Theoretische Bodenmechanik mit *Mathematica* Formelsammlung

Jonathan C. Walter, Jonas H. Konrad

14. August 2022

Diese Formelsammlung wurde im Sommersemester 2022 von Jonathan Walter und Jonas Konrad verfasst.
Kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Fehlerfreiheit.

Inhaltsverzeichnis

Todo list

1 Übersicht allgemeine Formeln/Umrechnungen

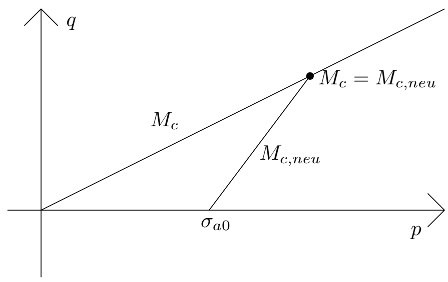
1.1 Allgemeine Annahmen/Gesetzmäßigkeiten

- Ablauf Spannungsverlauf:
  1. Boden mit vorhandenen Spannungen
  2. Nach Probeentnahme: $\sigma^{ges} = u + \sigma = 0$; σ unverändert
  3. Nach Einbau in Triax und schneller Belastung (undräniert): σ unverändert ; σ^{ges} = vorhandene Spannung + vorgegebener Wert ; $u = \sigma^{ges} - \sigma$
- Bei langsamer Scherung im Wasserbad (dräniert) baut sich kein Porenwasserdruck auf: $u = 0$
- $K_0 = 1$ statt $K_0 = 1 - \sin(\varphi)$ als legitime Annahme bei überkonsolidierten Boden

1.2 Allgemeine Formel für Klausuraufgaben

1. Bodenparameter γ, γ' und Kohäsion
   $e = \frac{w\gamma_s}{\gamma_w}$; w = Wassergehalt in %
   $\gamma' = \frac{(\gamma_s - \gamma_w)}{(1+e)}$ oder $\gamma' = \gamma - u$
   $\gamma = \gamma' + \gamma_w$
   C = Fläche oder Länge (3D/2D) $\cdot c_u$
   $OCR = \frac{\sigma_V}{\sigma}$; σ_V = Vorbelastungsspannung ; σ = effektive Spannung
   Bruchwinkel Abschätzung: $\vartheta = 45 - \frac{\varphi}{2}$
2. Bodenparameter mitteln
   Kohäsion: $\overline{c} = \frac{h_1 c_U + h_2 c_T}{\sum h_i}$
   Reibung: $\overline{\tan\varphi} = \frac{G_1 \tan(\varphi_U) + G_2 \tan(\varphi_T)}{G_1 + G_2}$
   Wichte: $\overline{\gamma} = \frac{G_1 + G_2}{\sum A_i}$
3. Effektive (Anfangs-)Vertikalspannung:
   $\sigma_{v0} = h_\gamma \cdot \gamma + (z - h_\gamma)\gamma' + h_c\gamma_w$; z = Tiefe der gesuchten Spannung
   Effektive (Anfangs-)Horizontalspannung:
   $\sigma_{h0} = K_0\sigma_v$
   Anfangsporenwasserdruck:
   $u_0 = (z - z_{GWSp}) \cdot \gamma_w$
   Gesamtspannung:
   Vertikal und Horizontal zu Spannung aus Erddruck Porenwasserdruck addieren
4. Dissipationsenergie Verformung Boden
   $E = R \cdot s$; s=Deformationstiefe ; R=[S.78-Bodenmechanik]; $E = m \cdot g \cdot h$
5. Winkler-Setzung
   $k_s = \frac{\sigma_0}{s}$
   Dabei gespeicherte Energie: $E^{el} = \frac{1}{2} \cdot B \cdot L \cdot k_s \left[\frac{R}{B \cdot L \cdot k}\right]^2$ (Bsp. Rechteckfundament)
6. Prandtl-Lösung: Streifenfundament auf c_u-Boden:
   $P = (2+\pi)c_u B$; P=Auflast; B=Auflastbreite; Alternativ: $p = (2+\pi)c_u$
   Doppelamplitude: $q^{ampl} = 2c_u^{ampl}$
7. Allgemeine Formel Triaxialversuch:
   Grundsätzlich gilt: triaxiale Kompression $\rightarrow M_C$ ist maßgebend
   triaxiale Extension $\rightarrow M_E$ ist maßgebend
   - $\dot{p}^{ges} = \frac{1}{3}(\dot{\sigma}_1^{ges} + 2\dot{\sigma}_3^{ges})$
   - $|\dot{q}| = |\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_3|$
   - $\dot{u} \approx B\dot{p}^{ges} + A\,|\dot{q}|$

- Δp und Δq berechnen: A und B bekannt, p, q, u ebenso:
  $\Delta p = (1-B)\frac{1}{3}\Delta q - A\Delta q$
  $q + \Delta q = M_c(p + \Delta p)$
  $$\boxed{\Leftrightarrow \Delta q = \frac{q - M_c p}{M_c\left(\frac{1}{3}(1-B)-1\right)-1}}$$
- Kohäsion aus A und B berechnen
  Berechnung:
  Bekannte Steigung aus $\varphi_s \rightarrow M_c = (6s)/(3-s)$
  $M_{c,neu}$ vorgehen:
  1. $M_{c,\text{vorläufig}} = \Delta_s(aus\varphi_s) \cdot A$
  2. $M_{c,neu} = \frac{\Delta_{s,\text{Zähler} \overset{!}{=} 1} - \Delta_{s,\text{Nenner}} \cdot B}{\Delta_{s,\text{Nenner}}}$
  3. Ab $p = \sigma_{a0}$ auftragen
  4. Schnittpunkt aus $M_c = M_{c,neu}$ berechnen.
  5. $c_u = \frac{q}{2}$



- Abschätzung maximale Schubspannung: $c_u = \tau_{\max} = \sigma_V \tan(\varphi)$
  σ_V aus Angabe Belastung Knick nehmen.
- Restscherfestigkeit: $\tau = \sigma \tan(\varphi_s)$; σ aus in-situ
- Winkel Gesamtscherfestigkeit: $\sin(\varphi_s) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$; mit effektiver Spannung berechnen!
- Undrainierte Schubsteifigkeit: $G = \frac{\Delta q}{3\Delta\epsilon_q}$
- Volumendehnung: $\epsilon_{vol} = \epsilon_1 + 2\epsilon_3$
- Deviatorische Dehnung: $\epsilon_q = \frac{2}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3)$
  $\rightarrow$ Bei undränierten Versuchen gilt: $\epsilon_{2(3)} = -\frac{\epsilon_1}{2}$

8. Anstieg Porenwasserdruck aus zyklischer Belastung: (nach Skempton)
   Ermittlung Parameter:
   $B = \frac{\Delta u}{\Delta p^{ges}}$; aus B-Test
   $\rightarrow$ B beschreibt Qualität der Sättigung. Perfekt gesättigte Triaxialproben: $B = 1$
   $A = \frac{\Delta u - B\Delta tr\sigma^{ges}}{\Delta q}$; σ_1 oder σ_3 steigen an
   $\Delta q = \Delta q_{1,2Ende} - \Delta q_{1,2Anfang}$
   $\Delta tr\sigma^{ges} = \Delta p = \frac{\sigma_1 + 2\cdot\sigma_3}{3}_{(Zustand1)} - \frac{\sigma_1 + 2\cdot\sigma_3}{3}_{(Zustand2)}$
   Für p^{ges} = const. $\rightarrow$ pro Zyklus $\Delta u = 2Aq^{ampl} = 2A(\Delta\sigma_v^{ges} - \Delta\sigma_h^{ges})$
   Für q = const. $\rightarrow$ pro Zyklus $\Delta u = B\Delta p^{ges}$

9. Konsolidierung - Dissipationszeit Porenwasserüberdruck
   Barotrope Steifigkeit: $E_s = \frac{\sigma_{v0}}{\kappa}$
   Konsolidierungsbeiwert: $c_v = \frac{kE_s}{\gamma_w}$
   Dimensionsloser Zeitfaktor: $T_v = \frac{c_v t}{H^2}$; t [s]; h [m]; H = Drainageweg Wasser ;
   Verfestigungsgrad: $\bar{\mu} \approx 2 \cdot \sqrt{T_v/\pi}$
   Konsolidierungsgrad: $\mu = \frac{1}{2}(3\bar{\mu} - 1)$; Faktor Verfestigung Boden nach t Sekunden aus T_v
   Aufgebauter Porenwasserdruck nach n Zyklen·Konsolidierungsgrad
   = Porenwasserdruck nach t·n Wartezeit; $(\Delta u \cdot n) \cdot \mu = \Delta u_{konsolidiert}$

10. Tresca Kiriterium
    $2c_u = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = (\sigma_{\max}^{ges} - \sigma_{\min}^{ges})$

11. Coulomb-Kriterium
    $(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})\sin(\varphi) + 2c\cos(\varphi)$
    oder
    $\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})\sin(\varphi) + 2c\cos(\varphi)$

12. Roscoe Invarianten (Druck p und Deviatorspannung q) ; ohne Wasserdruck!
    $p = \frac{\sigma_1 + 2\cdot\sigma_3}{3}$, Auch für Δp^{ges} verwenden.
    $q = \sigma_1 - \sigma_3 \widehat{=} 2 \cdot c_u$
    $M_C = \frac{q}{p} = \frac{6s}{3-s}$; $s = \sin(\varphi_s)$; η beschreibt Steigung Schergerade in p - q Diagramm
    $\rightarrow$ (dafür die gesamten Spannungen mit abgezogenen u_0 verwenden)

Daraus ergibt sich: $2c_u = \frac{6 \cdot \sin(\varphi)}{3-\sin(\varphi)} \cdot p$
Spannungspfad startet bei: $p_0 = \frac{1}{3}(1+2K_0)\sigma_0$; für $\sigma_v^{ges}, \sigma_h^{ges}$ durchführen.
Für Startpunkt der zyklischen Belastungen die effektive Spannung ($\sigma_v^{ges}, \sigma_h^{ges}$) im Boden benutzen)
A gibt Steigung von -p Sprung an, q^{ampl} die Höhe.

13. Krey-Tiedemann Modell:
    $c_u \approx \sigma'_{VB} \tan(\varphi_s)$
    $w(z) = \frac{\rho_w V_p}{\rho_s V_s} = e\frac{\rho_w}{\rho_s}$

14. Strömungskraftdichte und Porenwasserüberdruck
    Hydraulischer Gradient: $i = \frac{w}{k}$
    Gradient bei Δh des GWSp mit zwei versch. Schichten.
    $w = k_U i_U = k_T i_T$; $i_T = \frac{k_U}{k_T} L_T$; $i_U = \frac{\Delta h}{L_U + \frac{k_U}{k_T} L_T}$
    Strömungskraftdichte: $j = \gamma_w \cdot i$
    Gewicht mit Strömungskräfte (Auftrieb):$G = A_1 \cdot (\gamma' - j_1) + A_2 \cdot (\gamma' - j_2)$
    Porenwasserüberdruck auf Körper (in Mittelpunkt der Gleitfläche): $u^+ = i\gamma_w x_1$

15. Kompressionsdiagramm auswerten (Abszisse: σ ; Ordinate: 1+e Punkt 17 [siehe 1.])
    $\kappa_B = \log(\frac{(1+e)_1}{(1+e)_2}) = -\kappa \log(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}) \rightarrow$ Auf oberen flachen Teil durchführen
    $\lambda_B = \log(\frac{(1+e)_1}{(1+e)_2}) = -\lambda \log(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}) \rightarrow$ Auf steilen Teil durchführen
    Für Punkt z den Wert e berechnen; σ aus Diagramm ablesen; $c_u = \sigma_{VB} \tan(\varphi_s)$
    Analytische Lösung: $ln[e/e_{e0}] = \lambda_B \ln[\sigma_{VB}/\sigma_{e0}]$; $ln[e/e(z)] = \kappa_B \ln[\sigma_{VB}/\sigma(z)]$

16. Kräftegleichgewicht

    (a) Mit Strömungskraft
        Eigengewicht: $G = \gamma' \cdot V$
        Strömungskraft: $F_s = j \cdot V$

    (b) Mit Porenwasserdrücken
        Eigengewicht: $G = \gamma \cdot V$
        Hydrostatischer Anteil der Porenwasserdrücke: $U = \gamma_w \cdot V$
        Porenwasserüberdrücke: (Summe über Ränder) $U^+ = j \cdot V$

    (c) Für beide Fälle zu verwenden:
        Reaktionskräfte: Q
        Zwischenkräfte: E_{12}
        Äußere Belastungen

17. Mohr'scher Spannungskreis

Allgemeine Formeln:
$\sigma_{11} = x \cdot \gamma' \cdot \beta$
$\tau = \sigma_{11} \cdot \frac{\sigma}{\sigma'} \cdot \tan(\beta)$

Ablauf Krey-Tiedemann:

(a) φ_s auftragen

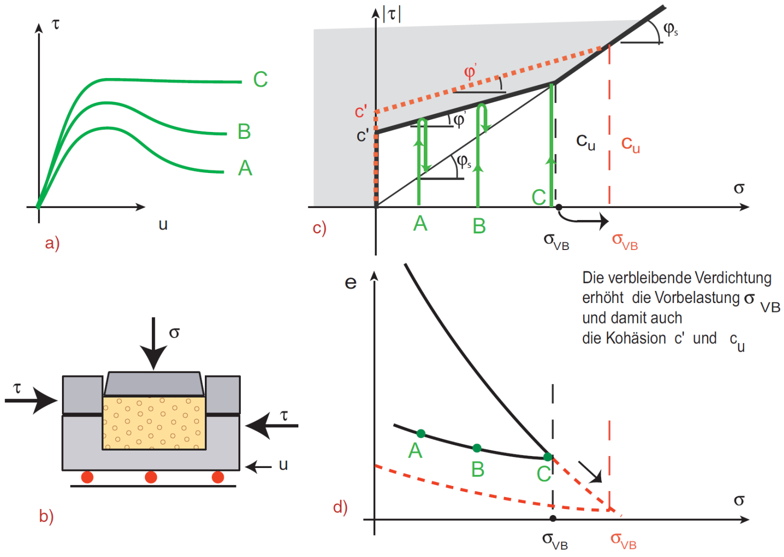
(b) σ_{VB} auftragen und bis φ_s verlängern

(c) An Schnittpunkt φ' ansetzen und nach links einzeichnen

(d) mit φ und α den Schnittpunkt mit φ_s bestimmen.

(e) Dieser Punkt ist $\tau_{\max}$ und mit dem gegebenen σ wird ein Kreis innerhalb der φ' konstruiert.

(f) Schnittpunkt rechte Seite Kreis mit Abszisse ist σ_1



18. Dissipationsenergie D
$D = \left|[[v_t^k]]\right| \cdot (c + \sigma_{nn} \tan(\varphi) - \sigma_{nn} \tan(\psi) > 0$, wobei gilt: $[[v_t]] = \cos(\alpha)$

19. Schräghangaufgabe:
Spannungsberechnung: (x_1 = senkrecht zu Hang gemessen)
$\sigma_{11} = x_1 \gamma' \cos(\beta) + \gamma_w \cdot h_c$
$h_c = z \cdot \cos(\beta)^2$
$\sigma_{21} = x_1 \cdot \gamma \cdot \sin(\beta)$
Erforderlicher Reibungswinkel: $\varphi_{erf} = \arctan(\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}})$

20. Kriechhang, Verdübelung, Verankerung:

- Grundlegende Formeln:
Schubfestigkeit oberhalb Kontaktfläche (ohne Verdübelung):
$\tau_\alpha = F_1 + G_1 \sin(\beta)$
G = Gewicht einer vertikalen Bodensäule mit Einheitsfläche 1 m^2 gemessen entlang der Böschung (und nicht horizontal); F = Sickerkraft in dieser Bodensäule.
z.B.: $\tau_\alpha = \gamma_w h \cos(\beta) \sin(\beta) + h\gamma' \cos(\beta) \sin(\beta)$
Diese Festigkeit gilt als Referenz über die gesamte Höhe.
Rest müssen über Dübel (Höhe h und Druchmesser D)abgetragen werden.
Nach Leinenkugel (an Sohle): $\tau = \tau_\alpha(1 + I_v \ln(\frac{1}{\text{n-fach langsamer}})$
Restliche Schubkraft pro $1m^2$ der Oberfläche übernehmen die Dübel:
$\tau_D = \tau_\alpha - \tau = \tau_\alpha I_v \ln(\text{n-fach langsamer})$
Kraft pro Dübel: $p_f \cdot h$
$p_f = \left[1 + I_v \ln \frac{v_{red}/(a-D)}{\dot\gamma_a}\right] k_0 c_{u\alpha} D$; $k_0 = 4,83 \cdot \left[2,76\frac{D}{a} + 1\right]$
a = axialer Abstand quer zur Hanglinie
Verformungsrate: $\dot\gamma_\alpha = \frac{v}{h_\gamma \cos(\beta)}$; h_γ = h über Kontaktfläche in der kriechenden Schicht.
Schlussendlich: $p_f \cdot h = h\left[1 + I_v \ln \frac{v_{red}/(a-D)}{\dot\gamma_a}\right] k_0 c_{u\alpha} D = \tau_D a L$; $c_{u\alpha} = \tau_\alpha$
- Verdübelung eines Hangs:
(h=Höhe Gleitscholle, B=Breite der Zone, D=Durchmesser eines Dübels)
Referenzkohäsion: $c_{u\alpha} = W \sin(\beta)$; $W = \gamma h \cos(\beta)$
Wirkung der Verdübelung pro lfm der Böschungslinie (ohne Seitenkräfte):
$P_f = B(c_{u\alpha} - c_u) = B(I_V \cdot c_{u\alpha} \cdot \ln(0,1))$

Schubkräfte auf den Seiten: $H = 2 \cdot 0,1 \cdot c_{u\alpha} h \cos(\beta)$
Notwendige Kohäsion: $c_{u,\mathrm{erf}} = \frac{WB\sin(\beta) - P_f + H}{B}$
Kriechrate des Hangs in der verdübelten Zone:

$$c_{u,\mathrm{erf}} - c_{u\alpha} = I_V c_{u\alpha} \ln(v/v_\alpha) \; ; \; v = v_\alpha \exp\left[\frac{c_{u,\mathrm{erf}} - c_{u\alpha}}{I_V c_{u\alpha}}\right]$$

Sicherheitsabstand für Knopflochlösung: $x = v \cdot t$

- Ausführung mit Vakuum-Vorbelastung:
  I_V berechnen: $\frac{\dot\gamma_a}{\dot\gamma_b} = (\frac{c_{ua}}{c_{ub}})^{1/I_V} = (\frac{\tau_{ua}}{\tau_{ub}})^{1/I_V}$; $\dot\gamma_{a,b}$ = Verformungsraten Boden vorher/nachher
  OCR berechnen: OCR $= \frac{\sigma_{11} + \Delta\sigma_{11}}{\sigma_{11}}$
  n-fache Bremsung der Kriechrate: $n = (\frac{OCR_a}{OCR_b})^{-1/I_V} = (\frac{1}{OCR})^{-1/I_V}$
  Normale Komponente nach der Belastung: $\sigma_{11,nachher} = \sigma_{11} \cdot OCR$
  Schubkomponente: $\sigma_{21} = \sigma_{11} \cdot \sin(\beta)$
  $\sigma_n = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{21}^2}$
  $m = \frac{\sigma_n}{\cos(\beta)}$; $r = \sigma_n \cdot \tan(\beta)$; $\sigma_1 = m + r$; $\sigma_2 = m - r$; $\sigma_3 = \sigma_2$
  $p = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3}$; $q = \sigma_1 - \sigma_2$

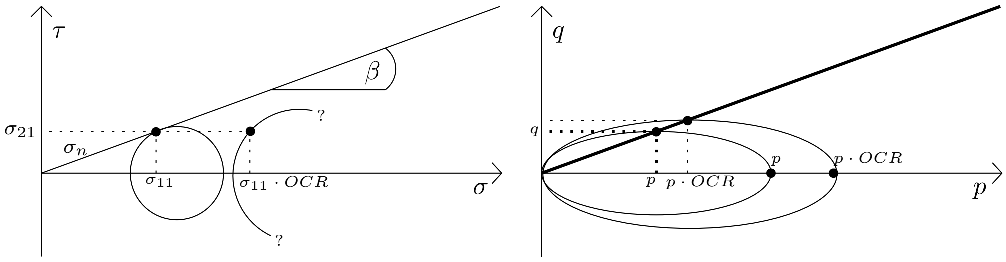


Abbildung 1: Links: Mohr'scher Kreis vor und während der Vorbelastung.
Rechts: Spannungszustand und Vorbelastungsflächen vor und nach der Vorbelastung