P(X) := \sum_{x \in X[\Omega]} x \cdot P(X=x)$

c) $V(X) = E_P([X - E_P(X)]^2) = E_P(X^2) - E_P(X)^2$
$X, Y \in \mathcal{L}^2$

d) $\sqrt{V(X)}$

8) Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ zwei Zufallsvariablen und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass $\mathbf{E}_P(X)$, $\mathbf{E}_P(Y)$ und $\mathbf{E}_P(XY)$ existieren.

a) Welche Gleichung drückt aus, dass X und Y unkorreliert sind?

b) Widerlegen Sie mit Hilfe der folgenden gemeinsamen Verteilung von X und Y den Satz: *„Unkorrelierte Zufallsvariablen sind unabhängig"*

$P(X=x, Y=y)$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$	
$y=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$y=-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

c) Beweisen Sie: *„Sind X, Y unabhängig, dann sind sie unkorreliert."*

a) $Cov_p(X,Y) = 0$

b) $E_p(X) = E_p(Y) = 0$

$\Rightarrow Cov_p(X,Y) = E_p(X,Y) = 0$

Aber: $P(X=1, Y=\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \underline{\underline{\neq}} \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = P(X=1) \cdot P(Y=\frac{1}{3})$

c) oben

9) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ zwei Zufallsvariablen so dass $\mathbf{E}_P(X)$, $\mathbf{E}_P(Y)$ und $\mathbf{E}_P(XY)$ existieren.

a) Geben Sie die Rechenregel der Linearität des Erwartungswertes als Formel an (ohne Beweis).

b) Beweisen Sie: $\mathbf{E}_P(X+Y) = \mathbf{E}_P(X) + \mathbf{E}_P(Y)$.
Ansatz: Schreiben Sie $\mathbf{E}_P(X+Y)$ als Summe über der gemeinsamen Verteilung $P(X=x, Y=y)$ von X und Y.

a) $E_p(c_1 X_1 + c_2 X_2) = c_1 \cdot E_p(X_1) + c_2 \cdot E_p(X_2)$

b) $E_p(X+Y) = \sum_{\substack{x \in X[\Omega] \\ y \in Y[\Omega]}} (x+y) \cdot P(X=x, Y=y)$

$= \sum x \cdot P(X=x, Y=y) + y \cdot P(X=x, Y=y)$

$= \sum_y y \sum_x x \cdot P(X=x, Y=y) + \sum_x \sum y \cdot P(X=x, Y=y)$

$= \sum_y y \cdot P(Y=y) + \sum_x x \cdot P(X=x)$

$\square$

10)

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ zwei Zufallsvariablen und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass $\mathbf{E}_P(X)$, $\mathbf{E}_P(Y)$ und $\mathbf{E}_P(XY)$ existieren.

a) Geben Sie Bedingungen dafür an, dass die Kovarianz $\mathrm{Cov}_P(X, Y)$ wohldefiniert ist. Geben Sie die Formel der Definition von $\mathrm{Cov}_P(X, Y)$ an.

b) Unter welcher Bedingung sind X und Y unkorreliert?

c) Wie ist der Korrelationskoeffizient von X und Y definiert?

a) $\mathrm{Cov}_P(X,Y) := \mathbf{E}_P([X-\mathbf{E}_P(X)][Y-\mathbf{E}_P(Y)]) = \mathbf{E}_P(XY) - \mathbf{E}_P(X)\mathbf{E}_P(Y)$ die **Kovarianz** von X und Y bzgl. P.

$X, Y \in \mathcal{L}^2$

b) $\mathrm{cov}_p(X,Y) = 0$

c) $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}}$

11)

a) Sei $X_1, ..., X_n$ eine endliche Bernoulli-Folge zur Erfolgswahrscheinlichkeit p, d.h. $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ ist jeweils eine Zufallsvariable mit $P(X_i = 1) = p$. Welche Zufallsvariable S beschreibt die Anzahl der Erfolge?

b) Berechnen Sie die zu erwartende Erfolgsanzahl.

c) Berechnen Sie die Varianz.

d) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X \in \mathscr{L}^1(P)$ eine Zufallsvariable mit $X[\Omega] \subseteq \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\mathbf{E}_P(X) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) \;.$$

a) $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$

b) $E_p(S) = \sum_{i=1}^{n} E_p(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i = 1) = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p$

c) $V_p(S) = E(S^2) - E(S)^2 = (n \cdot p^2) - (n \cdot p)^2 = \underline{n \cdot p^2 - n^2 p^2}$

$E(S^2) = \sum_{i=1}^{n} p^2 = n \cdot p^2$

Hinweis: Betrachten Sie die Zeilen-/Spaltensummen der Matrix

$$\begin{pmatrix} P(X=1) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ P(X=2) & P(X=2) & 0 & 0 & \cdots \\ P(X=3) & P(X=3) & P(X=3) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

d) ?

12) Es seien X und Y Zufallsvariablen mit $Y = -aX + b$ für eine positive reelle Zahl $a > 0$, eine reelle Zahl b und $\mathbf{V}(X) \neq 0$. Zeigen Sie unter Verwendung der Rechenregeln für $\mathbf{E}$, $\mathbf{V}$ und Cov, dass für den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} gilt: $\rho_{XY} = -1$.

Wie kann diese Aussage geometrisch gedeutet werden?

$V(Y) = V(-aX+b) = a^2 \cdot V(X)$

$Cov(X,Y) = Cov(X, -aX+b) = -a \cdot Cov(X,X)$

$\boxed{Cov(X,X) = V(X)}$

$\Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{-a \cdot Cov(X,X)}{\sqrt{V(X) \cdot a^2 \cdot V(X)}} = \frac{-a \cdot V(X)}{a \cdot V(X)} = \underline{\underline{-1}}$

13) Sei X eine Zufallsvariable mit $X \in \mathscr{L}^2(P)$. Zeigen Sie:

$$\mathbf{V}_P(X) = \mathbf{E}_P(X^2) - \mathbf{E}_P(X)^2 \ .$$

$V_P(X) = E_P([X - E_P(X)]^2) = E_P([X - E_P(X)] \cdot [X - E_P(X)])$

$= E_P(X^2 - 2 \cdot X \cdot E_P(X) + E_P(X)^2) =$

$= E_P(X^2) - E_P(2 \cdot E_P(X) \cdot X) + E_P(E_P(X)^2)$

$= E_P(X^2) - 2 \cdot E_P(X) \cdot E(X) + (E_P(X))^2$

$= E_P(X^2) - (E_P(X))^2$

$\boxed{E(E(X)) = E(X)\ ? \Rightarrow \text{stimmt}}$

14) Es sei $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein W-Raum mit abzählbarem Ω.

(a) Wie ist $\mathscr{L}^1(P)$ definiert?

(b) Zeigen Sie: $\mathscr{L}^1(P)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c) Zeigen Sie: $\mathbf{E}_P : \mathscr{L}^1(P) \to \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$-linear.

a)

$\mathscr{L}^1(P) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid \mathbf{E}_P(|X|) < \infty\} = \mathscr{L}^1$

b)

Zeige: + mit Asso, Neutrales, Inverses, Kommutativ
Zeige: * mit Neutrales Ele
==> Zeige beides mit Asso, Distributiv

c) z.z.: $a \cdot E(x) = E(ax)$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

15)

(a) Definieren Sie den Begriff der diskreten Zufallsvariable.

(b) Definieren Sie den Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable.

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Funktion $c \cdot 1_\Omega := (\Omega \ni \omega \to c)$, die alle Ergebnisse auf c abbildet, hat Erwartungswert c.

a) $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$X[\Omega] = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$

$\hookrightarrow$ abzählbar $\emptyset$

b)

$$\sum_{x \in X[\Omega]} x \cdot P(X = x)$$

c)

$$E(c \cdot 1_\Omega) = c \cdot P(\Omega) = c \cdot 1 = c$$

$$\sum_{c \in 1_\Omega[\Omega]} c \cdot P(c \cdot 1_\Omega = c)$$

7(b)

a) Geben Sie die Rechenregel der Monotonie des Erwartungswertes als Formel an (ohne Beweis).

b) Geben Sie die Rechenregel der σ-Additivität des Erwartungswertes als Formel an (ohne Beweis).

c) Geben Sie die Produktregel des Erwartungswertes als Formel an (ohne Beweis). $X, Y \in \mathcal{L}^1$

a) $\forall \omega \in \Omega: X(\omega) \leq Y(\omega) \Rightarrow \mathcal{E}(X) \leq \mathcal{E}(Y)$

b) $\forall X_n \geq 0 \quad X = \sum_{n \geq 1} X_n \Rightarrow E_n(X) = \sum_{n \geq 1} \mathcal{E}_n(X_n)$

c) X, Y unab. $\Rightarrow X \cdot Y \in \mathcal{L}^1$

$\mathcal{E}_n(X \cdot Y) = \mathcal{E}_n(X) \cdot \mathcal{E}_n(Y)$

17)

a) Beweisen Sie die Rechenregel der Monotonie des Erwartungswertes.

b) Beweisen Sie die Produktregel des Erwartungswertes. (V)

a) $\mathcal{E}(X) = \sum_{x \in X[\Omega]} x \cdot P(X = x) = \sum_{\substack{x \in X[\Omega] \\ y \in Y[\Omega]}} x \cdot P(X = x, Y = y)$

$\overset{!}{\leq} \sum_{''} y \cdot P(X = x, Y = y) = \sum_{y \in Y[\Omega]} y \cdot P(Y) = \mathcal{E}(Y)$ $\square$

$! \; \forall \omega: X(\omega) \leq Y(\omega)$

b) $E(X \cdot Y) = \sum_{\substack{x \in X[\Omega] \\ y \in Y[\Omega]}} (x \cdot y) \cdot P(X = x, Y = y)$

$\overset{!}{=} \sum_{y \in Y[\Omega]} y \sum_{x \in X[\Omega]} x \cdot P(X = x, Y = y) \cdot \sum_x x \cdot \sum_y y \cdot P(X = x, Y = y)$

$\overset{!}{=} \sum x \cdot P(X = x) \cdot \sum y \cdot P(Y = y) = \mathcal{E}(X) \cdot \mathcal{E}(Y)$ $\square$

$! :=$ unabhängig

18)

Seien $X, Y, X_i \in \mathscr{L}^2(P)$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: $\text{Cov}_P(aX + b, cY + d) = ac\text{Cov}_P(X, Y)$.

b) Wie lautet die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Varianz und Kovarianz?

c) Geben Sie den Satz des Pythagoras für Varianzen als Formel an. Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit der Satz gilt?

a) siehe Blatt Rev.

b) $\text{Cov}_P(X, Y) \leq V_P(X) \cdot V_P(Y)$

c) $V_P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V_P(X_i)$ wenn $X_1 \dots X_n$ unkorreliert

19

a) Welche Aussagen sind *richtig*:

- ■ Varianzbildung ist linear.
- ☐ Jede diskrete Zufallsvariable besitzt einen Erwartungswert. X
- ■ Alle Zufallsvariablen in $\mathscr{L}^2(P)$ für ein W-Maß P haben einen Erwartungswert.
- ☐ Alle Zufallsvariablen in $\mathscr{L}^1(P)$ für ein W-Maß P haben eine Varianz. X
- ■ Wenn $X, Y \in \mathscr{L}^2(P)$ dann gilt $X \cdot Y \in \mathscr{L}^1(P)$.

b) Seien $X, Y, X_i \in \mathcal{L}^2(P)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Kreuzen Sie die Aussagen an, die *falsch* sein können.

- ☐ $\mathbf{V}_P(aX + b) = a^2\mathbf{V}_P(X)$. ✓
- ■ $\mathbf{V}_P(\sum_{i=0}^{n} X_i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{V}_P(X_i)$.
- ☐ $Cov_P(X, Y)^2 \leq \mathbf{V}_P(X)\mathbf{V}_P(Y)$. ✓

7.

1) Die Zufallsvariablen V und D über Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geben die Länge eines Seminarvortrages und der anschließenden Diskussion an, wobei $\mathbf{E}_P(V) = 30$ [min], $\mathbf{E}_P(D) = 15$ [min], $\mathbf{V}_P(V) = 16$ [min^2], $\mathbf{V}_P(D) = 9$ [min^2], $\rho_P(V, D) = -0.5$. (Tendenz: je länger der Vortrag, desto kürzer die Diskussion.)

a) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz der Gesamtdauer $G := V + D$.

b) Der Seminarraum ist nur für 60 Minuten reserviert. Gebe anhand der Tschebyscheff-Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass die Veranstaltung vorzeitig abgebrochen werden muss.

4.a) Bestimmung des Erwartungswerts:
$E_p(G) = E_p(V) + E_p(D) = 30 + 15 = 45$
Bestimmung der Varianz:
$V_p(G) = V_p(V) + V_p(D) + Cov_p(V, D) + Cov_p(D, V) = V_p(V) + V_p(D) + 2 * Cov_p(V, D)$
$Cov_p(V, D) = pp(V, D) * \sqrt{V_p(V) * V_p(D)} = -0,5 * \sqrt{16 * 9} = -6$
$V_p(G) = 16 + 9 + 2 * (-6) = 13$

4.b) Tschebyscheff-Ungleichung: $P(|X - E_p(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V_p(X)}{\epsilon^2}$ $\epsilon = 15$, da das die Grenze minus dem Erwartungswert entspricht.
D.h. $P(|G - E_p(G)| \geq 15) \leq \frac{V_p(G)}{15^2}$
Und daraus folgt: $\frac{V_p(G)}{15^2} = \frac{13}{225} \approx \cancel{0,578}$ 0,0578
D.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. ~~57,8%~~ 5,78% weicht die Länge um mehr als 15m vom Erwartungswert ab.

2)

Bei einer repräsentativen Umfrage werden $n \in \mathbb{N}$ Bürger gebeten die amtierende Regierung mit Schulnoten von 1 (sehr gut) bis 6 (ungenügend) zu bewerten.

Sei Ω die Menge aller Bürger und $Y_1, \dots, Y_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit Gleichverteilung auf Ω bezüglich einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^n, 2^{\Omega^n}, P)$. Dabei gibt Y_i an wer der i-te Teilnehmer der Umfrage ist.

a) Sei $X : \Omega \to \{1, \dots, 6\}$ eine Abbildung, die einem Bürger $\omega \in \Omega$ die Schulnote $X(\omega)$ zuordnet, die er der Regierung gibt. Erläutere die Bedeutung der folgenden Zufallsvariablen:

$$X_1 := X(Y_1) \qquad\qquad X_n := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X(Y_i)$$

Gehe dabei insbesondere auf die Erwartungswerte $\mathbf{E}_P(X_1)$ und $\mathbf{E}_P(X_n)$ ein.

b) Gib ohne Kenntnis der Verteilung von X_1 auf $\{1, \dots, 6\}$ eine Zahl $v \in \mathbb{R}$ an so dass gilt

$$\mathbf{V}_P(X_1) \leq v.$$

c) Sei $\varepsilon > 0$. Zeige, dass gilt

$$P(|X_n - \mathbf{E}_P(X_1)| \geq \varepsilon) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

Rechne $\frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$ für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $n = 1000$ aus. Was bedeutet das?
Hinweis: Verwende das schwache Gesetz der großen Zahlen.

a)

X_1 ist die Note, die der erste Umfrageteilnehmer Y_1 der bisherigen Regierung gegeben hat. X_n ist die Durchschnittsnote (arithmetisches Mittel), ausgerechnet über alle Umfrageteilnehmer $Y_1, \dots, Y_n$. Der Erwartungswert $\mathbf{E}_P(X_1)$ ist die tatsächliche Durchschnittsnote, die man erhalten würde, wenn man alle Bürger befragen würde, denn Y_1 ist gleichverteilt auf Ω und somit:

$$\mathbf{E}_P(X_1) = \mathbf{E}_P(X(Y_1)) = \frac{1}{|\Omega|} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

Da $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig und identisch verteilt sind, gilt gleiches für $X(Y_1), \dots, X(Y_n)$ und somit:

$$\mathbf{E}_P(X_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_P(X(Y_i)) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_P(X_1) = \mathbf{E}_P(X_1)$$

b) Wir nutzen aus, dass X_1 auf $\{1,\dots,6\}$ abbildet (und sonst nichts). Man beachte, dass dann auch $\mathbf{E}_P(X_1) \in [1,6]$ gelten muss, denn der Erwartungswert entsteht durch eine Konvexkombination von Werten aus $[1,6]$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_P(X_1) &= \sum_{x=1}^{6} P(X_1 = x)\cdot(x - \mathbf{E}_P(X_1))^2 \\ &\leq \sum_{x=1}^{6} P(X_1 = x)\cdot 5^2 \leq 25 =: v.\end{aligned}$$

c)

Da $(Y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen ist, gilt gleiches für $(X(Y_i))_{i\in\{1,\dots,n\}}$. Da v eine obere Schranke für die Varianz von $X_1 = X(Y_1)$ ist, ist es auch eine obere Schranke für $\mathbf{V}_P(X(Y_i))$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$, denn die Zufallsvariablen sind identisch verteilt. Mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen (Foliensatz 7, Folie 5) folgt nun für alle $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X(Y_i) - \mathbf{E}_P(X(Y_i)))\right| > \varepsilon\right) < \frac{v}{n\cdot\varepsilon^2}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X(Y_i) - \mathbf{E}_P(X(Y_i)))\right| \geq \varepsilon \\ \Leftrightarrow &\left|\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}X(Y_i)\right) - \mathbf{E}_P(X_1)\right| \geq \varepsilon \\ \Leftrightarrow &\ |X_n - \mathbf{E}_P(X_1)| \geq \varepsilon\end{aligned}$$

Es bleibt die Zahlen einzusetzen. Wir verwenden die bestmögliche Schranke für die Varianz:

$$P(|X_n - \mathbf{E}_P(X_1)| \geq \varepsilon) \leq \frac{v}{n\cdot\varepsilon^2} = \frac{25}{4}\cdot\frac{2^2}{1000} = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40} = 2{,}5\%$$

3) ~~Aufgabe 3~~ (Versandaktion, *2+2=4 Punkte*)

Ein Versandhandel führt eine Werbeaktion durch. Die ersten 1000 Einsender einer Bestellung erhalten eine exklusive Damen- bzw. Herrenuhr. Nimm an, dass beide Geschlechter mit der gleichen Wahrscheinlichkeit Bestellungen aufgeben und dass die Bestellungen unabhängig sind. Wie viele Damen- und Herrenuhren muss der Versandhandel beschaffen, damit der Vorrat mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% reicht? Schätze diese Anzahl anhand

a) der Tschebyscheff-Ungleichung.

b) der Normalapproximation (siehe vorherige Aufgabe).

Hinweis: Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable bzgl. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann gilt

$$P(|X - \mathbf{E}_P(X)| \geq 2.33\cdot\sqrt{\mathbf{V}_P(X)}) \leq 2\%.$$

2.a) Tschebyscheff-Ungleichung: $P(|X - E_p(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V_p(X)}{\epsilon^2}$ $E_p(X) = 500$
$V_p(X) = 250$
Es muss gelten: $P(|X - E_p(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V_p(X)}{\epsilon^2} \leq 0,02$
Nun nach epsilon auflösen:
$\frac{V_p(X)}{\epsilon^2} \leq 0,02$
$V_p(X) \leq 0,02 * \epsilon^2$
$V_p(X) * 0,02 \leq \epsilon^2$ Vn / 0,02 !
$\sqrt{V_p(X) * 0,02} \leq \epsilon$
Mit eingesetzten Werten folgt daraus das $\epsilon \approx 111,80$ ist.
D.h. die Firma müsste $E_p(X) + 111,8 = 611,8$ Uhren von beiden Sorten bestellen damit der Vorrat mit einer 98% Wahrscheinlichkeit reicht. ✓

2.b) $2,33 * \sqrt{250} \approx 36,84$
D.h. $E_p(X) + 36,84 = 536,84$ Uhren sollte man von beiden Sorten bestellen nach Normalapproximation. ✓

4/4 ✓

4) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen. Sei $v > 0$ mit $\mathbf{V}_P(X_i) \leq v$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir betrachten das arithmetische Mittel der Abweichungen vom Erwartungswert:

$$Y_n := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbf{E}_P(X_i)$$

a) Zeigen Sie (mit Begründung), dass für die Varianz von Y_n gilt:

$$\mathbf{V}_P(Y_n) \leq \frac{v}{n}$$

b) Beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen, d.h. zeigen Sie (mit Begründung), dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$P(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Hinweis: Die Tschebyscheff-Ungleichung darf ohne Beweis verwendet werden.

Setze $Y_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}_P(X_i))$.

Dann ist $Y_n \in \mathscr{L}^2(P)$ und mit der Linearität der Erwartungswertbildung folgt $\mathbf{E}_P(Y_n) = 0$.

Aus $\mathbf{V}_P(aX + b) = a^2 \mathbf{V}_P(X)$ und $\mathbf{V}_P(\sum_i X_i) = \sum_i \mathbf{V}_P(X_i)$ für unkorrelierte ZVs folgt:

$$\mathbf{V}_P(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_P(X_i) \leq \frac{v}{n}.$$

Mit der Tschebyscheff-Ungleichung ergibt sich:

$$P\left(\left|Y_n - \underbrace{\mathbf{E}_P(Y_n)}_{=0}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbf{V}_P(Y_n)}{\epsilon^2} \leq \frac{v}{n\epsilon^2}.$$

Damit ist das schwache Gesetz der großen Zahl bewiesen. □

5)

a) Formulieren Sie das Schwache Gesetz der großen Zahl.

b) Wenden Sie dieses Gesetz auf n Bernoulli-Versuche $X_1, ..., X_n$ zur Erfolgswahrscheinlichkeit p an: Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich die relative Häufigkeit der Erfolge um mindestens $\varepsilon > 0$ von p unterscheidet.

a)

$$P\left(\left|\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} X_i - E_P(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{v}{n * \varepsilon^2} \to^{n\to\infty} 0$$

b)

$$v = V_P(X) = p * (1-p)$$
$$E(X) = p$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} |X_i - p| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p * (1-p)}{n * \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P(|Y_i - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n * \varepsilon^2}$$

denn $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

6)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ ZVs $\Omega \to \mathbb{R}$.

a) Wann heißt die Folge $(Y_n)_n$ stochastisch konvergent (oder $\boldsymbol{P}$-konvergent) gegen Y?

b) Wann konvergiert die Folge $(Y_n)_{n\geq 1}$ P-fast sicher gegen Y?

7)

Formulieren Sie den Satz über die Tschebyscheff-Ungleichung (ohne Beweis).

$$P(|X - E_n(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V_n(X)}{\varepsilon^2} \leq \frac{V}{n \cdot \varepsilon^2}$$

8)

a) Geben Sie die Formel der Dichtefunktion zur Standartnormalverteilung an.

b) Geben Sie die Formel der Verteilungsfunktion der Standartnormalverteilung an.

c) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz (ohne Beweis).

9)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(P)$ wobei $\mathbf{V}_P(X_i) \leq v$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und ein $v > 0$.

Kreuzen Sie bei jeder Teilaufgabe die Aussage an, die **immer zutrifft**.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt

- ☐ $P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}_P(X_i))\right| \geq \frac{1}{n} \cdot \varepsilon\right) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$.
- ☐ $P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \leq n \cdot \varepsilon\right) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$.
- ☐ $P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}_P(X_i))\right| \leq \varepsilon\right) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$.
- ☐ $P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}_P(X_i))\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{v}{n \cdot \varepsilon^2}$.

b) Es gilt

- ☐ $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i + \mathbf{E}_P(X_i)) \to 0$ P-fast sicher für $n \to \infty$.
- ☐ $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}_P(X_i)) \to 0$ P-fast sicher für $n \to \infty$.
- ☐ $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}_P(X_i))^2 \to v$ P-fast sicher für $n \to \infty$.
- ☐ $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}_P(X_i)) \to 0$ P-fast sicher für $n \to \infty$.

$\Sigma 9$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$. $X_n \to x$ P-fast sicher für $n \to \infty$ gilt genau dann,

- ☐ wenn für das Ereignis $A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = x\}$ gilt $P(A) = 1$.
- ☐ wenn für das Ereignis $A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = x\}$ gilt $A = \Omega$.
- ☐ wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - x| < \varepsilon) = 1$.
- ☐ wenn $P(X_n = x) \to 1$ für $n \to \infty$.

8 Markov

Wir betrachten den (partiellen) Webgraphen in Abbildung 1 (Vergleich Folie 11 f. in Foliensatz 8). Berechne die Grenzverteilung des zugehörigen Markov-Prozesses für $p = 0$ (d.h. die Internetnutzer klicken nur Links an). Was lässt sich über ihre Eindeutigkeit und über die Konvergenz des Markov-Prozesses sagen? Ordne die Webseiten A, B, C, D nach ihrem PageRank in absteigender Folge.

Hinweis: Vervollständige den Webgraphen zu einem vollständigen Übergangsgraphen um die Aufgabe zu lösen; Der PageRank entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass ein Internetnutzer nach vielen Klicks (also in der Grenzverteilung) auf einer bestimmten Webseite ist.

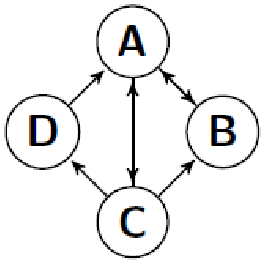


Abbildung 1: Ein Webgraph. Die Knoten entsprechen Webseiten, die Kanten Links.

Auf Papier, da zeichnen AIDS ist mit Maus!

2) Wir betrachten den Übergangsgraph in Abbildung 2.

a) Zeige, dass zu dem entsprechenden Markov-Prozess keine Grenzverteilung existiert. Ist dies ein Widerspruch zum Ergodensatz?

b) Gibt es eine Verteilung, die von einem Zeitschritt zum nächsten unverändert bleibt?

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[ll, bend right]
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 2: Ein Übergangsgraph. Alle Kanten haben eine Übergangswahrscheinlichkeit von 100%.

a) $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Pi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Pi^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Pi$

$\Rightarrow$ Es gibt kein $l \geq 1$, sodass alle Einträge von Π^l positiv sind, d.h. kein Widerspruch

$\Rightarrow$ Ergodensatz kann nichts über Grenzver. sagen

+ man sieht an $\Pi = \Pi^3$ das es keine gibt (wiederholt sich unendlich oft)

b) Nein dass es zyklisch durch Π^1, Π^2, Π^3 geht

3)

Aufgabe 3 (Münzspiel, *1,5+2,5=4 Punkte*)

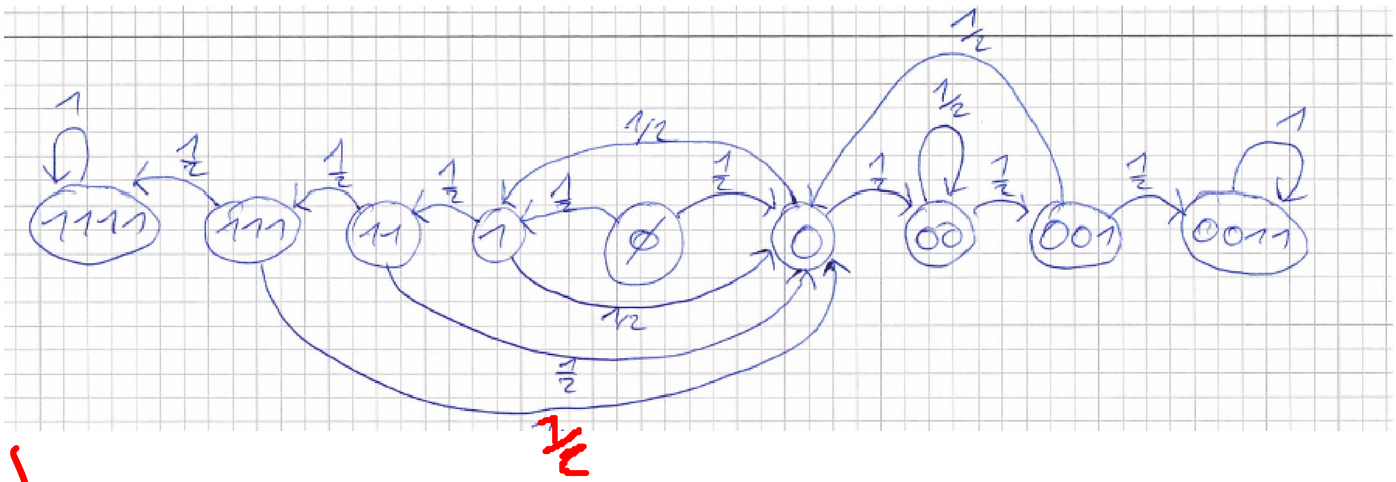
Derp schlägt seiner Schwester Derpina folgendes Spiel vor: Sie werfen abwechselnd eine faire Münze, bis erstmals eine der Ziffernfolgen „1111“ oder „0011“ auftritt. Derpina gewinnt im ersten Fall und Derp im zweiten.

a) Stelle den Spielablauf mit Hilfe eines Übegangsgraphen dar.

Hinweis: Fange mit dem Zustand „leer“, der den Zeitpunkt vor dem ersten Werfen darstellt, an. Stelle die Münzwürfe als Übergänge dar und versuche so wenig Zustände wie möglich zu erzeugen. Relevant sind in jedem Zustand nur ein paar der vorangegangen Würfe.

b) Sollte Derpina den Vorschlag annehmen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie gewinnt?

Hinweis: Ermittle die Wahrscheinlichkeit aus dem Zustand „leer“ den Zustand „1111“ vor dem Zustand „0011“ zu erreichen.



b)

i)

Eine bestimmte Pflanzenart besitze die drei möglichen Blütenfarben rot (R), pink (P) und weiß (W). Bei der Kreuzung dieser Pflanzen mit einer pinkblühenden Blume entstehen in Abhängigkeit von den Blütenfarben der beiden beteiligten „Elternpflanzen“ folgende Farbanteile für die „Kinder“:

Eltern: R und P ergeben:	50% R	50% P	0% W
Eltern: P und P ergeben:	25% R	50% P	25% W
Eltern: W und P ergeben:	0% R	50% P	50% W

In einem Feldversuch werden 4000 rotblühende, 4000 pinkblühende und 4000 weißblühende Pflanzen stets mit pinkblühenden Pflanzen gekreuzt und von jeder dieser 12000 Pflanzen im darauffolgenden Jahr je ein Samenkorn ausgesät. Mit den daraus entstehenden 12000 Blumen wird nun wieder durch Kreuzung mit pinkblühenden Pflanzen jeweils ein Samenkorn gewonnen, welches ein Jahr später erneut ausgesät wird usw.

a) Veranschauliche die Übergänge der Blütenfarben von einer Generation zur nächsten durch einen Übergangsgraph und stelle eine Übergangsmatrix von einer Generation auf die nächste für die Kreuzung der drei Blütenfarben mit jeweils pinkblühenden Pflanzen auf.

b) Bestimme die Farbverteilung der 12000 Pflanzen nach einem Jahr.

c) Bestimme die Farbverteilung nach zwei Jahren. Was lässt sich hieraus über die langfristige Farbverteilung aussagen, wenn dieses Kreuzungsverfahren fortgeführt wird?

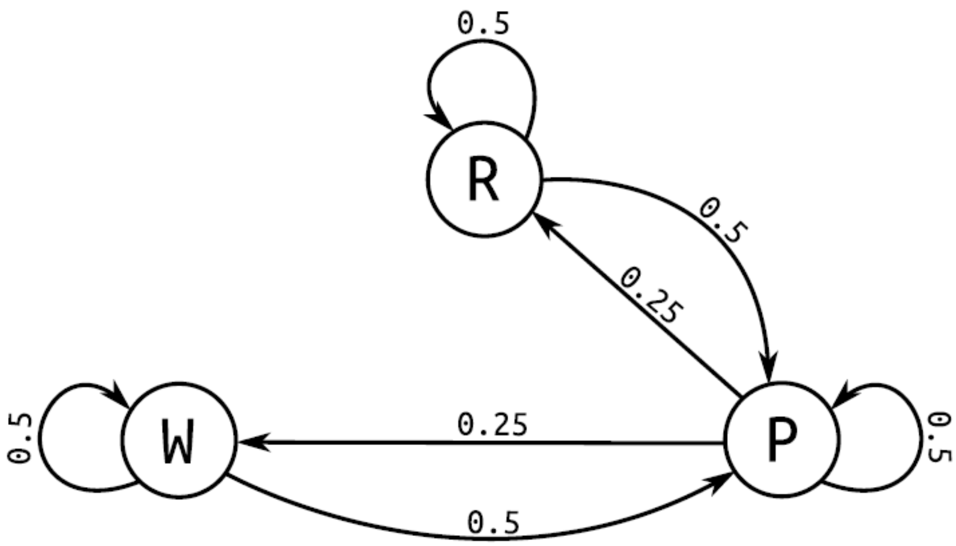


Abbildung 1: Übergangsgraph der Blütenfarben von einer Generation zur nächsten

Die Reihen der Matrizen besagen die Farbe der Kinder von oben nach unten:
`Rot, Pink, Weiß`
Die Spalten besagen die Farben der Eltern von von Links nach Rechts:
`Rot und Pink, Pink und Pink, Weiß und Pink`

a) ~~*Siehe Abbildung 1*~~

$$\cancel{\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} := \Pi$$

b) $$\cancel{\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4000 \\ 4000 \\ 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 6000 \\ 3000 \end{pmatrix}}$$

$$p = (4k, 4k, 4k)$$

$$p \cdot \Pi = (3k, 6k, 3k) := p'$$

c) Nach zwei Jahren:

$$\cancel{\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 6000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 6000 \\ 3000 \end{pmatrix}}$$

$$p' \cdot \Pi = p'$$

Die Verteilung bleibt gleich, die Grenzverteilung wurde somit errreicht.

oder: $p \cdot \Pi^2 = p'$

+ Für L=2 sind alle Einträge positiv +zeilen stochastisch
==> Nach Ergodensatz das p´ die Grenzverteilung ist!

5)

Eine Reihe von Leuten spielt stille Post. Der erste Spieler in der Reihe flüstert dem Nächsten die Nachricht “Ja” zu. Von da an flüstert jeder Mitspieler dem Nächsten die Nachricht zu, die er meint erhalten zu haben. Bei jeder Weitergabe kann es zu Missverständnissen kommen.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% wird aus “Ja” ein “Nein” und mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% ein “Jein”. Ein “Nein” wird zu 20% ein “Ja” und zu “30%” ein “Jein”. “Jein“ wird zu 30% ein “Nein” und zu 30% ein “Ja”.

Da die Spieler flüstern nehmen wir an, dass diese Ereignisse von Spieler zu Spieler unabhängig sind.

a) Stellen Sie einen Übergangsgraphen und eine Übergangsmatrix auf, mit denen sich eine entsprechende Markov-Kette beschreiben lässt.

   Hinweis: In der Matrix sollte die erste Zeile “Ja”, die zweite Zeile “Jein” und die dritte Zeile “Nein” beschreiben.

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Spieler dem Nächsten die Nachricht “Ja” weitergibt? (Mit Rechnung und Begründung).

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste, zweite und vierte Spieler die Nachricht “Ja” weitergeben? (Mit Rechnung und Begründung).

d) Wir erhöhen die Anzahl der Mitspieler $n \in \mathbb{N}$. Wie hoch wird für $n \to \infty$ die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende die Nachricht “Ja” ankommt? (Mit Rechnung und Begründung).

Auf Papier, da wieder zu viel Zeichnen!

6) Wir betrachten den endlichen Automaten in Abbildung 1. Der endliche Automat erwartet eine Ziffernfolge als Eingabe. Der Initialzustand ist 0 und die Übergänge sorgen dafür, dass in jedem Schritt der Zustand dem Zahlenwert der Eingabe Modulo drei entspricht. Insbesondere ist die Eingabe durch drei teilbar genau dann, wenn der Automat im Zustand 0 endet.

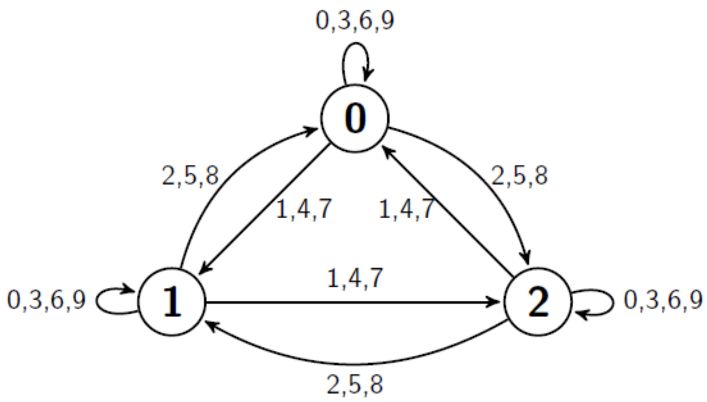


Abbildung 1: Der Graph zur Beschreibung des endlichen Automaten. Die Ziffern an den Kanten zeigen an bei welchen Eingaben welcher Übergang erfolgt.

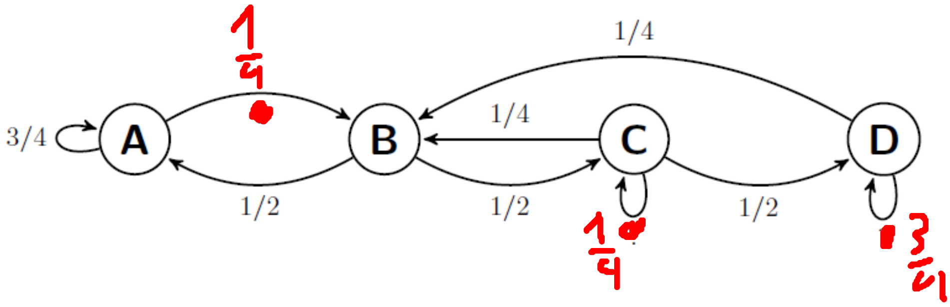
Dieser endliche Automat wird nun mit einer Folge unabhängiger, zufälliger Ziffern gespeist. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ziffer der Eingabe 0 oder 1 ist, ist jeweils $\frac{2}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit für die restlichen Ziffern $2, \ldots, 9$ ist jeweils $\frac{1}{12}$.

a) Modellieren Sie das Zufallsexperiment durch eine Markov-Kette und geben Sie dabei einen Übergangsgraph und eine Übergangsmatrix an.

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Eingabe mit zwei Ziffern durch drei teilbar ist? Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit durch die Markov-Kette.

c) Ermitten Sie, ob die Markov-Kette eine eindeutige Grenzverteilung hat und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

7) Wir betrachten das Spiel mehrerer Kinder (A, B, C und D) mit einem Spielzeug. Während dem Spiel nehmen sie sich das Spielzeug gegenseitig ab. Nachdem die beiden grösseren (A und D) es nicht mehr abgeben, greift der Vater hin und wieder ein und gibt das Spielzeug dem kleinsten Kind (B). Das folgende Diagramm stellt den *partiellen* Übergangsgraphen des Spielzeugs dar:



a) Vervollständigen Sie obrigen Übergangsgraphen und geben Sie eine Übergangsmatrix an.

b) Hat diese Übergangsmatrix eine Grenzverteilung, und wenn ja, wieso? Falls möglich, ermittlen Sie die Wahrscheinlichkeit für jedes Kind das Spielzeug nach langer Zeit des Spielens zu haben.

Rest auf Papier!

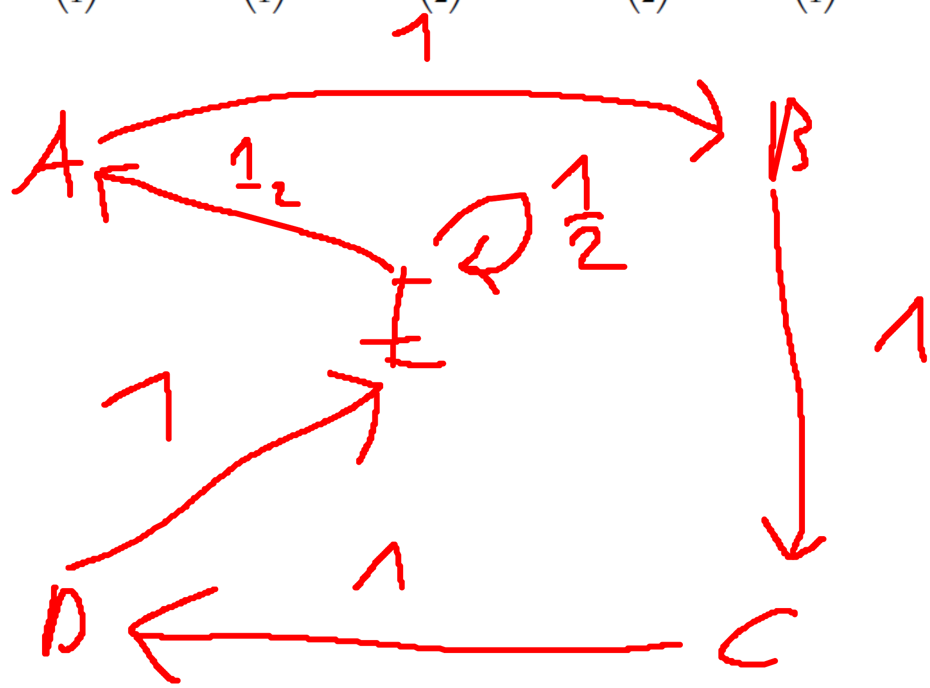
8) Gegeben sei ein Markovprozess mit 5 Zuständen A, B, C, D und E und der Übergangsmatrix Π. Falls in einem Schritt die Wahrscheinlichkeit der Zustände durch den Vektor ρ gegeben sind, sind sie im nächsten Schritt durch den Vektor $\rho\Pi$ gegeben.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie den Übergangsgraphen für die Übergangsmatrix Π an.
b) Im allgemeinen, unter welchen Bedingungen hat der Markovprozess eine Grenzverteilung nach dem Ergodensatz?
c) Falls im allgemeinen eine eindeutige Grenzverteilung ρ existiert, welche *Gleichungen* legen sie *eindeutig* fest?
d) Welche der folgenden Verteilungen könnte die Grenzvertelung sein:

$$\text{(i)}\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{(ii)}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{(iii)}\ \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{(iv)}\ \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{(v)}\ \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{(vi)}\ \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

a)



b) $\exists l \geq 1$ sodass alle Einträge positiv sind in der Matrix + sie zeilenstochastisch ist

c) $\rho \cdot \Pi = \rho$

d) 2,4,6 sind nicht zeilen stocha ==> nö
3,5 gehen nicht weil mit Multi der Matrix kommt nicht 3,5 raus
gleiches gilt auch für 1 ==> gar keine!

9) *Aufgabe 8*

a) Sei $X_0, X_1, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in V, d.h. $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (V, 2^V)$. Definieren Sie möglichst genau, wann diese Folge als Markov-Kette bezeichnet werden kann.

b) Gegeben sei eine Übergangsmatrix Π:

$$\Pi = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie, ob die Übergangsmatrix eine Grenzverteilung hat und begründen Sie Ihre Antwort.

10

Wir betrachten einen Teil des Internets bestehend aus fünf Webseiten A, B, C, D und E. Die Verlinkungen dieser Webseiten untereinander sind in Abbildung 2 dargestellt. Das Verhalten von Internetnutzern in diesem Teil des Internets soll nun durch eine Markovkette beschrieben werden, wobei wir die Wahrscheinlichkeit, dass über die Adressleiste eine zufällige Seite aufgerufen wird auf null setzen. Das heißt, wenn ein Internetnutzer auf einer Webseite mit $n \in \mathbb{N}$ Links ist, wird er im nächsten Zeitschritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$ immernoch auf dieser Seite sein oder jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$ einem der Links gefolgt sein.

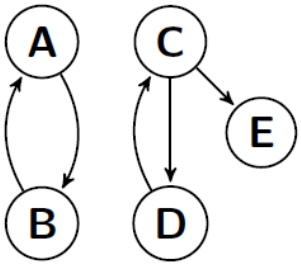


Abbildung 2: Der Webgraph zu den fünf Webseiten. Ein Pfeil bedeutet, dass eine Webseite durch einen Link auf eine andere Seite verweist.

a) Beschreiben Sie die Markovkette $X_0, X_1, \ldots$ die diesen Vorgang modelliert. Geben Sie dabei insbesondere den Übergangsgraph und die Übergangsmatrix Π an.

b) Ein Internetnutzer ist auf Webseite D. Wie hoch sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten, dass er zwei Zeitschritte später auf Webseite A, D oder E ist?

c) Ermitteln Sie, ob die Markov-Kette eine eindeutige Grenzverteilung hat und bestimmen Sie diese gegebenenfalls. Begründen Sie Ihre Antwort.

1)

Sei $X_0, X_1, \ldots$ eine Markovkette auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum V und Übergangsmatrix Π.

a) Definieren Sie den Begriff der *zeilenstochastischen Matrix*.

b) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen zur Markovkette mit Zustandsraum $V = \{0, 1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix

$$\Pi = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Beweisen Sie folgenden Satz:
Die n-te Potenz Π^n einer zeilenstochastischen Matrix Π enthält an der Position (x, y) die Wahrscheinlichkeit, in genau n Schritten vom Zustand $x \in V$ in den Zustand $y \in V$ zu gelangen, also

$$P^x(X_n = y) = \Pi^n(x, y),$$

wobei P^x die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit sicherem Start in x beschreibt, d. h. $P^x(X_0 = x) = 1$.

Satz. Die n-te Potenz Π^n der zeilenstochastischen Matrix Π enthält an der Position (x, y) die Wahrscheinlichkeit, in genau n Schritten vom Zustand x in den Zustand y zu gelangen:

$$P^x(X_n = y) = \Pi^n(x, y).$$

Beweis. Für beliebiges $n \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_n \in V$ gilt nach der Produktformel

$$\begin{aligned} & P^x(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\ = \; & P^x(X_1 = x_1 | X_0 = x) \cdot P^x(X_2 = x_2 | X_0 = x, X_1 = x_1) \cdot \ldots \\ & \ldots \cdot P^x(X_n = x_n | X_0 = x, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ = \; & \Pi(x, x_1) \cdot \Pi(x_1, x_2) \cdot \ldots \cdot \Pi(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Durch Summation über $x_1, \ldots, x_{n-1} \in V$ erhält man für alle $x, y \in V$:
$P^x(X_n = y) = \Pi^n(x, y)$. □

9

1) Eine Münze wird sechs mal geworfen. Die beobachtete Ergebnisfolge ist

Zahl, Zahl, Kopf, Zahl, Kopf, Zahl.

Schätze die Wahrscheinlichkeit $\theta \in [0,1]$ mit der die Münze bei einmaligem Wurf Kopf zeigt, unter der Annahme, dass die sechs Würfe voneinander unabhängig waren. Benutze hierfür ein geeignetes statistisches Modell und den Maximum-Likelihood-Schätzer.

Binom, da Reihenfolge wurscht

Erledigt auf Papier!

2) Eine unfaire Münze wird so lange geworfen bis sie zum ersten mal Kopf zeigt. Das geschieht beim vierten Wurf. Bestimme, unter Verwendung eines geeignetes statistischen Modells, den Maximum-Likelihood-Schätzer für die Wahrscheinlichkeit $\theta \in [0,1]$, dass die Münze bei einem Wurf Kopf zeigt.

Geometrische

Erledigt auf Papier!

3) Aufgabe 3 (Statistik einer unfairen Münze 3, *4 Punkte*)

Um eine unfaire Münze zu vermessen wird sie n mal geworfen, wobei k mal Kopf erscheint. Danach wird sie zusätzlich so lange geworfen, bis sie das nächste mal Kopf zeigt, was nach m Würfen eintritt. Seien X und Y Zufallsvariablen für den Ausgang der beiden Experimente und sei $p \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze in einem Wurf Kopf anzeigt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das gemessene Ereignis

$$P(X=k, Y=m) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot (1-p)^{m-1} p$$
$$= \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k+m-1}$$

Schätze p mit einem Maximum-Likelihood-Schätzer. Was ergibt sich für den Fall $n = 10$, $k = 8$ und $m = 8$?

Geometrische (nur X ist besonders)
Erledigt auf Papier

4) Es sei L_x die Likelihood-Funktion zu einer Stichprobe $x \in \mathbb{N}_0$ mit $L_x(a) = P_a(x)$ für reelle $a > 0$. Dabei bezeichne P_a die Poissonverteilung zum Parameter $a > 0$. Bestimme die Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{a}(x)$ von a.

Poissonverteilung

Auf dem Blatt!

5)

Eine unfaire Münze wird $n = 1000$ mal geworfen. Sie zeigt dabei $k = 364$ mal Zahl. Geben Sie zu diesem Experiment ein statistisches Modell basierend auf einer Binomialverteilung an und schätzen Sie mit einem Maximum-Likelihood-Schätzer (mit Formel, Rechnung und Begründung) die Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$, dass die Münze bei einem Wurf Zahl zeigt. Geben Sie außerdem an (mit Begründung), ob der gefundene Schätzer erwartungstreu ist.

Binominalverteilung

Erster Teil gleich wie 1, zweiter Teil auf dem Blatt!

$$T_n(x) = \frac{n}{k} =: \theta$$

$$E(T_n(x)) \stackrel{!}{=} p$$

6)

Ein Zufallsgenerator liefert gleichverteilt natürliche Zahlen aus einem Interval $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Es werden k Zufallszahlen $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ generiert. Schätzen Sie die Parameter a und b aus den $(x_i)_{i=1\ldots k}$ mit einem Maximum-Likelihood Schätzer.

a) Geben Sie zu diesem Experiment ein statistisches Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ an.

b) Leiten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für die Intervalgrenzen a und b aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_k$ her.

c) Welche Parameter $\hat{a}$ und $\hat{b}$ schätzt Ihr Schätzer für die Folge $61, 69, 57, 71, 66, 79, 83, 91, 56, 71$?

d) Welche Gleichung müsste dieser Schätzer erfüllen, um erwartungstreu zu sein?

Gleichverteilung ==> wie in den Folien nur mit a statt 0

7) Definieren Sie den Begriff des statistischen Modells inklusive aller vorkommenden Begriffe.

Definieren Sie den Begriff des statistischen Modells inklusive aller vorkomm

Ein statistisches Modell ist ein Tripel $M = (\chi, \mathscr{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ bestehend aus

- einem Stichprobenraum χ
- einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ auf χ
- einer Familie $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ von W-Maßen auf $(\chi, \mathscr{A}), |\Theta| > 2$.

8)

a) Definieren Sie die Begriffe der Statistik und des Schätzers.

b) Wann heißt ein Schätzer Maximum-Likelihood-Schätzer?

a) Es sei $(\chi, \mathscr{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und (Σ, S) ein Messraum

- Eine beliebige ZV $S : (\chi, \mathscr{A}) \to (\Sigma, S)$ heißt eine Statistik
- Sei $\tau : \Theta \to \Sigma$ eine Abbildung, die jedem $\theta \in \Theta$ eine Kenngröße $\tau(\theta) \in \Sigma$ zuordnet. Eine Statistik $T : X \to \Sigma$ heißt dann ein Schätzer für τ

b)

Ein Schätzer $T : X \to \Theta$ für θ heißt Maximum-Likelihood-Schätzer, wenn für jedes $x \in X$ stets $\tau(x)$ eine Maximalstelle von p(x, ·) ist, d.h.:

$$p(x, T(x)) = \max_{\theta\in\Theta} p(x, \theta).$$

9) Welche Aussagen sind immer *richtig*:

- [ ] Erwartungstreue Schätzer haben einen kleineren quadratischen Fehler als nicht erwartungstreue Schätzer.
- [x] Likelihood-Funktionen und dazugehörige Log-Likelihood-Funktionen haben dieselben Maximalstellen.
- [x] Das Produktmodell eines parametrischen Modells ist wieder parametrisch.
- [x] Das Produktmodell eines Standartmodells ist diskret oder stetig.