# Poison Process III

2023年10月19日 星期四 下午9:33

定理：设 $S_t$ 是一个 compound 泊松过程 $Y_i$'s 是相关的 iid 随机变量 $N_t^y = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbb{1}\{Y_k = y\}$ 是一个独立泊松分布 $\sim Poi(\lambda P(Y_i=y))$

证明（继续）. 对于任何的序列 $(k_1, k_2, \cdots)$ 是只有有限个非零元素的

记 $p_1 = P(Y_1 = x_1)$ $p_2 = P(Y_2 = x_2)$ $\cdots$

$$P(N_t^{x_1} = k_1, N_t^{x_2} = k_2, \cdots) = P(N_t^{x_1} = k_1, N_t^{x_2} = k_2, \cdots \mid N_t = k_1 + k_2 + \cdots) P(N_t = k_1 + k_2 + \cdots).$$

$$= \frac{(k_1+k_2+\cdots)!}{k_1! k_2! \cdots} (p^{k_1} p^{k_2} \cdots) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k_1+k_2+\cdots}}{(k_1+k_2+\cdots)!}$$ （因为在 $N_t$ 确定时可以用二项）

$$= \left(e^{-\lambda p_1 t} \frac{(\lambda p_1 t)^{k_1}}{k_1!}\right)\left(e^{-\lambda p_2 t} \frac{(\lambda p_2 t)^{k_2}}{k_2!}\right) \cdots = P(N_t^{x_1} = y_1) P(N_t^{x_2} = y_2) \cdots$$

Exam: 2 question 70%. 2 Question 30% 问题难度不与分数挂钩 harder → curve

prove-based problem ⇒ 30% 的问题.

定理：假设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立的 Poisson 分布，强度为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$

然后则有 $$P\left(X_1 = l \,\middle|\, \sum_{k=1}^n X_k = m\right) = \binom{m}{l}\left(\frac{\lambda_i}{\sum_i \lambda_i}\right)^l \left(1 - \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\right)^{m-l}$$

证明：我们只针对 $n=2$ 时，开始 $$P(X_1 = l \mid X_1 + X_2 = m) = P(X_1 = l, X_2 = m-l) \frac{1}{P(X_1+X_2 = l)}$$

$$P(X_1 + X_2 = m) = \sum_{k=0}^m P(X_1 = m-k) P(X_2 = k) = \underbrace{\sum_{k=0}^m e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^k}{k!}}_{=\text{二项式定理}} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}$$

$$P(X_1 = l \mid X_1 + X_2 = m) = e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^l}{l!} e^{-\lambda_2} \frac{(\lambda_2)^{m-l}}{(m-l)!} \frac{1}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} \frac{m!}{(\lambda_1+\lambda_2)^m}$$

$$= \binom{m}{l}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^l \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{m-l}$$ 然后用了归纳

推论：让 $N_t$ 是泊松过程. $P(N_s = m \mid N_t = n) = \underline{\binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}}$ 对于 $0 \le s \le t$, $0 \le m \le n$)

因为 $(N_t - N_s)$ 和 $N_s$ 也是独立 . $Bin(n, \frac{s}{t})$

定理：$N_t^1, N_t^2, \cdots N_t^n$ 有强度 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$. $N_t = N_t^1 + \cdots + N_t^n$ ; $\{\tau_k^1\}_{k \ge 0}$, $\{\tau_k^n\}_{k \ge 0} \sim Exp$, 强度为 $\lambda_1, \cdots \lambda_n$

$X_i = \underset{1 \le j \le n}{\arg\min}\, \tau_i^j$ $N_t^j$ 有和 $\sum_{k=1}^{N_t} \mathbb{1}\{X_k = j\}$ 一样的分布

定理：对于一个给定的 Poisson 过程 $\tau^0=0$，$\tau^{k+1}=\inf\{t>0: N(T^k+t)\neq N(T^k)\}$ $T^k=\tau^0+\cdots+\tau^k$ 称为 jump times

对独立均匀分布 $U_1,\cdots U_n$ 以及它们 ordered version $U_{(1)}, U_{(2)},\cdots U_{(n)}$

对集合上 $\{N_t=n\}$. 分布 $T_1, T_2,\cdots T_n$ 是与 $U_{(1)},\cdots U_{(n)}$ 相同的.

证明：$\mathbb{P}(T_1=t_1,\cdots T_n=t_n \mid N_t=n) = \frac{1}{\mathbb{P}(N_t=n)}\mathbb{P}(\tau^1=t_1, \tau^2=t_2-t_1,\cdots \tau^n=t_n-t_{n-1}, \tau_{n+1}>t-t_n)$

$$= e^{\lambda t}\frac{n!}{(\lambda t)^n}(\lambda e^{-\lambda t_1})(\lambda e^{-\lambda(t_2-t_1)})\cdots(\lambda e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})})(e^{-\lambda(t-t_n)})$$

$= \frac{n!}{t^n}$ 对于 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t$ 是独立的.