连续情况详细平衡条件

2023年11月14日 星期二　　下午10:32

在开始CTMC之间先了一个例子.　(对应到 Poisson Process Ⅱ 和 Ⅲ).

假设年轻人和老年人以强度 30 和 20 来到售票处, 假设每个顾客买 1 或者 2 张票，概率为 $1/2$.

令 Z^1, Z^2 代表一张和两张票的人数

Q1. 1小时之后 Z^1 和 Z^2 的人数是多少?

如果 N^y 和 N^e 代表年轻人和老年人数量.　$N = N^e + N^y$ 有强度 50

定义 Y_k 在 $\{1,2\}$ 上是均匀分布 N_t^1, N_t^2　$\mathbb{P}(Z^1=m, Z^2=n) = \mathbb{P}(N_1^1=m, N_1^2=n) = \underbrace{\mathbb{P}(N_1^1=m)}_{Pois(25)}\underbrace{\mathbb{P}(N_1^2=n)}_{Pois(25)}$

Q2. 前3个顾客是年轻人的概率是多少.

$\{T_k^y\}_{k\geq0}$, $\{T_k^e\}_{k\geq0}$ 有强度 30和 20　定义 X_i 从 $\{y, e\}$ 中取值　T_i: 第i个顾客抵达时间

$\mathbb{P}(N_{T_3}^y = 3) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{3} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}}\right) = 3 = \mathbb{P}(X_1=y)\,\mathbb{P}(X_2=y)\,\mathbb{P}(X_3=y)$.

Correction　π 对于 CTMC而言为稳态分布 $\Leftrightarrow$ $\tilde{\pi}$ 对于嵌入式 MC 稳定

$$\pi = \frac{1}{Z}\frac{\tilde{\pi}(x)}{\lambda_x}.$$

Example. 假设 LA有3种天气. 晴. 雾. 雨　假设天气为持续时间平均3指数分布, 之后进入

平均时间为4的雾天 (亦为指数分布).　之后进入雨天, 平均时长为1

问. 稳态分布是什么.

$$Q = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \text{晴} & \text{雾} & \text{雨} \end{array}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

而 $\pi Q = 0$　因此有

$-1/3\,\pi(0) + \pi(2) = 0$　$1/3\,\pi(0) - 1/4\,\pi(1) = 0$

$\pi(0) = \frac{3}{8}$　$\pi(1) = \frac{4}{8}$　$\pi(2) = \frac{1}{8}$

详细平衡条件.

定义:　一个分布 π 被称为符合 DBC 如果 $\pi(x)\,Q(x,y) = \pi(y)\,Q(y,x)$. $\forall x,y \in S$.

如果 π 符合 DBC, 则 π 一定为稳定的.

定义：一个测度 π 被称为符合 DBC 如果 $\pi(x)q(x,y) = \pi(y)q(y,x)$。

如果 π 符合 DBC. 则 π 一定为稳定的.

例：生死链 在 $S=\mathbb{N}$

$$q(n,n+1)=\lambda_n \text{ 对于 } n<N. \quad q(n,n-1)=\mu_n. \qquad \text{对于 } \lambda_n = n\lambda. \ \mu_n = n\mu.$$

$$\pi(n)\lambda_n = \pi(n+1)\mu_{n+1} \Rightarrow \pi(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\cdots\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi(0)$$

$$1=\sum_{k=0}^{N}\pi(k) = \left(1+\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdots\mu_1}\right)\pi(0)$$ 解算出 $\pi(0)$ 和所有的 $\pi(n)$

例：理发师以 3 的强度理发 理发店有两把椅子

没有顾客站着等（他们直接跑路） 顾客以强度 2 到达 X_t：顾客数量

$$S=\{0,1,2,3\} \qquad q=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad \pi q = 0$$

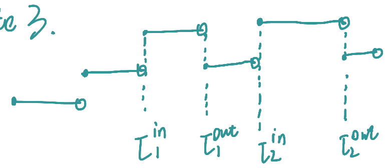
$$\pi(0)=\frac{27}{65} \quad \pi(1)=\frac{18}{65} \quad \pi(2)=\frac{12}{65} \quad \pi(3)=\frac{8}{65}$$

问题：损失的顾客的比例是多少.

N_t：泊松过程. 强度 2 记录顾客抵达

介绍 $\tau_k^{3,in}$ $\tau_k^{3,out}$ 为第 k 次 从 X_t 跳到 State 3 或离开 State 3.

令 $n(t)=\max\{k\geq 1, \tau_k^{3,in}\leq t\}$. T_k 是 N_t 时的抵达时间



$$N_t^{lost} = \sum_{k\geq 1}\mathbb{1}\{T_k\leq t\}\,\mathbb{1}\{X_{T_k^-}=3\} = \sum_{k\geq 1}^{n(t)} N_{\tau_k^{3,out}\wedge t} - N_{\tau_k^{3,in}} \qquad T_k^- \text{ 代表 } \lim_{t\to T_k} X_k = X_{T_k^-}$$

$$\frac{N_t^{lost}}{N_t} = \frac{1}{n(t)}\left(\sum_{k=1}^{n(t)} N_{\tau_k^{3,out}\wedge t} - N_{\tau_k^{3,in}}\right)\left(\frac{n(t)}{\int_0^t \mathbb{1}\{X_s=3\}ds}\right)\left(\frac{\int_0^t \mathbb{1}\{X_s=3\}ds}{t}\right)\left(\frac{t}{N_t}\right)$$

- $n(t)\to\infty$ 当 $t\to\infty$、概率为 1.
- 第一项为独立同分布的和 除了最后一项
- 大数定理：$\mathbb{E}N_\tau = \mathbb{E}\int_0^\infty N_s f_\tau(s)\,ds = \int_0^\infty 2s f_\tau(s)\,ds = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$