Chromatic polynomial on some special graphs

Qicheng Shan

Nanjing University

2019 年 7 月 18 日

色多项式的定义

对于一个图 $G=<V,E>$, 定义 $f(G,t)$ 为 G 的 t-染色方案数

可以证明,$f(G,t)$ 对于一个确定的图 G, 关于染色数 t 为一个多项式

而且对于 n 阶图, 这个多项式的度数为 n

例如对于一个单点, $f(G,t)=t$

一道关于图染色计数的简单热身题

给定一个 n 个点,m 条边的图，有 k 种颜色

求用 k 种颜色把每个点染上一种颜色，相邻点不同色的方案数（可以使用不到 k 种颜色）

答案 mod6 输出

分析

- 考虑写出答案，$Ans = \sum_{i=1}^{k} A(k, i) * f(G, i)$

分析

- 考虑写出答案，$Ans = \sum_{i=1}^{k} A(k,i) * f(G,i)$
- 展开排列数，$Ans = \sum_{i=1}^{k} C(k,i) * f(G,i) * i!$

分析

- 考虑写出答案，$Ans = \sum_{i=1}^{k} A(k,i) * f(G,i)$
- 展开排列数，$Ans = \sum_{i=1}^{k} C(k,i) * f(G,i) * i!$
- 可以发现，$i \geq 3$ 时，在 mod6 意义下对答案没有贡献

分析

- $i = 1$ 时，只有 $m = 0$ 的情况下有贡献

分析

- $i = 1$ 时，只有 $m = 0$ 的情况下有贡献
- 特判 $m = 0$, 为 k^n

分析

- $i = 1$ 时，只有 $m = 0$ 的情况下有贡献
- 特判 $m = 0$, 为 k^n
- $i = 2$ 时，考虑图中每个连通块

分析

- $i = 1$ 时，只有 $m = 0$ 的情况下有贡献
- 特判 $m = 0$, 为 k^n
- $i = 2$ 时，考虑图中每个连通块
- 当且仅当每个连通块都为二部图时才能 2 染色

分析

- $i = 1$ 时，只有 $m = 0$ 的情况下有贡献
- 特判 $m = 0$，为 k^n
- $i = 2$ 时，考虑图中每个连通块
- 当且仅当每个连通块都为二部图时才能 2 染色
- 然后算一下每个连通块的贡献相乘即可

一些神奇的性质

对于一个图 G, 有色多项式 $f(G,t)$

$|f(G,-1)|$ 为 G 的有向无环图定向计数

有向无环图定向计数指的是: 对于一个无向图，给他每条边定一个方向，这样形成的图为 DAG 的方案数

有了这个性质，就可以干一些神奇的事情了

题目描述

给定 n,m,p, 求完全二部图 $K_{n,m}$ 的有向无环图定向计数在 $\bmod p$ 意义下的计数

$n \leq 60000, m \leq 60000, 10^8 \leq p \leq 10^9$

p 为质数

记号与约定

- K_n:n 阶完全图

记号与约定

- K_n:n 阶完全图
- $S(n,m)$: 第二类斯特林数，表示将 n 个不同的球放到 m 个相同的盒子中的方案数 (每个盒子非空)

记号与约定

- K_n:n 阶完全图
- $S(n, m)$: 第二类斯特林数，表示将 n 个不同的球放到 m 个相同的盒子中的方案数 (每个盒子非空)
- $D(G, k)$ 为将图 G 划分成 k 个完全图的方案数（不能为空）

记号与约定

- K_n:n 阶完全图
- $S(n,m)$: 第二类斯特林数，表示将 n 个不同的球放到 m 个相同的盒子中的方案数 (每个盒子非空)
- $D(G,k)$ 为将图 G 划分成 k 个完全图的方案数（不能为空）
- $t^{\underline{k}}$ 为 t 的 k 次下降幂

引理 1

- 对于一个 n 阶完全图 K_n ，$D(K_n, k) = S(n, k)$

引理 1

- 对于一个 n 阶完全图 K_n，$D(K_n, k) = S(n, k)$
- 证明: 考虑 K_n 是个完全图，所以任取它的一些点生成的子图也是完全图，所以实际上就是将 n 个点划入 k 个集合，点之间两两不同，集合顺序可以互换，这个的组合意义就是斯特林数

引理 2

- 对于一个一般图 $G =< V, E >, |V| = n$, 它的 $t-$ 染色数 $f(G, t) = \sum_{k=1}^{t} D(K_n - G, k) * t^{\underline{k}}$

引理 2

- 对于一个一般图 $G=<V,E>,|V|=n$, 它的 $t-$ 染色数 $f(G,t)=\sum_{k=1}^{t}D(K_n-G,k)*t^{\underline{k}}$
- 证明: 考虑若 G 的补图中有一个点集 S,S 中的点两两均不存在边相连，那么这个点集中的点可以染成同色，这样就可以将图分成 k 块

引理 2

- 对于一个一般图 $G = < V, E >, |V| = n$, 它的 $t-$ 染色数 $f(G, t) = \sum_{k=1}^{t} D(K_n - G, k) * t^{\underline{k}}$
- 证明: 考虑若 G 的补图中有一个点集 S,S 中的点两两均不存在边相连，那么这个点集中的点可以染成同色，这样就可以将图分成 k 块
- 划分的方案数就是 $D(K_n - G, k)$(按补图中的团划分), 染色的方案数就是 $t^{\underline{k}}$（t 种颜色涂到 k 块上，第一种有 t 种选择，第二种有 $t-1$ 种, ...)

引理 2

- 对于一个一般图 $G=<V,E>,|V|=n$, 它的 $t-$ 染色数 $f(G,t)=\sum_{k=1}^{t} D(K_n-G,k)*t^{\underline{k}}$
- 证明: 考虑若 G 的补图中有一个点集 S,S 中的点两两均不存在边相连，那么这个点集中的点可以染成同色，这样就可以将图分成 k 块
- 划分的方案数就是 $D(K_n-G,k)$(按补图中的团划分), 染色的方案数就是 $t^{\underline{k}}$（t 种颜色涂到 k 块上，第一种有 t 种选择，第二种有 $t-1$ 种, ...)
- 然后由于划分非空，所以需要求和来算上前面划分不满 t 块的方案数

完全二部图的色多项式

- $G = K_{m,n}$, 因此 $f(G,t) = \sum_{k=1}^{t} D(K_{n+m} - K_{n,m}, k) * t^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{t} D(K_n \bigcup K_m, k) * t^{\underline{k}}$

完全二部图的色多项式

- $G = K_{m,n}$，因此 $f(G,t) = \sum_{k=1}^{t} D(K_{n+m} - K_{n,m}, k) * t^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{t} D(K_n \bigcup K_m, k) * t^{\underline{k}}$
- 因为这里是完全二部图，所以补图里的 K_n 和 K_m 中不能出现颜色相同的点

完全二部图的色多项式

- $G = K_{m,n}$, 因此 $f(G,t) = \sum_{k=1}^{t} D(K_{n+m} - K_{n,m}, k) * t^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{t} D(K_n \bigcup K_m, k) * t^{\underline{k}}$
- 因为这里是完全二部图，所以补图里的 K_n 和 K_m 中不能出现颜色相同的点
- 而在划分中，这两部分独立，可以分别计算，是 $S(n,i) * S(m,j) * [i + j = k]$

完全二部图的色多项式

- $G = K_{m,n}$, 因此 $f(G,t) = \sum_{k=1}^{t} D(K_{n+m} - K_{n,m}, k) * t^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{t} D(K_n \bigcup K_m, k) * t^{\underline{k}}$
- 因为这里是完全二部图，所以补图里的 K_n 和 K_m 中不能出现颜色相同的点
- 而在划分中，这两部分独立，可以分别计算，是 $S(n,i) * S(m,j) * [i+j=k]$
- 这样展开一下，$f(G,t) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} S(n,i) * S(m,j) * [i+j=k] * t^{\underline{k}}$

完全二部图的色多项式

- $G=K_{m,n}$，因此 $f(G,t)=\sum_{k=1}^{t}D(K_{n+m}-K_{n,m},k)*t^{\underline{k}}=\sum_{k=1}^{t}D(K_n\bigcup K_m,k)*t^{\underline{k}}$
- 因为这里是完全二部图，所以补图里的 K_n 和 K_m 中不能出现颜色相同的点
- 而在划分中，这两部分独立，可以分别计算，是 $S(n,i)*S(m,j)*[i+j=k]$
- 这样展开一下，$f(G,t)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}S(n,i)*S(m,j)*[i+j=k]*t^{\underline{k}}$
- 变形一下就是 $f(G,t)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i+j=k}S(n,i)*S(m,j)*t^{\underline{k}}$

回到这个题目

- 代入题目中的 $t=-1$，
  $f(G,-1)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i+j=k}(-1)^k * S(n,i) * S(m,j) * k!$

回到这个题目

- 代入题目中的 $t=-1$ ，
  $f(G,-1)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i+j=k}(-1)^k * S(n,i) * S(m,j) * k!$
- 令 $c_k=\sum_{i+j=k}S(n,i) * S(m,j)$

回到这个题目

- 代入题目中的 $t=-1$ ，
  $f(G,-1)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i+j=k}(-1)^k * S(n,i) * S(m,j) * k!$
- 令 $c_k=\sum_{i+j=k} S(n,i) * S(m,j)$
- 得到 $f(G,-1)=\sum_{k=1}^{t} c_k * (-1)^k * k!$

回到这个题目

- 代入题目中的 $t=-1$，
  $f(G,-1)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i+j=k}(-1)^k * S(n,i) * S(m,j) * k!$
- 令 $c_k=\sum_{i+j=k} S(n,i) * S(m,j)$
- 得到 $f(G,-1)=\sum_{k=1}^{t} c_k * (-1)^k * k!$
- 然后我们发现 c_k 可以看成 $a_i=S(n,i)$ 和 $b_j=S(m,j)$ 的卷积

回到这个题目

- 代入题目中的 $t=-1$ ，
  $f(G,-1)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i+j=k}(-1)^k*S(n,i)*S(m,j)*k!$
- 令 $c_k=\sum_{i+j=k}S(n,i)*S(m,j)$
- 得到 $f(G,-1)=\sum_{k=1}^{t}c_k*(-1)^k*k!$
- 然后我们发现 c_k 可以看成 $a_i=S(n,i)$ 和 $b_j=S(m,j)$ 的卷积
- 因此只需要拿这两个做一次 FFT

关于斯特林数

- 求某一行的斯特林数是个经典问题

关于斯特林数

- 求某一行的斯特林数是个经典问题
- 由斯特林数的容斥形式：
  $S(n,m) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m} C(m,i) * (-1)^i * (m-i)^n$

关于斯特林数

- 求某一行的斯特林数是个经典问题
- 由斯特林数的容斥形式：
  $S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} C(m, i) * (-1)^i * (m - i)^n$
- 展开组合数得： $S(n, m) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!} * \frac{(m-i)^n}{(m-i)!}$

关于斯特林数

- 求某一行的斯特林数是个经典问题
- 由斯特林数的容斥形式：
  $S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} C(m, i) * (-1)^i * (m - i)^n$
- 展开组合数得： $S(n, m) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!} * \frac{(m-i)^n}{(m-i)!}$
- 是卷积形式,FFT

注

- 这题因为 p 为任意质数，因此需要拆系数 FFT 板子

关于这题的推广

- 首先一个简单的东西就是我们可以搞出完全 K 部图的色多项式

关于这题的推广

- 首先一个简单的东西就是我们可以搞出完全 K 部图的色多项式
- 只要把几个斯特林数卷在一起就好了

关于这题的推广

- 首先一个简单的东西就是我们可以搞出完全 K 部图的色多项式
- 只要把几个斯特林数卷在一起就好了
- 然后这个有向无环图定向计数的结论可以用来出能搞出来色多项式的图的计数问题

关于一些其他图的色多项式

- 完全图 K_n:$f(G,t) = t*(t-1)*......*(t-(n-1))$(证明显然)

关于一些其他图的色多项式

- 完全图 K_n:$f(G,t) = t*(t-1)*......*(t-(n-1))$(证明显然)
- 树 T_n:$f(G,t) = t*(t-1)^{n-1}$(证明显然)

关于一些其他图的色多项式

- 完全图 K_n:$f(G,t) = t*(t-1)*......*(t-(n-1))$(证明显然)
- 树 T_n:$f(G,t) = t*(t-1)^{n-1}$(证明显然)
- 环图 C_n:$f(G,t) = (t-1)^n + (-1)^n*(t-1)$(经典的环染色问题)

关于一些其他图的色多项式

- 完全图 K_n:$f(G,t) = t*(t-1)*......*(t-(n-1))$(证明显然)
- 树 T_n:$f(G,t) = t*(t-1)^{n-1}$(证明显然)
- 环图 C_n:$f(G,t) = (t-1)^n + (-1)^n*(t-1)$(经典的环染色问题)
- 轮图 W_n:$f(G,t) = k*[(k-2)^n + (-1)^n*(k-2)]$(先定中间点p，剩下为环图)

关于一些其他图的色多项式

- 完全图 K_n:$f(G,t)=t*(t-1)*......*(t-(n-1))$(证明显然)
- 树 T_n:$f(G,t)=t*(t-1)^{n-1}$(证明显然)
- 环图 C_n:$f(G,t)=(t-1)^n+(-1)^n*(t-1)$(经典的环染色问题)
- 轮图 W_n:$f(G,t)=k*[(k-2)^n+(-1)^n*(k-2)]$(先定中间点p，剩下为环图)
- 更多图的色多项式可以参考 wiki

关于一些其他图的色多项式

- 完全图 K_n:$f(G,t) = t*(t-1)*......*(t-(n-1))$(证明显然)
- 树 T_n:$f(G,t) = t*(t-1)^{n-1}$(证明显然)
- 环图 C_n:$f(G,t) = (t-1)^n + (-1)^n*(t-1)$(经典的环染色问题)
- 轮图 W_n:$f(G,t) = k*[(k-2)^n + (-1)^n*(k-2)]$(先定中间点 p，剩下为环图)
- 更多图的色多项式可以参考 wiki
- 在某些对图的动态修改过程中，色多项式可以根据组合意义维护

口胡的一个题

给定一个 n 个点的基环树，Q 次操作:

1 u v x y：cut 一条环边 x y，然后 link 两个点 u v

2 k：询问该基环树的 k 染色方案数 $\mod 998244353$ 的值

$n, Q \leq 100000$

分析

- 假设环长为 m

分析

- 假设环长为 m
- 考虑基环树的色多项式:

分析

- 假设环长为 m
- 考虑基环树的色多项式:
- 先考虑环图 C_m:$f(C_m, k) = (k-1)^m + (-1)^m * (k-1)$

分析

- 假设环长为 m
- 考虑基环树的色多项式:
- 先考虑环图 C_m:$f(C_m, k) = (k-1)^m + (-1)^m * (k-1)$
- 然后加树边, 每条边乘上 $k-1$

分析

- 假设环长为 m
- 考虑基环树的色多项式:
- 先考虑环图 C_m:$f(C_m, k) = (k-1)^m + (-1)^m * (k-1)$
- 然后加树边, 每条边乘上 $k-1$
- $f(G, k) = (k-1)^n + (-1)^m * (k-1)^{n-m+1}$

分析

- 所以我们维护环长就行了

分析

- 所以我们维护环长就行了
- 用数据结构动态维护基环树两点之间最短路

分析

- 所以我们维护环长就行了
- 用数据结构动态维护基环树两点之间最短路
- 比如 LCC（当然基环树应该存在更好的维护方式, 比如大力讨论啥的）

还能变一变

- 给定 n 个点，环长为 m 的基环树，求 1 到 k 染色方案数 $\bmod 998244353$ $n, m \leq 10^9, k \leq 10^5$，

分析

- 发现这个就是两个幂和相加，而 k 次幂和是一个 $k+1$ 次多项式拉格朗日插值