测度论I

2023年11月16日 星期四　　下午11:06

- 主要目的是去学习给给定的集合赋予实值的函数.
- 核心的结构性假设在有数的集合中是可加的.

Metric Theory: $d: S \times S \to R$　　$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.　　几何解释：距离. 面积. 体积…

不可能给所有的子集赋予"measures"　　Intuition: 一个集合就是没有限制的一系列收集　它可以"pathological"

在1924年 Banach-Tarski 展示了这一点

让 U, V 在 R^m 上是有界的开集 $m \geq 3$　存在 $k \in N$，子集 $E_1, \cdots E_k, F_1, \cdots F_k$ 是 disjoint 的.

并且 $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = U$.　$\bigcup_{i=1}^{k} F_i = V$.　E_i 是 congruent to F_i 的

Translation + Rotation + Reflection.

我们在 congruency 条件下稳定地赋予测量.

定义：(σ - Algebra)　A collection of Subset F on a set Ω is called σ-algebra:

- 如果 $\{E_k\}_{k \geq 1} \in F$ 则有 $\bigcup_{k \geq 1} E_k \in F$.
- 如果 $E \in F$ 则 $E^c \in F$.

例：所有子集 2^{Ω} 和 $\{\phi, \Omega\}$ 是 σ - Algebra.

定理：Intersection of σ-Algebra 也是 σ- Algebra.

由于这个定理：给定任何收集 t，我们可以定义 $\sigma(t)$ 为由 t 生成的 σ- Algebra., 也就是

包含 t 的所有的 σ - Algebra 的 intersection.

应该选用哪一个 σ-algebra? 对于任意的测度空间，我们考虑由开集生成的 σ-Algebra.

被称为 Borel σ- algebra. 用 $\mathcal{B}(R)$ 来描述

总的来说，它包含了所有开集的 unions 和 intersections.

Proposition：在 R 上的 Borel σ-Algebra 是由如 (a,b), $[a,b]$, $(-\infty, a)$ 等区间生成的

例：$\mathcal{B}(R) = \sigma(\{(-\infty, a) : \forall a \in R\})$

这个 proposition 解释了为什么 积累分布函数 (CDF) characterize 了概率测度

定义：(Measure)：一个在(Ω, F)上的测度是一个$\mu: F \to \mathbb{R}$的函数 s.t.

$\mu(\phi)=0.$

$\mu(\bigcup_{k\geq 1} E_k) = \sum_{k\geq 1} \mu(E_k)$ 对任何 disjoint collections $E_k \in F$.

定理：让$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是增加的，右连续的函数 则存在一个唯一的测度 μ_F在$\mathbb{R}$上

$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$