L11 Manifolds

2024年2月19日 星期一 10:03

Pontriyagin. (Hamiltonian)

p: Costate

$$\hat{H}(x,p,u) = \underbrace{\langle p, f(x)\rangle}_{\text{Constraint}} - \underbrace{p_0 g(x,u)}_{\text{Cost.}} \Rightarrow \text{maximize over } u. \Rightarrow u^* \Rightarrow u(p,x).$$

Heisenberg : 磁场中粒子的特殊情况

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = A_1 u + A_2 v \end{cases} \qquad g(x,u) = \frac{u^2+v^2}{2}$$

$$H = \underbrace{p_1 u + p_2 v + p_3 (A_1 u + A_2 v)}_{\langle p, f(x)\rangle} - \underbrace{\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}}_{g} \qquad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = p_1 + p_3 A. \\ v = p_2 + p_3 A. \end{cases}$$

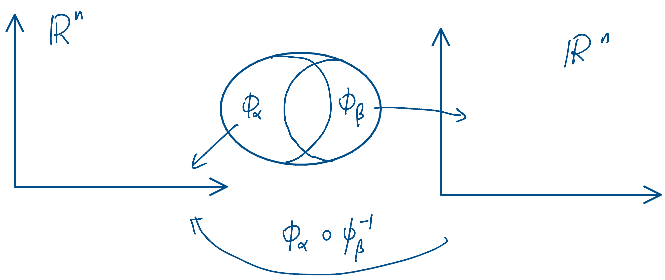
代入H. $H = \frac{1}{2}\left[(p_1 + A_1 p_2)^2 + (p_2 + A_2 p_3)^2\right]$ 这是一个磁场中粒子的 Hamaltonian!

p_3 - cyclic. $\dot{p}_3 = 0$ Set $p_3 = \frac{e}{c}$.

例: Sub-Riemannian Rigid Body.

Manifolds

Differencial Manifold M:



定义: $N \subset M$ 是一个 p维 sub-manifold 当且仅当 对任意的 $q \in N$. $\exists$ chart (V, ϕ).

定义：$N \subset M$ 是一个 p维 sub-manifold 当且仅当 对任意的 $q \in N$. $\exists$ chart (U, Φ).

$q \in U$. 使得 $\Phi: U: (x_1, \cdots x_n)$ $\Phi|_{U \cap N} = (x_1 \cdots x_p, 0, \cdots 0)$.

定义：(Embeded Manifold). 若 M 是一个 $\mathbb{R}^n$ 上面的 embeded K维子流形 $x \in M$.

存在 n-k 个函数 $f_1: U \to \mathbb{R}$ ·· $f_{n-k}: U \to \mathbb{R}$. 满足

intersection of U with M. 由 $f_1 = 0, \cdots f_{n-k} = 0$ 给出.

要求 grad f_1, grad f_2, ·· grad f_{n-k} 是线性无关的

嵌入式流形的切向空间.

M 是一个 K维 $\mathbb{R}^n$ 上的嵌入式流形 在每个点 x, 有一个K维切向空间 $T_x M$.

$T_x M$ 为 the orthognal complement (垂直补全) 相对于 grad f_1, ·· grad f_{n-k} 在 $x \in M$ 点

Tangent Bundle $\cup_x T_x M$.

Tangent Map

给定 E. F. v. spaces $f: U. \subset. E \to V. \subset. F$.

Tangent Map $Tf \cdot TU = U \times E \to TV = V \times E$.

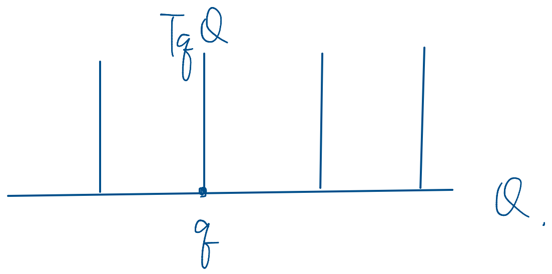
$Tf(u, e) \to (f(u), Df(u) \cdot \underset{\sim}{e})$ $\underset{\sim}{e} \in E$. Tf class C^r

Tangent Space identified with curves $c(t)$ $c(t) = \underset{\sim}{x} \in M$

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

local co-ords: 若 $M = Q$ (a configuration space).

$$(q,\dot{q}) = (q_1, q_2, \cdots q_n, \dot{q}_1, \cdots \dot{q}_n).$$



$\pi: TQ \to Q$

$T_qQ = \pi^{-1}(q).$

流形之间的切向映射

切向映射 of C^1 map $f: M \to N$. M, N 是在 m点 $\in M$ 的 微分流形 是一个线性映射. $T_mf = f_m : T_mM \to T_{f(m)}N.$

defined as follows.

$\underset{\sim}{v} \in T_mM$. Curve $\underset{\sim}{c}(t)$ with $\underset{\sim}{c}(0) = m$. 并且 $\left.\frac{d\underset{\sim}{c}}{dt}\right|_{t=0} = \underset{\sim}{v}$

因此有 $T_mf(\underset{\sim}{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\underset{\sim}{c}(t)) = Df\, v \equiv \frac{\partial f_j}{\partial x_i} v_i = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f_j$

Remark

① TS^1 is isomorphic to $S^1 \times \mathbb{R}$. (trivial)

② TS^2 not isomorphic to $S^2 \times \mathbb{R}^2$ (non-trivial)

Vector field

map $\underset{\sim}{X}: M \to TM$. s.t. $\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{m}) \in T_m M$ $\forall m \in M$.

Integral Curves & Diff Equs.

$X \in \mathcal{X}(M)$: 一个M上的向量场

X的一个 integral curve s.t. 对于$\underset{\sim}{m} \in M$. 是一个 curve $\underset{\sim}{c}(t)$ s.t. $\underset{\sim}{c}(0) = m$.

是一个 curve $\underset{\sim}{c}(t)$ 使得 $c'(t) = \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{c}(t))$ 对 $\forall t \in [a,b]$ $\underset{\sim}{c}(0) = \underset{\sim}{m}$.

- 在 $\mathbb{R}^n$中局部定义的.
- 存在+唯一性.

$$\begin{cases} c_1'(t) = X^1(c_1(t), \cdots c_n(t)) \\ \vdots \\ c_n'(t) = X^n(c_1(t) \cdots c_n(t)) \end{cases}$$

例: ① 对流形 $\mathbb{R}^n$ $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ $\underset{\sim}{x}(0) = \underset{\sim}{v}$ 解为 $\underset{\sim}{x}(t) = e^{At}\underset{\sim}{v}$

② $\dot{X} = AX$. $X, A \in SO(3)$ $X(0) = X_0$. 解为 $X(t) = e^{At}X_0$

这是因为 $(e^{At})^T = e^{-At}$ orthog 只需 A 是 Skew 的

$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \cdots$

e^{At} 是 $SO(3)$中的一条曲线 $c(t) \in SO(3)$ → One-parameter Group.

Tangent Space to a group at identity e 被称为这个群的李代数.

在群的单位元特殊的点. $T_e G$. 李代数.

Special Dynamics on Manifolds.

① Gradient Flows
② Geodesic Flows } 黎曼 metric
③ Hamotonian Flows
- Poisson
- Symmetric

黎曼流形

一个 Diff Manifold with a pos def:

Quadratic form $\langle , \rangle$ m every tangent Space $T_m M$. 称为 Remannian.

二次形 $\langle , \rangle$, 通常用 $g(,)$ 来表示, 被称为黎曼 metric

在 Local co-ord 里面. $q^i \in Q$. 一个向量 $\underset{\sim}{v} \in T_q Q$ 的长度是 $g(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{v}) = \langle \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{v} \rangle$

$$\langle \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(\underset{\sim}{q})\, q^i q^j$$

$\langle \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{v} \rangle = \underset{\sim}{v}^T G \underset{\sim}{v}$ - example of contravariant tensor.

Gradient flow on Manifold

考虑一个 Riem 流形 M 上面的光滑函数, 度量为 $g(\cdot,\cdot) = \langle , \rangle$

The gradient flow of f on M, grad f 是一向定义为

$df = \langle \text{grad } f, \underset{\sim}{v} \rangle$ 对 $\forall \underset{\sim}{v} \in TM$ 的向量场.

例: $\mathbb{R}^n$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n})$