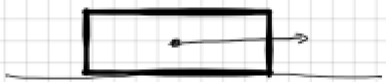
2.9. Système de particules

Rappel



masse ponctuelle

Centre masse :

masse homogène

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i \cdot \vec{r}_i = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

Ex : $\vec{r}_{CM} = \dfrac{m_1 \cdot \vec{r}_{CM1} + m_2 \cdot \vec{r}_{CM2}}{m_1 + m_2}$

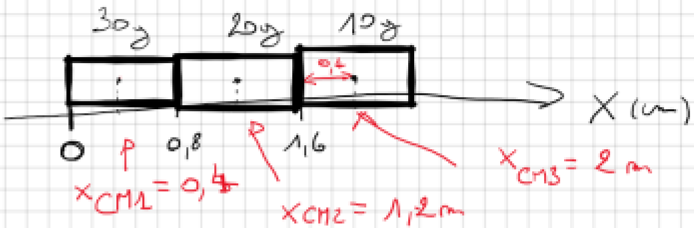
$\hookrightarrow \vec{r}_{CM} = (x_{CM} ; y_{CM} ; z_{CM})$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i \cdot \vec{v}_i \quad \overset{\times}{\Rightarrow} \quad v_{CM} \text{ cte.}$$

Exercice 1

Une canne à pêche est constituée de trois longueurs de 80 cm de masse 10 g, 20 g et 30 g mises bout à bout. Trouvez la position du centre de masse par rapport à l'extrémité libre de la section de 30 g.

Réponse : 93.3 cm



$$x_{CM} ? = \underbrace{\sum_i \frac{m_i \cdot x_i}{M}} = \frac{0,03 \cdot 0,4 + 0,02 \cdot 1,2 + 0,01 \cdot 2}{0,03 + 0,02 + 0,01} = 0,933 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{CM} \approx 93,3 \text{ cm}}$$

$$\frac{[g][cm]}{[g]} \rightarrow [cm]$$

SI $m \rightarrow kg$
$d \rightarrow m$

E2) $\rightarrow$ Vecteurs

E3) CM objet à 2D x_{CM} y_{CM}

E4) $x_{CM} = \frac{1}{M} \int_M x \, dm$

Exercice 5 - *Coté décembre 2014*

Un homme de 80 kg marche sur une poutre homogène de masse 40 kg et de longueur 10 m. Elle repose de telle manière que 4 m de la poutre se trouve dans le vide. Jusqu'à quelle distance l'homme peut-il marcher sur la poutre sans qu'il ne tombe avec celle-ci dans le vide ?

Réponse : l'homme peut marcher 0.5 m *au dessus du vide*

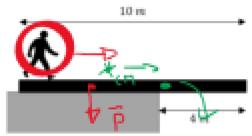
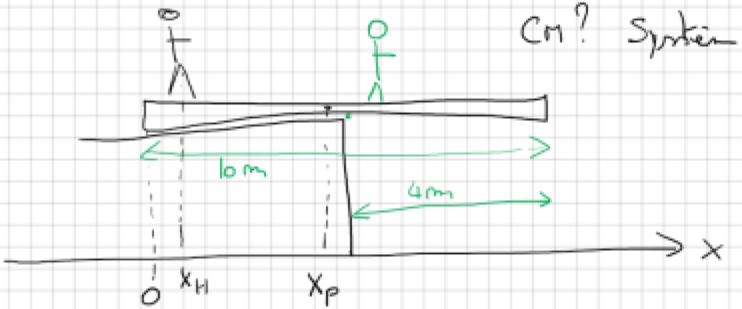


FIGURE 2.2 – Exercice 5



CM ? Système H+P ?

Centre de masse du système H + P → $x_{CM} = 6$ m

↳ Alors le système bascule

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$

$$x_{CM} = \frac{1}{m_H + m_P} \cdot (m_H \overset{?}{x_H} + m_P \cdot x_P)$$

$m_H = 80$ kg

$m_P = 40$ kg

Poutre homogène → $x_P = 5$ m

$$(m_H + m_P)\, x_{CM} = m_H x_H + m_P x_P$$

$$\frac{1}{m_H}\left[(\underbrace{m_H}_{80} + \underbrace{m_P}_{40})\, \underbrace{x_{CM}}_{6m} - \underbrace{m_P}_{40} \underbrace{x_P}_{5}\right] = \cancel{m_H}\, x_H$$

$\Rightarrow x_H = 6{,}5$ m

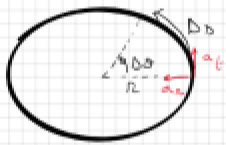
2.10 Rotations

Rappels :

MCU

$a_c = a_n = \frac{v_t^2}{r} = \omega^2 r$ (r rayon)

MCUA



$a_n = a_c = \frac{v^2}{r}$

$a_t = \alpha\, r$ $\quad \alpha$ [rad/s²]

↳ accélération angulaire

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $\qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$

ω vitesse angulaire [rad/s]

Eq. $\omega = \omega_0 + \alpha t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Moment d'inertie : $I = \sum_i m_i r_i^2$ $\qquad E_{cin} = \frac{1}{2} I \omega^2$

↳ / à l'axe de rotation

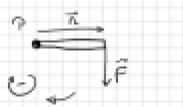
Ex : $I_{sph} = \frac{2}{5} M R^2$

$I_{cyl} = \frac{1}{2} M R^2$

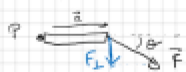
Théorème des axes // : $I = I_{CM} + M h^2$

↳ h distance entre le CM et l'axe de rotation.

Moment de Force



$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\qquad$ [N.m]



$\tau = r F_\perp$

$= r F \sin\theta$

On a aussi $\tau = I \alpha$

Puissance en rotation $P = \tau \omega$

Exercice 1

Le disque dur d'un appareil MP3 ayant un diamètre de 3 cm part du repos ($\omega_0 = 0$) et met 0.02 s pour atteindre sa fréquence finale de rotation qui est de 3333 tr/min. Déterminer :

$\hookrightarrow \omega \Rightarrow$ rad/s

(a) l'accélération angulaire ;

(b) le nombre de tours effectués en 0.05 s

(c) le temps nécessaire pour effectuer 200 tours ;

(d) le module des accélérations radiale et tangentielle d'un point de la circonférence du disque à l'instant $t = 0.01$ s ;

(e) reprenez le point (d) pour $t = 0.03$ s.

Réponses : (a) $\alpha = 1.75\ 10^4$ rad/s^2, *(b)* 2.22 tours, *(c)* 3.61 s, *(d)* $a_r = 457$ m/s^2, $a_t = 262$ m/s^2 et *(e)* $a_r = 1827$ m/s^2, $a_t = 0$ m/s^2

$f \to$ Hz $= 1/s$
$\omega \to$ rad/s

1 tour $\Rightarrow 2\pi$ 3333 tours $= 3333 \cdot 2\pi$ rad

$3333 \cdot 2\pi$ rad/min $\Rightarrow 3333 \cdot \frac{2\pi}{60} = 349$ rad/s

(a) $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{349 - 0}{0{,}02} = 1{,}75 \cdot 10^4$ rad/s

ou $\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$

(b) N_t à $0{,}05$ s ?

① MCUA pdt 0,02 s
② MCU pdt 0,03 s (0,05 − 0,02)

① $\theta_1 = \cancel{\theta_0} + \cancel{\omega_0 t} + \frac{\alpha t^2}{2} = \frac{\alpha t^2}{2} = \frac{1{,}75 \cdot 10^4 \cdot (0{,}02)^2}{2} = 3{,}5$ rad

② $\theta_2 = \theta_1 + \omega_0 t = 3{,}5 + 349 \cdot 0{,}03 = 13{,}97$ rad

$N_t = \frac{13{,}97}{2\pi} = 2{,}22$ tours

(c) $N_t = 200 = \frac{1}{2\pi} \cdot \theta_2$

$= \frac{1}{2\pi}\left[\theta_1 + \omega_0 t_2\right]$

$200 = \frac{1}{2\pi}\left[\alpha \frac{t_1^2}{2} + \omega_0 \underbrace{t_2}_{?}\right]$

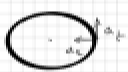
$2\pi\ 200 = \alpha \frac{t_1^2}{2} + \omega_0 t_2$

$\omega_0 t_2 = 2\pi\ 200 - \alpha \frac{t_1^2}{2}$

$t_2 = \frac{1}{\omega_0}\left[2\pi\ 200 - \alpha \frac{t_1^2}{2}\right] = 3{,}14$ s

$\Rightarrow t = t_1 + t_2 = 3{,}16$ s

(d)



$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = (\alpha t)^2 \cdot r = 459$ m/s^2

ω à $t = 0{,}01$ s ?

MCUA $\to \omega = \cancel{\omega_0} + \alpha t$
0

$a_t = \alpha \cdot r = 1{,}75 \cdot 10^4 \cdot \frac{0{,}03}{2} = 262$ m/s^2

(e) $t = 0{,}03$ s $\Rightarrow$ MCU $\Rightarrow a_t = 0$

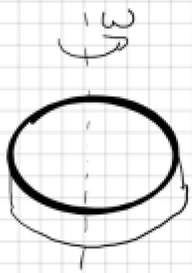
$a_R = a_r = \omega^2 r =$
$\quad$ 349 rad/s

Exercice 7

Le plateau d'un tour de potier a une masse de 10 kg et un rayon de 25 cm. Lorsque le moteur est coupé, il met 40 s pour s'arrêter à partir d'une fréquence initiale de 15 tr/min. Quelle est la puissance nécessaire pour maintenir la fréquence à 15 tr/min ? On assimilera ce plateau à un disque plein et homogène.

↳ $I = \frac{1}{2} M . R^2$

Réponse : $P = 1.93\ 10^{-2}\ W$



$m = 10\ kg$

$R = 0,25\ m$

$P = \tau . \omega$

τ ?

$\tau = I . \underbrace{\alpha}_{\hookrightarrow 0}$

En 40 s : $\omega = \frac{15 . 2\pi}{60}$ rad/s $\longrightarrow$ $\omega = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{0 - 15 . 2\pi / 60}{40} = -0,039$ rad/s²

$\Rightarrow \tau = I . \alpha$ qui s'oppose au mouvement de rotation

$= \frac{1}{2} M . R^2 . \alpha$

$= \frac{1}{2} . 10 . (0,25)^2 . (-0,039)$

$\tau = -0,012\ Nm$ $\longrightarrow$ Moment de force des forces de frottement

$\rightarrow$ Moteur doit fournir un moment de force $\tau = 0,012\ N.m$ pour que le tour tourne à ω constante

$\rightarrow P = \tau . \omega = 0,012 . \frac{15 . 2\pi}{60} = 0,0193\ W$

Exercice 8 - *Coté décembre 2014*

Une bille est suspendue à une potence par un fil long de 0.4 m mais de masse négligeable se situant à 0.2 m de l'axe de rotation. A quelle vitesse angulaire ω doit tourner la potence autour de son axe pour que le fil fasse un angle de 25° avec la verticale ?

Réponse : $\omega = 3.52\ rad/s$

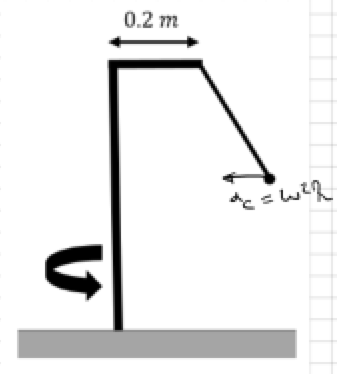
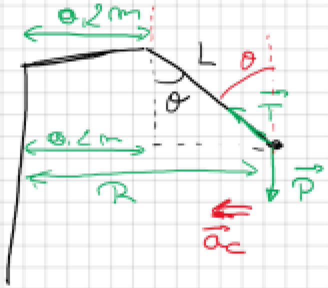
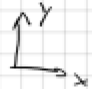


FIGURE 2.1 – Exercice 8





$L = 0{,}4\,m$

<u>Bilan de forces</u>

?

$$\sum F_x = T\sin\theta = m a_c = m\omega^2 R \qquad (1)$$

$$\sum F_y = -P + T\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

$$(2) \rightarrow P = T\cos\theta \Rightarrow T = \frac{P}{\cos\theta} = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\text{Dans (1)} \rightarrow \frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = \cancel{m}\,\omega^2 R$$

$$\omega^2 = \frac{g}{R}\tan\theta = 12{,}4$$

$$\text{où } R = r + L\sin\theta = 0{,}2 + 0{,}4\cdot\sin(25°)$$

$$\Rightarrow \omega = 3{,}52\ rad/s$$