条件期望

2023年11月28日 星期二 下午10:31

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \begin{cases} X & \text{if } \mathcal{H} = \sigma(X) \\ \frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_i)}\int_{\Omega_i} X \, d\mathbb{P} & \text{if } \mathcal{H} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\} \\ \mathbb{E}[X] & \text{if } \mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega\} \end{cases}$$

例. 对于两枚硬币. X_1和X_2. $\mathbb{E}[X_1|X_1+X_2] = \frac{X_1+X_2}{2}$

事件空间 $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$ 分割: $\{(00), (01, 10), (11)\}$

定理:(条件期望的性质) ① $\mathbb{E}[aX+Y|\mathcal{H}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$ (线性性)

② 若$X \le Y$. 则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \le \mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$ (单调性)

③ 若ϕ是convex的. $\mathbb{E}|X| < \infty$ $\mathbb{E}|\phi(X)| < \infty$ $\phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]) \le \mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{H}]$

(Jensen's Inequality).

④ 若 $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ 则 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$. (Tower Property)

⑤ 若$X \in \mathcal{H}$ $\mathbb{E}|Y| < \infty$. $\mathbb{E}|XY| < \infty$, 则 $\mathbb{E}[XY|\mathcal{H}] = X\,\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]$

评论: 如果 $\phi = |X|$. 则 $|\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]| \le \mathbb{E}[|X||\mathcal{H}]$

如果 $\phi = X^2$ 则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]^2 \le \mathbb{E}[X^2|\mathcal{H}]$

如果 $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega\}$ 则 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X]$

例: (Markov Chain) X_n. S 和 P. $\triangleq \mathbb{P}_x(X_n = y)$.

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_0) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_n = y\}}|X_0] = \sum_{x\in S} \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_n=y\}}|X_0 = x]}\,\mathbb{1}_{\{X_0 = x\}} = \sum_{x \in S} p^n(x,y)\,\mathbb{1}_{\{X_0 = x\}}$$

因此 $\mathbb{P}(X_n = y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_n=y\}}|X_0]] = \mathbb{E}\left[\sum_{x\in S} p^n(x,y)\,\mathbb{1}_{\{X_0=x\}}\right] = \sum_{x\in S} p^n(x,y)\,\mathbb{P}(X_0 = x)$

例 (Random Walk) 设X_i是平均值为μ的独立同分布.

定义 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 然后 $\mathbb{E}[S_{n+1}|X_1, \dots X_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} + S_n | X_1, \dots X_n] = \mu + S_n$

Martingales.

定义：我们说 $\mathbb{F}=\{F_n\}_{n\geq 1}$ 或者 $\mathbb{F}=\{F_t\}_{t\geq 0}$ 是一个 filtration 若 $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_{n+1}$ 或者 $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$ $\forall s\leq t$

例：典型的 filtration 是用随机过程创造的

$$F_n^X \doteq \sigma(X_1, \cdots X_n) \qquad F_t^X \doteq \sigma(X_s: 0\leq s\leq t)$$

定义：(Stopping Time) 我们称 $\tau:\Omega\to\mathbb{R}^+$ 是一个停止时间 如果 $\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t$

定义：(Adaptedness) 我们称 X_t 是 adapted to $\mathbb{F}=\{F_t\}_{t\geq 0}$ 若 $X_t\in\mathcal{F}_t$，$X_n\in\mathcal{F}_n$

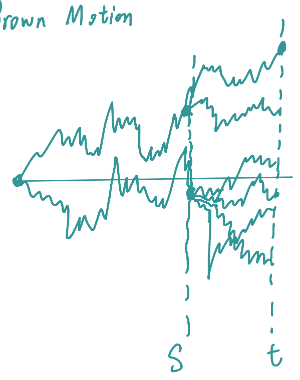
- X_t 一直是 adapted to $\mathbb{F}^X=\{F_t^X\}_{t\geq 0}$
- S_n (random walk) 是 adapted to F_n^X 的.

定义：(Martingales) 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ 是一个 filtered Sapace. 我们称一个随机过程 M_t

为 $(\mathbb{F},\mathbb{P})$-martingale 如果
- M_t is adapted to $\mathbb{F}$
- $\mathbb{E}|M_t|<\infty$.
- $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]=M_s$, $s\leq t$

例：(Brown Motion) 我们说 B_t 为 Brown Motion

- $B_0=0$
- 独立的增长
- $B_t-B_s\sim N(0,t-s)$



这是一个 Martingale 对于其自己的 filtration.

这也是一个 Markov $\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s^B]=\mathbb{E}[B_t|\sigma(B_s)]=\mathbb{E}[B_t-B_s|\sigma(B_s)]+B_s=B_s$

定义：Sub-Martingale. 上面改为 $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]\geq M_s$.

Super-Martingale 上面改为 $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]\leq M_s$.

Super - Martingale 上面改为 $\mathbb{E}[M_t|F_s] \le M_s$.

例子: (Asymmetric Simple RV) 设 X_i 为 $+1$ 概率 p，-1 概率 $q=1-p$

然后 $\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = S_n + (p-q)$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

S_n是一个 Sub-martingale 对于 $p>q$. 否则为 Super-martingale.

$S_n - (p-q)$ 是一个 Martingale

然后. $\hat{M}_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ 是一个 martingale

显然 adapted to $\mathcal{F}_n^X$ 的 $\left(\frac{q}{p}\right)^n + \left(\frac{q}{p}\right)^{-n} < \infty$

$$\mathbb{E}[\hat{M}_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = \mathbb{E}\left[\hat{M}_n \left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n^X\right] = \hat{M}_n \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\right]$$

$$= \hat{M}_n \left[(q/p)^1 p + (p/q) q \right] = \hat{M}_n$$