Kolmogrov等式

2023年11月7日 星期二　　下午10:32

Y_n chain: P_y: 固定的 λ. $X_t = X_{N(t)}$ $q(x,y) = -\lambda \mathbb{1}\{x=y\} + \lambda P_y(x,y)$.

Z_n chain: (Embedded MC)

$$P_z(x,y) = \frac{q(x,y)}{\lambda_x} \qquad t_n = \frac{\overset{\sim \text{Exp}[1]}{T_n}}{\lambda(Z_n)}$$

$$\left(\lambda_x = \sum_{y \neq x} q(x,y)\right)$$

跳开的时间是 Exp(1)除上这个状态下的强度

- Z_n很好模拟
- Y_n不能捕捉到 explotion
- Y_n可以跳到原先一样的状态.

Example: 泊松过程.

$P_y(n, n+1) = 1$. $X_t = N(t)$. $q(n, n+1) = \lambda$.

Example: Branching Process.

每个成员都独立的有强度 μ 死掉和强度 λ 生下一代. 让 X_n代表群中总数.

如果 $X_n = n$, 则有 n个独立的钟强度为 μ. 另n个钟强度为 λ.

让 T_b, T_d 是它们中最先叫的钟. $T_b \sim \text{Exp}(n\lambda)$ $T_d \sim \text{Exp}(n\mu)$

然后 $\lambda_n = n(\lambda+\mu) = q(n,n-1) + q(n,n+1)$.

$$\mathbb{P}(T_b = \min(T_b, T_d)) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

$$q(n,n+1) = n(\mu+\lambda)\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = n\lambda. \qquad \text{Similarly } q(n,n-1) = n\mu.$$

总的来说. 如果 chain 跳一下, q是由 exponential clock 的 rate 决定的

Example: Queue

假设顾客以强度λ抵达, 并且有s个营业员. 独立地用强度 μ 服务. X_t: 银行顾客数量.

$$q(n,n-1) = \lambda \qquad q(n,n+1) = \begin{cases} n\mu & \text{if } 1 \le n \le s \\ s\mu & \text{if } n > s \end{cases}$$

Kolmogrov's Equation

定理: (Chorpman-Kolmogrov Eq.) $P_{t+s} = P_t P_s$, 即 $P_{t+s}(x,y) = \sum_{z \in S} P_t(x,z) P_s(z,y)$.

定义: (Generator) 对于给定的 q. 定义 Q. $Q(x,y) = \begin{cases} q(x,y) & 如果\ x \neq y. \\ -\lambda_x = -\sum_{x \neq z} q(x,z) & 如果\ x = y. \end{cases}$

定理: (Kolmogrov Equation): 在假设 6.3 之下.

Q 是 CTMC 的. 满足 $P_t' = Q P_t$ $P_t' = P_t Q$. 即 P_t 和 Q communicate

定理：(Kolmogrov Equation)：在假设 6.3 之下.

P_t 是 CTMC 的. 满足 $\underbrace{P_t' = Q P_t}_{\text{backward equation}}$ $\underbrace{P_t' = P_t Q}_{\text{forward equation}}$. 即 P_t 和 Q communicate

证明：对于 backward equation

$$\frac{1}{h}\left(P_{t+h}(x,y) - P_t(x,y)\right) = \frac{1}{h}\left(\sum_{z\in S} P_h(x,z) P_t(z,y) - P_t(x,y)\right)$$

$$= \sum_{z\neq x} \frac{P_h(x,z)}{h} P_t(z,y) - P_t(x,y)\left(\sum_{z\neq x} \frac{P_h(x,z)}{h}\right)$$

当 $h\to 0$ 时 $= \sum_{z\neq x} q(x,z) P_t(z,y) - P_t(x,y)\lambda_x = Q P_t$.

(在 X 处考虑之间的了 所以是 backward)

类似对于 forward equation

$$\frac{1}{h}\left(P_{t+h}(x,y) - P_t(x,y)\right) = \frac{1}{h}\sum_{z\in S} P_t(x,z) P_h(z,y) - P_t(x,y)$$

$$= \sum_{z\neq y} P_t(x,z) \frac{P_h(z,y)}{h} - P_t(x,y) \sum_{z\neq y} \frac{P_h(y,z)}{h}$$

$$= \sum_{z\neq y} P_t(x,z) q(z,y) - P_t(x,y)\lambda_y = P_t Q.$$

注：我们为了更多懂要说明 P_t 是连续可导的.

Backward 情况：$P_t \in C^1$ 当且仅当 (Embeded MC)

$$P_t(x,y) = \mathbb{1}_{\{x=y\}} e^{-t\lambda_x} + \lambda_x \int_0^t e^{-s\lambda_x} (P_Z P_{t-s})(x,y)\, ds$$

Forward 情况：$\sum_y P_t(x,y)\lambda_y < \infty$

$$P_h(z,y) \le 1 - P_h(z,z) \le 1 - e^{-\lambda_z h} \le \lambda_z h$$

定义：M 是任意的 $n\times n$ 矩阵 $e^M = \exp(M) := \sum_{k\ge 0} \frac{M^k}{k!} = \lim_{k\to\infty} (I + \frac{M}{k})^k$ $M^0 = I$ 为单位阵

定理：对于 CTMC, generator Q 而言 转移概率是 $P_t = \exp(tQ)$

证明：初条件是 $P_0 = I$. 这是 ODE 中标准的证明.

例：对于两状态 MC

Let $S = \{0,1\}$. $Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$ $P_t' = Q P_t$.

则有 $\begin{cases} P_t'(0,0) = -\lambda(P_t(0,0) - P_t(1,0)) \\ P_t'(1,0) = \mu(P_t(0,0) - P_t(1,0)) \end{cases}$

相减：$(P_t(0,0) - P_t(1,0))' = -(\mu+\lambda)(P_t(0,0) - P_t(1,0))$

$$\Rightarrow P_t(0,0) - P_t(1,0) = e^{-(\mu+\lambda)t}$$

相减： [illegible]

$$\Rightarrow P_t(0,0) - P_t(1,0) = e^{-(\mu+\lambda)t}$$

$$P_t'(0,0) = -\lambda e^{-(\mu+\lambda)t} \qquad P_t'(1,0) = \mu e^{-(\mu+\lambda)t}$$

结合初条件 $P_0(0,0) = 1$. $P_0(1,0) = 0$. $\Rightarrow \begin{cases} P_t(0,0) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} \\ P_t(1,0) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} - \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} \end{cases}$

$$\begin{cases} P_t(0,1) = 1 - P_t(0,0). \\ P_t(1,1) = 1 - P_t(1,0). \end{cases}$$

因此稳态分布最后会趋于 $P_t(x,\cdot) = \frac{(\mu,\lambda)}{\mu+\lambda}$