Stationary Distrobution II

2023年9月17日 星期日 上午8:47

令 $q := [\mathbb{P}(X_0 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_0 = x_k)]$ 作为row vector. $S = \{x_1, \cdots x_k\}$.

定义：我们当 $\sum_{x\in S} \pi(x) p(x,y) = \pi(y)$ 的时候称 π 为一个 stationary distribution.

例如，对于 $p = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$ $\quad [\pi_1\ \pi_2]\, p = [\pi_1, \pi_2]. \Rightarrow \pi_1 = \frac{b}{a+b} \quad \pi_2 = \frac{a}{a+b}$

定义：如果 $\sum_{x\in S} p(x,y) = 1$，则称这个 transition matrix 是双随机的

定理：如果 p 是一个双随机的转换矩阵，状态空间有 k 个元素 则 $\pi(x) = \frac{1}{k}$

定理 2.33（稳态分布的存在性定理）：假设 S 有限，对给 recurrent $x \in S$

令 $\mu_x(y) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \geq n)$ 在回到 x 之前先走到 y 的概率

则有 $\mu_x(y) = 1$ $\quad \pi_x(y) = \frac{\mu_x(y)}{\mathbb{E}_x T_x}$ 是一个稳态分布

证明：$\mu(x) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(X_n = x, T_x \geq n) = \underbrace{\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(T_x = n)}_{\text{因为 recurrent.}} = 1.$

$$\sum_{y\in S} \mu_x(y) = \sum_{n\geq 1} \sum_{y\in S} \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \geq n) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(T_x \geq n) = \mathbb{E}_x T_x$$

$$\sum_{y\in S} \mu_x(y) p(y,z) = \sum_{n\geq 1} \sum_{y\in S} \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \geq n) p(y,z)$$

$$= \underbrace{\sum_{n\geq 1} \sum_{y\in S\setminus\{x\}} \mathbb{P}(X_n = y, T_x \geq n) p(y,z)}_{= I} + \underbrace{\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = x, T_x \geq n) p(x,z)}_{=1}$$

$$\mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \geq n) p(y,z) = \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x \geq n)\, \mathbb{P}_x(X_{n+1} = y \mid X_n = z)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}_x(T_x \geq n \mid X_n = y)}_{X_1 \neq x, \cdots X_n \neq x_1} \mathbb{P}_x(X_{n+1} = z \mid X_n = y)\, \mathbb{P}_x(X_n = y)$$

$$= \mathbb{P}_x(T_x \geq n, X_{n+1} = z, X_n = y)$$

$$\Rightarrow I = \sum_{n\geq 1} \sum_{y\in S\setminus\{x\}} \mathbb{P}_x(T_x \geq n, X_{n+1} = z, X_n = y) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(T_x \geq n+1, X_{n+1} = z)$$

$$\Rightarrow I = \sum_{n\ge1}\sum_{y\in S\setminus\{x\}} \mathbb{P}_x(T_x\ge n, X_{n+1}=z, X_n=y) = \sum_{n\ge1}\mathbb{P}_x(T_x\ge n+1, X_{n+1}=z)$$

$$=\mu_x(z)-\mathbb{P}_x(T_x\ge1, X_1=z)=\mu_x(z)-p(x,z)$$

π在哪里用了?

如果 $x\to y$. 因为y recurrent, 则有 $y\to x$. $\exists m$ 使 $p^m(y,x)>0$.

$$\therefore \mu_x(y)p^m(y,x)\le \sum_{z\in S}\mu_x(z)p^m(z,x)=\mu_x(x)=1.$$

$\therefore \mu_x(y)<\frac{1}{p^m(y,z)}<\infty$　　则有 $\mathbb{E}_xT_x=\underbrace{\sum_{y\in S}\mu_x(y)}_{\text{因为S有限}}<\infty$ 有限 因

评论: S有限只是为了存在. 如果解保也存在则可以不用S有限,

定理: (稳态分布唯一性) 如果S是有限的, 马尔科夫链是 irreducable 的. 则存在唯一的稳态分布

$$\pi(x)=\frac{1}{\mathbb{E}_xT_x}$$

证明: 必是存在(由存在性定理, $\mathbb{E}_xT_x$存在)

让ν也是另一个稳态分布. 则有　$\nu(y)=\sum_{z\in S}\nu(z)p(z,y)=\nu(x)p(x,y)+\sum_{z\in S\setminus\{x\}}\nu(z)p(z,y)$

$$\nu(y)=\nu(x)p(x,y)+\nu(x)\sum_{z\in S\setminus\{x\}}p(x,z)p(z,y)+\sum_{z\in S\setminus\{x\}}\sum_{z'\in S\setminus\{x\}}\nu(z')p(z',z)p(z,y)$$

$$\nu(y)=\underbrace{\nu(x)\sum_{m=1}^{n}(T_x\ge m, X_m=y)}_{\text{前两项}}+\sum_{z\in S\setminus\{x\}}\nu(z)\underbrace{\mathbb{P}(T_x\ge n, X_n=y)}_{\le \mathbb{P}(T_x\ge n)}\to 0 \text{ when } n\to+\infty$$

$$=\nu(x)\sum_{m\ge1}^{\infty}\mathbb{P}_x(T_x\ge m, X_m=y)=\nu(x)\mu_x(y)$$　　为什么说明了唯一性?

详细平衡条件: $\pi(x)p(x,y)=\pi(y)p(y,x)$ 是一个更强的条件, 相比于π是稳态而言

例: 生死链. $S=\{l, l+1, \ldots m-1, m\}$ 我们称 如果只能到相邻状态, 则称为生死链

$p(x,x+1)=u_x$.　$p(x,x-1)=d_x$.　　$p(x,x)=1-(u_x+d_x)$.　　$d_l=u_m=0$.

则有 $\pi(x)u_x=\pi(x+1)d_{x+1}$

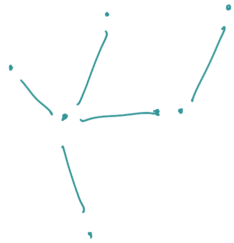
$\pi(x)$?

$$\Rightarrow \frac{\pi(x+1)}{\pi(x)}=\frac{u_x}{d_{x+1}}\qquad \pi(x)=\frac{\pi(x)}{\pi(x-1)}\cdots\frac{\pi(l+1)}{\pi(l)}\cdot\pi(l)=\frac{u_{x-1}\cdots u_l}{d_x\cdots d_{l+1}}\pi(l)$$

$$\sum_x\pi(x)=\pi(l)\underbrace{\sum_{x\ge l}^{m}\frac{u_{x-1}\cdots u_l}{d_x\cdots d_{l+1}}}_{Z}=1\qquad \pi(l)=\frac{1}{Z}\qquad \pi(x)=\frac{1}{Z}\frac{u_{x-1}\cdots u_l}{d_x\cdots d_{l+1}}\quad x>l.$$

例: (图上随机游走)　　V代表顶点　　$A: V\times V\to\{0,1\}$. 代表连接性矩阵.

例：[圆上随机游走]　V代表顶点　A: $V\times V \to [0,1]$. 代表连接性矩阵.



$$d_x = \sum_y A(x,y)$$

$$p(x,y) = \frac{A(x,y)}{d_x}$$

$$\pi(x)\frac{A(x,y)}{d_x} = \pi(y)\frac{A(y,x)}{d_y} \Rightarrow \pi(x) = \frac{d_x}{\sum_y d_y} = C\cdot d_x$$

定理：(Kolmogorov 圈圈条件)：对于任何的 irreducible 马尔科夫链，状态空间 S.
存在一个概率 measure 满足 detailed balance 条件. 当且仅当 给定任何圈圈 $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0$

$$\prod_{i=1}^{n} p(x_{i-1}, x_i) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, x_{i-1})$$ （圈圈正转反转概率相同）

推论：如果 π 满足详细平衡条件. 则 $\hat p(x,y) = p(x,y)$. 如果它是uniform的, 则 $\hat p(x,y) = p(y,x)$

证明: $\mathbb{P}(\hat X_{m+1} = y \mid \hat X_m = x, \hat X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, \hat X_0 = x_0)$

$$= \mathbb{P}(X_{n-(m+1)} = y \mid X_{n-m} = x, X_{n-(m-1)} = x_{m-1}, \dots, X_n = x_0)$$

$$= \mathbb{P}(X_{n-m} = x, X_{n-(m-1)} = x_{m-1}, \dots, X_n = x_0 \mid X_{n-(m+1)} = y)\frac{\pi(y)}{\mathbb{P}(X_{n-m} = x, \dots, X_n = x_0)}$$

$$\pi(y) = \frac{\mathbb{P}(X_{n-(m-1)} = x_{m-1}, \dots, X_n = x_0 \mid X_{n-m} = x)\,\mathbb{P}(X_{n-m} = x \mid X_{n-(m+1)} = y)}{\mathbb{P}(X_{n-(m-1)} = x_{m-1}, \dots, X_n = x_0 \mid X_{n-m} = x)\,\underbrace{\mathbb{P}(X_{n-m} = x)}_{\pi(x)}} = p(y,x).$$

$\square$

Total variation distance.

对于2个在状态空间 S 上的分布 μ 和 ν　我们定义一个度量 $d_{TV}(\mu,\nu) = \sup_{A\subseteq S} |\mu(A) - \nu(A)|$

命题: $d_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{x\in S} |\mu(x) - \nu(x)|$.

证明: $|\mu(A) - \nu(A)| = \left|\sum_{x\in A} \mu(x) - \nu(x)\right| = \left|\sum_{x\in A\cap\{\mu(x)\geq\nu(x)\}} \mu(x) - \nu(x) + \sum_{x\in A\cap\{\mu(x)<\nu(x)\}} \mu(x) - \nu(x)\right|$

$$\leq \sum_{x\in A\cap\{\mu(x)\geq\nu(x)\}} \mu(x) - \nu(x) \leq \sum_{x\in A\cap\{\mu(x)\geq\nu(x)\}} |\mu(x) - \nu(x)|$$

$\therefore A = \{\mu(x) \geq \nu(x)\}$ 时达到上界

$$\sum_{x\in\{\mu(x)\geq\nu(x)\}} \mu(x) - \nu(x) = \sum_{x\in\{\mu(x)<\nu(x)\}} |\mu(x) - \nu(x)|$$

$\square$

命题: $d_{TV} = \frac{1}{2}\sup\left\{\sum_{x\in S} f(x)\mu(x) - \sum_{x\in S} f(x)\nu(x) : \max_x |f(x)| = 1\right\}$

定义: 对于在 S 上的 μ 和 ν. 我们称 S 在 $S\times S$ 上 μ 和 ν 的一个 coupling. 如果 $S(\cdot,s)=\mu(\cdot)$. $\delta(s,\cdot)=\nu(\cdot)$

我们说 $X,Y: \Omega\to S$ 是 μ,ν 的一个 coupling 如果 $L_X=\mu$. $L_Y=\nu$ $(X\sim\mu, Y\sim\nu)$

给定 2个 r.v. X 和 Y. 我们说 $X'Y'$ 是 XY 的一组 coupling 如果它是 L_X, L_Y 的 coupling.

命题: $d_{TV}(\mu,\nu) = \inf\{P(X\neq Y);\ (X,Y)$ 是一组 μ,ν 的 coupling$\}$.

证明: $\mu(A)-\nu(A) = P(X\in A) - P(Y\in A) \le P(X\in A, Y\notin A) \le P(X\neq Y)$

由对称性 $|\mu(A)-\nu(A)| \le P(X\neq Y)$. 使用 $\sup_A$ 和 $\inf_{X,Y}$ 则有

$$d_{TV}(\mu,\nu) = \inf_{X,Y}\{P(X\neq Y)\} \quad \square$$