## Anfangsrandwertproblem der anisothermen, nichtlinearen, gekoppelten Thermoelastodynamik in materieller Beschreibung

Für das Anfangsrandwertproblem abbgebildet in Abb. 8.2 besteht der Rand $\partial B_0$ aus einem thermischen und einem mechanischen Dirichlet-Rand $\partial B_0^{t,d}$ mit vorgegebener Temperatur $\bar{\theta}$ und $\partial B_0^{m,d}$ mit vorgegebener Verschiebung $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ sowie einem thermischen und mechanischen Neumann-Rand $\partial B_0^{t,n}$ mit vorgegebenen Wärmefluss $\bar{H}$ und $\partial B_0^{m,n}$ mit vorgegebenen Randspannungsvektor $\bar{\boldsymbol{T}}$, ferner dürfen sich die Ränder nicht überlappen, folglich gilt

$$\partial B_0^{t,d} \cup \partial B_0^{t,n} = \partial B_0 = \partial B_0^{m,d} \cup \partial B_0^{m,n}, \quad \partial B_0^{t,d} \cap B_0^{t,n} = \emptyset = \partial B_0^{m,d} \cap B_0^{m,n}$$

Bei Robin-Randbedingungen hängt $\bar{H}$ von der Temperatur $\theta$ des Körpers ab. Über isolierte Ränder wird keine Wärme übertragen (thermische Neumann-RB mit $\bar{H} = 0$). Das Anfangsrandwertproblem wird dann mit folgendem Gleichungssatz vollständig

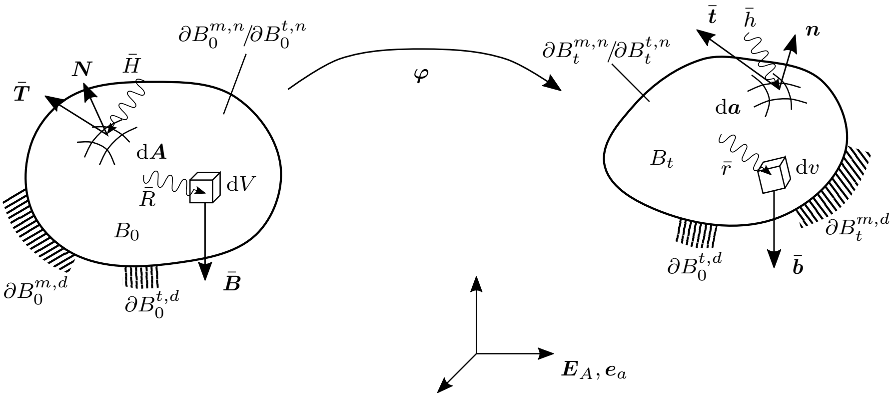


Abbildung 8.2: Anfangsrandwertproblem der nichtlinearen gekoppelten Thermoelastodynamik in materieller Beschreibung

beschrieben

| | | | |
|---|---|---|---|
| Bilanzgleichungen: | $\rho_0(\boldsymbol{X},t)\,\ddot{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{X},t) = \mathrm{Div}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F})) + \bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{X},t)$ | in $B_0$ | (lokale Impulsbilanz) |
| | $\theta \dot{s_0} = -\,\mathrm{Div}(\boldsymbol{Q}) + R$ | in $B_0$ | (lokale (reduzierte) Energiebilanz) |
| Kinematik: | $\boldsymbol{F} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{X}},\ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})$ | | |
| | $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \sqrt{F \cdot F^T}$ | | |
| Konstitutive Beziehungen: | $\boldsymbol{P} = \dfrac{\partial \Psi_0(\boldsymbol{F},\theta)}{\partial \boldsymbol{F}},\ \boldsymbol{S} = \dfrac{\partial \Psi_0(\boldsymbol{E},\theta)}{\partial \boldsymbol{E}} = 2\dfrac{\partial \Psi_0(\boldsymbol{C},\theta)}{\partial \boldsymbol{C}}$ | | |
| | $s_0 = -\partial_\theta \Psi_0$ | | (Entropiedichte) |
| | $\boldsymbol{Q} = -k_0 \boldsymbol{C}^{-1}\,\mathrm{Grad}(\theta)$ | | (Fourier-Gesetz) |
| Dirichlet RBen: | $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t) = \bar{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{X},t)$ | auf $\partial B_0^{m,d}$ | |
| | $\theta(\boldsymbol{X},t) = \bar{\theta}(\boldsymbol{X},t)$ | auf $\partial B_0^{t,d}$ | |
| Neumann RBen: | $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X},t)\,\boldsymbol{N} = \bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X},t)$ | auf $\partial B_0^{m,n}$ | |
| | $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X},t) \cdot \boldsymbol{N} = \bar{H}(\boldsymbol{X},t)$ | auf $\partial B_0^{t,n}$ | |
| Anfangsbedingungen: | $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t=0) = \boldsymbol{\varphi}_0$ | in $B_0$ | |
| | $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{X},t=0) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0$ | in $B_0$ | |
| | $\theta(\boldsymbol{X},t=0) = \theta_0$ | in $B_0$ | |

Das Fourier-Gesetz verknüpft die Temperatur über ein Stoffgesetz mit dem Wärmeflussvektor. Der Faktor $k_0$ ist die Wärmeleitfähigkeit ($k_0 \geq 0$ damit Wärme von warm nach kalt fließt)