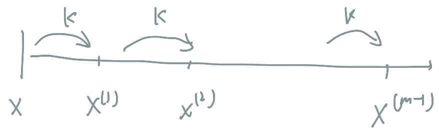
Decomposition Theorem

2023年9月5日 星期二　下午9:32

定理：假设 $\mathbb{P}_x(T_y \le k) \ge a > 0$ 对于所有 $x \in S$ 成立. 则 $\mathbb{P}_x(T_y \ge mk) \le (1-a)^m$, $m \in \mathbb{N}$.　(2.11)

证明：令 $X^{(1)} = X_{n+k}$, $\cdots$ $X^{(m-1)} = X_{(m-1)k+n}$



令 $T_y^{(1)}, \cdots T_y^{(m-1)}$ 到达状态 y 的 hitting time

$$\mathbb{P}_x(T_y > km) = \mathbb{P}_x(T_y > k, T_y^{(1)} > k, \cdots T_y^{(m-1)} > k)$$

?

$$\le \mathbb{P}_x(T_y > k, T_y^{(1)} > k, \cdots T_y^{(m-1)} > k \mid X_k \ne y, \cdots X_{(m-1)k} \ne y)$$

$$= \mathbb{P}_x(T_y > k)\, \mathbb{P}_x(T_y^{(1)} > k \mid X_k \ne y) \cdots \mathbb{P}_x(T_y^{(m-1)} > k \mid X_{(m-1)k+n} \ne y).$$

$$= \mathbb{P}_x(T_y > k) \left(\sum_{z \ne y} \mathbb{P}_z(T_y > k)\, \mathbb{P}_x(X_k = z \mid X_k \ne y) \right)$$

$$\le (1-a)^m \Big(\underbrace{\sum_{z \ne y} \mathbb{P}_x(X_k = z \mid X_k \ne y)}_{=1} \Big)$$

定理 2.15 (Theorem)　如果 $\rho_{xy} > 0$, $\rho_{yx} < 1$ 则 x 是 transient 的.

$\rho_{x,y}$ 从 x 出发经过有限步能达到 y 的概率.

Transient：从 X 出发回到 X 的概率小于 1.

注意到 $\rho_{xy} > 0$ 代表着 $\mathbb{P}_x(T_y < T_x) > 0$　　从 x 出发 $T_y < T_x$

$\rho_{yx} < 1$. 代表着 $\mathbb{P}_y(T_x < \infty) < 1$　　从 y 出发 $T_x < \infty$.

$$\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = \mathbb{P}_x(T_x < \infty \mid T_y < T_x)\, \mathbb{P}_x(T_y < T_x) + \mathbb{P}_x(T_x < \infty \mid T_x < T_y)\, \mathbb{P}_x(T_x < T_y)$$

$$= \mathbb{P}_y(T_x < \infty)\, \mathbb{P}_x(T_y < T_x) + \mathbb{P}_x(T_x < \infty \mid T_x < T_y)\, \mathbb{P}_x(T_x < T_y)$$

$$\le \mathbb{P}_y(T_x < \infty)\, \mathbb{P}(T_y < T_x) + (1 - \mathbb{P}_x(T_y < T_x))$$

<1

推论 2.16. 如果 x 是 recurrent 并且 $\rho_{xy}>0$. 则有 $\rho_{yx}=1$.

定义 $A\subset S$ closed 当 $x\in A, y\notin A$ 则 $\rho_{xy}=0$.

定义 $A\subset S$ irreducable 当 $x,y\in A$ 则 $x\to y$.

定理 2.19 如果 $A\subset S$ 是有限的, closed 和 irreducable. 则 A 中所有状态是 recurrent 的

定理 2.20 (分解定理)

如果状态空间 S 有限. 则它可以被分解为互不相关的集合 $S=T\cup R_1\cup\cdots\cup R_k$

T 是 transient states 的集合 R 是 closed 且 irreducable 的.

证明: 记 T 是所有 $x\in S$ 只要 $\exists y\in S$. $x\to y$. 但 $y\not\to x$.

根据定理 2.15. T 中所有状态都是 transient 的.

选取 $\forall x\in S\setminus T$ 记 $R_1=\{y\in S\ x\to y\}$

如果 R_1 不 closed. $y\in R_1$ $z\notin R_1$ $\rho_{yz}>0$. 则有 $x\to y$. $y\to z$ 则 $x\to z$ 矛盾.

根据定理 2.19. R_1 中所有状态是 recurrent 的. 重复上述过程直至 S 中无多余元素.

引理. 离散随机变量 X. $EX=\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(X\geq n)$

$\mathbb{E}\,\mathbb{1}\{X\geq n\}=\mathbb{P}(X\geq n)$ $\quad X=\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}\{X\geq n\}$

定义 $N_y:=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\{X_n=y\}$ 则 $\{N_y\geq k\}=\{T_y^k<\infty\}$

$$E_x N_y=\sum_{n=1}\mathbb{P}_x(X_n=y)=\sum_{n=1}p^n(x,y)$$

定理 2.23. $E_x N_y=\dfrac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}$

$$E_x N_y=\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}_x(N_y\geq n)=\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}_x(T_y^n<\infty)=\sum_{n\geq 1}\rho_{xy}\rho_{yy}^{n-1}=\frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}$$

定理 2.24. 状态 x recurrent $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}p^n(x,x)=\infty$

引理 2.15 如果 x 是 recurrent 并且 $x \to y$. 则 y 是 recurrent 的.

根据 2.16. $\rho_{yx} = 1$. 选择 m, n, 让 $p^m(x,y) > 0$ && $p^n(y,x) > 0$.

$$p^{m+n+k}(y,y) \geq p^n(y,x)\, p^k(x,x)\, p^m(x,y)$$

$$\sum_{l \geq 1}^{\infty} p^l(y,y) \geq \sum_{k \geq 1}^{\infty} p^{m+n+k}(y,y) \geq p^n(y,x) p^m(x,y) \cdot \sum_{k \geq 1}^{\infty} p^k(x,x) = \infty.$$