



南開大學  
Nankai University

计算机学院  
并行程序设计

## 特殊高斯消去法的并行优化

并行程序设计期末研究报告

---

姓名：丁屹、卢麒萱

学号：2013280、2010519

专业：计算机科学与技术

2022 年 7 月 10 日

# 目录

<b>1 问题描述</b>	<b>2</b>
<b>2 研究设计</b>	<b>2</b>
2.1 测试用例 . . . . .	3
2.2 实验环境和相关配置 . . . . .	3
2.3 串行稀疏矩阵算法 . . . . .	3
2.4 串行位元矩阵算法 . . . . .	3
<b>3 算法分析</b>	<b>4</b>
3.1 正确性分析 . . . . .	4
3.2 正确性验证 . . . . .	4
3.3 复杂度分析 . . . . .	4
3.4 运行时间分析 . . . . .	4

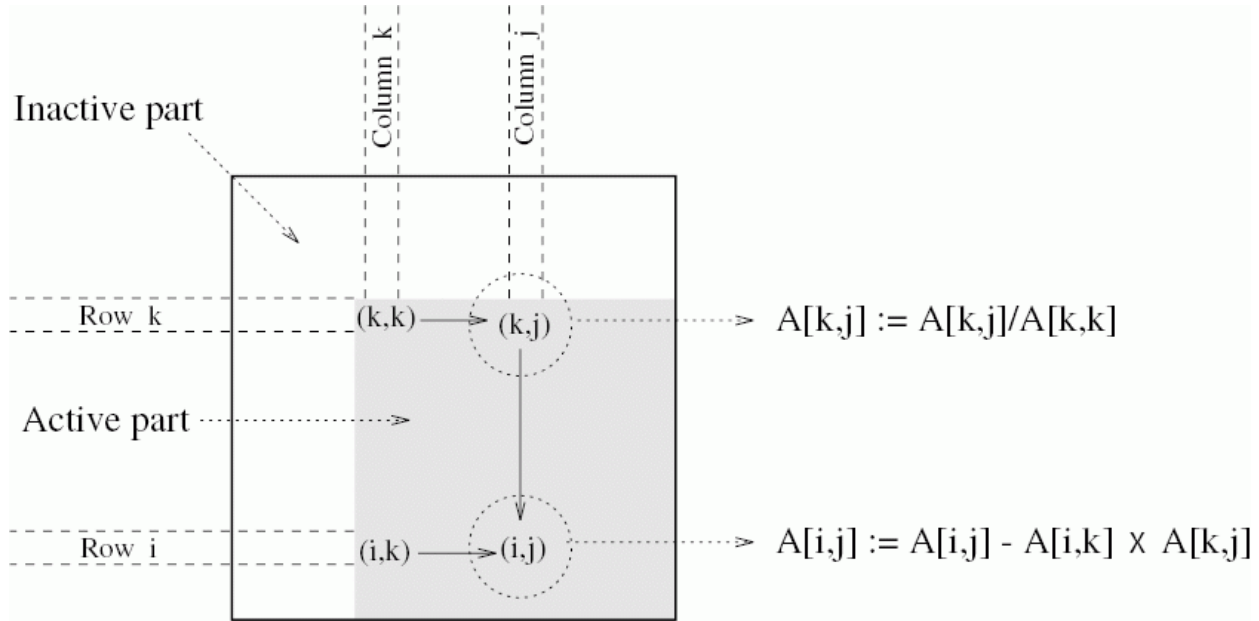


图 1.1: 高斯消去法示意图

## 1 问题描述

普通高斯消去的计算模式如图 1.1 所示，在第  $k$  步时，对第  $k$  行从  $(k, k)$  开始进行除法操作，并将后续的  $k + 1$  至  $N$  行进行减去第  $k$  行的操作，串行算法如下面伪代码所示。

---

### Algorithm 1 普通高斯消元算法伪代码

---

```

1: function LU
2:   for  $k := 0$  to  $n$  do
3:     for  $j := k + 1$  to  $n$  do
4:        $A[k, j] := A[k, j]/A[k, k]$ 
5:     end for
6:      $A[k, k] := 1.0$ 
7:     for  $i := k + 1$  to  $n$  do
8:       for  $j := k + 1$  to  $n$  do
9:          $A[i, j] := A[i, j] - A[i, k] * A[k, j]$ 
10:      end for
11:       $A[i, k] := 0$ 
12:    end for
13:  end for
14: end function

```

---

特殊高斯消去法

## 2 研究设计

项目链接: <https://github.com/NeoWans/Parallel-Programming-Final>

## 2.1 测试用例

测试用例由老师提供的 Groebner.7z 压缩包解压后获得，总共 11 组数据，软链接至 res/目录下，命名规则为% 组号%.0 (非零消元子)、% 组号%.1 (被消元行)、% 组号%.2 (消元结果)

## 2.2 实验环境和相关配置

实验在本地 x86 Arch Linux 环境下完成，使用 Makefile 构建项目，开启 Ofast 加速；使用的 CPU 为 AMD Ryzen 8C16T，显卡为 nVIDIA RTX 2060 6G。

## 2.3 串行稀疏矩阵算法

使用 STL list 存储矩阵中每行的非零位置，逐行放入嵌套的外层 STL list；使用 STL map 存储消元行首项与消元行的映射。

Listing 1: 稀疏矩阵消元部分

```

1 void gauss(list_matrix_t& m) {
2     for (auto& eliminatee : m.op) {
3         while (!eliminatee.empty()) {
4             auto key = *(eliminatee.cbegin());
5             auto& eliminator = m.pool[key];
6             if (eliminator.empty()) {
7                 eliminator = eliminatee;
8                 break;
9             } else {
10                auto jt = eliminatee.begin();
11                auto it = eliminator.cbegin();
12                while (it != eliminator.cend() && jt != eliminatee.end())
13                    if (*it > *jt) eliminatee.insert(jt, *it++);
14                    else if (*it == *jt) jt = eliminatee.erase(jt), ++it;
15                    else ++jt;
16                for (; it != eliminator.cend(); ++it) eliminatee.push_back(*it);
17            }
18        }
19    }
20 }

```

## 2.4 串行位元矩阵算法

使用 STL bitset 倒序存储矩阵每行，逐行放入嵌套的外层 STL list；使用 STL map 存储消元行首项与消元行的映射。

其中值得注意的是，STL bitset 提供了快速查询最低真值位索引的内建成员函数 `__Find_first()`，与之对应的是算法需要  $lp(E[i])$  操作，即获得被消元行第  $i$  行的首项，然而正序存储时 `__Find_first` 函数得到的是被消元行第  $i$  行的末项，因此需要倒序存储。具体实现使用了“bsmap”宏<sup>2</sup>处理映射关系。由于 STL bitset 需要使用常量模板参数声明，因此使用了“matrix\_max\_sz”常量，大小为 85401，即测试样例中的最大矩阵大小。bsmap 可以保证定义域和陪域在  $[0, matrix\_max\_sz)$  内且为双射，同时满足  $\forall x \in [0, matrix\_max\_sz) \text{ bsmap}(\text{bsmap}(x)) = x$ 。

Listing 2: bsmmap 宏

```
1 #define bsmmap(i) (matrix_max_sz - 1 - (i))
```

Listing 3: 位元矩阵消元部分

```
1 void gauss(bitset_matrix_t& m) {
2   for (auto& eliminatee : m.op) {
3     while (eliminatee.any()) {
4       auto key = bsmmap(eliminatee._Find_first());
5       auto& eliminator = m.pool[key];
6       if (eliminator.none()) {
7         eliminator = eliminatee;
8         break;
9       } else eliminatee ^= eliminator;
10    }
11  }
12 }
```

### 3 算法分析

#### 3.1 正确性分析

#### 3.2 正确性验证

由于% 组号%.2 (样例正确消元结果) 被链接到 res/目录下, 而% 组号%.out (程序计算结果) 被输出到 misc/ 目录下, 使用 diff -wB misc/% 组号%.out res/% 组号%.2 即可在忽略输出格式差异的前提下判断消元是否正确。每次运行完成只需运行单行脚本 4 即可判断正确性。经过验证, 所有实现均保证了正确性。

Listing 4: 单行 Bash 脚本

```
1 for i in {1..11}; do diff -wB "misc/$i.out" "res/$i.2"; done
```

#### 3.3 复杂度分析

#### 3.4 运行时间分析

由于华为鲲鹏服务器工作不稳定, 所以只在本地 x86 环境实验。

表 1: 不同串行方法运行时间

Rank	serial list (ms)	serial bitset (ms)
130	0.03233	0.099817
254	1.867949	3.173488
562	4.735001	3.08886
1011	78.952469	98.256365
2362	827.574329	426.11729
3799	15708.6549	5026.35341
8399	273776.479	30331.4359
23045	N/A	220484.326
37960	N/A	322201.459
43577	N/A	1016832.99
85401	96746.3559	440.782952