Méthodes numériques appliquées

Cours 3 - 27 septembre 2023

François Goichot

Laboratoire CERAMATHS - Abel de Pujol 2

SHPI 2 - 2023/2024

Évaluation

- Cours/TD : épreuve écrite en semaine 45, sans calculatrice ni documents
- TP : note globale, tenant compte des résultats* mais aussi de l'investissement, du soin apporté au compte rendu, etc

* ce qui ne veut certainement pas dire « aller le plus loin possible », mais plutôt répondre aussi complètement que possible à un maximum de questions

Tout programme (toute fonction Python) doit être testé. Et « testé » ne veut pas dire « il retourne quelque chose » mais « il retourne un résultat correct »

En cas d'absence justifiée *à un TP* : il est souhaitable de rattraper avec un autre groupe ; écrire à `fgoichot@uphf.fr`

Les deux étudiants d'un même binôme de TP n'auront pas forcément la même note

à propos de l'enchaînement TP2 → TP3

Les séances 2 et 3 de TP portent sur le même thème, l'algorithme de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires

Vous devrez déposer dans `Moodle` comme d'habitude en fin de TP2, *mais aussi* conserver votre carnet pour continuer à travailler dessus en TP3, et le re-déposer en fin de TP3

Vous *pouvez* travailler entre le TP2 et le TP3

Mais il faut que ce soit *votre* travail

Rattrapage de TD

Pour les groupes TD 1 et 2 : la séance du 20 septembre de M. Lenoir est reportée au mercredi 18 octobre à 14h et 15h30

Attention, cela n'apparaîtra probablement dans VT que peu de temps avant la séance

Méthodes numériques appliquées

Résolution d'équations

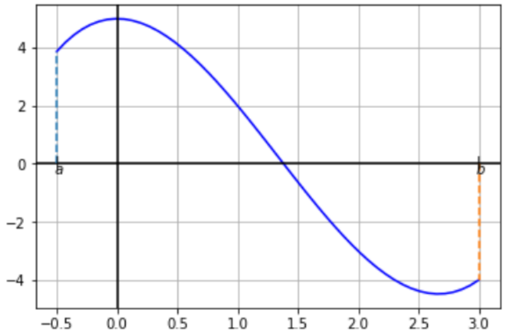
On a une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et on cherche toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

En pratique, une solution *approchée* de $f(x) = 0$ suffit… à condition qu'on sache majorer l'erreur commise

Question : 10^{12} est-il solution approchée de l'équation $x^2 - 1 = 0$?
Réponse : oui, à 10^{13} près

Méthode de dichotomie

Il s'agit donc de résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour une fonction f donnée
Cette première méthode repose sur le *théorème des valeurs intermédiaires* : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$



Méthode de dichotomie

On va réduire l'intervalle $[a, b]$ de moitié (*dicho - tomie*) à chaque étape, en gardant la moitié gauche $[a, m]$ ou la moitié droite $[m, b]$ (où $m = \dfrac{a+b}{2}$) selon que f change de signe entre a et m, ou entre m et b.
L'algorithme est donc :

Faire { $m = \dfrac{a+b}{2}$

Si $f(a)$ *et* $f(m)$ *de même signe, alors* $a = m$ *sinon* $b = m$ }

jusqu'à atteindre la précision voulue

La « précision voulue » peut être évaluée

- en abscisses : $|a - b| < \delta$ (précision sur la localisation de la racine)
- en ordonnées : $|f(m)| < \varepsilon$ (précision sur la valeur de la fonction)

Méthode de dichotomie

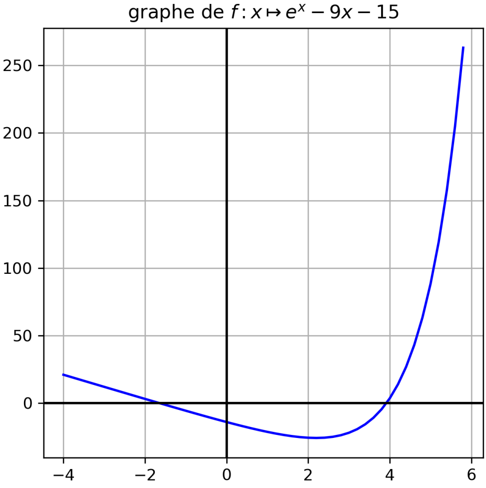
Exemple : soit $f : x \mapsto e^x - 9x - 15$

Sa dérivée est $f' : x \mapsto e^x - 9$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\ln(9) \simeq 2.2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-6 - 9\ln(9) \simeq -25.8$	$\nearrow$	$+\infty$

Méthode de dichotomie

et le graphe :



Méthode de dichotomie

Voir le carnet `MNA_dichotomie` dans `Moodle`

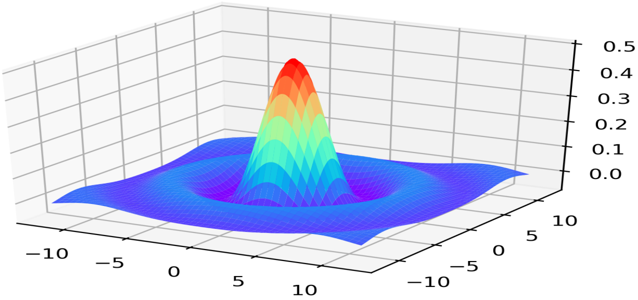
Bilan de cette méthode : à condition que les hypothèses de départ soient vérifiées (f continue, $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires), on aura *toujours* une solution approchée entre a et b

puisque, à la n-ième étape, on est sur un intervalle de longueur $\dfrac{|b-a|}{2^{n-1}}$ qui contient une solution

On va pourtant avoir besoin d'une autre méthode

pourquoi la dichotomie ne suffit pas

La très grande majorité des problèmes de l'ingénieur concerne des fonctions à *plusieurs* variables, pour lesquels la méthode de dichotomie ne se généralise pas



Méthode du point fixe

Principe :

- on réécrit l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $g(x) = x$ pour une fonction g « bien choisie », au minimum continue sur l'intervalle considéré ; g est appelée <u>fonction d'itération</u>
- pour une valeur de x_0 bien choisie aussi, on construit la suite $(x_n)_n$ par $x_{n+1} = g(x_n)$
- **si** cette suite a une limite l, en passant à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = g(x_n)$ on voit par continuité de g que $g(l) = l$. Donc l est un point fixe de g
- ce qui par construction équivaut à $f(l) = 0$

Méthode du point fixe

Voir l'animation `geogebra`

L'algorithme est donc :

$$\textit{Faire } \{x_{n+1} = g(x_n)\} \textit{ jusqu'à atteindre la précision voulue}$$

...ou pas, car, comme on le verra, la suite $(x_n)_n$ peut très bien ne pas converger. Donc le vrai algorithme est plutôt :

Choisir la fonction d'itération g et le point de départ x_0, puis

$$\textit{Faire } \{x_{n+1} = g(x_n)\} \textit{ jusqu'à atteindre la précision voulue}$$

Méthode du point fixe : exemple

On veut résoudre $f(x) = 0$ avec $f : x \mapsto e^x - 9x - 15$. On peut réécrire cette équation : $e^x - 9x - 15 = 0 \Leftrightarrow e^x - 15 = 9x \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 15}{9} = x$

En posant $g_1(x) = \dfrac{e^x - 15}{9}$, on a bien $f(x) = 0 \Leftrightarrow g_1(x) = x$ et on peut appliquer la méthode du point fixe à g_1

De même, $e^x - 9x - 15 = 0 \Leftrightarrow e^x - 8x - 15 = x$ donc on peut aussi utiliser g_2, $\quad g_2(x) = e^x - 8x - 15$

Et $e^x - 9x - 15 = 0 \Leftrightarrow e^x = 9x + 15 \Leftrightarrow x = \ln(9x + 15)$ donc on peut encore utiliser g_3, $\quad g_3(x) = \ln(9x + 15)$ (en faisant attention au domaine de définition de cette fonction)

Voir carnet `MNA_Point_fixe.ipynb`

Méthode du point fixe

Comme on le voit sur les exemples, l'inconvénient de cette méthode est que, selon les choix faits pour g et x_0, la suite $(x_n)_n$ peut ne pas converger, et donc ne pas donner de solution à l'équation de départ

On peut cependant donner une condition *suffisante* de convergence

Pour que tous les éléments de la suite restent dans l'intervalle $[a, b]$, on suppose d'abord que $g([a, b]) \subset [a, b]$. Voici alors le raisonnement qui donnera la condition cherchée

Méthode du point fixe

On suppose qu'un point fixe l existe pour la fonction g, et on note pour tout entier n, $e_n = x_n - l$ l'« erreur » d'approximation de l par x_n

Si g est deux fois dérivable sur $[a, b]$, par la formule de Taylor on a

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - l = g(x_n) - g(l) \\ &= (x_n - l)g'(l) + \frac{(x_n - l)^2}{2} g''(l) + \cdots \\ &= e_n\, g'(l) + \frac{e_n^2}{2} g''(l) + \cdots \end{aligned}$$

donc si e_n est petit, $e_{n+1} \simeq e_n\, g'(l)$

Méthode du point fixe

Ainsi, avec $e_{n+1} \simeq e_n\, g'(l)$, **si** $|g'(l)| < 1$, le comportement de la suite $(e_n)_n$ sera à peu près celui d'une suite géométrique de raison $g'(l)$ entre -1 et 1, donc $(e_n)_n$ sera convergente vers 0
En pratique, comme l est inconnu, la condition $|g'(l)| < 1$ est invérifiable. Mais cela amène au théorème suivant, qu'on admettra :

Théorème

On suppose g dérivable sur [a,b] et vérifiant

1. $g([a, b]) \subset [a, b]$
2. $\exists K < 1 \mid \forall x \in [a, b], \quad |g'(x)| \leqslant K$

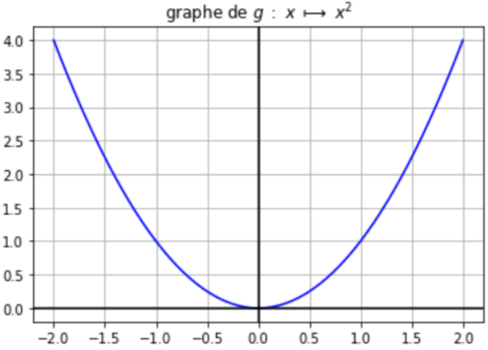
Alors l'équation $g(x) = x$ a une unique solution dans [a,b], qui est limite de <u>toute</u> suite $(x_n)_n$ définie par

$$x_0 \in [a, b] \quad \textit{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

Méthode du point fixe

Pour la première hypothèse du théorème, $g([a,b]) \subset [a,b]$:

attention, en général $g([a,b]) \neq [g(a), g(b)]$



$$a = -2, b = 2, \;\; g([a,b]) = [0,4] \quad \text{mais} \quad [g(a), g(b)] = [4,4] = \{4\}$$

Méthodes numériques appliquées

Complément

Sur les bonnes pratiques de programmation :

voir dans `Moodle`

- le début de la section TP
- le carnet `MNA_Typage des variables`