关于晶体双折射问题的讨论

2025 年 1 月 22 日

在一般绝缘无磁性线性电介质中麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

此外一般的线性本构方程可以表示为

$$\boldsymbol{D} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} \tag{2}$$

其中$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}}$必须是一个对称张量。可以考虑线性介质中的麦克斯韦应力张量

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}\right) \overleftrightarrow{I} - \overleftrightarrow{\left(\boldsymbol{DE} + \boldsymbol{BH}\right)} \tag{3}$$

在一般的定态电介质问题中任意一个区域的角动量是守恒的，这个时候要求对任意区域Ω

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= -\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{r} \times \left(\mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}\right) && (4) \\ &= -e_i \iint_{\partial\Omega} \epsilon_{ijk} r_j \mathrm{d}S_l \sigma_{lk} && (5) \\ &= -e_i \epsilon_{ijk} \iiint_{\Omega} \mathrm{d}^3 x \partial_l \left(r_j \sigma_{lk}\right) && (6) \\ &= -e_i \epsilon_{ijk} \iiint_{\Omega} \mathrm{d}^3 x \sigma_{jk} - e_i \epsilon_{ijk} r_j \iint_{\partial\Omega} \mathrm{d}S_l \sigma_{lk} && (7) \\ &= 0 && (8) \end{aligned}$$

第二项积分其实是区域受力分力，它等于0，所以第一项整体为0，也就是

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}^3 x (\sigma_{jk} - \sigma_{kj}) = 0 \tag{9}$$

由连续函数的界值性得到应力张量对称，因此$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}}$也对称，它有六个独立分量。

一般情况下张量与坐标系的选取有关，为了方便起见，假设主平面与介质界面垂直，并直接把光轴方向取为z轴，那么介电张量被对角化

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

现在已经能够把广义的折射定律推导出来。很显然o光偏振方向垂直于主平面，满足经典折射定律。现在假设入射光是p光，容易推出

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\right) - \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{E} = -\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{11}$$

对定态光波可直接作替换

$$\boldsymbol{\nabla} \to \mathrm{i}\boldsymbol{k} \tag{12}$$

即

$$\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{E} - \left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{k} = \mu_0\omega^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{E} \tag{13}$$

将上式展开得到方程组

$$\begin{bmatrix} \mu_0\omega^2\varepsilon_1 - k_z^2 & k_xk_z \\ k_xk_z & \mu_0\omega^2\varepsilon_2 - k_x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

左端行列式为0，直接解得

$$n_N(\theta) = \frac{n_on_e}{\sqrt{n_e^2\cos^2\theta + n_o^2\sin^2\theta}} \tag{15}$$

其中

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e_z}}{|\boldsymbol{k}|} \tag{16}$$

然后作一些更一般的讨论。假设仍然恰当选取坐标系使介电张量对角化，从(13)式出发经过计算可以得到菲涅尔方程

$$\frac{k_x^2}{\dfrac{1}{n_N^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_1}} + \frac{k_y^2}{\dfrac{1}{n_N^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_2}} + \frac{k_z^2}{\dfrac{1}{n_N^2} - \dfrac{1}{\varepsilon_3}} = 0 \tag{17}$$

结合相位边界条件可以解出波矢，带回(13)式结合电磁场边界条件可以解出电磁场强度。可以预想解出的各个模式的电场本征矢相互正交，因为线性介质中叠加原理仍成立，而这些模式的波速各不相同。即使相同，也可以采用施密特正交化方法使其全部正交。