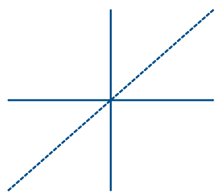
L10 Vector Fields

2024年2月14日 星期三 10:03

Vector Field.



$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,z) \\ \dot{y} = f(x,y,z) \\ \dot{z} = f(x,y,z) \end{cases} \qquad X = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

例: 海森堡系统 $\dot{x} = u(t)$. $\dot{y} = v(t)$. $\dot{z} = yu - xv$.

$$X_u = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_v = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}$$

(类似于 打开u和打开v.)

Generally $\dot{x} = \underbrace{f(x)}_{\text{Drift}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)}_{\text{Control Terms}}$.

No Drift: System Kinematic

Optimal Control — Pontryagin Max Principal

$\min \int_0^T g(x,u)\,dt$ s.t. ① $\dot{x} = f(x,u)$. $x \in M$. $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^k$.

② $x(0) = x_0$. $x(T) = x_T$ f, g. 是 Smooth 的.

ODE: Initial Value Problem. (IVP).

Opt Ctrl: 2 point Boundary Value Problem (BVP).

Pontryagin

Set $\hat{H}(x, p, u) = \langle p, f(x) \rangle - p_0 g(x,u)$ $p_0 \geq 0$.

p - Co-State Variable. ~ 拉格朗日乘子.

$t \to u^*(t)$. 存在使得下列等式成立的最优曲线

$$H(x(t), p(t), u^*(t)) = \max_{u \in \Omega} \hat{H}(x(t), p(t), u(t))$$

$u\in\Omega$ $(\ldots, p(t), u(t))$

Extremal Trajectory 是 normal (正则) 的 若 $p_0 \neq 0$. 若 $p_0 = 0$. 称为非正则的 (abnormal).

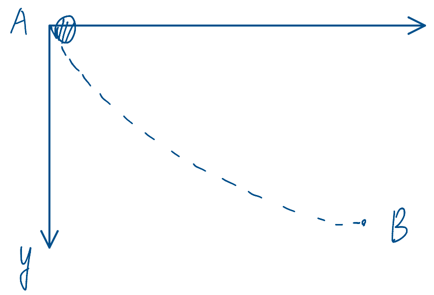
- u^* 如果不能被上面的东西 define ⇒ 称 轨迹为 奇异的 (Singular).

- 如果能解出 u^*. 则 $u^* = K(x(t), p(t))$

$$\Rightarrow \delta \int_0^T \left(\hat{H}(x, p, u) - p\dot{x} \right) dt = 0. \quad \text{代入 } u = u^*$$

$$\delta \int_0^T (H(x,p) - p\dot{x})\, dt = 0.$$

Brachistochrone. 最速降线问题.



让粒子用最短的时间从 $A \to B$.

$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0.$ 令 $m=1$. $g = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow v = \sqrt{y}$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{y}.$$

$$\min J(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}}\, dx.$$

Solution: Cycloid. $x(\theta) = a + c(\theta - \sin\theta)$ $y(\theta) = c(1 - \sin\theta)$

自然界中两点之间的最速线也是 Cycloid.

Differentiable Manifolds

~ Space Locally Like $\mathbb{R}^n$.

定义: n维微分流形 是一组点 以及一组有限或可数的子集的集合 $V_\alpha \subset M$.

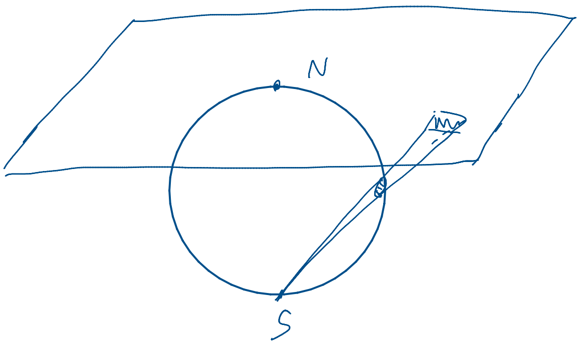
以及 1-1 mapping $\phi_\alpha : U_\alpha \to R^n$

使得 ① $\cup U_\alpha \subseteq M$,

② $\phi_i(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是 R^n 的一个开子集.

③ $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上是 Smooth 的函数.

这些 maps 的 collection 称为 M 的一个 atlas　　ϕ_α 称为定义了一个 Chart.



Projection. Mapping (ϕ_i).

e.g. $T^n = S^1 \times S^1$

有一个大圆和小圆 $\Rightarrow S^1 \times S^1$

e.g. $SO(n)$. - special orthogonal group.

$SO(3)$ - manifold and a group.

Tangent Bundle.

Tangent map: E. F. 是 vector space $f: U \subset E \to V \subset F$.

U, V 是 open sets. 定义 切线映射 (tangent map). Tf (f_*).

$Tf: TU = U \times E \to TV = V \times F$.

$$Tf(\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{e}) = (f(u), Df(v)\underset{\sim}{e}) \quad \underset{\sim}{e} \in E$$

Tangent Space.

M的切向空间在点 $\underset{\sim}{m}$ 是对于M上面曲线的所有切向向量组成的空间 $T_m M$.

而 Tangent Bundle $TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$.

Vector field on manifold 是一组点 $\underset{\sim}{m} \in M$; $\underset{\sim}{v}$ $T_m M$ 的集合