Limit Behavior

2023年9月14日 星期四 下午9:31

Proposition 4 $\underset{\text{total variation}}{\underbrace{d_{TV}}} = \inf\{P(X\neq Y): X, Y \text{ coupling of } (\mu,\nu)\}$

上次证明了 $d_{TV} \leq \inf\{P(X\neq Y): X, Y \cdots\}$ 这次证明 $d_{TV} \geq \inf(P(X\neq Y), X, Y \cdots)$

证明: $\sum_{x\in S} \mu(x) \underset{\text{取 min 值}}{\underbrace{\wedge}} \nu(x) = 1 - \sum_{\mu(x)\geq\mu(x)} \mu(x)-\nu(x) = 1 - d_{TV}(\mu,\nu)$

为了构造出最优的对子, 要 $P(X\neq Y) = d_{TV}$.

从 Ω 中任给的事件 E. 则有 $\mathbb{P}(E) = d_{TV}(\mu,\nu)$

Set $X=Y$ on E^c 在 E 上, 让 X 取些值 $\{\mu(x) \geq \nu(x)\}$, 分布为 $\frac{\mu(x)-\nu(x)}{d_{TV}(\mu,\nu)}$ $(X, Y: \Omega \to S)$

类似对于 Y: 在 E 上, Y 取 $\{\nu(x) > \mu(x)\}$, 分布为 $\frac{\nu(x)-\mu(x)}{d_{TV}(\nu,\mu)}$

在 E^c 上 $\mathbb{P}(X=Y=x) = \frac{\mu(x)\wedge\nu(x)}{1-d_{TV}(\mu,\nu)}$

$P(X=x) = d_{TV}(\mu,\nu) \frac{\mu(x)-\nu(x)}{d_{TV}(\mu,\nu)} \cdot \mathbb{1}_{\{\mu(x)\geq\nu(x)\}} + (1-d_{TV}(\mu,\nu)) \frac{\mu(x)\wedge\nu(x)}{1-d_{TV}(\mu,\nu)} = \mu(x).$

类似的有 $P(Y=x) = \nu(x)$

例: 设 μ_1, μ_2 是 Poisson, 参数分别为 λ_1 和 λ_2. Poisson 分布之和仍为相应参数 设 $X = Poi(\lambda_1)$, $Y = Poi(\lambda_2)$

$d_{TV}(\mu_1,\mu_2) \leq P(X\neq X+Y) = P(Y>0) = 1-e^{\lambda_2-\lambda_1} \leq \lambda_2-\lambda_1$

Limit Behaviour

对于任给的 transient 的 $x\in S$. 我们有 $\sum_{n\geq 1} p^n(x,x) < \infty \Rightarrow p^n(x,x) \to 0$

Periodicity 可能会轻易的和收敛性 mess up.

例如 $S=\{0,1\}$ $p(1,0)=p(0,1)=1$. $p(0,0)=p(1,1)=0$. 所以 $p^n = \begin{cases} 0 & n\text{奇} \\ 1 & n\text{偶} \end{cases}$ 并不收敛.

$I_x = \{n: p^n(x,x)>0\}$ 定义 d_x 为 I_x 的最大公因子.

例如 $S=\{0,1\}$ $p(1,0)=p(0,1)=1.$ $p(\cdot,\cdot)$ … 1 n偶、

因此对于 recurrent state x. 定义 $I_x=\{n: p^n(x,x)>0\}$ 定义 d_x 为 I_x 的最大公因子.

定理 如果 $x\to y$ $y\to x$ 则有 $d_x=d_y$.

假设 $d_x>d_y$. 选择 n 和 m. 使得 $p^n(x,y)>0$ 以及 $p^m(y,x)>0$.

$p^{m+n}(x,x)\geq p^n(x,y)\,p^m(y,x)>0.$ 则 $n+m\in I_x$ 对 $\forall\, l\in I_y$.

$p^{m+n+l}(x,x)\geq p^n(x,y)\,p^l(y,y)\,p^m(y,x)$ $m+n+l\in I_x$ $\because d_x\mid m+n,\ d_y\mid m+n+l$

则有 $d_x\mid l$. $\Rightarrow d_x\leq d_y$ (因为 d_y 是最大公因数)

定义: 我们说对于个 recurrent state x 是非周期的. 若 $d_x=1$.

我们说 irreducible MC是非周期的. 如果一个state非周期, 则所有 state 非周期 (根据上一个定理)

定理: 如果 x是非周期的. 则 $\exists\, n_0$, 对 $\forall\, n\geq n_0$ 有 $n\in I_x$

证明: 假设 $k.\ k+1\in I_x$、则因为 I_x 是加法封闭的.

要 $2k,\ 2k+1,\ 2k+2\ \cdots$ $mk,\ mk+1,\cdots mk+1\in I_x$ 只要令 $n_0=mk$ 即可.

设 $n,\ n+k\in I_A$ 并且 $k>1$. 我们要找 $n_1\in I_x$ 使 $k\nmid n_1$ (因为 $d_x=1$)

$n_1=mk+r$, $0<r<k$.

注意到 $(m+1)(n+k)$ 和 $(m+1)n+n_1$ 都在 I_x 当中. 不同点在于 $(m+1)n+(m+1)k=(m+1)n+n_1$

$\Rightarrow k-r<k$ 证毕.

定理(收敛性): 假设有限 MC是 irreducible, aperiodic的. 它的稳态分布是 π, 状态空间为 S.

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}p^n(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=y)=\pi(y)$

(finite 的目的在于存在 π. 如果 infinite, 只要存在稳态分布亦可)

证明: 在 $S\times S$ 中创造 MC $\bar{p}((x,x'),(y,y'))=\begin{cases}p(x,y)p(x',y') & \text{if } x\neq x'\\ p(x,y)\,\mathbb{1}(y',y) & \text{if } x=x'\end{cases}$

记 (X_n,Y_n) 是 corresponding MC. initial condition是 $\mathbb{P}(X_0=x)=1$ $P(Y_0=y)=\pi(y)$

Claim (X_n,Y_n) 是 a coupling of $p^n(x,\cdot)$ 和 $\pi(\cdot)$.

$\mathbb{P}(X_n=y\mid X_{n-1}=x)=\sum\limits_{x'\in S}P(X_n=y,\ Y_n\in S\mid X_{n-1}=x,\ Y_{n-1}=x')\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=x'\mid X_{n-1}=x)$

$$= \sum_{x', y' \in S} \bar{p}\big((x, x'), (y, y')\big)\,\mathbb{P}(Y_{n-1} = x' \mid X_{n-1} = x) = p(x, y)$$

这意味着 $d_{TV}(p^n(x, \cdot), \bar{\pi}(\cdot)) \le \mathbb{P}(X_n \ne Y_n)$. $\underbrace{\to 0}_{\text{claim}}$、