Coupling

2023年10月9日 星期一　　上午4:33

对于问题：证明 $X \sim Binary(p)$ $Y \sim Binary(q)$

$P(X_1+\cdots+X_n \geq k) \leq P(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n \geq k)$ 难以证明 $\Rightarrow$ coupling

证 Random walk 有3种状况 $S_m^X=\sum_{i=1}^m X_i$. $S_m^Y=\sum_{i=1}^m Y_i$

当 m 要增大时. ① 一起增大. ② S^Y 增大但 S^X 不动 ③都不动. $\Rightarrow$ 维持 $S^Y > S^X$

例. X 和 Y 是 Bernouli RV. 参数为 $0 \leq q \leq p \leq 1$.

我们构造概率空间 $\Omega=\{w_1, w_2, w_3\}$. P是新定义的.

证 $\begin{cases} P(\tilde{X}=1)=P(w_1)=q. \\ P(\tilde{Y}=1)=P(w_1 w_2)=p \end{cases}$ $\Rightarrow$ 则有 $\begin{cases} P(w_1)=q. & (\tilde{X},\tilde{Y})(w_1)=(1,1) \\ P(w_2)=p-q. & (\tilde{X},\tilde{Y})(w_2)=(0,1) \\ P(w_3)=1-p & (\tilde{X},\tilde{Y})(w_3)=(0,0) \end{cases}$

回到括号中的问题、用上面的办法把 X 和 Y couple了 就得到 $P(S_n^X \geq k) \leq P(S_n^Y \geq k)$. 证毕.

Coupling 是一个很好的定义不同 probability measure 的距离的办法.

μ 和 ν 是两个概率度量. 它们在同一个概率空间 (Ω, P) 上面. 它们的总的 variation distance 是

$$\|\mu-\nu\|_{TV} = \sup_{A \subset \Omega} |\mu(A)-\nu(A)|$$

例如 $\begin{cases} \nu(w_1)=p \\ \nu(w_2)=1-p. \end{cases}$ $\begin{cases} \mu(w_1)=q \\ \mu(w_3)=1-q \end{cases}$ 则有 $\|\mu-\nu\|_{TV}=p-q$.

定理: μ 和 ν 是两个概率度量在同一个概率空间上. η 代表它们的一个耦合.

则有 $\|\mu-\nu\|_{TV} \leq \eta(X \neq Y)$. $(X,Y) \sim \eta$.

证明: $\forall A \subset \Omega$. $\mu(A)-\nu(A)=\eta(X \in A)-\eta(Y \in A)$

?

$= \eta(X \in A, Y=X)+\eta(X \in A, Y \neq X) - \eta(Y \in A, Y=X)-\eta(Y \in A, X \neq Y)$

$= \eta(X \in A, Y \neq X)-\eta(Y \in A, X \neq Y). \leq \eta(X \neq Y)$

例: Poisson 分布的距离 $X_i \sim Pois(\lambda_i)$. $i=1,2$. $\lambda_2 > \lambda_1$. 我们要 bound $\|\mu_{X_1}-\mu_{X_2}\|_{TV}$.

$\hat{X}_1 \sim Pois(\lambda_1)$. $\hat{Y} \sim Pois(\lambda_2-\lambda_1)$. $\hat{X}_2=\hat{X}_1+\hat{Y}$

则有 $\|\mu_{X_1}-\mu_{X_2}\|_{TV} \leq \eta(\hat{X}_1 \neq \hat{X}_2)=\eta(\hat{Y}>0)=1-e^{-(\lambda_2-\lambda_1)} \leq \lambda_2-\lambda_1$

引理: 如果状态 x 的周期为 1. 则存在 $n_x>0$. 使得对 $\forall n \geq n_x$. $n \in I_x$.

$I_x=\{n \mid p^n(x,x)>0\}$　　　用互质 + 欧拉定理来证.

引理：$\mathbb{E}_x N_y = \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y)$.

定理 1.25. 若一个稳态分布 π 存在，则所有状态 y，若 $\pi(y)>0$，则 y 是循环(recurrent)的.

证明：$\sum_x \pi(x)\,\mathbb{E}_x N_y = \sum_x \pi(x) \sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_x \pi(x) p^n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(y) = \infty$

因为 $\pi(y)>0$. $\mathbb{E}_x N_y = \rho_{xy} / (1-\rho_{yy})$

因此 $\underbrace{\sum_x \pi(x) \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}}_{< \frac{1}{1-\rho_{yy}}} = \infty$ $\Rightarrow \rho_{yy} = 1$ y 是 recurrent

下面证明定理1.19

I: irreducable. A: aperiodic S: ∃ Stable distribution

I, A, and S. 那么 $p^n(x,y) \to \pi(y)$. 当 $n \to +\infty$.

步骤 1：Coupling.

S 为 MC 的状态空间. X_n 和 Y_n 是 2 条 初始分布 $X_0 = x \in S$. $Y_0 \sim \pi$.

我们耦合它们. 即开始它们自己动 直到它们粘一起. 换言. 建立 MC 在 $S\times S$ 上.

$\bar{p}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = p(x_1,x_2)\,p(y_1,y_2)$. 直到停止时间 $\tau := \min_{x\in S} V_{(x,x)}$

$V_{(x,x)} := \min\{n \geq 0,\ X_n = Y_n = x\}$.

记 P_τ 为定义的耦合的概率分布

步骤 2：$\bar{p}$ 是不可降解的 (irreducable)

因为 p 不可降解. 存在 $K, L > 0$. 使得 $p^K(x_1,x_2) > 0$. $p^L(y_1,y_2) > 0$.

因为非周期性. ∃ M_0 足够大 使得 $p^{L+M}(x_2,x_2) > 0$. $p^{K+M}(y_2,y_2) > 0$. (换了 L, K)

所以 $\bar{p}^{K+L+M}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) > 0$

步骤 3：$P(\tau < \infty) = 1$

由于 p 的稳态分布. 存在 $x \in S$ 使得 $\pi(x) > 0$. 而对于 $\bar{p}$ 代表着 2 个独立 MC

如果 $\bar{p}$ 存在稳态分布 $\bar{\pi}(x,y) = \pi(x)\,\pi(y)$.

所以 $\bar{\pi}(x,x) > 0$. 所以有 (x,x) 是一个 recurrent State.

又有不可降解性 ($\bar{p}$). 所以 $P(V_{(x,x)} < \infty) = 1$. 所以 $P(\tau < \infty) = 1$.

步骤 4. $\|p^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \to 0$.

回忆 X_n 和 Y_n 的耦合. $X_0 = X$ $Y_0 \sim \pi$. 则由定义.

步骤4. $\|p^n(x,\cdot)-\pi(\cdot)\|_{TV}\to 0.$

回忆 X_n 和 Y_n 的耦合. $X_0=x$, $Y_0\sim\pi$. 则由定义,

$$\|p^n(x,\cdot)-\pi(\cdot)\|_{TV}=\|p^n(x,\cdot)-\sum_z \pi(z)p^n(z,\cdot)\|_{TV}$$

$$=\|\mu_{X_n}(\cdot)-\mu_{Y_n}(\cdot)\|_{TV}\le P(X_n\neq Y_n)=P(\tau>n)\to 0 \quad n\to\infty. \quad \blacksquare$$