L15 Forms and Tensor

2024年3月11日 星期一 09:57

<u>Sympletic Maps.</u>

$S.\quad S^TJS = J$ $\qquad \dot{x} = \underbrace{JH}_{\text{Hamotonian Matrix}} x \quad \Rightarrow \quad x(t) = \underbrace{e^{At}}_{\text{Sympletic}} x_0$

Sympletic Map Φ.

Stability of Map.

Transformation S 是 stable 的若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0.\ |x| < \delta \Rightarrow |S^N x| < \varepsilon \quad \forall N$

因此若一个 S 的 eigen value 在单位圆之外(不在单位圆上) ⇒ Unstable.

因为有一个在外必有一个 $\frac{1}{\lambda}$ 在内

定义: 一个辛变换 S 被称为强稳定的, 若所有的靠近于 S 的辛变换是稳定的.

定理: 如果一个辛变换所有的特征值均不同而且在单位圆之上, S 是强稳定的

<u>Pf</u>: 因为所有特征值在单位圆上 ⇒ 显然稳定

$S: 2n \times 2n$ $\quad 2n$ 个特征值是不同的 $\quad$ 对每一个 e.v. 画一个小圆, 但没有碰到另一个特征值

如果在这个小圆里面有另一个特征值不在小圆上 ⇒ 则会导致 eigen value 数量增加

因此这个 S 是难以干扰的

<u>Groups</u> (辛群 / 正交群 / 可逆群 / 流形)

Groups G. (Lie 群的特殊情况) 李群: 群 + 流形

定义了 TG. T^*G (Tangent Space / Co-Tangent Space).

群有一个单位元. e. 而 T_eG 称为 Lie - Algebra

— tangent vector at e

- tangent vector at e

- $g(t)$ $\quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(t)$ when $g(0)$.

Lie-Algebra element A. $\quad e^{tA} \Rightarrow$ 群的元素.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tA} = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots\right) = A.$$

Cotangent Bundle

- 有一个天然的辛结构

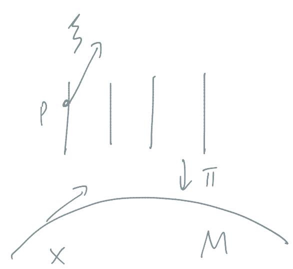
令M是一个微分流形. 令T^*M是一个 Cotangent Bundle

T^*M的一个点是在M上的一个点加上一个在这个点切向量空间上的 1-form

令q是 local coordinates 的一个选择. 设 p 是一个 local coordinates 上的 form

(q, p) - T^*M 的 local coordinate.

令π是一个 Canonical Projection $\quad \pi: T^*M \to M$



定理: T^*M是一个辛流形 在 local coordinates (q,p)上

Symp form $\omega = dq^1 \wedge dp_1 + \cdots + dq^n \wedge dp_n$

Pf: 定义一个 distinguished 1-form on T^*M

T^*M 也是一个流形

令 $\xi \in T(T^*M)_p$ 是一个 tangent to cotangent bundle 的向量.

在点 $\in T^*_x M$.

所以 π的微分 $\quad T\pi = \pi_x \quad\quad T(T^*M) \to TM$.

定义 $\omega^1(\xi) = p(\pi^* \xi)$

定义 $\omega^1(\xi) = p(\pi^* \xi)$

在 local coordinates 里面 $\omega^1(\xi) = p\,dq$

Symplectic form 可以由 $p\,dq$ 给出! $dq \wedge dp = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i$

Locally: Dynamics corresponding to H on T^*M. 就是 $\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$

e.g. H on T^*S^2 e.g. $S^2 \times S^2$

Darboux's Theorem

任何的辛流形 (M, ω) 有一组 local coordinate s.t. $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i$

Differential forms & Tensors

假设我们有一个在 M 上的 2-form

Ω on M: $\Omega(x) : T_xM \times T_xM \longmapsto \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ Skew Symmetric Bilinear

因此在 M 上面的 k-form

α on M: $T_xM \times \cdots \times T_xM$ (k次). assiging to each $x \in M$.

a skew symmetric k-multilinear map on T_xM, tangent space to M at x.

交换任何两个元素 $\alpha \to -\alpha$.

Remark: 去掉 Skew-Sym 条件. Ω 被称为 $(0, k)$ tensor.

吃 k 个 vec. generalized 点积

一个 Map $\alpha: V\times \cdots V$ (k-factor). multi-linear 如果对每个元素都线性

Skew / Alternating. 交换两个变负的.

$$\det \{e_1, e_2, \cdots e_n\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right\} \quad \text{— } T_xM \text{ 的 basis}$$

$dx^1, dx^2 \ldots dx^n$ T_xM 的对偶空间

Then 在每一个 $x \in M$. $\Omega(x)(v, w) = \Omega_{ij}(x)\, v_i w_j$

$$\Omega_{ij}(x) = \Omega(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \qquad v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad w = \sum_{i=1}^{n} w^i \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\alpha(x)[v_1, \cdots v_k] = \alpha_{i_1, i_2, \cdots i_k}(x)\, v^{i_1} \cdots v^{i_k}$$

$$\alpha_{i_1, \cdots i_k}(x) = \alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

Tensor product

Given α $(0,k)$ tensor on M. $\qquad \alpha \otimes \beta$ $(0, k+l)$ tensor

β $(0, l)$

$$(\alpha \otimes \beta)(x)(v_1, \cdots v_{k+l}) = \alpha(x)(v_1, \cdots v_k)\, \beta(x)(v_1, \cdots v_k)$$

要把这个东西做成 form. Alternating Operator

$$A(t)(v_1, v_2, \cdots, v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn}(\pi)\, t(v_{\pi(1)}, \cdots v_{\pi(n)})$$

let α be a k-form, β l-form on M.

wedge product: $\alpha \wedge \beta$ $(k+l)!$ $A(\alpha \otimes \beta)$

定义 wedge product : $\alpha\wedge\beta = \dfrac{(k+l)!}{k!\,l!} A(\alpha\otimes\beta)$

性质: ① $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) = (\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$

② $\alpha\wedge\beta$ 是 bilinear 的.

③ $\alpha\wedge\beta = (-1)^{k+l}\beta\wedge\alpha$