Anfangsrandwertproblem der anisothermen, nichtlinearen, gekoppelten Thermoelastodynamik in materieller Beschreibung

Für das Anfangsrandwertproblem abbgebildet in Abb. 8.2 besteht der Rand ∂B_0 aus einem thermischen und einem mechanischen

$$\partial B_0^{t,d} \cup \partial B_0^{t,n} = \partial B_0 = \partial B_0^{m,d} \cup \partial B_0^{m,n}, \quad \partial B_0^{t,d} \cap B_0^{t,n} = \emptyset = \partial B_0^{m,d} \cap B_0^{m,n}$$

Dirichlet-Rand $\partial B_0^{t,d}$ mit vorgegebener Temperatur $\bar{\theta}$ und $\partial B_0^{m,d}$ mit vorgegebener Verschiebung $\bar{\varphi}$ sowie einem thermischen und mechanischen Neumann-Rand $\partial B_0^{t,n}$ mit vorgegebenen Wärmefluss \bar{H} und $\partial B_0^{m,n}$ mit vorgegebenen Randspannungsvektor

Bei Robin-Randbedingungen hängt $ar{H}$ von der Temperatur heta des Körpers ab. Über isolierte Ränder wird keine Wärme übertragen (thermische Neumann-RB mit $\bar{H}=0$). Das Anfangsrandwertproblem wird dann mit folgendem Gleichungssatz vollständig

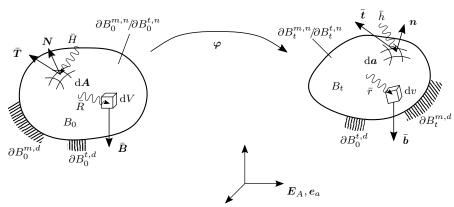


Abbildung 8.2: Anfangsrandwertproblem der nichtlinearen gekoppelten Thermoelastodynamik in materieller Beschreibung

beschrieben

Dirichlet RBen:

Neumann RBen:

Bilanzgleichungen:
$$\rho_0(X,t) \ddot{\varphi}(X,t) = \text{Div}(P(F)) + \bar{B}(X,t)$$
 in B_0 (lokale Impulsbilanz) $\theta \dot{s_0} = -\text{Div}(Q) + R$ in B_0 (lokale (reduzierte) Energiebilanz)

(Entropiedichte)

(Fourier-Gesetz)

Kinematik:
$$F = \frac{\partial \varphi}{\partial X}, C = F^{\mathrm{T}}F, E = \frac{1}{2}(C - I)$$

$$V = \dot{\varphi} = \sqrt{\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{T}}$$

T, ferner dürfen sich die Ränder nicht überlappen, folglich gilt

$$P = \frac{\partial \Psi_0(F, \theta)}{\partial F}, S = \frac{\partial \Psi_0(E, \theta)}{\partial E} = 2\frac{\partial \Psi_0(C, \theta)}{\partial C}$$

Konstitutive Beziehungen:
$$P = \frac{\partial \Psi_0(F, \theta)}{\partial F}$$
, $S = \frac{\partial \Psi_0(E, \theta)}{\partial E} = 2\frac{\partial \Psi_0(F, \theta)}{\partial C}$

$$oldsymbol{F} = rac{\partial oldsymbol{F}}{\partial oldsymbol{F}}, \ oldsymbol{S} = rac{\partial oldsymbol{E}}{\partial oldsymbol{C}} = 2rac{\partial oldsymbol{C}}{\partial oldsymbol{C}}$$

$$\partial F$$
 ∂E ∂C $s_0 = -\partial_{\theta} \Psi_0$

$$s_0 = -\partial_ heta \Psi_0$$

$$s_0 = -\partial_{\theta} \Psi_0$$

 $Q = -k_0 C^{-1} \operatorname{Grad}(\theta)$

$$s_0 = -c_\theta \Psi_0$$

 $Q = -k_0 C^{-1} \operatorname{Grad}(\theta)$

$$Q = -k_0 C^{-1} \operatorname{Grad}(\theta)$$

$$Q = -k_0 C^{-1} \operatorname{Grad}(\theta)$$

$$Q = -k_0 C^{-1} \operatorname{Grad}(\theta)$$
$$\varphi(X, t) = \bar{\varphi}(X, t)$$

$$egin{aligned} oldsymbol{Q} &= -k_0 oldsymbol{C}^{-1} \operatorname{Grad}(heta) \ & & \ arphi(oldsymbol{X},t) &= ar{oldsymbol{arphi}}(oldsymbol{X},t) \end{aligned}$$

$$\begin{split} \varphi(\boldsymbol{X},t) &= \bar{\varphi}(\boldsymbol{X},t) \\ \theta(\boldsymbol{X},t) &= \bar{\theta}(\boldsymbol{X},t) \end{split} \qquad \text{auf } \partial B_0^{m,d} \\ \text{auf } \partial B_0^{t,d} \end{split}$$

$$\begin{split} \theta(\boldsymbol{X},t) &= \bar{\theta}(\boldsymbol{X},t) & \text{auf } \partial B_0^{t,d} \\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},t) \, \boldsymbol{N} &= \bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X},t) & \text{auf } \partial B_0^{m,n} \end{split}$$

$$egin{align} P(X,t) \, N &= ar{T}(X,t) & ext{auf } \partial B_0^m \ Q(X,t) \cdot N &= ar{H}(X,t) & ext{auf } \partial B_0^{t, au} \ \end{pmatrix}$$

$$Q(X,t) \cdot N = \bar{H}(X,t)$$
 and $\partial B_0^{t,n}$

Anfangsbedingungen:
$$\varphi(X, t = 0) = \varphi_0$$
 in B_0 $\dot{\varphi}(X, t = 0) = \dot{\varphi}_0$ in B_0

$$\dot{oldsymbol{arphi}}(oldsymbol{X},t=0)=\dot{oldsymbol{arphi}}_0$$
 in B_0

$$\dot{\varphi}(X, t = 0) = \dot{\varphi}_0$$
 in B_0
$$\theta(X, t = 0) = \theta_0$$
 in B_0

leitfähigkeit ($k_0 \ge 0$ damit Wärme von warm nach kalt fließt)

Das Fourier-Gesetz verknüpft die Temperatur über ein Stoffgesetz mit dem Wärmeflussvektor. Der Faktor
$$k_0$$
 ist die Wärme-