Multistep transition problem

2023年8月31日 星期四 下午9:33

Exercise: 展示 $P(X_{m+n}=y \mid X_n=x, X_{n-1}=x_{n-1}, \cdots X_0=x_0) = P(X_{m+n}=y \mid X_n=x)$

Exercise: 假设我们有l, m, u代表低，中，高阶层 P代表阶级变化的概率

① 你父母在m，你在u，你孩子在l的概率.

② 你父母在m，你孩子在l的概率.

定理: The math step transition probability $P(X_{m+n}=y \mid X_n=x)$ 是迁移矩阵P的m次方，在(x,y)处

证：假设对于m−1成立.

$$P(X_{m+n}=y \mid X_n=x) = \sum_{z\in S} P(X_{m+n}=y \mid X_{m+n-1}=z, X_n=x)\, P(X_{m+n-1}=z \mid X_n=x)$$

$$= \sum_{z\in S} p(z,y)\, p^{m-1}(x,z) = p^m(x,y)$$

Chapman-Kolmogrov 等式.

$$p^{m+n}(x,y) = \sum_{z\in S} p^m(x,z)\, p^n(z,y).$$

定义: (Stopping time) 我们说 $T: \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 是 stopping time，如果 $\{T=n\}$ 可以由 $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ 决定

定理: (强马尔可夫性) 令T是 Markov 链的一个 stopping time 对任意的 $k\in\mathbb{N}$, $s\in S$

给定 $\{T<\infty, X_T=x\}$ X_{T+k} 是独立于 $\{X_0, \cdots X_T\}$ 的

对于任意的 $n\geq 1$. 设 $S(n,x)$ 是 $(x_0, \cdots x_{n-1}, x)$ 的所有序列的集合. 使得

如果 $X_0=x_0, \cdots X_{n-1}=x_{n-1}$, $X_n=x_n$ 则 $T=n$.

$\{T<\infty, X_T=x\} = \bigcup_{n\geq 1} \{\vec{x}_n \in S(n,x)\}$ 当 $\vec{x}_n=(x_0, \cdots x_n)$ 的时候.

Claim: $P(X_{T+k}=y \mid T<\infty, X_T=x, \vec{x}_T) = p^k(x,y)$.

$$P(X_{T+k}=y \mid X_T=x, T<\infty) = \sum_{n\geq 1} \sum_{\vec{x}\in S(n,x)} P(X_{T+k}=y \mid X_T=x, T<\infty, \vec{X}=\vec{x})\, P(\vec{X}=\vec{x} \mid T<\infty, X_T=x)$$

$$= p^k(x,y) \sum_{n\geq 1} \sum_{\vec{x}\in S(n,x)} P(\vec{X}=\vec{x} \mid T<\infty, X_T=x) = p^k(x,y).$$

$$P(X_{T+k}=y \mid T<\infty, X_T=x, \vec{x}) = \sum_{n\geq 1} P(X_{n+k}=y \mid T=n, X_n=\vec{x}, \vec{x})\, P(T=n \mid T<\infty, X_T=x, \vec{x})$$

$$= \sum \cdots P(X_{n+k}=y \mid X_n=x, \vec{x}=x)$$

$P(X_{T+k}=y \mid T<\infty, X_T=x, \vec{x}) = \sum_{n\geq 1} P(X_{n+k}$ ...

$$= \sum_{n\geq 1} \sum_{x\in S(n,x)} \mathbb{1}_{\{\vec{X}=\vec{x}\}} P(X_{n+k}=y \mid X_n=x, \vec{X}=\vec{x})$$

Remark. 在连续时空中，Markov 不能导致强 Markov

Classification of Status

$\mathbb{P}_x(A) := \mathbb{P}(A \mid X_0=x)$ 　　 E_x: 在$\mathbb{P}_x$下的期望

定义 $T_y = \min\{n\geq 1, X_n=y\}$ 　　 $\{T_y=n\} = \{X_0\neq y, X_1\neq y, \cdots X_{n-1}\neq y, X_n=y\}$