L14 Sympletic Transformation

2024年3月10日 星期日　19:47

在 $\mathbb{R}^n$ 上面的 Hamilton flow.

$\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$　　$\omega(X_H, \eta) = dH \cdot \eta$

注意我们定义 $\omega_1 \wedge \omega_2 (v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_2(v_2) \\ \omega_1(v_2) & \omega_2(v_1) \end{vmatrix}$　是一种 2-form

dq_i 是一种 1-form.　dp_i 是一种 1-form　　$\omega = dq^i \wedge dp_i$ 是一种 2-form

$\omega(X_H, \eta) = dH \cdot \eta$

而 $X_H = \sum_i X_{q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_i X_{p_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$　　　$\eta = \sum_i \eta_{q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_i \eta_{p_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$

$RHS = dH \cdot \eta = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \eta_{q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \eta_{p_i} \right)$

$LHS = \omega(X_H, \eta) = \sum_{i=1}^n \left(dq^i(X_H)\, dp_i(\eta) - dq^i(\eta)\, dp_i(X_H) \right) = \sum_{i=1}^n X_{q_i} \eta_{p_i} - \eta_{q_i} X_{p_i}$

令 $dH \cdot \eta = \omega(X_H, \eta)$

$X_{q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$　　$X_{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$　　即为 Hamotonian !

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$　　$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Hamiltonian equation:
① Lagrangian 和 Lagendre Transform
② Variational Principal.　$\delta \int_0^T \left(\sum \dot{q}^i p_i - H \right) dt = 0$
③ Poisson Bracket　$\dot{F} = \{F, H\}$

而对于 $dH \cdot \eta$ 为内积.

$$\omega(X_H, \cdot) = dH \cdot \cdot = i_{X_H} \omega = \underbrace{dH}_{\text{1-form}}.$$

推广到 Symplectic Manifolds. (M, ω) ⇒ 需要是偶数维度.

More general : Poisson Manifold : $(M, \{\ \})$.

More general: Poisson Manifold: $(M, \{\ \})$.

例: $SO(3)$ $\{f,g\}(\Pi) = -\Pi \cdot \nabla f \times \nabla g$

2-form: Ω 在流形 M 上.

Skew Martix.

$\Omega_x: T_xM \times T_xM \longmapsto \mathbb{R}$ $\quad \Omega_x(v,w) = \sum_{i,j} w_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j (v,w)$.

$$= \sum_{i,j} w_{ij}(x)\,(v_i w_j - w_i v_j)$$

定义 Sympleetic Vector Spaces.

(E, w) $\quad$ E: vector spce. $\quad$ W: E上面一个 non-degenerate 的 2-form.

例: 若 α_i 是一个 E 的对偶空间, w 可以被写作 $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \wedge \alpha_{i-m}$

Linear Transformation S 被称为 Sympletic 如果 $[S_\xi, S_\eta] = [\xi, \eta]$

性质: 所有 Sympletic 变换是一个群, 被称为 Sympletic group $Sp(2n)$

如果考虑 coordinates (q^i, p_i) $\quad W = \sum dq^i \wedge dp_i$

S是 Sympletic 的如果 $S^T J S = J$. 其中 $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$

定义: Linear Mapping $u: \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$ 是一个 infnitesinal Sympletic

$$w(ue, e') + w(e, ue') = 0 \qquad \text{对于 } e, e' \in \mathbb{E}$$

引理: 如果 A是 Hamotonian. e^A 是 Sympletic.

线性系统 $\dot{x} = Ax$. $\quad \Phi(t) = e^{At} x_0$ flow 保留 Symp

定义：一个变换 S 被称为稳定的，如果 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$. s.t. 若 $|x| < \delta$ 则 $|S^N x| < \varepsilon$ $\forall N$.

定义：一个辛变换 S 被称为强稳定 如果 每个辛变换 sufficiently close to S 是稳定的

Strongly Stable (所有的 Norm 都等价)

定理：如果所有 $2n$ 维的在单位圆上面的辛变换 S 不同，S 是强 Stable 的.