连续条件极限情况

2023年11月9日 星期四　　下午10:56

Exercise. 展示两个独立指数钟的和在 $[0,h]$ 中响的概率是 $o(h)$.

极限行为:

定义 (Irreducable): 我们说 CTMC, 其 Generator 为 g. 是 irreducable 的.

如果对所有的 $x,y\in S$. $\exists x_0,x_1,\cdots x_n$. 使得 $x_0=x$. $x_n=y$. $g(x_k,x_{k+1})>0$ 对 $\forall k\in\{0,\cdots n-1\}$,

定理: 如果CTMC是 irreducable 的. 则 $P_t(x,y)>0$ 对所有的 t, x 和 y,

更进一步. 在假设 6.3 之下. 下列陈述等价

(i) CTMC 为 irreducable 的

(ii) Embedded MC是不可降解的.

(iii) $P_t(x,y)>0$ 对某些 $t>0$ 和所有的 $x,y\in S$.

证明: (第二部分不作证明而作为练习)

假设 CTMC是不可降解的 $P_t(x,x)\geq e^{-\lambda_x t}>0$

然后注意到 $P_t(x,y)\geq P_{t-h}(x,x)P_h(x,y)$ 只要说明对于小h 结果成立

让 $x=x_0, x_1, x_2, \cdots x_n=y$.

$$P_{nh}(x,y)\geq p_h(x_0,x_1)\,p_h(x_1,x_2)\cdots p_h(x_{n-1},x_n)$$
$$=\left(g(x_0,x_1)h+o(h)\right)\cdots\left(g(x_{n-1},x_n)h+o(h)\right)>0.$$

对于h足够小. 固定的 n, 总是成立的.

定理: π 是一个稳态分布当且仅当

$$\sum_{y\in S}\pi(y)\,Q(y,x)=0 \qquad \forall x\in S$$

Q 是这个连续马尔可夫过程的 Generator

证明: $\sum_z \left(\sum_y \pi(y) Q(y,z) \right) = \sum_y \pi(y) \sum_z Q(y,z) P_t(z,x) = \sum_y \pi(y) P_t'(y,z)$

$$= \left(\sum_y \pi(y) P_t(y,x) \right)'$$

如果 $\sum \pi(y) Q(y,x) = 0$ 则 $(\pi P_t)' = 0$ $\quad \pi P_t = \pi P_0 = \pi$

如果 π 是 stationary, 那么 $\sum_z (\pi Q) \underbrace{P_t(z,x)}_{P_t(z,x)>0} = 0$ irreducible $\Rightarrow \pi Q = 0$.

定理: π是一个CTMC稳态分布. 当且仅当 $\tilde{\pi}$ 是 embedded MC 的稳态分布

$$\tilde{\pi}(x) = \frac{1}{Z} \frac{\pi(x)}{\lambda_x} \qquad Z\text{为归一化常数}$$

Proof: Exercise.

Remark: 对于离散 MC 如果它是周期的, 存在k 使得 $p^{nk}(x,x) = 0$ $\forall n$ 阻碍收敛.

在连续情况中 $P_t(x,x) > 0$ 所以不存在周期性行为

换言之, 如果我们用 P_t 来定义 MC. 则其为

定理: 考虑不可降解的 MC. 转移矩阵 P_t. 稳态分布为 π

$$\lim_{t\to\infty} P_t(x,y) = \pi(y) \quad \text{和且} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = y\}} = \pi(y)$$

证明: 找一个小 $h>0$. 考虑离散 MC 转移矩阵为 P_h. 注意到

$$P_{2h}(x,y) = \sum_z P_h(x,z) P_h(z,y)$$

因为 $P_h(x,x) \geq e^{-\lambda_x h}$

这不仅对 2. 对 n 亦然成立.

$$P_t(x,y) \geq P_{t-nh}(y,y) P_{nh}(x,y) \geq \underset{\sim}{e^{-\lambda_y h}} P_h^n(x,y). \quad nh \leq t \leq (n+1)h$$

$\liminf_{t\to\infty} P_t(x,y) \geq e^{-\lambda_y h} \pi(y)$ 对 $h \to 0$. $\liminf_{t\to\infty} P_t(x,y) \geq \pi(y)$

Note that π 是 P_h 的稳态分布.

$$\limsup_{t\to\infty} P_t(x,y) = 1 - \liminf_{t\to\infty} \sum_{z\neq y} P_t(x,z) \leq 1 - \sum_{z\neq y} \liminf_{t\to\infty} P_t(x,z).$$

$$\leq 1-\sum_{y\neq y}\pi(z)=\pi(y).$$

对于具有 P_t 概率的离散马尔可夫链，定义 $N_n^h(y)$ 这里的 n,h 不独立、$nh\to t$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}\{X_s=y\}\,ds=\lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{1}{nh}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{1}\{X_{nh}=y\}\,h$$

$$=\lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{N_n^h(y)}{n}=\lim_{h\to 0}\pi(y)=\pi(y)$$

我们可以用 Moore-Osgood 定理 interchange 极限。