Stationary Distribution I

2023年9月7日 星期四 下午9:33

定理 2.26、对于有限，closed 的集合 至少存在一个 recurrent 的状态

证：设这个集称为 A

$$\sum_{y\in A} \underbrace{E_x N_y}_{\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}\{X_n=y\}} = \sum_{y\in A}\sum_{n\geq 1} p^n(x,y) = \sum_{n\geq 1}\sum_{y\in A} p^n(x,y) = \sum_{n\geq 1} 1 \to \infty.$$

$\exists y\in A \quad E_x N_y = \infty.$

recall $E_x N_y = \dfrac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}} \Rightarrow \rho_{yy}=1$

定理 2.17：如果一个集合 S 有限，closed 并且 irreducible，则其所有的状态都是 recurrent 的。

定理 2.25：如果 x 是 recurrent 的且 $x\to y$，则 y 是 recurrent 的

用 2.25 和 2.26 可以证明 2.9

Stationary Distribution

$q := [P(X_0=x_1),\cdots,P(X_0=x_k)]$ （q 是个 row vector） $S=\{x_1,\cdots x_k\}$

定义：如果 q 是 stationary distribution，记为 π，则有 $\pi p=\pi$

$\Leftrightarrow \sum_{x\in S}\pi(x)\,p(x,y) = \pi(y)$ （从 x 状态迁移到 y 状态）

定义：一个迁移矩阵被称作 doubly stochastic 如果 $\sum_{x\in S} p(x,y)=1$.

定理：如果 p 是 doubly stochastic 的迁移矩阵，它的状态空间有 k 个元素，则 $\pi(x)=\frac{1}{k}$ 是一个 stationary distribution

因为 $\sum_{x\in S}\pi(x)p(x,y) = \pi(y)$ 只要 $\pi(x)$ 是 Normal Distribution 即可.

定理 2.33：（Stationary Distribution 存在性）

假定 S 有限，对任何的 recurrent state $x\in S$，定义 $\mu_x(y) = \sum_{n\geq 1} P_x(X_n=y, T_x\geq n)$

则有 $\mu_x(x)=1$ 且 $\pi_x(y) = \dfrac{\mu_x(y)}{E_x T_x}$ 是 stationary distribution.

$\mu_x(y)$ 指的是在回到 x 前到 y 的概率之和.

$$\mu_x(x) = \sum_{n\ge 1} \mathbb{P}_x(X_n = x, T_x \ge n) = \underbrace{\sum_{n\ge 1} \mathbb{P}_x(T_x = n)}_{\text{因为是 recurrent 的, 一定会回来}} = 1$$

$$\sum_{y\in S}\mu_x(y) = \sum_{n\ge 1}\sum_{y\in S} \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \ge n) = \sum_{n\ge 1}\mathbb{P}_x(T_x \ge n) = \mathbb{E}_x T_x.$$

$$\mu_x(z) = \sum_{y\in S}\mu_x(y)p(y,z) = \underbrace{\sum_{n\ge 1}\sum_{y\in S\setminus\{x\}} \mathbb{P}_n(X_n = y, T_x = n)\, p(y,z)}_{I} + \underbrace{\sum_{n\ge 1}\mathbb{P}_x(X_n = x, T_x \ge n)}_{=1}\, p(x,z)$$

$$\mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \ge n)\, p(y,z) = \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \ge n)\, \mathbb{P}_x(X_{n+1} = z \mid X_n = y)$$

$$= \mathbb{P}_x(T_x \ge n \mid X_n = y)\, \mathbb{P}_x(X_{n+1} = z, X_n = y)\, \mathbb{P}_x(X_n = 1).$$

$$\Downarrow$$

$$\{X_1 \ne x, X_2 \ne x, \cdots X_n \ne x\}$$

$$= \mathbb{P}_x(T_x \ge n, X_{n+1} = z, X_n = y)$$

$$I = \sum_{n\ge 1}\sum_{y\in S\setminus\{x\}} \mathbb{P}_x(T_x \ge n, X_{n+1} = z, X_n = y) = \sum_{n\ge 1}\mathbb{P}_x(T_x \ge n+1, X_{n+1} = z)$$

$$= \mu_x(z) - \mathbb{P}_x(T_x \ge 1, X_1 = z) = \mu_x(z) - p(x,z).$$

如果 $x \to y$. 因为 x recurrent, $y \to x$. $\exists\, m$ s.t. $p^m(y,x) > 0$.

$$\mu_x(y)\,p^m(y,x) \le \sum_{z\in S}\mu_x(z)p^m(z,x) = \mu_x(x) = 1.$$

$$\Rightarrow \mu_x(y) < \frac{1}{p^m(y,x)} < \infty \qquad \mathbb{E}_x T_x = \sum_{y\in S}\mu_x(y) < \infty \text{ 是有限的 因为 } S \text{ 是有限的.}$$

Remark. 不需要 S 是 finite, 只要 $\mathbb{E}_x T_x$ finite 就可以了.

定理 (Stationary Distribution 的唯一性).

如果 S 有限且 irreducible 的 Markov Chain 则有唯一的 stationary distribution $\pi(x) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_x T_x}$

首先要证明 $\mathbb{E}_x T_x < \infty$ 设 ν 是某个 stationary distribution

$$\nu(y) = \sum_{z\in S}\nu(z)p(z,y)$$

$$= \nu(x)p(x,y) + \sum_{z\in S\setminus\{x\}}\nu(z)p(z,y) \qquad \sum_{z'\in S}\nu(z')p(z',z)$$

$$= \nu(x)p(x,y) + \nu(x)\sum_{z\in S\setminus\{x\}}p(x,z)p(z,y) + \sum_{z\in S\setminus\{x\}}\sum_{z'\in S\setminus\{x\}}\nu(z')p(z',z)p(z,y)$$

$$= v(x)\,p(x,y) + v(x)\sum_{z\in S\setminus\{x\}} p(x,z)\,p(z,y) + \sum_{z\notin S\setminus\{x\}} \sum_{z'\notin\{x\}} v(z')\,p(z',z)\,p(z,y)$$

$$v(y) = v(x)\sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_x(T_x \geq m,\ X_m = y) + \sum_{z\in S\setminus\{x\}} v(z)\,\underbrace{\mathbb{P}_z(T_x \geq n,\ X_n = y)}_{\leq \mathbb{P}_z(T_x \geq n)}.$$

$$= v(x)\sum_{m\geq 1}^{\infty} \mathbb{P}_x(T_x \geq m,\ X_m = y) = v(x)\,\mu_x(y)$$

$\Rightarrow v$ 是 μ_x 的常数.

Exercise Durrett. 1.10. 1.12. 1.8. 3rd ed.