Poison Process II

2023年10月12日 星期四 下午9:32

定理：N_t 泊松过程：① $N_0=0$. ② $N_t-N_s\sim Poi(\lambda(t-s))$ ③独立变量

定义：(Non-homogeneous 泊松过程)

随机过程 N_t 是一个 non-homogeneous 泊松过程，强度 λ $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 当

①$N_0=0$ ② $N_t-N_s\sim Poi(\int_s^t\lambda_\nu d\nu)$ ③独立变量.

评论：定义 jump (arrival) time $\tau^0=0,\ \tau^{n+1}=\inf\{t>0\ \ N_{\tau^n+t}-N_{\tau^n}=1\}$

注意 τ^n 并不是独立的，也不是同分布的. (因为强度在变化).

定义：(Compound Poisson Process). 记 Y_n 是独立同分布的随机变量.

我们称 $S_t=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N_t}Y_k & N_t\geq 1\\ 0 & N_t=0\end{cases}$ 是一个 compound 泊松过程. 其中 N_t 为泊松过程.

定理：Y_n 是独立同分布的随机变量 N 是一个独立值为整数的非负随机变量. 记 $S_n=\begin{cases}\sum_{k=1}^{N}Y_k & N\geq 1\\ 0 & N=0\end{cases}$ 有

① 若 $\mathbb{E}|Y_1|<\infty$. 则 $\mathbb{E}N<\infty$. $\mathbb{E}S=\mathbb{E}Y_1\ \mathbb{E}N$

② 若 $\mathbb{E}|Y_1|<\infty$ 并且 $\mathbb{E}N^2<\infty$. $Var(S)=Var(Y_1)\,\mathbb{E}N+Var(N)(\mathbb{E}[Y_1])^2$

③ 若 $N\sim Poi(\lambda)$, $Var(S)=\lambda(\mathbb{E}Y_1^2)$

证明：① $\mathbb{E}S=\sum_{n\geq 0}\mathbb{E}[S|N=n]\,\mathbb{P}(N=n)=\sum_{n\geq 0}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}Y_k\right]\mathbb{P}(N=n)=\mathbb{E}Y_1\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(N=n)\,n=\mathbb{E}Y_1\,\mathbb{E}N.$

② $\mathbb{E}S^2=\sum_{n\geq 0}\mathbb{E}[S^2|N=n]\,\mathbb{P}(N=n)=\sum_{n\geq 0}\left[\left(\mathbb{E}[S^2|N=n]-\mathbb{E}[S|N=n]\right)^2+\underbrace{\mathbb{E}[S|N=n]}_{=n\mathbb{E}Y_1}{}^2\right]\mathbb{P}(N=n)$

$=Var(Y_1)\sum_{n\geq 0}n\,P(N=n)+(\mathbb{E}Y_1)^2\sum_{n\geq 0}n^2P(N=n)$

$=Var(Y_1)\,\mathbb{E}N+(\mathbb{E}Y_1)^2\ \mathbb{E}N^2\quad\Rightarrow\quad Var(S)=Var(Y_1)\,\mathbb{E}N+(\mathbb{E}N^2-(\mathbb{E}N)^2)(\mathbb{E}Y_1)^2$

定理：(Thinning) 记 S_n 是一个 compound 泊松过程. 相关的随机变量 Y_n 都是从离散集合 S 中取值的.

定义：$N_t^y=\sum_{k=1}^{N_t}\mathbb{1}_{\{Y_k=y\}}$, $y\in S$ 然后 N_t^y 是独立的泊松过程，强度为 $\lambda\,\mathbb{P}(Y_1=y)$. λ 为 N_t 的强度

证明：$\mathbb{P}(N_t^y=k)=\sum_{n\geq k}\mathbb{P}(N_y^k=k|N_t=n)\,\mathbb{P}(N_t=n)=\sum_{n\geq k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda k}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ 令 $p=\mathbb{P}(Y_1=y)$

$=e^{-\lambda t}\sum_{n\geq k}\frac{1}{(n-k)!\,k!}p^k(1-p)^{n-k}(\lambda t)^n=e^{-\lambda t}\frac{p^k}{k!}(\lambda t)^k\sum_{n\geq 0}\frac{(1-p)^n(\lambda t)^n}{n!}=e^{-\lambda t}\frac{p^k}{k!}(\lambda t)^k e^{(1-p)\lambda t}$

$=e^{-p\lambda t}\frac{(p\lambda k)^k}{k!}$

定理：(Superposition) 记 $N_t^1, N_t^2, \cdots N_t^n$ 是独立的泊松过程，强度为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$.

那么 $N_t^1+\cdots+N_t^n$ 是一个强度为 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ 的泊松过程.

定理：(Superposition) 记 $N_t^1, N_t^2, \cdots N_t^n$ 是独立的泊松过程，强度为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$.

则有 $N_t^1 + \cdots + N_t^n$ 是一个强度为 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ 的泊松过程.

定理 3.17 考虑有强度 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 的泊松过程 $N_t^1, N_t^2, \cdots N_t^n$ 　记 $N_t = N_t^1, N_t^2, \cdots N_t^n$

记 $\{T_k^1\}_k^\infty \cdots, \{T_k^n\}_k^\infty$ 是独立随机变量，比例为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$，并且 X_i 从 $\{1, 2, \cdots n\}$ 中取值

$X_i = \arg\min\limits_{1 \le j \le n} T_i^j$ 　然后 X_i 是独立的，$P(X_i = j) = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n}$

更进一步. N_t^j 有和 $\sum\limits_{k \ge 1}^{N_t} \mathbb{1}\{X_k = j\}$ 一样的分布

第j个钟在t时间内叫了n下.　　在t时间所有钟一起叫里第j个最先叫的次数.