L13 Poncare Forms

2024年3月4日 星期一 09:58

Manifold M. TM.

$T=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$ $V=0 \Rightarrow$ geodesic flow

Liouville's Theorem: $H(q,p)$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上面.

$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$. $\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$. Flow ϕ^t

定理: phase flow (相流) ϕ^t 对于任给区域 D 保守体积 即 $vol(\phi^t(D))=\phi^t(D)$

证明: 给定 $\dot{x}=f(x)$, $X=(x_1,\cdots x_n)$ (之后再看 Hamoltonian case)

Flow ϕ^t group of transformations

Locally. $\phi^t(x)=X+f(x)t+o(t^2)+\cdots$

$D(0)$ - region in X-space. $V(0)$ - volume.

令 $v(t)=vol\ D(t)$. $D(t)=\phi^t(D(0))$

引理: 若 $\operatorname{div} f=0$. ϕ^t 保守体积 即 $V(t)=V(0)$.

证明: $v(t)=\int_{D(0)}\det\frac{\partial\phi^t(x)}{\partial x}dx$

$\phi^t(x)=x+f(x)t+\cdots$ $\frac{\partial\phi^t(x)}{\partial x}=I+\frac{\partial f}{\partial x}t+o(t^2)$

因为有公式 $\det(I+At)=1+t\cdot TrA+o(t^2)+\cdots$ $t\to 0$.

而 $Tr\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=\operatorname{div} f$

$v(t)=\int_{D(0)}[1+t\operatorname{div} f+o(t^2)+\cdots] \Rightarrow \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0}=\operatorname{div} f$

因此只要 $\operatorname{div} f=0$ 就有体积守恒.

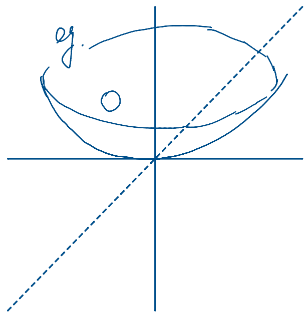
特殊的. 对于 Hamoltonian $\operatorname{div} f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)-\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0$.

Application: Poincaré's recurrence theorem

令ϕ是一个 volume preserving 1-1 map 即 $\text{vol}(D) = D$ 则在任何 neighbourhood U

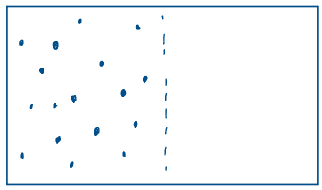
任何一个D中的点，存在点 $x \in U$ $\phi^n(x) \in U$ 对某些 $n > 0$.

e.g. (phase flow) ϕ^t of 2维系统 势能 $U(x_1,x_2) \to \infty$. 当 $(x_1,x_2) \to \infty$.



ball in a bowl.

球在乱转后会回到原点.



气体分子会最终回到左半边.

经过足够长时间

证明: $U.\ \phi U.\ \phi^2 U \cdots\cdots \phi^n U$ 所有的都有一样的体积.

如果所有的都不相交 $\Rightarrow$ infinite volume

$\exists\ k.\ \ell.$ $\phi^k U \cap \phi^\ell U \neq \phi$ 因为ϕ invertible. $\phi^{k-\ell} U \cap U \neq \phi$.

因此如果 y 在 U的内部 $y = \phi^n x$ with $x \in U$ $n = k-\ell$. $x \in U$. $\phi^n x \in U$.

混沌: 用 Poncare's Theorem 混沌总会回到起点.

<u>Manifold Setting</u> for Hamiltonian Sys.

$\mathbb{R}^n$. <u>1-form</u> an vector space $\mathbb{R}^n$ is a linear function mappings $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

加法和点乘之下 这样 form 的集合是一个 vector space $\mathbb{R}^n$ 的对偶空间: $(\mathbb{R}^n)^*$

如果 $\phi_1, \cdots \phi_n$ 是一组基 for $\mathbb{R}n^*$ $w = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i$ $w(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(v)$, $v \in \mathbb{R}^n$

Dual-basis: $\begin{cases} \theta_i & \text{s.t. } \phi_i(e_j) = \delta_{ij} \\ e_i & \text{basis of } \mathbb{R}^n \end{cases}$

三 1-form 投影为 ω^2 一个在一组向量上的双线性 反对称函数

而 2-form 指的是 w^2 一个在一组向量上的双线性、反对称函数

即 $\begin{cases} w^2(\lambda_1 \underset{\sim}{v_1} + \lambda_2 \underset{\sim}{v_2}, \underset{\sim}{v_3}) = \lambda_1 w^2(\underset{\sim}{v_1}, \underset{\sim}{v_3}) + \lambda_2 w^2(\underset{\sim}{v_2}, \underset{\sim}{v_3}) \\ w^2(\underset{\sim}{v_1}, \underset{\sim}{v_2}) = -w^2(\underset{\sim}{v_2}, \underset{\sim}{v_1}). \end{cases}$

Exterior Product

两个 1-form 的 exterior product 是一种 2-form. 有两个 1-form w_1 和 w_2

$$w_1 \wedge w_2(\underset{\sim}{v_1}, \underset{\sim}{v_2}) = \begin{vmatrix} w_1(\underset{\sim}{v_1}) & w_2(\underset{\sim}{v_2}) \\ w_1(\underset{\sim}{v_2}) & w_2(\underset{\sim}{v_1}) \end{vmatrix}$$

Differencial form.

给定一个流形 M. $f: M \to \mathbb{R}$.

$\underset{\sim}{x} \in M$ $c(t)$ 在 curve M 上面光滑.

在 x点 f 的微分 f_x 是一个 linear map df_x $T_xM \to \mathbb{R}$ 定义为 $\underset{\sim}{V} = \frac{d}{dx}\Big|_{t=0} c(t)$.

$\underset{\sim}{V} = \frac{d}{dx}\Big|_{t=0} c(t)$ $\quad df_x(\underset{\sim}{v}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(c(t)) = .$

df_x 是一个 1-form on T_xM. $\quad df: TM \to \mathbb{R}$ where $df_x: TM_x \to \mathbb{R}$

Diff 2-form

w_x^2 在一个 $\underset{\sim}{x} \in M$ 上是一个 extension 2-form on tangent space T_xM.

$T^*M = \cup_x T_x^*M$. $\quad T_xM$- 在x点 M的 Tangent Space. T_x^*M : covectors on T_xM.

Hamtonian flows on $\mathbb{R}^{2n}$

Ham Sys (M, H, w)

Ham Sys (M, H, ω)

ω ↓ sympletic form

Differencial 2-form : $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i$ → Sympletic Form

Then Hamiltonian vector field

$$X_H : \omega(X_H, \eta) = dH\,\eta$$