



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Facultad de Ciencias

DOBLE GRADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

**La hipótesis de Riemann y
su influencia
en el ámbito de la física**

Presentado por:

D. Jaime Rafael Barón Yusty

Curso Académico 2021-2022

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D. Jaime Rafael Barón Yusty

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2021-2022, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 24 de agosto de 2023

Fdo: Jaime Rafael Barón Yusty

Summary

The Riemann zeta function is a complex-valued function which was originally defined in the half-plane $\text{Re}(z) > 1$ as an extension of the harmonic series:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{Re}(z) > 1.$$

This function was already well known in 1748 for its connection to the prime numbers through the Euler product:

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ prime}} \left(\frac{1}{1 - p^{-z}} \right) \quad \forall \text{Re}(z) > 1.$$

However, it was not until 1859, when Bernhard Riemann published his memoir, where he extended the zeta function to the whole complex plane except $z = 1$ through analytic continuation using the following functional equation:

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \Gamma(1-z) \sin\left(\frac{1}{2}\pi z\right) \zeta(1-z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

It is important, to note that in $z = 1$ the zeta function has a simple pole. Furthermore, using the function

$$\tilde{\zeta}(z) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{1}{2}z} \Gamma\left(\frac{1}{2}z\right) \zeta(z),$$

one can deduce that $\tilde{\zeta}(z)$ is symmetric with respect to the axis $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$. This fact is of great importance, as it tells us that that knowing $\zeta(z)$ for $\text{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$, we can easily deduce it for the rest of the complex plane.

One can easily deduce that $-2\mathbb{N}$ are zeros of the zeta function, in fact, they are often referred to as the trivial zeta zeros. Using the functional equation and the Euler product, it is possible to prove that the only non-trivial zeros must lie in the strip $0 < \text{Re}(z) < 1$, which is called the critical strip. The Riemann hypothesis simplifies this further stating that all non-trivial zeta-zeros must lie in the line $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

The Euler product shows there is a close relationship between the prime numbers and the Riemann zeta function. However, this connection is much deeper, as simply using that there are no non-trivial zeta zeros in $\text{Re}(z) = 1$, one can prove the Prime number theorem, which gives the following asymptotic limit for the distribution of prime numbers:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)},$$

where $\pi(x) = |\{p \text{ prime} : p \leq x\}|$ is the prime-counting function. However, the zeta function's connection to the prime numbers goes even deeper, as Riemann himself gave an explicit formula for the prime-counting function using the non-trivial zeta zeros. Consequently, the prime numbers are in some sense the same as the non-trivial zeta zeros.

For all these reasons, the Riemann hypothesis is of great importance. It is therefore interesting to see some of the different attempts to solve this problem, or at the very least, provide some sort of insight. In particular, we will be examining different physics models where the Riemann zeta function plays a defining role. Furthermore, to show the vast array of attempts that have gone into solving this millennium problem, we will be showcasing models from very different physics branches.

The first-ever appearance of the Riemann zeta function where it had some sort of dependence on the variables of the system was in Statistical physics, where it discriminated against certain cases in a non-relativistic Bose gas as impossible due to its number of dimensions. We went on to show two gases known as Riemann gases where their energy levels were constructed with the prime numbers, and as an immediate consequence, their canonical ensembles are functions of the Riemann zeta function.

We went on to show an example in Condensed matter physics where the zeta function appears naturally in a spectrum inversion formula, which allows one to obtain the phonon-spectrum using its specific heat.

Up to this point, the models we have showcased use the Riemann zeta function as an essential tool, but in no way attempt to learn anything new regarding this function. In juxtaposition, in the last two examples, we showed an attempt to prove the Riemann hypothesis.

The first one we examined was a circular billiard with one or more holes. Our aim is to obtain the probability that a ball at a certain time t has not escaped from the billiard through any of the holes, which we will note $P(t, \epsilon)$ for a single hole of size ϵ . To achieve this, we first set a distribution for the initial position of the balls along the circumference of the billiard, as well as their direction in which they will all move at the same constant speed. With all these considerations in mind, Bunimovich and Dettmann managed to prove that the Riemann hypothesis equivalent to:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon^{\alpha - \frac{1}{2}} \left(tP(t, \epsilon) - \frac{2}{\epsilon} \right) = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

Lastly, the second and last model that we have shown attempting to prove the Riemann hypothesis does so through the use of quantum mechanics. Although this attempt has been going on for more than 100 years, it has slowly but steadily made progress. Their goal is to find a Hamiltonian which provides all the non-trivial zeta zeros as the different eigenvalues. Their first major achievement happened while studying the distribution of the Riemann zeta zeros where Montgomery conjectured their corresponding pair-correlation function. This happens to coincide with the eigenvalue distribution for high-dimensional hermitian matrices as they belong to the GUE (Gaussian Unitary Ensemble), hinting that this method may be a natural way to describe the zeta zeros.

After many years on this open problem, there were around 9 properties that were attributed as necessary or at least highly desirable for this Hamiltonian. However, it was not until 2017 when Carl M. Bender, Dorje C. Brody, and Markus P. Müller provided a Hamiltonian, which although not perfect, verifies most of these properties. Most importantly, one could directly prove that the Riemann hypothesis is true by verifying that the Hamiltonian presented is self-adjoint.

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 7 |
| 2. La función zeta de Riemann | 10 |
| 2.1. Herramientas y definiciones | 10 |
| 2.2. Propiedades de la función zeta de Riemann | 18 |
| 3. Teorema de los números primos | 27 |
| 4. Modelos Físicos | 35 |
| 4.1. Catástrofe ultravioleta | 35 |
| 4.2. Física Estadística | 38 |
| 4.2.1. Gas de Bose | 38 |
| 4.2.2. Gases de Riemann | 38 |
| 4.3. Física de la Materia Condensada | 40 |
| 4.4. Física Clásica | 44 |
| 4.5. Mecánica Cuántica | 47 |
| 5. Conclusiones | 52 |

1. Introducción

La hipótesis de Riemann es uno de los 7 problemas del milenio, y como tal, se ofrece un millón de dólares a quien sea capaz de resolverla. Para poder comprender este problema que lleva mas de 150 años sin resolverse, en la propuesta de TFG se plantearon como objetivos:

1. Presentar la función $\zeta(z)$ y estudiar sus propiedades básicas. Ceros de la función $\zeta(z)$ y la hipótesis de Riemann. El teorema de los números primos.
2. Presentar algunos modelos procedentes de diversos ámbitos de la física en los que la función $\zeta(z)$ desempeña un papel significativo.

Como detallaremos a continuación, estos objetivos han sido cumplidos en su totalidad a lo largo de este TFG.

Para el primer objetivo realizaremos un estudio de la función zeta de Riemann haciendo uso de [8, 11, 13, 27]. Así, mostraremos que la función zeta de Riemann es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, teniendo un polo de orden 1 en $z = 1$. Posteriormente, procederemos a mostrar que es “simétrica” en cierto sentido con respecto al eje $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$, para lo cual haremos uso de una ecuación funcional que muestra dicha propiedad de manera explícita.

Durante este primer acercamiento habremos dado varias fórmulas para la función zeta de Riemann. Sin embargo, luego presentaremos una reformulación dada por Euler en términos de un productorio que depende de los números primos, lo cual es nuestro primer indicio de que esta función está conectada a los números primos primos.

Con todas estas herramientas, ya estaremos en posición de estudiar los ceros de esta función. Primero, aprovechando la construcción realizada de la zeta de Riemann notaremos que se anula para $z \in -2\mathbb{N}$. Segundo, haciendo uso del producto de Euler, notaremos que no se anula para $\text{Re}(z) > 1$. Tercero, haciendo uso de la ecuación funcional; es decir, de la simetría de la zeta, seremos capaces de reducir la búsqueda de los ceros a la banda $\text{Re}(z) \in [0, 1]$. Finalmente, con unos cálculos adicionales reduciremos el problema a la banda abierta $\text{Re}(z) \in]0, 1[$, permitiéndonos plantear el famoso problema del milenio, la hipótesis de Riemann, que afirma que en dicha banda $\zeta(z)$ solo se anula para $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

Para completar este primer objetivo, demostraremos el célebre teorema de los números primos siguiendo una demostración dada por Zagier [26], y comentaremos la mejora de este resultado que se obtendría si se verificase la hipótesis de Riemann. Además, veremos numerosos resultados de teoría de números, así como las mejoras que se obtienen como consecuencia de suponer válida la hipótesis

de Riemann [5, 19, 28].

Para el segundo y último objetivo, hemos usado como referencias básicas [24, 30], los cuales nos han servido para introducirnos a una gran multitud de modelos en los que participa la función zeta de Riemann. Así, estudiaremos dos tipos de modelos, unos en los que la función zeta de Riemann desarrolle un papel fundamental y otros en los que traten de demostrar la hipótesis de Riemann, o mas bien, su verosimilitud.

Este segundo objetivo lo comenzaremos examinando cómo, de manera natural, surgió por primera vez en la física la función zeta de Riemann. De esta manera, veremos el rol que tomó una expresión integral de la función zeta en la resolución de la catástrofe ultravioleta. Lo siguiente que realizaremos será examinar el impacto que tiene la función zeta de Riemann sobre la plausibilidad de un gas de bosones según su número de dimensiones.

Los siguientes dos modelos físicos que mostraremos en los que interviene la función zeta de Riemann son los llamados gases de Riemann [14, 29]. Estos gases se construyen con bosones o fermiones usando unos niveles energéticos que dependen de los números primos. De esta manera, se logra obtener particiones canónicas como son $Z_B = \zeta(s)$ y $Z_F = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$ donde $s = \epsilon_0 \beta$ y ϵ_0 es una constante.

La función zeta de Riemann, como veremos, también tiene una gran importancia en la física de la materia condensada, pues juega un papel indispensable en una fórmula que permite obtener la densidad de estados de fonones a partir del calor específico. Además, al aparecer la zeta de Riemann en el denominador en dicha fórmula, el conocimiento de sus ceros jugará un rol importante en el desarrollo. Para esta disciplina, estudiaremos varias fórmulas que permiten obtener la densidad de fonones, para lo cual usaremos [7, 9, 10, 15, 18].

Aunque a priori la función zeta parezca una abstracción sin uso alguno fuera de la teoría de números, presenta una gran ubicuidad. El mejor ejemplo que muestra esto es, sin duda, la caracterización realizada por Bunimovich y Dettmann de la hipótesis de Riemann mediante el uso de billares [6]. Para ello, consideraron un billar circular en el que las bolas viajan a velocidad constante. Haciéndole un agujero al billar y midiendo el tiempo que tardan las bolas en escaparse, fueron capaces de unir ambos problemas.

Finalmente, el último modelo que estudiaremos trata de resolver la hipótesis de Riemann desde la mecánica cuántica. Se trata de un enfoque que lleva desarrollándose mas de 100 años, para el cual, usaremos como referencias [2, 3, 4, 17, 20, 21]. Así, el objetivo es encontrar un operador hermítico cuyos autovalores E_n sean la parte imaginaria de los ceros de la función zeta de Riemann

y además el cero sea de la forma $\frac{1}{2} + iE_n$. Como los autovalores de los operadores hermíticos son reales, tendríamos entonces se verifica la hipótesis de Riemann.

2. La función zeta de Riemann

Nuestro objetivo a lo largo de esta sección será introducir la función zeta de Riemann, así como algunas propiedades básicas que verifica. Con esto en mente, presentamos cuatro teoremas previos que tomarán un papel importante en su presentación.

2.1. Herramientas y definiciones

El primer teorema que veremos nos permitirá determinar cuando una función de z , definida como una integral dependiente del parámetro z , es holomorfa.

Teorema 1 (Teorema de la holomorfía de las integrales dependientes de un parámetro complejo). *Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $\Phi : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

1. $\forall z \in \Omega$, la función $\Phi_z : X \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\Phi_z(x) = \Phi(x, z) \quad \forall x \in X$ es medible.
2. $\forall x \in X$, la función $\Phi_x : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\Phi_x(z) = \Phi(x, z) \quad \forall z \in \Omega$ es holomorfa en Ω .
3. $\forall K \subset \Omega$ compacto, $\exists \phi_K : K \rightarrow \mathbb{R}$ integrable tal que:

$$|\Phi(x, z)| \leq \phi_K(x) \quad \forall x \in X, z \in K.$$

Entonces $\forall z \in \Omega$, la función $\Phi_z : X \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\Phi_z(x) = \Phi(x, z) \quad \forall x \in X$ es integrable y la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z) = \int_X \Phi(x, z) d\mu(x) \quad \forall z \in \Omega$$

es holomorfa en Ω .

Demostración. Sea $a \in \Omega$ y $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a, R) \subset \Omega$ y denotamos por $C(a, R)^*$ a la circunferencia de centro a y radio R . Tomamos $z_n \in \Omega$ tal que $\{z_n\} \rightarrow a$. Nuestro objetivo será usar el Teorema de convergencia dominada, para lo cual busquemos comprobar que se verifican sus hipótesis. Así, nuestro objetivo es demostrar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{\Phi(x, z_n) - \Phi(x, a)}{z_n - a} d\mu(x) = \int_X \frac{\partial \Phi(x, a)}{\partial z} d\mu(x).$$

Por tanto, nuestro objetivo es ver que $\frac{\Phi(x, z_n) - \Phi(x, a)}{z_n - a}$ está acotada por una función $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ integrable para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usando la fórmula de Cauchy, se tiene que para cada $x \in X$:

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, R)} \frac{\Phi(x, w)}{w - z} d\mu(w) \quad \forall z \in D(a, R).$$

Con el objeto de buscar la citada acotación, tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in D(a, \frac{R}{2}) \quad \forall n \geq m$, desarrollamos:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x, z_n) - \Phi(x, a)}{z_n - a} &= \frac{1}{2\pi i(z_n - a)} \int_{C(a, R)} \frac{\Phi(x, w)}{w - z_n} - \frac{\Phi(x, w)}{w - a} d\mu(w) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, R)} \frac{\Phi(x, w)}{(w - z_n)(w - a)} d\mu(w) \end{aligned}$$

Acotando:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi(x, z_n) - \Phi(x, a)}{z_n - a} \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, R)} \frac{\Phi(x, w)}{(w - z_n)(w - a)} d\mu(w) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{\max_{w \in C(a, R)^*} |\Phi(x, w)|}{\frac{R}{2}} \leq \frac{2}{R} \phi_{C(a, R)^*}(x) \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x, z_n) - \Phi(x, a)}{z_n - a} = \frac{\partial \Phi(x, a)}{\partial z}$$

tenemos que se verifican las hipótesis del teorema de convergencia dominada por lo que

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{\Phi(x, z_n) - \Phi(x, a)}{z_n - a} d\mu(x) = \int_X \frac{\partial \Phi(x, a)}{\partial z} d\mu(x).$$

□

Para el análisis del comportamiento de las funciones cuando $x \rightarrow \infty$, introduciremos el concepto de cota superior asintótica. Así, sean $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos no acotados superiormente y $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces diremos que $f(x) = O(g(x))$ si y solo si $\exists M, R > 0$ tal que $|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x > R$.

De forma similar se puede realizar esta definición para $x \rightarrow L \in \mathbb{R}$. Así, dados $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos tal que $\exists \epsilon > 0$ tal que $]L - \epsilon, L + \epsilon[\subset I, J$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces diremos que $f(x) = O(g(x))$ para $x \rightarrow L$ si y solo si $\exists M, \epsilon > 0$ tal que $|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in]L - \epsilon, L + \epsilon[$.

Otro concepto parecido que nos será muy importante en nuestros análisis es el de equivalencia asintótica. Así, sean I, J dos intervalos no acotados superiormente; entonces las funciones $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ son asintóticamente equivalentes si y solo si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$; en tal caso, se notará $f \sim g$.

Al igual que la anterior definición, podemos extender la definición de equivalencia asintótica a un punto $L \in \mathbb{R}$, donde diremos que son asintóticamente equivalentes en L si $\lim_{x \rightarrow L} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

A continuación, veamos la célebre transformada de Laplace que, como veremos, desempeñará un rol importante en la demostración que realizaremos del teorema de los números primos. Sea $h : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una función localmente integrable tal que $h(t) = O(e^{ct})$, definimos su transformada de Laplace $\mathcal{L}(h) : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > c\} \rightarrow \mathbb{C}$ como:

$$\mathcal{L}(h)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} h(t) dt. \quad (1)$$

Por ser $h(t) = O(e^{ct})$, $\exists R > 0$ tal que $\exists M > 0$ tal que $h(t) \leq Me^{ct} \forall t > R$. De esta manera, veamos que (1) está bien definida. Para ello, fijemos $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > c\}$ y veamos que $e^{-zt}h(t)$ es integrable en $[0, R]$, y en $]R, \infty[$ por separado, y por tanto es integrable en $[0, \infty[$.

Como $h(t)$ es localmente integrable en $[0, \infty[$, tenemos que

$$\int_0^R |h(t)| dt < \infty \quad \forall R \in \mathbb{R}^+.$$

Además, por ser e^{-zt} continua en el compacto $[0, R]$, podemos acotarla por $B = \max_{t \in [0, R]} |e^{-zt}|$. Así, para $t \in [0, R]$ se tiene que $|e^{-zt}h(t)| \leq B|h(t)|$, y por tanto, $e^{-zt}h(t)$ es integrable en $[0, R]$.

Por otro lado, para la integrabilidad en $]R, \infty[$, basta notar que $|e^{-zt}h(t)| \leq Me^{(c-\operatorname{Re}(z))t} \forall t \in]R, \infty[$, y por tanto $e^{-zt}h(t)$ es integrable en $]R, \infty[$ por ser $c - \operatorname{Re}(z) < 0$.

Teorema 2. Sea $h : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ función localmente integrable tal que $h(t) = O(e^{ct})$. Entonces la transformada de Laplace de h es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > c\}$.

Demostración. Veamos que $\mathcal{L}(h)$ es holomorfa en $\operatorname{Re}(s) > c$. Para ello usaremos el teorema 1, donde $\Phi(t, z) = e^{-zt}h(t)$ es claramente medible al fijar z y holomorfa al fijar t . Sea $K \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > c\}$ compacto y $m = \min_{z \in K} \operatorname{Re}(z)$. Además, por ser $h(t) = O(e^{ct})$, $\exists R > 0$ tal que $\exists M > 0$ tal que $h(t) \leq Me^{ct} \forall t > R$. Así,

$$|e^{-zt}h(t)| \leq Me^{(c-\operatorname{Re}(z))t} \leq Me^{(c-m)t} \quad \forall t \in [R, \infty[. \quad (2)$$

Por otro lado, podemos acotar la integral en $[0, R]$ por

$$|e^{-zt}h(t)| \leq e^{-\operatorname{Re}(z)t}|h(t)| \leq e^{-ct}|h(t)| \leq B|h(t)| \quad \forall t \in [0, R]$$

donde $B = \max_{t \in [0, R]} e^{-ct}$.

De esta manera podemos tomar como acotación para el teorema 1:

$$\phi_K(t) = \begin{cases} B|h(t)| & \forall t \in [0, R] \\ Me^{(c-m)t} & \forall t \in]R, \infty[\end{cases}$$

que es integrable en $[0, R]$ por ser $B|h(t)|$ localmente integrable, e integrable en $]R, \infty[$ por ser $c - m < 0$. Por tanto es integrable en $[0, \infty[$. De esta manera, como $\Phi(t, z) \leq \phi_K(t) \forall t \in [0, \infty], z \in K$, usando el teorema 1 tenemos que $\mathcal{L}(h)$ es holomorfa. \square

Teorema 3. Sea $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ función medible y acotada tal que su transformada de Laplace se extiende a una función holomorfa g en un abierto que contiene a $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$. Entonces $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt = g(0)$.

Demostración. Tomemos sin pérdida de generalidad que $|f(t)| \leq 1 \forall t \in [0, \infty[$. Sea Ω un abierto que contiene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ en el cual g es holomorfa. A continuación, para buscar un abierto en el que sea más fácil trabajar, buscaremos un recubrimiento de $[-iR, iR]$ para cualquier $R > 0$ usando bolas con la norma $\|\cdot\|_\infty$; es decir, usando cuadrados, las cuales notaremos $B_{\|\cdot\|_\infty}$.

Sea $R > 0$, entonces $\forall y \in [-R, R], \exists r_y > 0 : B_{\|\cdot\|_\infty}(iy, r_y) \subset \Omega$. Como $\{B_{\|\cdot\|_\infty}(iy, r_y) : y \in [-R, R]\}$ recubren el compacto $[-iR, iR]$; es decir,

$$[-iR, iR] \subset \bigcup_{y \in [-R, R]} B_{\|\cdot\|_\infty}(iy, r_y),$$

entonces debe existir un subrecubrimiento finito; es decir, $\exists y_1, \dots, y_n$ tal que $[-iy, iy] \subset \bigcup_{j=1}^n B(iy_j, r_{y_j})$. Como las bolas usadas son cuadradas, notando $r_{\min} = \frac{1}{2} \min_{j \in \{1, \dots, n\}} r_{y_j}$ y tomando

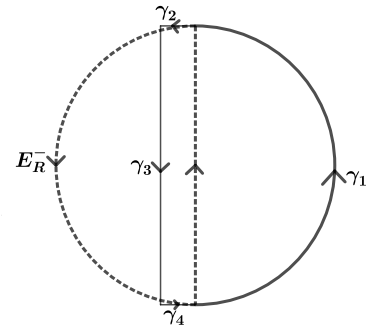
$$\delta_R = \min\left(r_{\min}, \frac{1}{R}\right)$$

podemos definir el abierto

$$\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Re}(z) > 0\} \bigcup]-\delta_R, 0] \times [-iR, iR]$$

el cual verifica que $\Omega_R \subset \Omega$. Tomemos el camino cerrado que recorre la frontera de Ω_R , la concatenación $\Gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$.

1. $\gamma_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma_1(t) = Re^{it} \quad \forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
2. $\gamma_2 : [0, \delta_R] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma_2(t) = -t + iR \quad \forall t \in [0, \delta_R]$.
3. $\gamma_3 : [0, 2R] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma_3(t) = -\delta_R + i(R - t) \quad \forall t \in [0, 2R]$
4. $\gamma_4 : [0, \delta_R] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma_4(t) = (-\delta_R + t) - iR \quad \forall t \in [0, \delta_R]$.



Por otro lado, definamos $\forall \tau \in [0, \infty[$ la función $g_\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$g_\tau(z) = \int_0^\tau f(t) e^{-zt} dt \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

la cual es entera por el teorema 1 pues $|f(t)e^{-zt}| \leq e^{-\operatorname{Re}(z)t} \forall z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$. Finalmente, definamos $h_{\tau,R} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$h_{\tau,R}(z) = (g(z) - g_{\tau}(z))e^{z\tau} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \quad \forall z \in \Omega,$$

la cual es holomorfa en Ω . Como

$$h_{\tau,R}(0) = g(0) - g_{\tau}(0),$$

ver que $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) = g(0)$ es equivalente a demostrar que $\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{\tau \rightarrow \infty} h_{\tau,R}(0) = 0$.

Usando el teorema integral de Cauchy, tenemos:

$$h_{\tau,R}(0) = g(0) - g_{\tau}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h_{\tau,R}(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (g(z) - g_{\tau}(z)) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R}\right) dz.$$

Para acotar el integrando, haremos uso de la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right| &= \frac{1}{R|z|} |z^2 + R^2| = \frac{1}{R^2} |\operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2 + R^2 - 2i \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z)| = \\ &= \frac{1}{R^2} |2 \operatorname{Re}(z)^2 - 2i \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z)| = \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R^2} |\operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)| = \\ &= \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R} \quad \forall |z| = R. \end{aligned}$$

Usando esta igualdad, acotemos ahora el integrando en γ_1 ; es decir, para $|z| = R$ tomando $\operatorname{Re}(z) > 0$

$$\begin{aligned} \left| (g(z) - g_{\tau}(z)) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R}\right) \right| &\leq |g(z) - g_{\tau}(z)| \frac{e^{\operatorname{Re}(z)\tau}}{R} \left| \frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\tau}^{\infty} f(t)e^{-zt} dt \right| \frac{e^{\operatorname{Re}(z)\tau}}{R} \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{R} \leq \left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-\operatorname{Re}(z)t} dt \right) \frac{e^{\operatorname{Re}(z)\tau}}{R} \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{R} \leq \\ &\leq \frac{e^{-\operatorname{Re}(z)\tau}}{\operatorname{Re}(z)} \frac{e^{\operatorname{Re}(z)\tau}}{R} \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{R} \leq \frac{e^{-\operatorname{Re}(z)\tau}}{\operatorname{Re}(z)} \frac{e^{\operatorname{Re}(z)\tau}}{R} \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{R} = \frac{2}{R^2}. \end{aligned}$$

De esta manera, podemos acotar la integral a lo largo de γ_1 como:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{h_{\tau,R}(z)}{z} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |iRe^{it}| \frac{2}{R^2} dt = \frac{1}{2\pi} \pi R \frac{2}{R^2} = \frac{1}{R}$$

Ahora acotemos la integral a lo largo del resto del camino de Γ ; es decir, $\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. Para ello dividiremos la integral en dos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2\gamma_3\gamma_4} g(z) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R}\right) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2\gamma_3\gamma_4} g_{\tau}(z) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R}\right) dz \quad (4)$$

Para la primera integral de (4) a lo largo de γ_3 , acotaremos teniendo en cuenta que $\exists C_R > 0$ tal que $|g(z) \frac{1}{R} (\frac{R}{z} + \frac{z}{R})| \leq C_R \forall z \in \gamma_3$ por ser una función continua en el compacto $\gamma_3([0, 2R])$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} g(z) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right) dz \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2R} C_R | -ie^{-\delta_R \tau + i(R-t)\tau} | dt = \\ &= \frac{C_R}{2\pi} e^{-\delta_R \tau} 2R = \frac{C_R R}{\pi} e^{-\delta_R \tau} \end{aligned}$$

A continuación, haremos uso del lema de Fatou para hallar el límite de la integral a lo largo de γ_2 , donde tendremos en cuenta que $\operatorname{Re}(z) < 0$ y que $|z| \leq R$; así:

$$\begin{aligned} \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} g(z) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right) dz \right| &\leq \\ &\leq \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta_R} |g(-t + iR)| \left| \frac{1}{R} \right| \left| \frac{R}{-t + iR} \right| + \left| \frac{-t + iR}{R} \right| e^{\operatorname{Re}(-t + iR)\tau} dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\delta_R} \limsup_{\tau \rightarrow \infty} |g(-t + iR)| \frac{2R}{|-t + iR|} e^{-t\tau} dt = 0 \end{aligned}$$

De manera análoga, se obtiene que el límite de la integral a lo largo de γ_4 de $g(z) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right)$ es 0.

Veamos ahora el límite de la segunda integral de (4). Para ello, notemos que como g_τ es entera, entonces el integrando $(g_\tau(z) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right))$ es una función entera. Por tanto, la integral a lo largo de $\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ es igual a la integral a lo largo de la semicircunferencia de radio r en $\operatorname{Re}(z) < 0$ en sentido antihorario; es decir, a lo largo de

$$E_R^- : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{C} : E_R^-(t) = Re^{it} \quad \forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right].$$

De manera que:

$$\int_{\gamma_2\gamma_3\gamma_4} g_\tau(z) e^{z\tau} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right) dz = \int_{E_R^-} g_\tau(z) e^{z\tau} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right) dz.$$

Esto es porque la integral de una función holomorfa a lo largo de un camino cerrado es 0, donde se puede cerrar tanto $\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ como E_R^- con el camino $[-iR, iR]$. De esta manera, para $|z| = R, \operatorname{Re}(z) < 0$:

$$\begin{aligned} \left| g_\tau(z) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right) \right| &\leq \left| \int_0^\tau f(t) e^{-zt} dt \right| \frac{e^{\operatorname{Re}(z)\tau}}{R} \left| \frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right| \leq \\ &\leq \left(\int_0^\tau e^{-\operatorname{Re}(z)t} dt \right) \frac{e^{\operatorname{Re}(z)\tau}}{R} \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R} \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(z)} \left(1 - e^{-\operatorname{Re}(z)\tau} \right) \frac{e^{\operatorname{Re}(z)\tau}}{R} \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R} = \\ &= \frac{2}{R^2} \left(1 - e^{\operatorname{Re}(z)\tau} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora en la integral, e intercambiando el límite con la integral por el Lema de Fatou y aprovechando que $\cos(t) < 0 \forall t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R^-} (-g_\tau(z)) e^{z\tau} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right) dz \right| &\leq \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \left(1 - e^{R \operatorname{Re}(e^{it})\tau} \right) R dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi R} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \left(1 - e^{R \cos(t)\tau} \right) dt = \frac{1}{\pi R} \pi = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Finalmente, tomemos el límite buscado para $h_{\tau,R}(0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \limsup_{\tau \rightarrow \infty} |h_{\tau,R}(0)| &= \lim_{R \rightarrow 0} \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} \frac{h_{\tau,R}(z)}{z} dz \right| \leq \\ &\leq \lim_{R \rightarrow 0} \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \left| \frac{h_{\tau,R}(z)}{z} \right| dz + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} g(z) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right) dz \right| + \right. \\ &+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} g(z) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right) dz \right| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_4} g(z) \frac{e^{z\tau}}{R} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right) dz \right| + \\ &+ \left. \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} (-g_\tau(z)) e^{z\tau} \left(\frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right) dz \right| \right) \leq \\ &\leq \lim_{R \rightarrow 0} \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{R} + 0 + \lim_{R \rightarrow 0} \limsup_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C_R R}{\pi} e^{-\delta_R \tau} + 0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 0 \end{aligned}$$

□

A continuación, veremos una función generatriz de los números de Bernoulli, los cuales no solo nos servirán en la construcción de la función zeta de Riemann, sino que además nos permitirá obtener valores teóricos de esta. En honor al matemático Jakob Bernoulli, notaremos los números de Bernoulli $B_n \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Teorema 4. *Se verifica que*

$$\frac{1}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^{n-1} \quad \forall z \in D(0, 2\pi) \setminus \{0\} \quad (5)$$

donde los B_k son los números de Bernoulli, los cuales verifican $B_{2k+1} = 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Además, se pueden construir de forma recursiva usando que $B_0 = 1$ y

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Demostración. La función

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$ con polos simples en $2\pi in$ con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Nótese que

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z}} = \frac{1}{\exp'(0)} = 1. \quad (7)$$

Por tanto, por el teorema de extensión de Riemann, podemos extender $f(z)$ a una función holomorfa en $D(0, 2\pi)$. Por el teorema de Taylor, tenemos que se puede desarrollar en forma de una serie de potencias que converge en $D(0, 2\pi)$. De esta manera, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n. \quad (8)$$

Además, por (7) tenemos que $B_0 = 1$. Veamos ahora que $B_{2k+1} = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Cambiando z por $-z$ tenemos

$$f(-z)(e^{-z} - 1) = -z.$$

Multiplicando a ambos lados por e^z se tiene

$$f(-z)(e^z - 1) = ze^z.$$

Restándole ahora $f(z)(e^z - 1) = z$ obtenemos que:

$$(f(-z) - f(z))(e^z - 1) = z(e^z - 1) \quad \forall z \in D(0, 2\pi).$$

Por ello, dividiendo por $e^z - 1$ llegamos a que

$$f(-z) - f(z) = z \quad \forall z \in D(0, 2\pi) \setminus \{0\}. \quad (9)$$

Nótese que podemos extender la expresión (9) a $z = 0$. Usando ahora el desarrollo (5) tenemos que:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n ((-1)^n - 1).$$

Hemos escrito un desarrollo de Taylor de la función $g(z) = z$ en términos de los números de Bernoulli, por lo que todos sus coeficientes salvo $n = 1$ son nulos; es decir:

$$\frac{B_n}{n!} ((-1)^n - 1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Para n impar $(-1)^n - 1 = -2 \neq 0$, por lo que $B_n = 0$ para todo n impar distinto de 1.

Finalmente, veamos la fórmula recursiva (6), para ello derivemos $n+1$ veces la ecuación

$$f(z)(e^z - 1) = z$$

mediante la fórmula de Leibniz para la derivada del producto. Así, obtenemos

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(z) e^z + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}(z) (e^z - 1) = 0. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (10)$$

Evaluando (10) en $z = 0$, tenemos

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

2.2. Propiedades de la función zeta de Riemann

Teorema 5. Existe una única función $\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1. \quad (11)$$

Además:

1. ζ tiene un polo simple en el punto $z = 1$, de manera que $\lim_{z \rightarrow 1} \zeta(z)(z - 1) = 1$.
2. $\zeta(-2n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Primero, veamos que la expresión (11) está bien definida en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ y es una función holomorfa. Sea $\epsilon > 0$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 1 + \epsilon$. Nótese que:

$$|n^{-z}| = |n^{-\operatorname{Re}(z)}| \leq \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{Re}(z)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty$; entonces, por el criterio de la mayorante de Weierstrass tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : \operatorname{Re}(z) > 1 + \epsilon\}$ para todo $\epsilon > 0$. Como esto es $\forall \epsilon > 0$, concluimos que converge uniformemente $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : \operatorname{Re}(z) > 1 + \epsilon\}$.

Veamos ahora que podemos expresar $\zeta(z)$ como:

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \psi(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \operatorname{Re}(z) > 1. \quad (12)$$

donde $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera definida como

$$\psi(z) = \int_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Primero, veamos que $\psi(z)$ es entera. Para ello, basta usar el teorema 1 tomando como $\Phi(t, z) = \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}$ la cual es medible para todo $z \in \mathbb{C}$ fijo, y entera para todo $t \in]1, \infty[$. Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto y $m = \max\{\operatorname{Re}(z) : z \in K\}$. Entonces, $\forall t \in]1, \infty[, \forall z \in K$ se tiene

$$\left| \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \right| \leq \frac{t^{\operatorname{Re}(z)-1}}{e^t - 1} \leq \frac{t^{m-1}}{e^t - 1}.$$

Tomando $\phi_K(t) = \frac{t^{m-1}}{e^t - 1}$, la cual es integrable en $]1, \infty[$, como la acotación del teorema 1 concluimos que $\psi(z)$ es entera.

Notemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-t})^n - 1 = \frac{1}{1 - e^{-t}} - 1 = \frac{1}{e^t - 1} \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt = \frac{1}{n^z} \int_0^{\infty} y^{z-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(z)}{n^z}. \quad (14)$$

Donde en (13) se ha realizado una suma de una serie geométrica, y en (14) se ha hecho el cambio de variable ($y = nt$). Sumando en n (14), obtenemos:

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(z)}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (t^{z-1} e^{-nt}) dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

donde para intercambiar la serie con la integral se ha usado el teorema de la convergencia absoluta para lo cual basta notar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |t^{z-1} e^{-nt}| dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-nt} dt = \Gamma(\operatorname{Re}(z))\zeta(\operatorname{Re}(z)) < \infty.$$

Para concluir esta reformulación de $\zeta(z)$ basta notar que:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Usando (12) y (5), reformularemos de nuevo $\zeta(z)$ como

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} (\phi(z) + \psi(z)) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}. \quad (15)$$

donde

$$\phi(z) = \frac{B_1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!(z + 2k - 1)} \quad (16)$$

es una función holomorfa en

$$\Omega_{\phi} = \mathbb{C} \setminus (\{1 - 2k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{1, 0, -1, -3, -5, -7, \dots\}.$$

Veamos la holomorfía de $\phi(z)$ mediante el teorema de Weierstrass. Sea $K \subset \Omega_{\phi}$ compacto, $R = \max_{z \in K} |z|$. Entonces, para n entero tal que $2n - 1 \geq R + 1$ se tiene que

$$\left| \frac{B_{2n}}{(2n)!(z + 2n - 1)} \right| \leq \frac{|B_{2n}|}{(2n)!||z| - |2n - 1||} \leq \frac{|B_{2n}|}{(2n)!(2n - 1 - R)} \leq \frac{|B_{2n}|}{(2n)!}.$$

Sea m el menor entero tal que $2m - 1 \geq R + 1$. Entonces

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left| \frac{B_{2n}}{(2n)!(z + 2n - 1)} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|B_{2n}|}{(2n)!} < \infty$$

pues la serie (5) converge absolutamente en $D(0, 2\pi)$; es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^n \right| < \infty \quad \forall z \in D(0, 2\pi)$$

y por tanto, al evaluarla en $z = 1$, tenemos la desigualdad buscada. Por tanto, por el teorema de Weierstrass, $\phi(z)$ converge absolutamente y uniformemente en

todos los compactos de Ω_ϕ y por tanto es holomorfa en Ω_ϕ .

Veamos ahora que $\phi(z)$ tiene polos simples en $z = 2n - 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y en $z = 2$. Para ello, basta notar que para un $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la serie

$$\sum_{k=0, k \neq n_0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!(z+2k-1)}$$

es holomorfa en $D(2n_0 - 1, 1)$. Sin embargo, $\frac{B_{2n_0}}{(2n_0)!(z+2n_0-1)}$ tiene un polo simple en $z = 2 - 2n_0$, por lo que es un polo de $\phi(z)$, de forma análoga se verifica que $z = 0$ es un polo.

Tomando $\text{Re}(z) > 1$:

$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^{z+k-2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{B_k}{k!} t^{z+k-2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!(z+k-1)}. \quad (17)$$

Donde se ha intercambiado el sumatorio usando la convergencia uniforme de la serie de Taylor en el compacto $[0, 1]$.

Usando las expresiones (12) y (17), y teniendo en cuenta que $B_{2k+1} = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, podemos reescribir $\zeta(z)$ como:

$$\zeta(z) = \frac{\phi(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} \quad \forall \text{Re}(z) > 1. \quad (18)$$

Para finalmente concluir que (18) es cierta para todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, basta notar que $\Gamma(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N} \cup \{0\}$ teniendo polos simples en $-\mathbb{N} \cup \{0\}$. Por tanto:

1. $\frac{\phi(z)}{\Gamma(z)}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ anulándose en $z = -2n \ \forall n \in \mathbb{N}$ al no tener polos para esos valores $\phi(z)$ y tiene un polo simple en $(z = 1)$ por ser polo de $\phi(z)$ pero no de $\Gamma(z)$.
2. $\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)}$ es entera anulándose en $z = -n \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (en los polos de $\Gamma(z)$).

Para el cálculo del residuo de $\zeta(z)$ en $z = 1$ notemos que $\Gamma(1) = 1$, entonces:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \zeta(z)(z-1) = \lim_{z \rightarrow 1} \phi(z)(z-1) + \lim_{z \rightarrow 1} \psi(z)(z-1) = \lim_{z \rightarrow 1} \phi(z)(z-1)$$

donde hemos usado que $\psi(z)$ es holomorfa en $z = 1$. Por la construcción realizada de $\phi(z)$ (16) tenemos que su residuo para $z = 1$ es

$$\lim_{z \rightarrow 1} \phi(z)(z-1) = \frac{B_0}{(2 \cdot 0)!} = 1.$$

□

Esta función que hemos notado como ζ es la célebre zeta de Riemann, llamada así en honor a Bernhard Riemann por ser el primero en extender esta función al plano complejo en su memoria publicada en 1859.

Con el objetivo de ver una ecuación funcional con la zeta de Riemann, veamos ahora un par de lemas en los que daremos distintas representaciones de la función zeta de Riemann.

Lema 1.

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que } 0 < \operatorname{Re}(z) < 1. \quad (19)$$

Demostración. Por (5), tenemos que

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^n \quad \forall z \in D(0, 2\pi).$$

Nótese que $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$ es holomorfa en $D(0, 2\pi)$, en particular, está acotada en el intervalo compacto $[0, 1]$. Por tanto, para $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0$

$$\left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1}$$

es integrable en el intervalo $[0, 1]$. Reescribiendo la expresión (12) tenemos:

$$\begin{aligned} \zeta(z)\Gamma(z) &= \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Donde en la última expresión hemos usado que $\int_0^1 t^{z-2} = \frac{1}{z-1} \quad \forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1$. Nótese que la expresión (20) es holomorfa en todo $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ y por tanto, con esto hemos reformulado $\Gamma(z)\zeta(z)$ para $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Restringiéndonos ahora a $z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, tenemos que $\frac{1}{z-1} = -\int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{t} dt$, y por tanto logramos obtener la ecuación deseada (19). \square

Lema 2.

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1} dt \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que } -1 < \operatorname{Re}(z) < 0. \quad (21)$$

Demostración. Por (5), tenemos que

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^n \quad \forall z \in D(0, 2\pi).$$

Como $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$ es holomorfa en $D(0, 2\pi)$, entonces está acotada en el intervalo compacto $[0, 1]$ y por tanto

$$\left(\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\right)t^{z-1}$$

es integrable en $[0, 1]$. Por tanto, teniendo en cuenta que $\int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{z} \quad \forall 0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, podemos reescribir la expresión (19) como:

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)t^{z-1}dt - \frac{1}{2z} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)t^{z-1}dt.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{-1}{z} = \int_1^\infty t^{z-1}dt \quad \forall z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re}(z) < 0$, obtenemos la expresión deseada (21). \square

Veamos a continuación una ecuación funcional de $\zeta(z)$ que nos mostrará una relación de simetría respecto al eje $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$, dándonos a su vez una mayor intuición de su comportamiento en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

Teorema 6 (Ecuación Funcional de la Zeta de Riemann).

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\sin\left(\frac{1}{2}\pi z\right)\zeta(1-z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}. \quad (22)$$

Demostración. Usando la derivada logarítmica de la fórmula de Euler de factorización de la función seno:

$$\sin(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

obtenemos

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 - z^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}. \quad (23)$$

Con el objetivo de reescribir el integrando (21); usando (23), realizaremos el siguiente desarrollo previo

$$\frac{1}{e^t-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^t+1}{e^t-1} = \frac{i}{2} \cot\left(\frac{1}{2}it\right) = \frac{i}{2} \left(\frac{2}{it} - 4it \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2}\right).$$

De esta manera, tenemos:

$$\left(\frac{1}{e^t-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2}.$$

Tomando $-1 < x < 0$ en (21), obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\zeta(x) &= 2 \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^x}{t^2 + 4n^2\pi^2} dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{t^x}{t^2 + 4n^2\pi^2} dt = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^{x-1} \int_0^\infty \frac{t^x}{t^2 + 1} dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Donde el cambio de la serie con la integral se puede realizar por el teorema de la convergencia creciente para funciones positivas.

Veamos ahora que

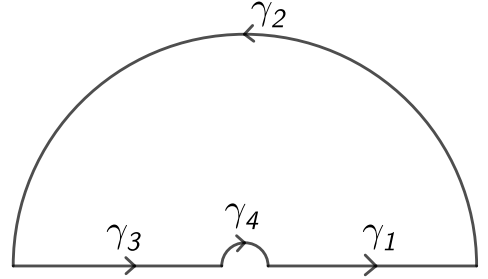
$$\int_0^\infty \frac{t^x}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \pi \sec\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \quad \forall -1 < x < 0. \quad (25)$$

Para ello, consideremos

$$f(w) = \frac{(-iw)^z}{w^2+1}$$

donde $(-iw)^z = e^{z \log(-iw)}$ donde $\log(z)$ representa el logaritmo principal; es decir, el logaritmo holomorfo en $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Sean $\epsilon, R \in \mathbb{R}^+$ tal que $\epsilon < 1 < R$, y tomemos el camino cerrado como la concatenación $\Gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, donde los γ_i están definidos como sigue:

1. $\gamma_1 : [\epsilon, R] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma_1(t) = t \quad \forall t \in [\epsilon, R]$.
2. $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma_2(t) = Re^{it} \quad \forall t \in [0, \pi]$.
3. $\gamma_3 : [-R, -\epsilon] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma_3(t) = t \quad \forall t \in [-R, -\epsilon]$.
4. $\gamma_4 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma_4(t) = \epsilon e^{i(\pi-t)} \quad \forall t \in [0, \pi]$.



Nótese que $f(w)$ tiene un único polo en el dominio simplemente conexo definido por Γ en $w = i$, y además es simple. Por el teorema de los residuos, tenemos que

$$\int_{\Gamma} f(w) dw = 2\pi i \text{Res}(f, i) = 2\pi i \lim_{w \rightarrow i} \frac{(-iw)^x}{(w-i)(w+i)} (w-i) = 2\pi i \frac{(-i \cdot i)^x}{(i+i)} = \pi. \quad (26)$$

Por otro lado, descomponiendo la integral en los cuatro caminos, tenemos que:

$$\int_{\Gamma} f(w) dw = \int_{\gamma_1} f(w) dw + \int_{\gamma_2} f(w) dw + \int_{\gamma_3} f(w) dw + \int_{\gamma_4} f(w) dw = \quad (27)$$

$$= \int_{\epsilon}^R \frac{(-it)^x}{t^2+1} dt + \int_0^{\pi} \frac{(-iRe^{it})^x}{R^2 e^{2it} + 1} iRe^{it} dt + \quad (28)$$

$$+ \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{(-it)^x}{t^2+1} dt + \int_0^{\pi} \frac{(-i\epsilon e^{i(\pi-t)})^x}{\epsilon^2 e^{2i(\pi-t)} + 1} (-i)\epsilon e^{i(\pi-t)} dt.$$

Veamos ahora que las integrales correspondientes a los caminos γ_2 y γ_4 tienden a cero con $\epsilon \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ respectivamente. Para ello, basta usar el teorema de la convergencia dominada notando que para $x \in]-1, 0[$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{(-iRe^{it})^x}{R^2 e^{2it} + 1} iRe^{it} \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^x}{|R^2 e^{2it} - 1|} R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{x+1}}{R^2 - 1} = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{(-i\epsilon e^{i(\pi-t)})^x}{\epsilon^2 e^{2i(\pi-t)} + 1} (-i)\epsilon e^{i(\pi-t)} \right| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^x}{|1 - \epsilon^2 e^{2i(\pi-t)}|} \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^{x+1}}{|1 - \epsilon^2|} = 0.$$

Para las integrales correspondientes a los caminos γ_1 y γ_3 podemos reescribirlas como $\int_0^\infty f(t)\chi_{] \epsilon, R[}(t)dt$ y $\int_{-\infty}^0 f(t)\chi_{]-R, -\epsilon[}(t)dt$ respectivamente donde $\chi_A(t)$ es la función característica. De esta manera, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada con las siguientes cotas:

$$\left| \frac{(-it)^x}{t^2+1} \chi_{] \epsilon, R[}(t) \right| \leq \frac{t^x}{t^2+1}$$

$$\left| \frac{(-it)^x}{t^2+1} \chi_{]-R, -\epsilon[}(t) \right| \leq \frac{t^x}{t^2+1}$$

notando que $\frac{t^x}{t^2+1}$ es integrable tanto en $]0, \infty[$ como en $] - \infty, 0[$. De esta manera, juntando (26) y (27) tras tomar límites en $\epsilon \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$, tenemos:

$$\pi = \int_0^\infty \frac{(-it)^x}{t^2+1} dt + \int_{-\infty}^0 \frac{(-it)^x}{t^2+1} dt = \int_0^\infty \frac{(-it)^x}{t^2+1} dt + \int_0^\infty \frac{(it)^x}{t^2+1} dt.$$

donde en la última igualdad se ha hecho el cambio de variable $t = -s$, y como s es una variable muda, la hemos renombrado t . Finalmente,

$$\pi = \int_0^\infty \frac{t^x}{t^2+1} ((-i)^x + i^x) dt = (e^{-\frac{\pi}{2}xi} + e^{\frac{\pi}{2}xi}) \int_0^\infty \frac{t^x}{t^2+1} dt. \quad (29)$$

Notando que $e^{-\frac{\pi}{2}xi} + e^{\frac{\pi}{2}xi} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, y dividiendo a ambos lados de (29) por $2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ obtenemos la ecuación (25).

Para concluir la demostración del cálculo de (22) para $-1 < x < 0$ usemos (24), (25) y que $\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(1-x)}{\pi} \sin(\pi x) = \frac{\Gamma(1-x)}{\pi} 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$:

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^{x-1} \frac{1}{2} \Gamma(1-x) 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = \\ &= 2\Gamma(1-x) \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) (2\pi)^{x-1} \zeta(1-x) \quad \forall -1 < x < 0. \end{aligned} \quad (30)$$

A pesar de la restricción del dominio en (30), esta ecuación podemos extenderla a todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Para ello, basta notar que ambos lados son funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y usar el principio de identidad de las funciones holomorfas. El lado izquierdo es inmediato por el teorema (5). Por otro lado, el derecho es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ pues es un producto de funciones holomorfas en dicho dominio. Además, por el teorema de Riemann, podemos extenderla a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ pues sabemos que su valor es $\zeta(k)$ para $k \in 1 + \mathbb{N}$.

□

Es importante notar, que a menudo, para el estudio de las propiedades de la función zeta de Riemann, se estudia la función ξ , que una versión simétrica de esta. Así,

$$\xi(z) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{1}{2}z} \Gamma\left(\frac{1}{2}z\right) \zeta(z) \quad (31)$$

que verifica $\zeta(z) = \zeta(1-z)$ y además es entera; es decir, holomorfa en todo \mathbb{C} .

Finalmente, antes de introducir la hipótesis de Riemann, veamos el teorema de Euler que relaciona los números primos con la función zeta de Riemann.

Teorema 7 (Teorema De Euler). Sean $\{p_n\}$ la sucesión ordenada de números primos. Entonces:

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_n^{-z}} \right) \quad \forall \operatorname{Re}(z) > 1. \quad (32)$$

Demostración. Sea $x \in]1, \infty[$. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq n$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^x} \leq \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^n \frac{1}{(p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m})^x} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}. \quad (33)$$

Nótese que la expresión central de (33) se puede reescribir como el producto

$$\sum_{k_1, \dots, k_m=0}^n \frac{1}{(p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m})^x} = \prod_{i=1}^m \sum_{k_i=1}^n p_i^{-k_i x}.$$

Fijando m y tomando $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^x} \leq \prod_{i=1}^m \sum_{k_i=1}^{\infty} p_i^{-k_i x} = \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - p_i^{-x}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x).$$

Tomando ahora $m \rightarrow \infty$ llegamos a que

$$\zeta(x) \leq \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-x}} \leq \zeta(x)$$

y por tanto

$$\zeta(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-x}} \quad \forall x \in]1, \infty[.$$

Consideremos ahora

$$g(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-z}} \quad \forall \operatorname{Re}(z) > 1$$

y veamos que es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$. Para ello, basta demostrar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_i^{-z}} - 1 \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^z - 1}$$

converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$, para lo cual basta usar el teorema de convergencia de Weierstrass notando que:

$$\left| \frac{1}{p_i^z - 1} \right| \leq \frac{1}{|p_i^z| - 1} = \frac{1}{p_i^{\operatorname{Re}(z)} - 1} \leq \frac{2}{p_i^{\operatorname{Re}(z)}}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_i^{\operatorname{Re}(z)}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{Re}(z)} < \infty$ por ser $\operatorname{Re}(z) > 1$, entonces $g(z)$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ y por el principio de identidad $\zeta(z) = g(z) \forall \operatorname{Re}(z) > 1$. \square

Corolario 1.

$$\zeta(z) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p_n^{mz}} \right) \quad \forall \operatorname{Re}(z) > 1 \quad (34)$$

Demostración.

Aplicando el desarrollo $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \quad \forall 0 \leq x < 1$ a la expresión obtenida en el teorema de Euler (32) para $\sigma \in]1, \infty[$:

$$\log(\zeta(\sigma)) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{1-p_n^{-\sigma}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_n^{-m\sigma}}{m} \quad \forall \sigma \in]1, \infty[. \quad (35)$$

De esta manera, tenemos (34) para un intervalo de \mathbb{R} . Basta entonces ver que

$$f(z) = \exp \left(\sum_n \sum_m \frac{1}{m p_n^{mz}} \right) \quad \forall \operatorname{Re}(z) > 1 \quad (36)$$

es holomorfa para extenderla a (34) mediante el principio de identidad. Para ello, veamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p_n^{mz}}$ es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ usando el criterio del mayorante de Weierstrass. De esta manera, basta usar la siguiente acotación:

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p_n^{mz}} \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|m p_n^{mz}|} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_n^{-m \operatorname{Re}(z)}}{m} = \log \left(\frac{1}{1 - p_n^{-\operatorname{Re}(z)}} \right) \quad \forall \operatorname{Re}(z) > 1 \quad (37)$$

cuya suma viene dada por (35). \square

Observacion 1. Como consecuencia de los teoremas 5,6, y 7, podemos discutir la distribución de los ceros de $\zeta(z)$:

1. $\zeta(z)$ se anula en $-2\mathbb{N} = \{-2, -4, \dots\}$; estos ceros se llaman ceros triviales, y además son simples.
2. $\zeta(z) \neq 0 \quad \forall |\operatorname{Re}(z) - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$ salvo en los ceros triviales. Por este motivo, al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ se le denomina el rango crítico.

Demostración. La función $\zeta(z)$ se anula en los ceros triviales como consecuencia del teorema 5; sin embargo, para ver que son simples, primero notemos que $\zeta(z) \neq 0 \quad \forall \operatorname{Re}(z) \geq 1$. Por el teorema de Euler, tenemos un producto absolutamente convergente de términos positivos para $\operatorname{Re}(z) > 1$. Por lo tanto $\zeta(z) \neq 0 \quad \forall \operatorname{Re}(z) > 1$, veamos ahora que tampoco se anula en $\forall \operatorname{Re}(z) = 1$. Primero, notemos que:

$$3 + 4 \cos(\phi) + \cos(2\phi) = 2(1 + \cos(\phi))^2 \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathbb{R}. \quad (38)$$

Además, usando la fórmula (34) y notando $z = \sigma + it$:

$$|\zeta(z)| = \exp \left(\sum_{p \text{ primo}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt \log(p))}{mp^{m\sigma}} \right).$$

Por tanto, usando la desigualdad (38) se tiene que:

$$\begin{aligned} \zeta^3(\sigma) |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| &= \\ &= \exp \left(\sum_{p \text{ primo}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4 \cos(mt \log(p)) + \cos(2mt \log(p))}{mp^{m\sigma}} \right) \geq 1. \end{aligned} \quad (39)$$

Supongamos que $\zeta(1 + it) = 0$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Entonces para $\sigma \rightarrow 1$:

1. $|\zeta(\sigma + it)|^4 = O((\sigma - 1)^{4k})$, para algún $k \in \mathbb{N}$.
2. $O(\zeta(\sigma)^3) = O((\sigma - 1)^{-3})$ por tener $\zeta(z)$ un polo simple en $z = 1$.
3. $O(\zeta(\sigma + 2it)) = O((\sigma - 1)^n)$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ por ser $\zeta(z)$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Por tanto, tenemos que $O(\zeta^3(\sigma) |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)|) = O((\sigma - 1)^{1+n+4(k-1)})$, y por tanto $\lim_{\sigma \rightarrow 1} \zeta^3(\sigma) |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| = 0$. Sin embargo, por la desigualdad (39) tenemos que este límite debe ser mayor o igual que 1. De esta manera, hemos llegado a una contradicción, y por tanto hemos probado que $\zeta(z)$ no tiene ceros para $\text{Re}(z) = 1$ y por tanto para $\text{Re}(z) \geq 1$. Usando (22) se deduce inmediatamente que tampoco se anula para ningún valor de $\text{Re}(z) \leq 0$ salvo en los ceros triviales.

Para ver que el orden de los ceros triviales es 1, notemos que $2(2\pi)^z \Gamma(1 - z)$ y $\zeta(1 - z)$ no se anulan para $\text{Re}(z) < 0$ por lo que usando (22), concluimos que los ceros triviales ($z \in -2\mathbb{N}$) de $\zeta(z)$ deben ser del orden de los ceros de $\sin\left(\frac{1}{2}\pi z\right)$, los cuales son de orden 1. \square

Es interesante notar que la función $\xi(z)$ descrita en (31) tiene como únicos ceros los no triviales de la función ζ de orden 1, debido a que los ceros triviales se cancelan con los polos de $\Gamma\left(\frac{1}{2}z\right)$.

Hipótesis de Riemann 1. *Todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann se encuentran sobre la línea crítica: $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \frac{1}{2}\}$.*

3. Teorema de los números primos

El teorema de los números primos nos da una expresión para el comportamiento asintótico de la función contadora de los números primos, definida como

$$\pi(x) = |\{p \text{ primo} : p \leq x\}|,$$

afirmando que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$, y por lo tanto, cuanto mas altos sean los primos, mas distancia hay entre ellos en general. Esto se puede ver fácilmente viendo que la pendiente de $\pi(x)$ es asintóticamente decreciente a 0 pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\log(x)} \right)' = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x) - 1}{\log(x)^2} = 0$. Es importante notar, que este razonamiento no excluye la posibilidad de que haya dos primos cuya diferencia sea 2 (dos impares consecutivos), pues el teorema de los números primos da el comportamiento asintótico de $\pi(x)$, no su comportamiento exacto para números altos.

El teorema de los números primos fue demostrado por primera vez en 1896 tanto por Jacques Hadamard como por Charles-Jean de la Vallée Poussin de forma independiente, aunque ambos usaron que la función zeta de Riemann no se anula para $\text{Re}(z) = 1$.

Como hemos visto anteriormente, la función zeta de Riemann no tiene ceros no triviales fuera del rango crítico ($\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re}(z) < 1\}$); sin embargo, para probar el teorema de los números primos, al igual que Hadamard y Vallée Poussin, usaremos que tampoco tiene ceros en la línea $\text{Re}(z) = 1$. La línea de argumentación que usaremos será una versión concisa publicada en 1997 por Zagier de la demostración de Newman. Aunque usaremos herramientas tan sofisticadas como estas para probar el teorema de los números primos, resulta importante recalcar que fue demostrado en 1949 con herramientas elementales de manera independiente por los matemáticos P. Erdős [12] y A. Selberg [25].

Para probar el teorema de los números primos, el cual afirma que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1$, recurriremos a una función similar a la función contadora de primos, salvo que pesa los números primos logarítmicamente:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x \text{ primo}} \log p \quad \forall x \in [1, \infty[.$$

Teorema 8 (Teorema de Chebyshev). *Se verifica que:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \iff \theta(x) \sim x.$$

Demostración. Como

$$\theta(x) = \log \left(\prod_{p \leq x \text{ primo}} p \right) \leq \log \left(x^{\pi(x)} \right) = \pi(x) \log(x),$$

entonces $0 \leq \theta(x) \leq \pi(x) \log(x)$. De esta manera, tenemos:

$$\frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log(x)}{x}$$

Además, $\forall \epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\theta(x) &\geq \sum_{\substack{x^{1-\epsilon} < p \leq x \\ p \text{ primo}}} \log p = \log \left(\prod_{\substack{x^{1-\epsilon} < p \leq x \\ p \text{ primo}}} p \right) \geq \log \left(x^{(1-\epsilon)(\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon}))} \right) = \\ &= (1-\epsilon)(\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})) \log x \geq (1-\epsilon)(\pi(x) - x^{1-\epsilon}) \log x\end{aligned}$$

Donde en la última desigualdad hemos usado que $\pi(x) \leq x$. De esta manera, obtenemos que:

$$\frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log(x)}{x} \leq \frac{1}{1-\epsilon} \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^\epsilon}$$

Como para ϵ fijo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\epsilon} = 0$, entonces $\exists x_\epsilon > 0$ tal que $\frac{\log x}{x^\epsilon} < \epsilon \forall x > x_\epsilon$. De esta manera,

$$\frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log(x)}{x} \leq \frac{1}{1-\epsilon} \frac{\theta(x)}{x} + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, x > x_\epsilon.$$

De esta manera, tomando límites en $x \rightarrow \infty$ tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\epsilon} \frac{\theta(x)}{x} + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

Nótese que esta expresión es válida para todo $\epsilon > 0$, por lo que tomando $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x}.$$

□

Lema 3 (Chebyshev). *Se verifica que*

$$\theta(x) \leq (4 \log 2)x \quad \forall x \in [1, \infty[,$$

y por tanto, $\theta(x) = O(x)$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, usando el teorema del binomio y que cualquier primo $p \in]n, 2n]$ no divide a $n!$, tenemos:

$$2^{2n} = (1+1)^n = \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} \geq \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \geq \prod_{\substack{n < p \leq 2n \\ p \text{ primo}}} p = \exp(\theta(2n) - \theta(n)).$$

Por tanto, aplicando logaritmos:

$$\theta(2n) - \theta(n) \leq 2n \log 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando esta última desigualdad $m \in \mathbb{N}$ veces teniendo en cuenta que $\theta(1) = 0$:

$$\theta(2^m) = \sum_{n=1}^m (\theta(2^n) - \theta(2^{n-1})) \leq \sum_{n=1}^m 2^n \log 2 \leq 2^{m+1} \log 2. \quad (40)$$

Finalmente, generalizaremos la desigualdad (40) a $x \geq 1$ tal que $2^{m-1} \leq x < 2^m$:

$$\theta(x) \leq \theta(2^m) \leq 2^{m+1} \log 2 = (4 \log 2) 2^{m-1} \leq (4 \log 2)x.$$

□

Lema 4. *La función*

$$\Phi(z) = \sum_{p \text{ primo}} p^{-z} \log p \quad \forall \operatorname{Re}(z) > 1 \quad (41)$$

es holomorfa en $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1$. Además

$$H(t) = \theta(e^t)e^{-t} - 1 \quad \forall t > 0 \quad (42)$$

tiene como transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(H)(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} \quad (43)$$

que se extiende a una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$; es decir, es holomorfa en un abierto que contiene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$.

Demostración. Veamos la holomorfía de (41). Como $\theta(e^t) = O(e^t)$ (Lema 3), tenemos que $\mathcal{L}(\theta(e^t))$ es una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$. Sea $p_0 = 1$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos p_n como el n -ésimo primo. Nótese además que $\theta(e^t)$ es constante en $]\log p_n, \log p_{n+1}[$, por lo que:

$$\int_{\log p_n}^{\log p_{n+1}} e^{-zt} \theta(e^t) dt = \theta(p_n) \int_{\log p_n}^{\log p_{n+1}} e^{-zt} dt = \frac{1}{z} \theta(p_n) (p_n^{-z} - p_{n+1}^{-z}). \quad (44)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\theta(p_0) = 0$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta(e^t))(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \theta(e^t) dt = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^\infty \theta(p_n) (p_n^{-z} - p_{n+1}^{-z}) = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=1}^\infty \theta(p_n) p_n^{-z} - \frac{1}{z} \left(\sum_{n=2}^\infty \theta(p_{n-1}) p_n^{-z} - \theta(p_0) p_1^{-z} \right) = \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=1}^\infty (\theta(p_n) - \theta(p_{n-1})) p_n^{-z} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^\infty \log p_n p_n^{-z} = \frac{\Phi(z)}{z}. \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que Φ es holomorfa para $\operatorname{Re}(z) > 1$. Para el cálculo de la transformada de Laplace de H basta usar propiedades de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(H)(z) = \mathcal{L}(\theta(e^t)e^{-t})(z) - \mathcal{L}(1)(z) = \mathcal{L}(\theta(e^t))(z+1) - \frac{1}{z} = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Para ver que $\mathcal{L}(H)$ extiende a una función holomorfa en $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, veamos primero que la función

$$\Phi(z) - \frac{1}{z-1} \quad (45)$$

extiende a una función holomorfa para $\operatorname{Re}(z) \geq 1$.

Por el teorema 5 sabemos que $\zeta(z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, con un único polo simple en $z = 1$, y ningún cero para $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ por la observación 1. Por tanto, la derivada logarítmica de $\zeta(z)$, esto es $\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$, es holomorfa en

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\} \setminus (\{\rho \in \mathbb{C} : \zeta(\rho) = 0\} \cup \{1\}),$$

con un único polo para $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ que además es simple en $z = 1$. Usando el teorema de Euler (teorema 7), tenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} &= \sum_{p \text{ primo}} \frac{p^{-z} \log p}{1 - p^{-z}} = \sum_{p \text{ primo}} \frac{\log p}{p^z - 1} = \\ &= \sum_{p \text{ primo}} \left(\frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^z(p^z - 1)} \right) \log p = \Phi(z) + \sum_{p \text{ primo}} \frac{\log p}{p^z(p^z - 1)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Podemos ver que la serie de la última igualdad converge a una función holomorfa para $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$ por el criterio del mayorante de Weierstrass con la siguiente acotación:

$$\left| \frac{\log p}{p^z(p^z - 1)} \right| \leq \frac{\log p}{p^{\operatorname{Re}(z)}(|p^z| - 1)} \leq \frac{2 \log p}{p^{2 \operatorname{Re}(z)}}.$$

Así, $\sum_{p \text{ primo}} \frac{2 \log p}{p^{2 \operatorname{Re}(z)}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \log n}{n^{2 \operatorname{Re}(z)}} < \infty$ para $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$ pues $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \log(p)}{n^{2 \operatorname{Re}(z)}}}{\frac{2}{n^{2 \operatorname{Re}(z) - \epsilon}}} = 0,$$

y se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2 \operatorname{Re}(z) - \epsilon}} < \infty \forall \operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}(1 + \epsilon)$, y por tanto, por el criterio de comparación de paso al límite, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \log n}{n^{2 \operatorname{Re}(z)}}$ converge $\forall \operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}(1 + \epsilon) \forall \epsilon > 0$. Tomando límite de $\epsilon \rightarrow 0$, tenemos que $\sum_{p \text{ primo}} \frac{2 \log p}{p^{2 \operatorname{Re}(z)}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \log n}{n^{2 \operatorname{Re}(z)}}$ $\forall \operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$ y por tanto la serie en la última igualdad de (46) es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}\}$ y por tanto $\Phi(z)$ es holomorfa en Ω con un único polo para $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ en $z = 1$. Este polo debe ser simple y con residuo 1 por la ecuación (46), pues el residuo de la derivada logarítmica de $\zeta(z)$ en $z = 1$ es -1 por venir de un polo de orden 1. De esta manera, tenemos que $\Phi(z) - \frac{1}{z-1}$ es holomorfa para $\operatorname{Re}(z) \geq 1$.

Finalmente, para ver la holomorfía de (43), basta notar que:

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s+1} \left(\Phi(s+1) - \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{s+1}. \quad (47)$$

□

Proposición 1. $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ creciente. Si $\exists \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{f(t)-t}{t^2} dt$; entonces, $f(x) \sim x$; es decir, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Demostración. Sea $F(x) = \int_1^x \frac{f(t)-t}{t^2} dt$, entonces por hipótesis $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$. Entonces, $\forall \lambda > 1$, tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} |F(\lambda x) - F(x)| = 0$.

Fijemos un $\lambda > 1$ y supongamos ahora que $\exists \{x_n\} \rightarrow \infty$ tal que $f(x_n) \geq \lambda x_n \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned} F(\lambda x_n) - F(x_n) &= \int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{f(t)-t}{t^2} dt \geq \int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\lambda x_n - t}{t^2} dt = \\ &= \int_1^\lambda \frac{\lambda - s}{s^2} ds = \lambda - 1 - \log(\lambda) > 0. \end{aligned}$$

Donde en la desigualdad se ha hecho uso de que f es creciente; es decir, $f(t) \geq f(x_n)$, y posteriormente se ha usado el cambio de variable $s = \frac{t}{x_n}$. Tomando límite $n \rightarrow \infty$ se tiene:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(\lambda x_n) - F(x_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda - 1 - \log(\lambda)] > 0, \quad (48)$$

lo cual es una contradicción. De esta manera, llegamos a la conclusión de que $f(x) < \lambda x$ para x suficientemente grande. De forma análoga, veamos que $f(x) > \frac{1}{\lambda}x$ para x suficientemente grande. Para ello, supongamos que $\exists \{x_n\} \rightarrow \infty$ tal que $f(x_n) < \frac{1}{\lambda}x_n$. Entonces:

$$\begin{aligned} F(x_n) - F\left(\frac{1}{\lambda}x_n\right) &= \int_{\frac{1}{\lambda}x_n}^{x_n} \frac{f(t)-t}{t^2} dt \leq \int_{\frac{1}{\lambda}x_n}^{x_n} \frac{f(x_n)-t}{t^2} dt < \\ &< \int_{\frac{1}{\lambda}x_n}^{x_n} \frac{\frac{1}{\lambda}x_n - t}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 \frac{\frac{1}{\lambda} - s}{s^2} ds = 1 - \frac{1}{\lambda} + \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) < 0. \end{aligned}$$

Tomando la desigualdad concluimos que para x suficientemente grande se verifica $\frac{1}{\lambda}x < f(x) < \lambda x$. Como esto se verifica $\forall \lambda > 1$, concluimos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. \square

Teorema 9. *Teorema de los números primos*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}. \quad (49)$$

Donde $\pi(x) = |\{p \text{ primo} : p \leq x\}|$.

Demostración. Consideremos la función H definida en el lema 4, la cual es continua a trozos y acotada por el lema de Chebyshev (Lema 3), pues $(H(t) \leq (4 \log 2)e^t e^{-t} - 1 \leq 4 \log 2 - 1)$. Además, por (lema 4), sabemos que $\mathcal{L}(H)$ es holomorfa para $\text{Re}(z) \geq 0$. Por tanto, por el teorema 3 y usando el cambio de variable $t = e^u$, tenemos:

$$\int_0^\infty H(u) du = \int_1^\infty \frac{\theta(t)-t}{t^2} dt. \quad (50)$$

Como $\theta(x)$ es creciente, usando la proposición 1 tenemos que $\theta(x) \sim x$ y por (Teorema 8) $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

□

La relación de la hipótesis de Riemann con los números primos es mucho mas profunda, pues no solo sirve para probar el teorema de los números primos sino que se puede demostrar que la hipótesis de Riemann es equivalente a:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|\pi(x) - \text{li}(x)|}{x^{-(1/2)+\epsilon}} \leq 1$$

donde $\text{li}(x)$ es la integral logarítmica para la cual es bien conocido que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{li}(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1$.

De hecho, con la función zeta de Riemann no solo se puede obtener una aproximación de $\pi(x)$, sino que en 1859 Riemann dio una fórmula analítica usando sus ceros no triviales (ρ):

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{1/n}) \quad \forall x > 1$$

donde

$$J(x) = \text{li}(x) - \sum_{\text{Im}(\rho) > 0} [\text{li}(x^\rho) + \text{li}(x^{1-\rho})] - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2 - 1) \log t} \quad \forall x > 1$$

y $\mu(n)$ es la función de Möbius. De esta manera queda la siguiente fórmula:

Finalmente, cabe destacar que la suma $\sum_{\text{Im}(\rho) > 0} \text{li}(x^\rho) + \text{li}(x^{1-\rho})$ es condicionalmente convergente, lo cual indica que si reordenamos los términos como queramos podemos obtener cualquier valor de \mathbb{R} . Por este motivo, Riemann recalcó que se debía sumar en orden creciente de $\text{Im}(\rho)$.

Veamos a continuación unas cotas para funciones de la teoría de números, y las mejoras que se obtienen para estas cotas si se acepta la hipótesis de Riemann como cierta.

Se puede demostrar que

$$|\theta(x) - x| \leq x\epsilon_0(x) \quad x \geq 149$$

$$|\pi(x) - \text{li}(x)| \leq 0,2795 \frac{x}{\log^{3/4}(x)} \exp\left(-\sqrt{\frac{\log(x)}{6,455}}\right) \quad \forall x \geq 229,$$

donde $\epsilon_0(x) = \sqrt{\frac{8}{17\pi}} X^{\frac{1}{2}} e^{-X}$ y $X = \sqrt{\frac{\log(x)}{6,455}}$. Si se verifica la hipótesis de Riemann, podemos mejorar las cotas anteriores a:

$$\begin{aligned} |\theta(x) - x| &< \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log^2(x) \quad \forall x \geq 599 \\ |\pi(x) - \text{li}(x)| &< \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log(x) \quad \forall x \geq 2657 \end{aligned}$$

Por otro lado, se puede demostrar que hay un primo en el intervalo $[x, x(1 + \frac{1}{111 \log^2(x)})]$ $\forall x \geq 2898242$. Si además, se verifica la hipótesis de Riemann, se puede mejorar este intervalo a $[x, x + \frac{22}{25} \sqrt{x} \log(x)]$.

Cabe destacar que la hipótesis de Riemann también sirve para determinar el ritmo de convergencia de algunas sucesiones. Así, si se verifica la hipótesis de Riemann se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log(\log(x)) - B \right| &< \frac{3 \log(x) + 4}{8\pi \sqrt{x}} \quad x \geq 13,5 \\ \left| \sum_{p \leq x} \frac{\log(p)}{p} - \log(x) - E \right| &< \frac{3(\log^2(x) + 2 \log(x) + 4)}{8\pi \sqrt{x}} \\ \left| e^C \log(x) \prod (1 - \frac{1}{p}) - 1 \right| &< \frac{3 \log(x) + 5}{8\pi \sqrt{x}} \quad \forall x \geq 8 \\ \left| \frac{e^{-C}}{\log(x)} \prod_{p \leq x} \frac{p}{p-1} - 1 \right| &< \frac{3 \log(x) + 5}{8\pi \sqrt{x}} \quad \forall 13,1 \geq x, \end{aligned}$$

donde C es la constante de Euler y

$$\begin{aligned} B &= C + \sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \approx 0,261497212847643 \\ E &= -C - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_p \frac{\log(p)}{p^n} \approx 1,332582275733221. \end{aligned}$$

4. Modelos Físicos

Algunos problemas matemáticos permanecen una gran cantidad de tiempo sin resolver. Con la idea de facilitar la resolución de estas cuestiones, no es raro recurrir a la computación numérica de estos problemas. De esta manera, se gana una mayor comprensión de estos problemas, incluso llegando a encontrar contraejemplos. Un ejemplo de este hecho fue la resolución de la conjetura de las sumas de potencias de Euler en la que se afirma que si $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n < k$, entonces la ecuación:

$$x_1^k + \cdots + x_n^k = y^k$$

no tiene solución para $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}$. Esta conjetura fue demostrada falsa por L. J. Lander y T. R. Parkin en 1966 haciendo uso del superordenador CDC 6600 [16].

De forma similar, algunas cuestiones matemáticas se tratan de resolver usando la física. Un ejemplo bien conocido es la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para las cuales a día de hoy no se tiene una solución general. En este caso, uno de los motivos de estudio de estas ecuaciones es ver cómo se comportará un cuerpo sumergido en un fluido viscoso e incompresible. Aunque actualmente existen simulaciones computacionales que son capaces de resolver este problema, una alternativa muy usada son los túneles de viento; los cuales mediante técnicas de análisis dimensional, sirven de modelo del objeto a estudiar reduciendo su tamaño. De esta manera, usando un barco de juguete, podemos estudiar como se comportará nuestro barco de tamaño real. Así, realizando medidas sobre el barco de juguete, obtenemos la solución a nuestras ecuaciones en distintos puntos.

A continuación trataremos de estudiar la función zeta de Riemann desde muchos ámbitos de física manteniendo a su vez un nivel comprensible para todos los lectores. De esta manera quedará clara la inmensidad de áreas de la física que tratan de implementar la función zeta de Riemann. De esta manera, se presentarán modelos físicos de las siguientes dos categorías:

1. Modelos en los que la aparezca la función zeta de Riemann jugando un papel fundamental en la física del problema.
2. Modelos cuyo objetivo principal es confirmar o refutar la Hipótesis de Riemann, o mas bien, su verosimilitud.

4.1. Catástrofe ultravioleta

Un cuerpo por el hecho de tener temperatura emite radiación electromagnética, por otro lado definimos un cuerpo negro como aquel que absorbe toda la radiación electromagnética que incide sobre el. Por este motivo, los cuerpos negros

no se ven necesariamente negros, pues ellos pueden emitir su propia radiación en el espectro visible.

Proponiéndose descubrir la radiación emitida por un cuerpo negro, Rayleigh y Jeans modelaron el cuerpo negro como una cavidad cerrada con un agujero pequeño de manera que las paredes son opacas y solo se emite radiación por el agujero. Así, obtuvieron que el número de modos normales por unidad de volumen a una determinada frecuencia ν es:

$$N(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3},$$

mientras que usando física estadística obtuvieron que la energía media de cada uno de estos modos se parecía a la de un oscilador armónico obteniéndose

$$\langle E(\nu, T) \rangle = k_B T$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura. Así, se obtuvo que la densidad de energía a temperatura T y frecuencia ν es:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T.$$

Sin embargo, se encontraron que la energía total emitida a una determinada temperatura era infinito; es decir:

$$\int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \infty,$$

lo cual es absurdo. A esto, se le denominó catástrofe ultravioleta. Esta ley, conocida como ley de Rayleigh-Jeans daba buenos resultados para frecuencias bajas; mientras que daba valores erróneos para frecuencias altas. Durante este periodo, era conocida la ley de Wien, la cual predecía correctamente esta densidad para frecuencias en el espectro visible y temperaturas hasta 4000K como:

$$u(\nu, T) = \alpha \nu^3 e^{-\beta\nu/T}$$

siendo α y β constantes universales. Así, Planck unió estas dos leyes con la que sería conocida como distribución de Planck:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \frac{\frac{h\nu}{k_B T}}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}. \quad (51)$$

Actualmente, sabemos que esto sería el nacimiento de la física cuántica; sin embargo, a pesar de considerar que la energía debía estar cuantizada como $E = nh\nu$ para $n \in \mathbb{N}$, durante la creación de esta distribución se pensó que no se debía asociar un significado físico a la constante h , sino que era una mera herramienta

matemática. Es fácil ver que esta distribución explica las dos anteriores pues para $\frac{h\nu}{k_B T} \gg 1$ podemos aproximar el denominador por $\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$ obteniendo así:

$$u(\nu, T) \simeq \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right),$$

de manera que explica la ley de Wien con constantes $\alpha = \frac{8\pi h}{c^3}$ y $\beta = \frac{h}{k_B}$. También explica la ley de Rayleigh-Jeans tomando $\frac{h\nu}{k_B T} \ll 1$ y desarrollando así en serie la exponencial como $\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \simeq 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$. De esta manera quedaría la distribución (51) como:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} k_B T.$$

El comportamiento de estas tres leyes se puede ver en la figura 1, donde hemos tomado un valor T para que $\frac{h\nu}{k_B T} = \nu$.

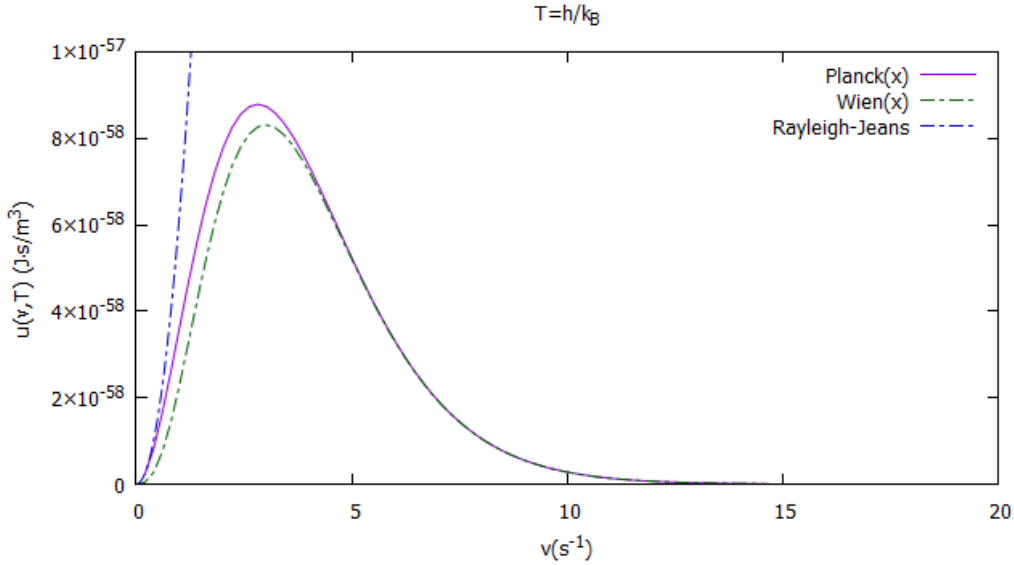


Figura 1: Gráfica de las leyes que tratan de describir la distribución de energía a temperatura $T = \frac{h}{k_B}$.

Sin embargo, no solo generaliza las leyes conocidas, sino que al calcular la densidad de energía por unidad de volumen emitida nos da un valor finito. Veamos por tanto, el valor obtenido:

$$\int_0^\infty \frac{8\pi \nu^2}{c^3} k_B T \frac{\frac{h\nu}{k_B T}}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu = \frac{8\pi (k_B T)^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \frac{8\pi (k_B T)^4}{h^3 c^3} \zeta(4) \Gamma(4)$$

donde hemos hecho el cambio de variable $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ y en la última igualdad hemos usado (12). De esta manera, por primera vez logró la función zeta de Riemann encontrar una aplicación en la física, donde además, la construcción realizada es completamente natural.

4.2. Física Estadística

Presentaremos a continuación varios modelos de gases en los que participa la función zeta de Riemann, notando $\beta = \frac{1}{k_B T}$ donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura. El primer modelo que presentaremos es el gas de Bose que fue estudiado por primera en 1924. Su aparición en este caso junto al del cuerpo negro nos muestra la relación íntima que tiene la función zeta de Riemann con la física estadística. Posteriormente, veremos otro ejemplo de la fuerte conexión entre la función zeta de Riemann y los números primos creando dos gases cuya distribución de energías se obtiene a partir de los números primos y obteniendo como conclusión que la función de partición canónica es función de la función zeta de Riemann.

4.2.1. Gas de Bose

Consideremos un gas de *Bose* no relativista formado por bosones de espín cero y dimensión D . Se puede ver que es un sistema que sufre un cambio de fase a bajas temperaturas. Como las partículas que consideraremos son libres, su energía es $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$. Se puede entonces demostrar que el número de partículas es:

$$N = \frac{V}{(2\pi\hbar)^D} \int \frac{d^D p}{e^{\beta(\epsilon(p)-\mu)} - 1} = \frac{D\pi^{D/2}V}{(2\pi\hbar)^D \Gamma(\frac{D}{2} + 1)} \int_0^\infty p^{D-1} \frac{dp}{e^{\beta(\frac{p^2}{2m}-\mu)} - 1}.$$

Usando ahora el cambio de variable $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$, tenemos:

$$N \propto \int_0^\infty \epsilon^{\frac{D}{2}-1} \frac{d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \propto \zeta\left(\frac{D}{2}\right)$$

donde \propto hace referencia a que las dos componentes son proporcionales; hemos tomado $\mu \rightarrow 0$ porque el estado de mas baja energía es de energía nula y estamos trabajando a bajas temperaturas, y en particular, por debajo de la temperatura crítica; además, en la última igualdad hemos usado la expresión (12). Usando la proporcionalidad de N con la zeta, podemos deducir el bien conocido resultado de que no puede existir este tipo de gas para dimensión menor que 3, pues para $D = 1$ $\zeta(\frac{1}{2}) < 0$ y para $D = 2$ $\lim_{D \rightarrow 2} \zeta\left(\frac{D}{2}\right) = \infty$.

4.2.2. Gases de Riemann

En 1990 Julia propuso un gas ideal ficticio de bosones con niveles de energía $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots$, donde $\epsilon_n = \epsilon_0 \log(p_n)$ siendo p_n el n -ésimo primo. Como cualquier número natural n se puede factorizar de manera única en primos $n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, podemos asociar a cada número natural un único gas con m_i bosones en el nivel de energía $\epsilon_i \forall i \in \mathbb{N}$. De esta forma, su energía será:

$$E_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} m_i \epsilon_0 \log(p_i) = \epsilon_0 \log(n)$$

Tomando $s = \beta\epsilon_0$, podemos escribir su función de partición canónica como

$$Z_B = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta\epsilon_0 \log(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s). \quad \text{Re}(s) > 1$$

Nótese que la condición $\text{Re}(s) > 1$ es necesaria para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converja. Por tanto tenemos que $s > 1$ pues $s \in \mathbb{R}$.

De forma similar podemos construir un gas de fermiones de Riemann, sin embargo, ahora los únicos posibles valores para m_i son 0 o 1. Por este motivo, cualquier número que sea divisible por un primo al cuadrado lo eliminaremos de nuestro análisis, quedándonos por tanto con los enteros libres de cuadrados; es decir, enteros que no tiene ningún cuadrado como factor. Así:

$$Z_F = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| \exp(-\beta E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \quad \text{Re}(s) > 1$$

donde μ es la función de Möbius, y la última igualdad se puede encontrar en [13]. Nótese que al igual que en el gas de Riemann de bosones, se necesita la condición de que $s > 1$. Debido a que no se puede definir la función de partición para $s = 1$. Julia notó que esta debía ser la temperatura de Hagedorn del sistema ($T = \frac{\epsilon_0}{k_B}$); es decir, la temperatura máxima que puede alcanzar el sistema. Esto podemos verlo obteniendo una variable física. Como ejemplo veamos la energía interna del gas de Riemann de bosones:

$$U_B = -\frac{\partial \log(Z_B)}{\partial \beta} = -\epsilon_0 \frac{\partial \log(\zeta(s))}{\partial s}.$$

Como $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$ de manera que su residuo es 1, tenemos entonces que su derivada logarítmica también tiene un polo simple en $s = 1$ con residuo -1. De esta manera tenemos que:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{U_B}{\epsilon_0} = 1.$$

Por tanto, cuando $s \rightarrow 1$ tenemos que la energía interna se hace infinita, por lo que no es posible calentar un sistema hasta esa temperatura.

Si consideramos un conjunto de sistemas que no interactúan entre sí, entonces la función de partición del conjunto es el producto de la función de partición de cada uno de sus subsistemas. Esto inmediatamente nos lleva a concluir que un gas de Riemann de bosones es equivalente a una mezcla de un gas de Riemann de fermiones con un gas de Riemann de bosones que tenga como nivel base de energía $2\epsilon_0$.

Sin embargo, Julia lo lleva un paso mas allá, de manera que usa la fórmula del gas de Riemann de fermiones de forma recurrente; es decir:

$$Z_B = \zeta(s) = Z_F \zeta(2s) = Z_F(s) Z_F(2s) \zeta(4s) = \cdots = \prod_{n=0}^{\infty} Z_F(2^n s),$$

donde es importante notar que para realizar el paso al límite se hace uso de que $\lim_{s \rightarrow \infty, s > 0} \zeta(s) = 1$. En este proceso, considera que todos los gases tienen como energía en el estado fundamental ϵ_0 , mientras que lo que va variando entre sistemas es la temperatura. Nótese además que si $s \rightarrow \infty$ entonces lo que tenemos es que $T \rightarrow 0$ por lo que en el caso de ser posible construir este tipo de gases, encontraríamos una barrera en ser capaz de enfriarlo para verificar este fenómeno. Es importante señalar lo sorprendente que es este resultado, pues logra crear un gas de bosones exclusivamente a partir de gases de fermiones.

Finalmente, es importante notar que la función de partición de estos dos gases es función de la función zeta de Riemann. Además, aunque a priori estos gases son ficticios, el potencial $V(x) = V_0 \log\left(\frac{|x|}{L}\right)$ tiene como autovalores:

$$\epsilon_n = V_0 \log(2n + 1) + V_0 \log\left(\frac{\hbar}{2L} \sqrt{\frac{\pi}{2mV_0}}\right)$$

Esto indica que podemos producir el espectro de energías $\epsilon_n = \log(1 + n) \forall n \in 2\mathbb{N}_0$, lo cual nos lleva a pensar que sea posible un potencial para los gases de Riemann[29].

4.3. Física de la Materia Condensada

A lo largo de esta sección tomaremos un sistema especial de unidades donde tomaremos la constante de Boltzmann $k_B = 1$ y la constante de Planck reducida $\hbar = 1$ iguales a la unidad.

En 1990 un método conocido para la obtención del espectro de los gases de fonones era el de dispersión inelástico de neutrones. Sin embargo, este método requería de un equipo especial. Por este motivo, en 1990 Xianxi Dai, Xinwen Xu y Jiqiong Dai desarrollaron un nuevo método para obtener el espectro de los fonones llamado “specific heat-phonon spectrum inversion method”. Este método se podía realizar en laboratorios en los que se pudiera medir el calor específico a volumen constante $C_v(T)$ a distintas temperaturas.

Consideremos un gas de fonones; entonces, podemos escribir su calor específico a volumen constante como:

$$C_v(T) = \int_0^{\infty} \left(\frac{w}{T}\right)^2 \frac{e^{\frac{w}{T}}}{(e^{\frac{w}{T}} - 1)^2} g(w) dw$$

donde $g(w)$ es la densidad de estados de los fonones. Con esto en mente, concluyen que si se verifica la hipótesis de Riemann y suponiendo que $Q(x) = C_v(T_0 e^x)$ tiene transformada de Fourier, entonces existe una única densidad de estados para cada calor específico que viene dada por

$$g(w) = \frac{1}{2\pi w} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{w}{T_0}\right)^{ik} \frac{\hat{Q}_0(k) dk}{\zeta(ik+1)\Gamma(ik+2)}$$

donde T_0 es un parámetro libre con unidades de temperatura y $\hat{Q}_0(k) = T_0^{ik} \int_0^{\infty} u^{ik-1} C_v(1/u) du$. Es importante destacar que la expresión anterior de $g(w)$ no se anula en el denominador pues la función zeta de Riemann no se anula para $\text{Re}(z) = 1$, que es lo único para lo que usaron la hipótesis de Riemann. Con el objetivo de asegurar la correcta definición de \hat{Q}_0 ; es decir, no presente singularidades, introdujeron un parámetro $s \in \mathbb{R}$. Así, asumiendo que el comportamiento asintótico del calor específico es de la forma:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{C_v}{BT^{s_0}} &= 1 \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_v}{AT^{s_{\infty}}} &= 1 \end{aligned}$$

donde $A, B, s_0, s_{\infty} \in \mathbb{R}$, y exigiendo que $0 < s_{\infty} < s < s_0$; entonces, se puede obtener la densidad de estados como

$$g(w) = \frac{1}{2\pi w} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{w}{T_0}\right)^{ik+s} \frac{\hat{Q}_0(k) dk}{\zeta(ik+s+1)\Gamma(ik+s+2)} \quad (52)$$

donde ahora $\hat{Q}_0(k) = T_0^{ik+s} \int_0^{\infty} u^{ik+s-1} C_v(1/u) du$. Es claro que para que $g(w)$ sea físicamente posible, no puede depender del parámetro s ; sin embargo, no es clara su independencia a priori. Posteriormente, se probó que una condición suficiente y necesaria para la existencia y unicidad dada por la fórmula (52) es que:

$$|\hat{Q}_0(k)| = O[|\zeta(ik+s+1)\Gamma(ik+s+2)|] = O\left[s^{s+\frac{3}{2}} \exp\left(-k \tan^{-1}\left(\frac{k}{s+2}\right)\right)\right]$$

Podemos usar la ley de Dulong-Petit ($s_{\infty} = 0$) y tomar $s_0 = D$ donde D es la dimensión de la red.

Anteriormente, ese mismo año Nan-xian Chen obtuvo también otra fórmula para la densidad de estados aprovechando la fórmula de inversión de Möbius:

$$g(w) = \frac{1}{w^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C_v(2\pi/u)}{u^2}\right)\left(\frac{w}{n}\right) \quad (53)$$

donde $u = \frac{2\pi}{T}$. Cabe destacar, que DengMing Ming, Tao Wen, JiXin Dai, W. E. Evenson y XianXi Dai probarían en 2003 que las fórmulas (52) y (53) son equivalentes, para lo cual usarían la expresión:

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} \quad \text{Re}(z) > 1,$$

como conexión entre la función zeta de Riemann y la función de Möbius.

A continuación aplicaremos la fórmula de inversión de Dai(52) sobre el modelo de Einstein para mostrar la facilidad con la que se puede obtener de manera teórica un espectro de fonones.

El modelo de Einstein fue propuesto en 1907, poco después de que naciera la física cuántica (1900). En su modelo, Einstein considera que los átomos actúan como osciladores armónicos cuánticos independientes entre sí, que vibran con la misma frecuencia w_0 . Siendo por tanto los posibles niveles de energía de cada oscilador:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)w_0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

Así, se obtiene que la partición canónica de un solo oscilador armónico es:

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{T}(n+\frac{1}{2})w_0} = e^{-\frac{w_0}{2T}} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\frac{w_0}{T}})^n = \frac{e^{-\frac{w_0}{2T}}}{1 - e^{-\frac{w_0}{T}}} = \frac{e^{\frac{w_0}{2T}}}{e^{\frac{w_0}{T}} - 1}.$$

Considerando que hay N átomos en nuestra red cristalina, que son idénticos pero distinguibles, y que además cada átomo tiene tres grados de libertad, tenemos que hay $3N$ osciladores armónicos. Por tanto, la energía interna total del sólido se puede expresa como:

$$U = -3N \frac{\partial \log(Z)}{\partial (1/T)} = 3N \left(w_0 \frac{e^{\frac{w_0}{T}}}{e^{\frac{w_0}{T}} - 1} - \frac{w_0}{2} \right)$$

Por tanto, se tiene que el calor específico viene dado por:

$$C_v(T) = \frac{U}{T} = 3N \left(\frac{w_0}{T} \right)^2 \frac{\exp(\frac{w_0}{T})}{(\exp(\frac{w_0}{T}) - 1)^2}.$$

Para calcular la densidad de estados, primero calcularemos \hat{Q}_0 :

$$\begin{aligned} \hat{Q}_0(k) &= 3NT_0^{ik+s} \int_0^{\infty} u^{ik+s-1} (w_0 u)^2 \frac{\exp(w_0 u)}{(\exp(w_0 u) - 1)^2} du = \\ &= 3N \left(\frac{T_0}{w_0} \right)^{ik+s} \int_0^{\infty} y^{ik+s+1} \frac{\exp(y)}{(\exp(y) - 1)^2} dy = \\ &= 3N \left(\frac{T_0}{w_0} \right)^{ik+s} \left[\left[y^{ik+s+1} \frac{-1}{\exp(y) - 1} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (ik+s+1) y^{ik+s+1-1} \frac{-1}{\exp(y) - 1} dy \right] \\ &= 3N \left(\frac{T_0}{w_0} \right)^{ik+s} (ik+s+1) \Gamma(ik+s+1) \zeta(ik+s+1) \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos hecho el cambio de variable $y = w_0 u$, en la tercera igualdad hemos hecho una integración por partes y en la última igualdad

hemos hecho uso de la expresión (12). Finalmente, sustituyendo ahora en (52), tenemos:

$$\begin{aligned}
 g(w) &= \frac{3N}{2\pi w} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{w}{w_0}\right)^{ik+s} dk = \frac{3N}{2\pi w} \int_{-\infty}^{\infty} \exp((ik+s)(\log(w) - \log(w_0))) dk = \\
 &= \frac{3N}{w} e^{s \log\left(\frac{w}{w_0}\right)} \delta(\log(w) - \log(w_0)) = 3N \frac{w_0}{w} e^{s \log\left(\frac{w}{w_0}\right)} \delta(w - w_0) = \\
 &= 3N \delta(w - w_0),
 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\delta\left(\log\left(\frac{w}{w_0}\right)\right) = w_0 \delta(w - w_0)$ y en la última igualdad hemos usado que $\log(w) - \log(w_0) = 0 \iff w - w_0 = 0$, y en tal caso $e^{s \log\left(\frac{w}{w_0}\right)} = 1$. Nótese que tal y como advertimos, la dependencia en s de $g(w)$ desaparece. Finalmente, cabe destacar que el ser $g(w)$ una delta de Dirac nos indica que los fonones solo tienen un modo de vibración; sin embargo, esto no es en absoluto sorprendente, pues esta es la hipótesis principal que hicimos en la construcción del modelo de Einstein.

Es interesante notar que en la primera publicación los autores no eran conscientes de se había probado que la función $\zeta(z)$ no se anulaba para $\text{Re}(z) = 1$, de manera que otro motivo para la introducción del parámetro s fue evitar que se anulara el denominador. Nótese que este resultado fue publicado tan solo 4 años antes de la primera publicación de (52). Este hecho sería posteriormente corregido en un segundo artículo donde obtendrían la distribución de la densidad de estados del YBCO (figura 2), que son las siglas dadas a $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$. En este artículo también comentan lo difícil que supondría realizarlo mediante el método de Chen (53) debido a que usa una cantidad infinita de transformadas inversas de Laplace frente a la única transformada de Fourier necesaria con la fórmula (52).

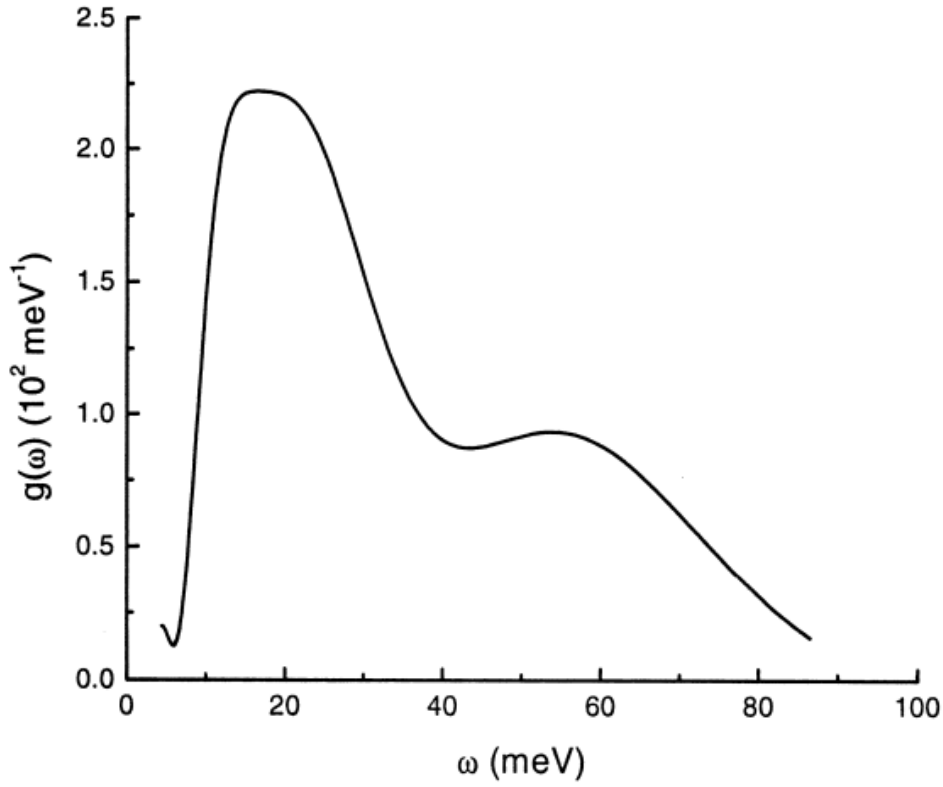


Figura 2: Densidad de estados del YBCO obtenida a partir de (52)(usando el calor específico experimental)[9].

Como nota histórica, Montroll descubrió un caso particular de (52), en la que realizó los cálculos para $s = 1$. En la primera publicación de la fórmula de inversión[10], los autores usaron como motivación para el desarrollo de su teoría la falta de un resultado que diera la solución exacta al espectro de los fonones, lo que nos lleva a concluir a que en su primer estudio no eran conscientes del trabajo realizado por Montroll. En su posterior publicación, darían crédito a este trabajo y a dos mas, pero notando que podrían tener problema de convergencia para dimensiones bajas ($D \leq 1$).

4.4. Física Clásica

En el año 2005 Bunimovich y Dettmann con el objetivo de obtener de mayor información sobre el comportamiento de un sistema cerrado; se plantearon estudiar un tal sistema con muchos agujeros haciendo tender el tamaño de estos a 0. Anteriormente[1], Bauer y Bertsch se habían planteado el estudio de un billar rectangular con un pequeño agujero, donde tras hacer simulaciones con 10^6 partículas, encontraron que decaía como una ley de potencia; es decir:

$$\frac{dN}{dt}(t) = At^{-B} \quad t \gg 1.$$

donde A y B son constantes. Por este motivo, primero consideraron cuanto tardaría en escapar una partícula puntual que viaja a velocidad 1 que está rebotando en un billar circular de radio unidad y presenta dos agujeros de tamaño ϵ en la circunferencia de radio 1 separados un ángulo θ . Sin embargo, tras estudiar el comportamiento de la probabilidad de escape de una partícula ya sea con uno o dos agujeros Bunimovich y Dettmann se encontraron una forma de caracterizar la hipótesis de Riemann.

Lo primero que hicieron fue caracterizar el movimiento de una sola partícula. Así, usaron dos ángulos para describir la posición de la partícula en cada colisión con la circunferencia:

1. $\beta \in]-\pi, \pi]$ es el ángulo de las coordenadas polares tomando como origen el centro del billar y tomado módulo 2π .
2. $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es el ángulo entre la partícula incidente con la circunferencia unidad y su trayectoria tras rebotar tomado módulo π .

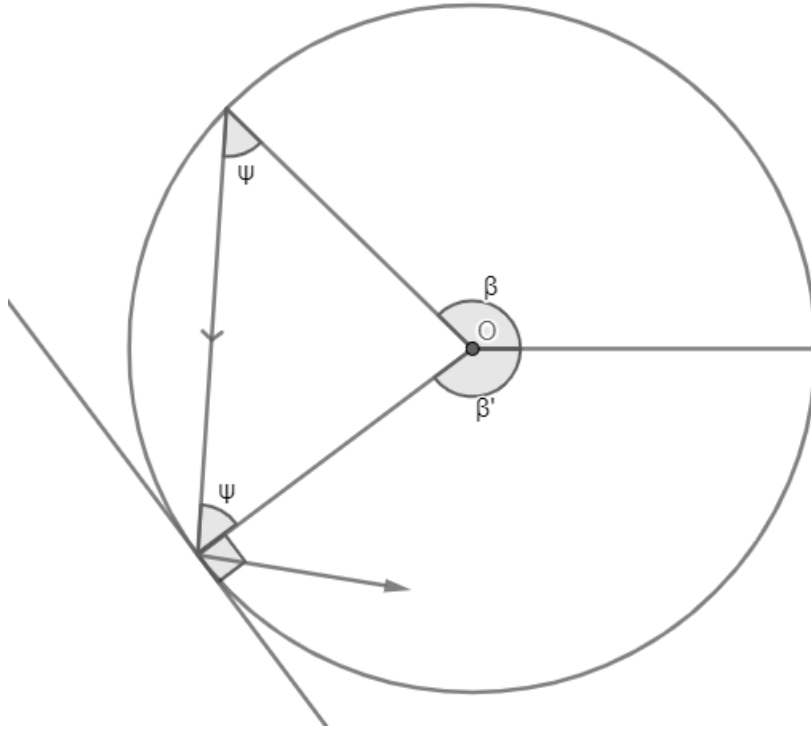


Figura 3: Representación esquemática de los ángulos usados para describir la posición de la partícula

De esta manera, tras cada rebote en la pared del billar los ángulos cambian como

$$(\beta, \psi) \rightarrow (\beta + \pi - 2\psi, \psi), \quad (54)$$

que se puede deducir fácilmente con la ayuda de la figura 3. El ángulo ψ no cambia debido a que consideramos el choque como una reflexión, de manera que calculando la recta tangente al billar, el ángulo de reflexión es el ángulo formado por la trayectoria de incidencia y la recta perpendicular a la recta tangente al billar en el punto de impacto; pero al ser esta última recta la unida con el centro, tenemos que este ángulo de reflexión coincide con ψ' . Por otro lado, el ángulo β' es simplemente $\beta + \pi - 2\psi$ (módulo 2π), pues los ángulos de un triángulo suman π .

El estudio planteado considerado busca averiguar la probabilidad de que a tiempo t una partícula no haya escapado, lo cual notaremos como $P(t, \theta, \epsilon)$. Para ello, se preguntaron que ángulos iniciales producían órbitas periódicas que no logran escapar del billar. Usando la transformación (54) se obtiene fácilmente que las únicas órbitas periódicas son las que tienen $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{p}{q}\pi$ donde $p, q \in \mathbb{N}$ son coprimos con $p < q$. Evidentemente, otra condición necesaria para que estas órbitas no escapen es que en ninguno de sus impactos con las paredes del billar salgan por los agujeros.

Por otro lado, es importante notar que si una órbita no es periódica, entonces es densa en la la circunferencia unidad, y por tanto se escapará para tiempo suficientemente grande. Esto es debido a que tras n impactos con las paredes del billar, se tiene que al menos dos impactos están a una distancia menor o igual a $\frac{2\pi}{n}$. Repitiendo el periodo entre estos dos impactos $(n-1)$ veces mas, podemos obtener n impactos en la circunferencia con distancias consecutivas menor o igual $\frac{2\pi}{n}$. Aplicando este método, cualquier punto de la circunferencia se encuentra a una distancia menor o igual a $\frac{\pi}{n}$ de estos impactos.

Usando como medida de probabilidad $dP = \frac{\cos \psi}{4\pi} d\psi d\beta$ lograron acotar la probabilidad de no haber escapado a tiempo t . Sin embargo, multiplicando por t y tomando límite $t \rightarrow \infty$ consiguieron obtener una expresión manejable:

$$P_{\infty}(\theta, \epsilon) = \lim_{t \rightarrow \infty} tP(t, \theta, \epsilon) = \frac{1}{8\pi} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{2\pi}{\epsilon} \rfloor} n(\phi(n) - \mu(n)) \left(g\left(\frac{2\pi}{n} - \theta'_n - \epsilon\right) + g(\theta'_n - \epsilon) \right),$$

donde $\theta \equiv \theta'_n \bmod(\frac{2\pi}{n})$, ϕ es la función de phi de Euler y μ es la función de Möbius y:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

A continuación, tomaron $\theta = 2\pi \frac{r}{q}$ con r y q coprimos. De esta manera, haciendo uso de la transformada de Mellin de P_{∞} respecto a ϵ , fueron capaces de obtener una nueva expresión para P_{∞} que hace uso de una versión generalizada de la función zeta de Riemann llamada función L de Dirichlet. Por ejemplo, para un solo agujero; es decir, $r = 0, q = 1$ obtuvieron que la transformada de Mellin de

P_∞ es:

$$\tilde{P}_\infty(s) = \frac{(2\pi)^{s+1}(\zeta(s) - 1)}{2s(s+1)(s+2)\zeta(s+1)}$$

Nótese que si se verificase la hipótesis de Riemann, $\tilde{P}_\infty(s)$ solo tendría polos en $s = 0, 2, s \in \{1, -1, -3, \dots\}$ y en $\text{Re}(s) = -\frac{1}{2}$. Escogiendo caminos adecuados para el cálculo de la transformada inversa de Mellin y haciendo uso de que $\tilde{P}_\infty(s)$ tiene a $\zeta(s+1)$ en el denominador, fueron capaces de caracterizar la hipótesis de Riemann mediante la siguiente igualdad:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon^{\alpha - \frac{1}{2}} \left(tP(t, \epsilon) - \frac{2}{\epsilon} \right) = 0 \quad \forall \alpha > 0. \quad (55)$$

donde $P(t, \epsilon)$ es la probabilidad de no escapar del billar a tiempo t habiendo un solo agujero de tamaño ϵ . De manera similar, notando la probabilidad de no escapar a tiempo t para 2 agujeros diametralmente opuestos de tamaño ϵ como $P_2(t, \epsilon)$, probaron que la hipótesis de Riemann es equivalente a:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon^{\alpha - \frac{1}{2}} t(P(t, \epsilon) - 2P_2(t, \epsilon)) = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

4.5. Mecánica Cuántica

En 1914 Landau le preguntó a Pólya si conocía alguna razón física por la que la hipótesis de Riemann debía ser cierta. Este le contestó que: “sería cierta si los ceros no triviales estuvieran tan conectados a un problema físico que la hipótesis de Riemann fuera equivalente a que todos los autovalores del sistema físico fueran reales” [21]. Esta fue la primera formulación de la conocida como conjetura de Hilbert-Pólya.

La conjetura de Hilbert-Pólya puede interpretarse como que, asumiendo la validez de la hipótesis de Riemann, entonces debe existir un operador \hat{H} hermítico cuyos autovalores E_n sean la parte imaginaria de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann, que en tal caso deberían ser de la forma $\frac{1}{2} + iE_n$. Esto viene motivado porque los posibles valores observables en la mecánica cuántica vienen dados por los autovalores de operadores hermíticos, y por la naturaleza de estos operadores, sus autovalores son reales.

En 1973 Montgomery estudió la distribución de los zeros de la función $\zeta(z)$ asumiendo que la hipótesis de Riemann era cierta. Así, ordenando los ceros no triviales como $\rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ estudio la distribución de $\gamma_i - \gamma_j$ con $i, j \in \mathbb{N}$. Durante este estudio demostró que existen dos constantes A, B tal

que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \left(\frac{\log(\gamma_n)}{2\pi} \right) &\leq A < 1 \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \left(\frac{\log(\gamma_n)}{2\pi} \right) &\geq B > 1 \end{aligned}$$

Aunque este resultado es un buen acercamiento al comportamiento de los ceros, da un paso mas conjeturando la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann:

$$\begin{aligned} |\{(\gamma, \gamma') : 0 < \gamma, \gamma' \leq T, \frac{2\pi\alpha}{\log T} \leq \gamma - \gamma' \leq \frac{2\pi\beta}{\log T}\}| &\sim_{T \rightarrow \infty} \\ &\sim_{T \rightarrow \infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} 1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 dx + \delta([\alpha, \beta]) \right) \frac{T}{2\pi} \log T \end{aligned} \quad (56)$$

donde

$$\delta([\alpha, \beta]) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{si } 0 \notin [\alpha, \beta] \end{cases}.$$

Esta conjetura es conocida como la conjetura de correlación de pares de Montgomery, pues se dice que $1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2$ es la función de correlación de pares de los ceros de la zeta de Riemann. Esto tiene una gran relevancia, pues como señaló F.J.Dyson, esta es la función de correlación de los autovalores de matrices complejas hermíticas para dimensiones suficientes grandes, cuyo estudio estadístico recibe el nombre de GUE (Gaussian Unitary Ensemble). Por tanto, esto aumenta la plausibilidad de que se pueda construir un operador \hat{H} siguiendo las ideas de la conjetura de Hilbert-Pólya.

Veamos brevemente la relevancia de esta expresión reescribiéndola en términos de una “distancia normalizada” entre los ceros de la función zeta de Riemann:

$$\delta_n = (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \frac{\log\left(\frac{\gamma_n}{2\pi}\right)}{2\pi},$$

que tiene la importante característica de que tienen media 1 en el sentido de que

$$\frac{1}{M} \sum_{n=N}^{N+M-1} \delta_n = 1 + O\left(\frac{1}{M} \log(NM)\right), \quad (57)$$

la cual hemos representado en la figura 4 tomando $N = 1$ variando M . Como se puede ver, se aproxima muy rápidamente a 1, estando por encima de 0,99 para $M = 200$.

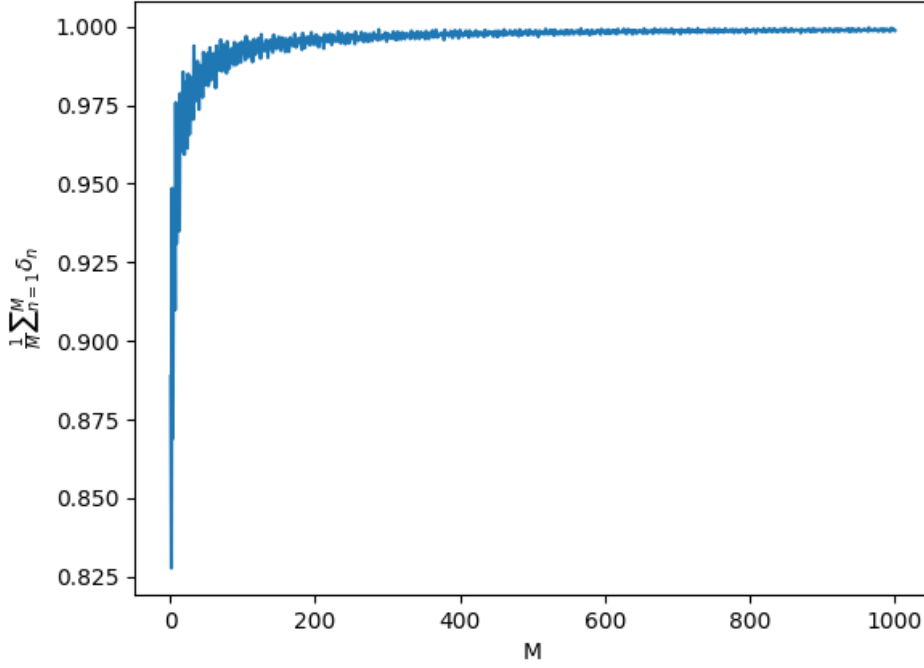


Figura 4: Media de las distancias normalizadas tomando $N=1$.

Haciendo uso de estas distancias normalizadas, en 1987 Odlyzko tomando $0 < \alpha, \beta$ reformuló la distribución originalmente dada (56) como:

$$\frac{1}{N} |\{(n, k) : 1 \leq n \leq N, \delta_n + \dots \delta_{n+k} \in [\alpha, \beta]\}| \sim_{N \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} 1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 dx. \quad (58)$$

Esta versión se puede interpretar como que en media las distancias normalizadas entre cualesquiera dos ceros, siguen una distribución $1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2$. Podemos verificar esta expresión tomando $\alpha = x$ y $\beta = x + \epsilon$ con $\epsilon \rightarrow 0$ de manera que

$$\frac{1}{N\epsilon} |\{(n, k) : 1 \leq n \leq N, \delta_n + \dots \delta_{n+k} \in [x, x + \epsilon]\}| \sim_{N \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2.$$

Así, con el fin de comprobarlo numéricamente, hemos tomado ambas funciones y las hemos representado para $x \in [0, 3]$ y $N = 10^6$ en la figura 5.

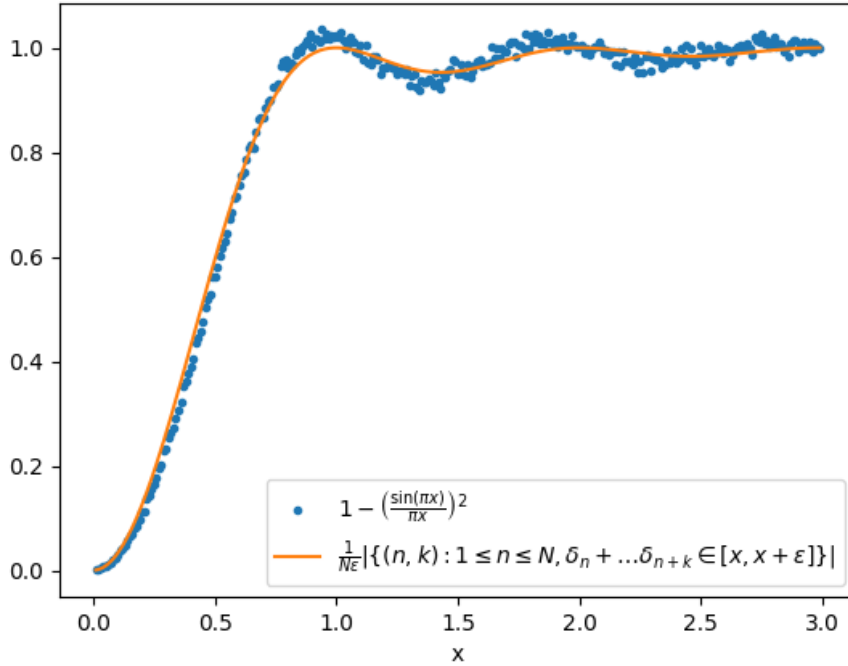


Figura 5: Distribución de los ceros de la función zeta de Riemann mediante la Conjetura de Montgomery para $N = 10^6$.

De esta manera, acaba conjeturando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \left(\frac{\log(\gamma_n)}{2\pi} \right) = 0$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \left(\frac{\log(\gamma_n)}{2\pi} \right) = \infty$$

Es interesante notar que el estudio de estas distribuciones no acaba aquí, sino que Odlyzko propuso una generalización de la conjetura (58) a:

$$\frac{1}{M} |\{(n, k) : N+1 \leq n \leq N+M, \delta_n + \dots \delta_{n+k} \in [\alpha, \beta]\}| \sim_{N \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} 1 - \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 dx.$$

Incluso tras generalizar esta expresión hizo uso de los conocimientos de la conexión con la estadística de GUE para proporcionar una distribución asintótica para el caso en el que $k = 0$. Además, todas estas predicciones las apoyó con cálculos numéricos tomando $N = 10^{12}$.

Tras descubrir el comportamiento de la distribución de los ceros de la zeta de Riemann, en 1985 se estudiaron tanto de manera numérica como teórica que hamiltonianos podían tener tal distribución. De esta manera, si un hamiltoniano tiene límite clásico con un espectro de energía discreto con la distribución GUE;

entonces, tienen órbitas clásicas caóticas y además sin simetría de inversión temporal.

Estas propiedades fueron descubiertas por Berry en 1986, pero no sería hasta 1999 cuando M.V. Berry y J.P. Keating, que incitados por Connes, escribirían otro artículo en el que proporcionaban razones que sugerían que el límite clásico de dicho hamiltoniano debería ser de la forma $H = xp$. A lo largo de este artículo resumieron propiedades que se esperaba que tuviera el hamiltoniano \hat{H} y por tanto su límite clásico H , acumulando un total de 9 propiedades. De estas propiedades xp vieron que verificaba al menos 6 de ellas, pero vulneraba parcialmente una de las afirmaciones.

En el año 2017 Carl M. Bender, Dorje C. Brody, Markus P. Müller propusieron el hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{1 - e^{-i\hat{p}}}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})(1 - e^{-i\hat{p}}),$$

el cual presenta las siguientes propiedades:

1. Satisface formalmente las condiciones de la conjetura de Hilbert-Pólya en el sentido de que si las autofunciones satisfacen $(\psi_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N})$, entonces, los autovalores del hamiltoniano $\{E_n\}$ satisfacen que $\frac{1}{2}(1 - iE_n)$ es un cero no trivial de la función zeta de Riemann.
2. Se satisface la conjetura de Berry-Keating, pues se reduce a $H = 2xp$ en el límite clásico.
3. No es hermítico, aunque $i\hat{H}$ si es PT-simétrico en el sentido de que sus autovalores son reales o se encuentran en parejas complejo-conjugadas. Además, si todos sus autovalores se encuentran en parejas complejo-conjugadas, entonces la hipótesis de Riemann es cierta.
4. Aunque no es hermítico, se puede tomar un producto escalar en el que si lo sea sobre el espacio de sus autofunciones.
5. Si la hipótesis de Riemann es cierta, entonces sus autovalores son no degenerados. En caso contrario; es decir, si existe alguna raíz z_0 de la función zeta tal que $\text{Re}(z_0) \neq \frac{1}{2}$; entonces, sus autovalores correspondientes son degenerados.

Se puede comprobar que las autofunciones del operador propuesto \hat{H} son $\psi_z(x) = -\zeta(z, x+1)$ donde

$$\zeta(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \quad x > 0, \text{Re}(z) > 1$$

es la función zeta de Hurwitz, la cual, al igual que la función zeta de Riemann se puede extender analíticamente a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Los autovalores de estas funciones son

$i(2z - 1)$. Notando que $\zeta(z, 1) = \zeta(z)$ implicando que tomando como condición de contorno que $\psi_z(0) = 0$, tengamos que

$$0 = \psi_z(0) = -\zeta(z, 1) = \zeta(z).$$

Por tanto, z debe ser un cero de la función zeta de Riemann, por lo que si se verificase la hipótesis de Riemann y además $z = \frac{1}{2} + i\gamma$ fuese un cero no trivial, tendríamos que el autovalor del Hamiltoniano sería -2γ . De esta manera verificamos la conjetura de Hilbert-Pólya.

Es importante destacar que el hamiltoniano presentado produce autofunciones que no son normalizables, y por tanto no corresponden a un sistema físico, pues no tendrían una interpretación probabilística.

5. Conclusiones

A lo largo de este TFG hemos cumplido plenamente con los objetivos planteados en la propuesta. Para ello, hemos presentado la función zeta de Riemann dando numerosas representaciones y propiedades. De esta manera, al estudiar sus ceros fuimos capaces de demostrar el teorema de los números primos, pero además, observamos que podemos determinar si un número es primo haciendo uso de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann. Por este motivo, conocer la distribución de los ceros no triviales es equivalente a conocer la distribución de los primos. Con esta idea en mente, surge la hipótesis de Riemann, que postula que los ceros no triviales se encuentran sobre la línea $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$.

Posteriormente, hemos estudiado numerosos modelos en los que la función zeta de Riemann toma un papel destacable en ramas tan distintas de la física como son la mecánica cuántica, la física estadística, la física de la materia condensada y la mecánica clásica.

Para comenzar, hemos estudiado la primera aparición de la función zeta de Riemann en la física. Como hemos visto en la sección 4.1, la función zeta de Riemann surgió de manera natural en la resolución de la Catástrofe Ultravioleta, dando así lugar al nacimiento de la mecánica cuántica. De nuevo, en la física estadística, usando la idea de que la energía esta cuantizada, volvió a surgir la función zeta de Riemann de forma natural en la determinación de la finitud del número de partículas. Además, hemos observado como se pueden construir gases en los que la función zeta de Riemann toma un papel principal tomando unos niveles de energías adecuados, tanto para gases de bosones como de fermiones. Es interesante notar, que no todos los modelos hacen uso de algún parámetro con un conjunto infinito numerable de posibles valores; como por ejemplo, en la fórmula de inversión del calor específico para la obtención del espectro de fono-

nes de la sección 4.3.

Para concluir, cabe destacar los modelos que tratan de proporcionar evidencias acerca de la veracidad de la hipótesis de Riemann haciendo uso de la física. Así, tanto para la mecánica clásica (sección 4.4) como para la mecánica cuántica (sección 4.5) hemos estudiado modelos que no solo hacen uso de la función zeta de Riemann, sino que logran caracterizar la hipótesis de Riemann.

Referencias

- [1] W. Bauer y G.F. Bertsch, Decay of ordered and chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.*, 65, (1990), 2213-2216.
- [2] C. M. Bender, D. C. Brody, M. P. Müller, Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function, *Phys. Rev. Lett.*, 118, (2017), 130201.
- [3] M. V. Berry, Riemann's Zeta function: a model for quantum chaos?, *LNP*, 263, (1986), 1-17.
- [4] M. V. Berry y J. P. Keating, $H = xp$ and the Riemann zeros, *Supersymmetry and Trace Formulae*, NATO ASI Series, 370, (1999), 355-367.
- [5] E. Carneiro, M. B. Milinovich y K. Soundararajan, Fourier optimization and prime gaps, *Comment. Math. Helv.* 94, (2019), 533-568
- [6] L. A. Bunimovich y C. P. Dettmann, Open Circular Billiards and the Riemann Hypothesis, *Phys. Rev. Lett.*, 94, (2005), 100201-1:4
- [7] N. Chen, Modified Möbius inverse formula and its applications in physics, *Phys. Rev. Lett.* 64, (1990), 1193-1195.
- [8] J. B. Conway, Functions of one complex variable I, *Springer-Verlag*, (1978).
- [9] X. Dai, W. Tao, M. GuiCun, J. Dai, "A concrete realization of specific heat-phonon spectrum inversion for YBCO", *Phys Lett. A*, 264, (1999), 68-73
- [10] X. Dai, X. Xu y J. Dai, On a specific heat-phonon spectrum inversion problem. Exact solution, unique existence theorem and Riemann hypothesis, *Phys. Lett. A*, 147, (1990), 445-449.
- [11] H. M. Edwards, Riemann's zeta function, *Academic Press*, (1974).
- [12] P. Erdős, On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 35, (1949), 373-384.
- [13] G. H. Hardy y E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, *Clarendon Press*, (1960).

- [14] B. Julia, Statistical Theory of Numbers, *Springer Proceedings in Physics*, 47, (1990), 276-293
- [15] D. Ming, T. Wen, J. Dai, W. E. Evenson, y X. Dai, A unified solution of the specific-heat-phonon spectrum inversion problem, 2003, *EPL*, 61, (2003), 723-728.
- [16] L. J. Lander, T. R. Parkin, Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers, *Bull. Am. Math. Soc.*, 72, (1966), 1079-1079.
- [17] H.L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, *Proc. Symp. Pure Math.*, 24, (1973), 181-193.
- [18] E. W. Montroll, Frequency spectrum of crystalline solids, *Chem. Phys*, 10, (1942), 218-229.
- [19] L. Schoenfeld, Sharper Bounds for the Chebyshev Functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II, *Math. Comput.*, 30, (1976), 337-360.
- [20] A. M. Odlyzko, On the distribution of Spacings bewtween zeros of the zeta function, *Math. Comput.*, 48, (1987), 273-308
- [21] A. Odlyzko, <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/polya/index.html>
- [22] S. J. Patterson, An introduction to the theory of the Riemann zeta-function, *Cambridge University Press*, (1988).
- [23] B. Riffer-Reinert, The zeta function and its relation to the prime number theorem, *University of Chicago Summer VIGRE Program*, (2011).
- [24] D. Schumayer, D. A. W. Hutchinson, Physics of the Riemann Hypothesis, *Rev. Mod. Phys.*, 83, (2011), 307-330.
- [25] A. Selberg, An elementary proof of the Prime-Number Theorem, *Ann. Math.*, 50, (1949), 305-313.
- [26] A. Sutherland. 18.785 Number Theory I. *Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare*, (2016).
- [27] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, *The Clarendon Press, Oxford University Press*, (1986).
- [28] T. Trudgian, Updating the error term in the prime number theorem, *Ramanujan J.*, 39, (2016), 225-234.
- [29] C. Weiss, S. Page, M. Holthaus, Factorising numbers with a Bose-Einstein condensate *Physica A*, 341, (2004), 586-606.
- [30] M. Wolf, Will a physicist prove the Riemann hypothesis?, *Rep. Prog. Phys.*, 83, (2020), 036001.