Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

INSA

Année 2023 - 2024 SHPI 2

Méthodes numériques appliquées

TP 4

Cette séance porte sur la résolution approchée d'équations du type $f(x) = 0$ où f est une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, supposée au moins continue. On utilisera les deux méthodes vues en cours. Elles supposent toutes les deux une première étude de la fonction f, pour savoir dans quel(s) intervalles(s) chercher la ou les solution(s). Vous avez toute liberté pour cette première étude *mais* il faudra indiquer dans votre compte rendu (carnet `Jupyter`) comment vous avez fait. Il n'est cependant pas nécessaire de réaliser en `markdown` le tableau de variation : quelques phrases (≪f est croissante sur l'intervalle...≫) le remplaceront facilement.

1 Dichotomie

Programmez la fonction `dicho(f,a,b,eps)` qui met en œuvre l'algorithme de dichotomie pour la fonction f, entre les réels a et b (avec $a < b$) avec la tolérance ε. La fonction `dicho` retourne une solution approchée x_c et le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir ce résultat ; la valeur x_c doit donc vérifier $|x_c - x_t| < \varepsilon$, où x_t est la solution théorique (inconnue) ; vous expliquerez pourquoi votre algorithme y parvient. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de signes contraires, `dicho` imprime un message d'erreur et ne retourne rien.

Testez ce programme sur les fonctions $f_1 : x \mapsto e^x - 9x - 15$ et $f_2 : x \mapsto e^x - 15x^2$ avec dans les deux cas $\varepsilon = 10^{-7}$. Attention à trouver *toutes* les solutions.

2 Point fixe

On rappelle que cette méthode consiste à ré-écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $g(x) = x$ pour une fonction g bien choisie, et à chercher un point fixe de g comme limite (si elle existe) de la suite récurrente définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = g(x_n)$. On appelle g la *fonction d'itération*.

Programmez la fonction `pfixe` qui met en œuvre cet algorithme. Les paramètres seront g, x_0, ε et les éléments retournés seront les mêmes que précédemment. Mais comme la suite $(x_n)_n$ peut ne pas converger, il faudra prévoir une borne pour le nombre d'itérations. Vous aurez aussi à choisir, et à expliciter dans votre compte rendu, le critère d'arrêt, c'est-à-dire à quelle condition vous considérez que la tolérance ε est atteinte, lorsque la suite converge.

Pour les tests, vous prendrez d'abord la fonction f_1 ci-dessus, avec les trois fonctions d'itérations utilisées en cours :

$$g_1(x) = e^x - 8x - 15, \qquad g_2(x) = \frac{e^x - 15}{9}, \qquad g_3(x) = \ln(9x + 15) \quad .$$

Puis la fonction f_2 ci-dessus, en choisissant vous-même différentes fonctions d'itération.

3 Application

Par les méthodes précédentes - et un peu de réflexion, déterminez les solutions de $h(x) = 0$ pour $h : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1000}$ si $x \neq 0$, $0 \mapsto \frac{1}{1000}$.