Poison Process I

2023年10月10日 星期二　　下午9:31

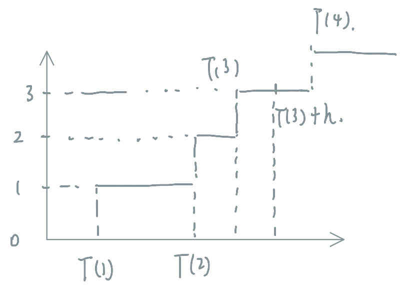
泊松过程：$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是独立的指数分布的 RV 参数为 λ　　$T_n = X_1 + \dots + X_n$.

我们称随机过程 $N_t := \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} = \max\{n\geq 1, T_n \leq t\}$ 是参数为 λ 的泊松过程.

强度(intensity) λ 决定了跳跃的比例：$\frac{1}{h} \mathbb{P}(N(t+h)-N(t)\geq 1) \to \lambda$

$$\mathbb{P}(N(t+h)-N(t)\geq 1) = 1-\mathbb{P}(N(t+h)=N(t)) = 1-\underbrace{\mathbb{P}(T(N(t)+1)-T(N(t))>h)}$$

$$= 1-\mathbb{P}(X_{N(t)}>h) = 1-\mathbb{P}(X_1>h) = 1-\lambda e^{-\lambda h} \qquad \frac{1}{h}(1-\lambda e^{-\lambda h}) \to \lambda.$$



e

$T(3)+h<T(4)$ 可以保证没有跳跃.

定义：(泊松分布) 一个RV. X 如果有平均值为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim Poi(\lambda)$. 当且仅当

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{\sum_{m\geq 0}\frac{\lambda^m}{m!}}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)$$

Note that $\mathbb{E}X = \lambda = \mathrm{Var}X$

定理：如果 $X_i \sim Poi(\lambda_i)$，则有 $\sum_{i=1}^n X_i \sim Poi(\sum_{i=1}^n \lambda)$

定理：如果 N_t 是一个强度 λ 的泊松过程，则对 $t\geq 0$，$N_t \sim Poi(\lambda t)$

证明：让 T_n 是 associated clock.

$$\mathbb{P}(N_t=n) = \mathbb{P}(T_n\leq t, T_{n+1}>t) = \int_0^t \mathbb{P}(T_{n+1}>t \mid T_n=s) f_{T_n}(s)ds$$

$$= \int_0^t \mathbb{P}(X_{n+1}>t-s)\,\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}ds$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}ds$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{1}{(n-1)!}\lambda^n\int_0^t s^{n-1}ds = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

定理：让 N_t 是一个Poisson随机过程. 选定 $s>0$. 则 $\tilde{N}_t := N_{t+s}-N_s$ 也是一个Poisson过程. 强度相同.

这与对于 $0\leq r\leq s$ 的 N_r 无关.

证明：定义 $\tilde{X}_1 = X_{n+1}-(s-T_n)$　　$\tilde{X}_k = X_{n+k}$ 在 $\{N_s=n\}$ 上面

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_1 > t \mid N_t = n) = \mathbb{P}(X_{n+1} - (s - T_n) > t \mid T_n < s,\ X_{n+1} \geq s - T_n)$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+1} > t) = \mathbb{P}(X_1 > t)$$

因此, $\tilde{X}$ 是相互独立的, 同分布的, 与过去独立的

$$N(t+s) - N(s) = \sum_{m \geq 0} \mathbb{1}\{T_m \leq t+s\} - \sum_{m \geq 0} \mathbb{1}\{T_m \leq s\} = \sum_{m \geq n+1} \mathbb{1}\{T_m \leq t+s\}$$

$$= \sum_{m \geq n+1} \mathbb{1}\{T_n + X_1 + X_m \leq t+s\}$$

$$= X_1 - (s - T_n) + X_{n+1} + \cdots + X_m \leq t$$

$$= \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_m \leq t$$

推论: 一个泊松过程有独立的增加, 亦言, N_{t_0}, $N_{t_1} - N_{t_0}$, $N_{t_2} - N_{t_1}$, $\ldots$ 均为独立的, 对于 $\forall k \geq 0$, $0 < t_0 < \cdots < t_k < \cdots < \infty$

定理: 一个随机过程 N_t 是一个泊松过程, 当且仅当,

(i) $N_0 = 0$ (ii) $N_t - N_s \sim \mathrm{Poi}(\lambda(t-s))$ 对 $\forall t > s$ (iii) N_t 有独立的 increments.

证明: 假设有 (i) (ii) 和 (iii),

$$\mathbb{P}(N_{t_k} = n_k, \cdots N_{t_1} = n_1) = \mathbb{P}(N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k - n_{k-1}, \cdots N_{t_2} - N_{t_1} = n_2 - n_1, N_1 - N_0 = n_1)$$

$$= \mathbb{P}(N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k - n_{k-1}) \cdots \mathbb{P}(N_{t_1} - N_0 = n_1)$$

Use Kolmogorov Extension Theorem