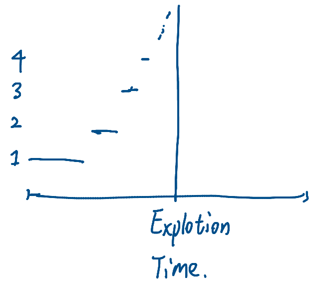
Continuous Time Markov Chain II

2023年11月2日 星期四　　下午9:33

Assumption 6.3. (i) CTMC 正确连续 (Right Continous) 即 $\mathbb{P}\left(\lim_{h\to 0} X_{t+h}=X_t\right)=1$

(ii)-a: CTMC 指定 $q(x,y)$ 的跃迁率 (jump rate) $\underbrace{-q(x,x)<\infty}_{\text{不能立刻跃迁}}$ 并且 $\sum_y q(x,y)=0$. $\forall x\in S$.

(ii)-b: CTMC 指定 $q(x,y)$ 的跃迁率 $\underbrace{\sup_{x\in S}(-q(x,x))<\infty}_{\text{No Explosion}}$ 并且 $\sum_y q(x,y)=0$ $\forall x\in S$.



(但实际上只需要 (ii)-b)

例子 (Blackwell). 对于 CTMC 们,如果它们在有限的时间间隔里跳了无限多次.

$$\sum_y \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{P}_t(x,y)-\mathbb{1}_{\{x,y\}}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sum_y \mathbb{P}_t(x,y)-\mathbb{1}_{\{x,y\}}=0.$$

定理 6.6. 假设 6.3 的假设成立. 令 $\lambda_x=-q(x,x)<\infty$. 然后有

(i) CTMC 第一次离开状态 x 为参数为 λ_x 的指数分布.

(ii) 如果 $\lambda_x=0$ 则 CTMC 永远不会离开 x.

(iii) 如果 $\lambda_x>0$. 则 CTMC 跳到不同状态 $y\neq x$ 的概率 $\frac{q(x,y)}{\lambda_x}$.

证明: 令 $T_x=\inf\{t>0,\ X_t\neq x\}$ 将 $[0,t]$ 切割 $t_k^n=\frac{k}{n}t$.

$$\mathbb{P}(T_x>t)=\mathbb{P}_x(X_s=x,\ \forall s\in[0,t])=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_x\left(X_s=x,\ \forall s\in[0,t]\ \middle|\ X_{t_1^n}=x,\cdots X_{t_n^n}=x\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_x(X_{t_1^n}=x,\cdots X_{t_n^n}=x)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_{t_n^n}=x\mid X_{t_{n-1}^n}=x)\,\mathbb{P}(\cdots\quad \mathbb{P}(X_{t_0^n}=x)\cdot$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(P_{t/n}(x,x)\right)^n=\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{P_{t/n}(x,x)-1}{(t/n)}}_{q(x,x)}\left(\frac{t}{n}\right)+1\Big)^n$$

$$=e^{q(x,x)t}=e^{-\lambda_x t}$$

(上面同时证明了 (i) 和 (ii)) $\boxed{//}$

而对于 (iii) 记 f_{T_x} 是 T_x 的概率密度.

$$P_x(X_{T_x}=y)=\int_0^\infty \mathbb{P}_x(X_s=y\mid T_x=s)f_{T_x}(s)\,ds=\int_0^\infty \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}_x(X_s=y\mid X_{s-\varepsilon}=x,\ T_x=s)f_{T_x}(s)\,ds$$

$$= \int_0^\infty \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{P_\varepsilon(x,y)}{1-P_\varepsilon(x,x)} f_{\tau_x}(s)\,ds = \int_0^\infty \frac{q(x,y)\varepsilon+o(\varepsilon)}{-q(x,x)\varepsilon+o(\varepsilon)} f_{\tau_x}(s)\,ds = \frac{q(x,y)}{\lambda_x}$$

因为ε很短所以 认为只跳一次

定理 6.7. 假设跳迁率 $q: S\times S\to\mathbb{R}$ 给定 $\sup_x \sum_{y\neq x} q(x,y) < \infty$, 则存在一个CTMC跳迁率为 $\frac{q(x,y)}{\lambda_x}$.

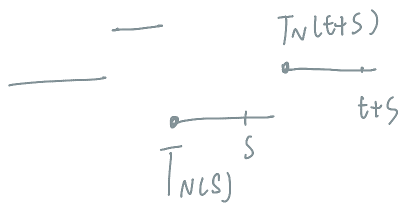
证明: 找一个离散MC Z_n, 迁移概率为 $q(x,y)/\lambda_x$ 定义 $\lambda_x = \lambda(x) = \sum_{y\neq x} q(x,y)$.

找独立的指数钟 (exponential clock) $\tau_0, \tau_1, \cdots$ 有 rate 1.

任 $t_{n+1} = \frac{\tau_n}{\lambda(Z_n)}$ 并且令 $T_n = t_1 + \cdots t_n$ 令 $X_t := Z_{N(t)}$ $N(t) := \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}\{T_n \leq t\}$

来显现 Markov 性. $T_{N(t)} < t < T_{N(t)+1}$ $X_s = Z_{N(s)} = Z_{N(T_{N(s)})} = X_{T_{N(s)}}$

$$\mathbb{P}(X_{t+s}=y \mid X_s = x, X_{s_n}=x_n, \cdots X_{s_0}=x_0) = \mathbb{P}(X_{T_{N(t+s)}}=y \mid X_{T_{N(s)}}=x, X_{T_{N(s_n)}}=x_n, \cdots X_{T_{N(s_0)}}=x_0)$$



$$\mathbb{P}(X_{T_{N(t+s)}}=y \mid X_{T_{N(s)}}=x, X_{T_{N(s_n)}}=x_n, \cdots X_{T_{N(s_0)}}=x_0) = \mathbb{P}(X_{T_{N(t+s)}}=y \mid X_{T_{N(s)}}=x)$$

$$= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_{N(T_{N(s)})+k}=y \mid Z_{N(T_{N(s)})}=x)\,\mathbb{P}(N(T_{N(t+s)}) = N(T_{N(s)})+k \mid Z_{N(T_{N(s)})}=x)$$

$$= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_k=y \mid Z_0=x)\,\mathbb{P}(T_k \leq t < T_{k+1} \mid Z_0=x) = P_t(x,y)$$

在小时间内只要跳一次就行了 $\frac{d}{dt} P_t(x,y)\Big|_{t=0} = \frac{q(x,y)}{\lambda_x} \frac{d}{dt}(1-e^{-\lambda_x t})\Big|_{t=0} = q(x,y).$