CTMC的退出时间和退出分布

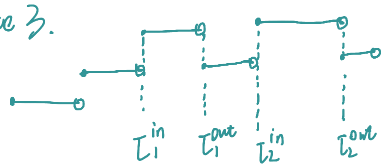
2023年11月16日 星期四　　下午10:31

问题：损失的顾客的比例是多少.

N_t：泊松过程．强度 2　记录顾客抵达

介绍 $\tau_k^{3,in}$　$\tau_k^{3,out}$　为第 k 次从 X_t 跳到 State 3 或离开 State 3.

令 $n(t)=\max\{k\geq 1,\ \tau_k^{3,in}\leq t\}$.　T_k 是 N_t 时的抵达时间



$$N_t^{lost}=\sum_{k\geq 1}\mathbb{1}\{T_k\leq t\}\,\mathbb{1}\{X_{T_k^-}=3\}=\sum_{k\geq 1}^{n(t)}N_{\tau_k^{3,out}\wedge t}-N_{\tau_k^{3,in}}$$

T_k^- 代表 $\lim\limits_{t\to T_k}X_k=X_{T_k^-}$

$$\frac{N_t^{lost}}{N_t}=\frac{1}{n(t)}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n(t)}N_{\tau_k^{3,out}\wedge t}-N_{\tau_k^{3,in}}}\Big)\left(\frac{n(t)}{\int_0^t\mathbb{1}\{X_s=3\}ds}\right)\Bigg(\underbrace{\frac{\int_0^t\mathbb{1}\{X_s=3\}ds}{t}}\Bigg)\left(\frac{t}{N_t}\right)$$

这两个Poisson过程的差

相当于一个新的泊松分布

在状态3的时间和所有时间的比例. $\pi(3)$

- $n(t)\to\infty$ 当 $t\to\infty$、概率为 1.
- 第一项为独立同分布的和　除了最后一项
- 大数定理：$E N_\tau=E\int_0^\infty N_s f_\tau(s)\,ds=\int_0^\infty 2s f_\tau(s)\,ds=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

X_t 离开 3 的次数.

$$\frac{N_t}{t}=\frac{1}{t}\sum_{k\geq 1}\mathbb{1}_{\{k\leq t\}}(N_k-N_{k-1})\to E N_1=2$$

$$\frac{N_t^{lost}}{N_t}=\frac{1}{n(t)}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n(t)}N_{\tau_k^{3,out}\wedge t}-N_{\tau_k^{3,in}}}_{EN_\tau=2/3}\Big)\Big(\underbrace{\frac{n(t)}{\int_0^t\mathbb{1}\{X_s=3\}ds}}_{\to 3}\Big)\Bigg(\underbrace{\frac{\int_0^t\mathbb{1}\{X_s=3\}ds}{t}}_{\pi(3)}\Bigg)\Big(\underbrace{\frac{t}{N_t}}_{1/2}\Big)$$

$=\pi(3)$.

定理：设 X_t 是不可降解的 CTMC，稳态分布为 π. 设 N_t 是 Poisson 过程. 强度为 λ. 跃迁时间为 T_k.

对于一个固定的 x、离开 x 的时间 X_t 并不依赖 N_t.　则有

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k\geq 1}\mathbb{1}\{T_k\leq t\}\,\mathbb{1}\{X_{T_k^-}=x\}=\lambda\,\pi(x).\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\lambda$$

因此 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1}{N_t}\sum_{k\geq 1}\mathbb{1}\{T_k\leq t\}\,\mathbb{1}\{T_k^-=x\}=\pi(x)$

Exit Time & Exit Distribution

$V_A=\inf\{t\geq 0,\ X_t\in A\}$.

$V_a = V_{\{a\}}$

评论：如果我们对 $\{V_A < V_B\}$ 感兴趣，我们不必记录时间 而只用考虑 Embedded MC

定理：考虑 CTMC，状态空间为 S. $A, B \subset S$ 使得 $C = S \setminus \{A \cup B\}$ 是有限的. 假设存在 $h: S \to [0,1]$ 使得 $h(a) = 1$

$\forall a \in A$. $h(b) = 0$. $\forall b \in B$ 并且 $\sum_{y \in S} Q(c,y) h(y) = 0$ 对 $\forall c \in C$ 如果 $P_c(V_A \vee V_B < \infty)$ $\forall c \in C$ $h(x) = P_x(V_A < V_B)$

例 (Barshop)：理发店先变满而不是先变空的概率是多少.

$A = \{3\}$. $B = \{0\}$. $Q = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ $C = \{1, 2\}$. $P_1(V_3 < V_1) = \frac{4}{19}$ $P_2(V_3 < V_0) = \frac{10}{19}$

定理：考虑一个 CTMC 状态空间为 S. 让 $A \subset S$ 使得 $C = S \setminus A$ 有限 $P_c(V_A < \infty) > 0$ 对 $\forall c \in C$

如果存在 有界的 $g: S \to R$ 使得 $g(a) = 0$ 并且 $\sum_{y \in S} Q(x,y) g(y) + 1 = 0$ 对所有 $c \in C$. $g(x) = E_x V_A$

证明：用 "Y" chain 而非嵌入式 MC.