Exponential Distribution

2023年10月5日 星期四　　下午9:55

指数分布：我们说 X 是一个随机向量符从指数分布，有参数 λ，$X \sim Exp(\lambda)$ 当 $P(X \le t) = [1-e^{-\lambda t}]\mathbb{1}_{\{t \ge 0\}}$.

有，其密度函数为 $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\{t \ge 0\}}$

$$EX = \int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var\,X = EX^2 - E^2X = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

如果 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$　$X \sim Exp(\lambda_1)$　$\frac{1}{\lambda_2}X \sim Exp(\lambda_1 \lambda_2)$　$P(\frac{1}{\lambda_2}X \ge t) = P(X \ge \lambda_2 t) = e^{-\lambda_1 \lambda_2 t}$

无记忆性：指数分布是唯一满足 $\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$，对于任意的 s 和 t.

Exercise. 证明这个性质的唯一性.

几何分布：定义成功率为 $\frac{\lambda}{n}$.　X_n 为第一次成功的时间

$$P(nX_n = k) = (1-\frac{\lambda}{n})^{k-1}(\frac{\lambda}{n}) \qquad P(nX_n > k) = (1-\frac{\lambda}{n})^k \qquad P(X_n > t) = \mathbb{P}(nX_n > nt) \simeq (1-\frac{\lambda}{n})^{nt} \to e^{-\lambda t}$$

- Partical Decay.
- DNA mutation 之间的距离
- 接到电话的时间
- 顾客服务时间

性质

让 $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$. ⋯ 然后有 $\min_{1 \le i \le n} X_i$ 是指数的

$$\mathbb{P}(\min_{1 \le i \le n} X_i > t) = \mathbb{P}(X_1 > t) \cdots \mathbb{P}(X_n > t) = e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t}$$

定理：对于两个指数分布 $X_1 X_2$，$\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \int_0^\infty f_{X_1}(t)\,\mathbb{P}(X_2 > t)\,dt = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

定理：对于 $1 \le i \le n$ 假设 $X_i \sim Exp(\lambda_i)$　令 $V = \min X_i$　$I = \arg\min_i X_i$. 则有

$$P(V > t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i)t}, \quad P(I = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}$$ 更进一步，有 I 和 V 是独立的.

证明：令 $V^{-i} = \min_{j \ne i} X_j$.　$P(I = i) = \mathbb{P}(X_i < V^{-i}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}$

而对于独立性，$P(I = i, V < t) = \mathbb{P}(X_i < t, X_j > X_i, \forall j \ne i) = \int_0^t f_{X_i}(s)\,\mathbb{P}(X_j > s, \forall j \ne i)\,ds$

$\int^t \cdots e^{-\lambda_i s} \cdots e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n - \lambda_i)s} \cdots \lambda_i \cdots e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t} \cdots$

而对于独立性. $P(I=i, V<t) = P(X_i<t, X_j>X_i, \forall j\neq i) = \int_0^t f_{X_i}(s)\, P(X_j>s, \forall j\neq i)\, ds$

$$= \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n-\lambda_i)s} ds = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\left[1-e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t}\right] = P(I=i)P(V<t)$$

定理：设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立的指数分布有参数 λ. 然后 $X_1+X_2+\cdots+X_n = T_n$ 的分布是 Gamma(n,λ)

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad t>0$$

例：有两个服务器. 一个买商品, 一个收钱, 服务时间的参数分别为 λ_g 和 λ_p 第一个服务器有一个客户. 如果有新客户来了

新客户的预计花的时间

C_2^1：^{1} → server；C → customer在server上花的时间；$_2$ → customer

$$C_1^1 + \max(C_1^2 + C_2^1) + C_2^2$$

$$E[C_1^1 + C_1^2 + C_2^1 - \min(C_1^2, C_2^1) + C_2^2].$$

建议的练习：2.1. 2.5. 2.6. 2.45. 2.47. 2.48. 2.49.