Asymptotic Cases

2023年9月21日 星期四　　下午9:32

根据上节课的定理. 若对于 $g(a)=0$ 在A上. $g(x)=1+\sum_{y\in S} p(x,y)g(y) \iff g(x)=\mathbb{E}_x V_A$.

例子：(Gambler's Ruin)　$A=\{0,N\}$. $\mathbb{E}_x V_A = \begin{cases} x(N-x) & p=\frac{1}{2} \\ \frac{x}{1-2p} - \frac{N}{1-2p}\cdot\frac{1-(\frac{1-p}{p})^x}{1-(\frac{1-p}{p})^N} & p\neq\frac{1}{2} \end{cases}$

$\mathbb{P}_x(V_N<V_0) \begin{cases} x/N & p=\frac{1}{2} \\ \frac{1-(\frac{1-p}{p})^x}{1-(\frac{1-p}{p})^N} \end{cases}$

① 对于 $p\to 0$ 的情况. $\mathbb{P}_x(V_x<V_0)\to 0$　$\mathbb{E}_x V_A \to x$.

② 对于 $p>\frac{1}{2}$ 的情况. $N\to\infty$. $\mathbb{P}_x(V_N<V_0)=1-(\frac{1-p}{p})^x$　$\mathbb{E}_x V_A \to +\infty$

③ 对于 $p<\frac{1}{2}$ 的情况　$\mathbb{P}_x(V_N<V_0)\to 0$　$\mathbb{E}_x V_A = \frac{x}{1-2p}$

特别的. 对于 $p=\frac{1}{2}$. $N=100$. 从 $x=99$ 开始. $P_{99}(V_{100}<V_0)=\frac{99}{100}$　$\mathbb{E}_x V_A = 99$.

Suggested Exercise: Durret 3^{rd}　1.45, 1.49, 1.57, 1.59, 1.62, 1.67.

定理 (Ergodic Theorem) 假设对于马尔科夫链是 irreducible, 并且有稳态分布 π. 让 $f: S\to\mathbb{R}$ 满足

$\sum_{x\in S}|f(x)|\,\pi(x)<\infty$　则有 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) = E_\pi f = \sum_{x\in S} f(x)\pi(x)$

证明: 回忆一下 k th 回归时间 (return time) T_x^k

$\sum_{m=T_x^k+1}^{T_x^{k+1}} f(X_m)$　　根据强马尔科夫性. 所有项独立. 并且为独立同分布.

$\mathbb{E}_x \sum_{m=1}^{T_x} f(X_m) = \sum_{m\geq 1}^{\infty} \mathbb{E}_x \mathbb{1}_{\{T_x\geq m\}} f(X_m) = \sum_{m\geq 1}^{\infty}\sum_{z\in S} \mathbb{P}(X_m=z, T_x\geq m) f(z) = \sum_{z\in S}\mu_x(z) f(z)$.

因为 $T_x^k = \sum_{m=1}^{k}(T_x^m - T_x^{m-1})$　由大数定理　$\frac{T_x^k}{k} \to \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}(T_x^m - T_x^{m-1}) \to \mathbb{E}_x(T_x^1 - \underbrace{T_x^0}_{=0}) = \mathbb{E}_x T_x^1$

(强大数定理. 让 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立同分布的RV. $\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} X_m \to \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_1$ 当 $k\to+\infty$ 时)

因为上面的定理　$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=T_x^k+1}^{T_x^{k+1}} f(X_m)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbb{E}_x \sum_{m=1}^{T_x} f(X_m) = \sum_{z\in S}\mu_x(z)f(z)$

则有 $\frac{1}{T_x^n}\sum_{m=1}^{T_x^n} f(X_m) = \frac{n}{T_x^n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=T_x^k+1}^{T_x^{k+1}} f(X_m) \to \frac{1}{\mathbb{E}_x T_x}\sum_{z\in S}\mu_x(z)f(z) = \sum_{z\in S}\pi(z)f(z)$

因为如果要证明 $\frac{T_x^n}{n}=\mathbb{E}T_x$. 我们可以用子列来替代整体求和. 我需要用到条件 $\sum_{x\in S}|f(x)|\,\pi(x)<\infty$. □

定理: (Asymptotic Frequency) 若 不可降解 (irreducable) 马尔科夫链, 其中所有状态是 recurrent.

定义到时间 n 内反复拜访状态 x 的次数: $N_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \mathbb{1}\{X_m = x\}$ 则有 $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x)}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}_x T_x}$

证明: $\frac{T_x^n}{n} \to \mathbb{E}_x T_x$ (由之前的证明) 观察到 $T_x^k = \min\{n \geq 1 : N_n(x) = k\}$

$$T_x^{N_n(x)} = \min\{k \geq 1, N_k(x) = N_n(x)\} \leq n$$

$$n < T_x^{N_n(x)+1} = \min\{k \geq 1 : N_k(x) = N_n(x) + 1\}$$

$$\text{So} \quad \underbrace{\frac{T_x^{N_n(x)}}{N_n(x)}}_{\to \mathbb{E}_x T_x} \leq \frac{n}{N_n(x)} \leq \underbrace{\frac{T_x^{N_n(x)+1}}{N_n(x)+1}}_{\to \mathbb{E}_x T_x} \cdot \underbrace{\frac{N_n(x)+1}{N_n(x)}}_{\to 1 \text{ when } n\to\infty} \qquad \square$$

评论, 如果我们在 Ergodic 定理中让 $f(y) = \mathbb{1}\{y = x\}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\{X_n = x\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} N_n(x) = \pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x T_x}$

但其实我们不需要稳态分布的存在来推导 Asymptotic frequency.

若在 $\mathbb{E}_x$, $f(z) = \mathbb{1}\{y = z\}$. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} p^k(x,y) \to \pi(y)$.