1 Insiemi

1.1 Definizione e proprietà

Un insieme è una **collezione di elementi**, tutti dello stesso **tipo**.
Un insieme può avere come elementi degli **oggetti semplici** oppure degli insiemi stessi, chiamati **sottoinsiemi**.

Caratteristiche degli insiemi:

- non si considera l'**ordine** in cui gli elementi vengono rappresentati
- non si considera la **molteplicità** degli elementi
- **cardinalità**: il numero degli elementi di un insieme, si indica con || ||
- si rappresentano con **{ }**

Insiemi uguali

Dati due insiemi A , B essi si dicono **uguali** se **hanno esattamente gli stessi elementi** (indipendentemente dall'ordine).
$A = B$

Insiemi equipotenti

Dati due insiemi A , B essi si dicono **equipotenti** se **hanno esattamente lo stesso numero di elementi**, ovvero **hanno cardinalità uguale**.
$\|A\| = \|B\|$

Insiemi disgiunti

Dati due insiemi A , B essi si dicono **disgiunti** se **non hanno nessun elemento in comune**.
$A \cap B = \varnothing$

Insieme vuoto

Un insieme particolarmente importante è l'**insieme vuoto**, indicato con $\varnothing$.
L'insieme vuoto è l'insieme che non ha nessun elemento ed **è sempre contenuto in ogni insieme**.

Esempio:

$$\boldsymbol{A} = \{\, 1, 2, 3 \,\} \qquad \|A\| = 3$$
$$\boldsymbol{B} = \{\, 3, 2, 1 \,\} \qquad \|B\| = 3$$
$$\boldsymbol{C} = \{\, 1, 1, 2, 3 \,\} \qquad \|C\| = 4$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$

sono tutti lo stesso insieme.

Mentre invece:

$$\boldsymbol{A} = \{\, 1, 2, 3 \,\} \qquad \|A\| = 3$$
$$\boldsymbol{B} = \{\, \{1\}, \{2\}, \{3\} \,\} \qquad \|B\| = 3$$
$$\boldsymbol{C} = \{\, \{1, 2, 3\} \,\} \qquad \|C\| = 1$$

$$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{C}$$

sono tutti insiemi diversi, in particolare $\boldsymbol{A}$ è un insieme di numeri, e $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ sono insiemi di sottoinsiemi di numeri.

1.2 Operatori insiemistici

Gli operatori insiemistici sono operatori logico-matematici che ci permettono di:

- esprimere **relazioni** tra insiemi e suoi elementi
- effettuare **operazioni** sugli insiemi

1.2.1 Operatori di relazione

Gli operatori di relazione esprimono l'appartenenza di un elemento ad un insieme oppure l'inclusione di un insieme in un altro insieme.

Relazione di appartenenza

Esprime l'appartenenza o meno di un elemento rispetto ad un insieme.

$e \in I \Rightarrow$ se l'elemento e appartiene all'insieme I.

$e \notin I \Rightarrow$ se l'elemento e non appartiene all'insieme I.

Relazione di inclusione

Esprime l'inclusione o meno di un insieme(sottoinsieme) rispetto ad un insieme.

$A \subset I \Rightarrow$ se l'insieme A è incluso strettamente nell'insieme I.

$A \subseteq I \Rightarrow$ se l'insieme A è incluso nell'insieme I.

La differenza sta che l'inclusione stretta non prevede che $A = I$.

Relazione di contenimento

Esprime il contenimento o meno di un insieme rispetto ad un altro insieme(sottoinsieme).

$$I \supset A \Rightarrow$$ se l'insieme I contiene strettamente l'insieme A.

$$I \supseteq A \Rightarrow$$ se l'insieme I non contiene l'insieme A.

La differenza sta che il contenimento stretto non prevede che $I = A$.

Per gli operatori di relazione introduciamo i seguenti termini:

- corretto/scorretto = indica il valore **sintattico**
- vero/falso = indica il valore **semantico**

Esempio:

$$
\begin{array}{l}
1 \in \mathbb{N} : \text{corretto e vero} \\
\text{-}1 \in \mathbb{N} : \text{corretto e vero} \\
1 \subset \mathbb{N} : \text{scorretto} \\
\text{-}1 \supseteq \mathbb{N} : \text{scorretto} \\
\\
\mathbb{N} \subset \mathbb{R} : \text{corretto e vero} \\
\mathbb{Z} \supset \mathbb{N} : \text{corretto e vero} \\
\mathbb{Z} \supset \mathbb{R} : \text{corretto e falso} \\
\mathbb{Z} \in \mathbb{R} : \text{scorretto}
\end{array}
$$

1.2.2 Operatori logici

Gli operatori logico-matematici sono operatori binari che si riferiscono solamente agli insiemi e quindi possono essere usati solamente tra essi.

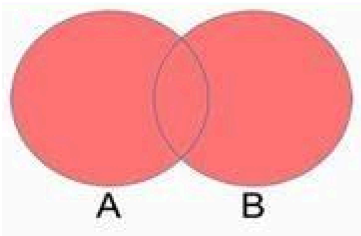
Unione

Dati due insiemi A , B

l'insieme $A \cup B$ è l'insieme formato da

tutti gli elementi di A oppure tutti di B oppure comuni a entrambi.

$A \cup B \Rightarrow \{x : x \in A \ or \ x \in B\}$



Proprietà:

- $A \cup B = B \cup A$

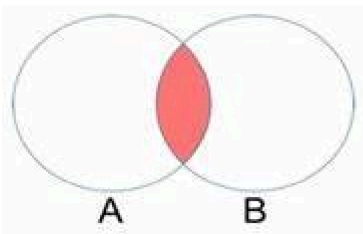
Intersezione

Dati due insiemi A , B

l'insieme $A \cap B$ è l'insieme formato da

tutti gli elementi sia di A sia di B.

$A \cap B \Rightarrow \{x : x \in A \ and \ x \in B\}$



Proprietà:

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap B = \varnothing$ se A e B sono disgiunti

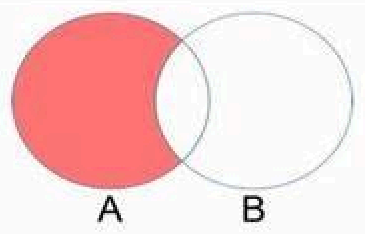
Differenza

Dati due insiemi A , B

l'insieme $A \setminus B$ è l'insieme formato da

tutti gli elementi di A che non appartengono anche a B.

$$A \setminus B \Rightarrow \{ x : \; x \in A \;\; and \;\; x \notin B \}$$



Proprietà:

- $A \setminus B \neq B \setminus A$

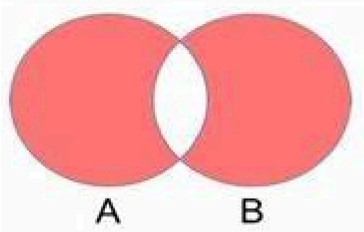
Differenza simmetrica

Dati due insiemi A , B

l'insieme $A \triangle B$ è l'insieme formato da

tutti gli elementi che appartengono ad A e non a B oppure tutti gli elementi che appartengono a B e non ad A.

$$A \triangle B \Rightarrow \{ A \setminus B \;\cup\; B \setminus A \}$$



Proprietà:

- $A \triangle B \neq B \triangle A$

Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A , B

l'insieme $A \times B$ è l'insieme formato da

tutte le possibili coppie ordinate $< a , b >$ con $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B \Rightarrow \{ < a , b > : \; a \in A , b \in B \}$$

Proprietà:

- $A \times B \neq B \times A$
- $\|A \times B\| = \|A\| \times \|B\|$

1.3 Tipologie di insiemi

Gli insiemi si dividono in due grandi categorie:

- insiemi **finiti**
- insiemi **infiniti**

Inoltre, gli insiemi possono essere scritti in due modi:

- scrittura **estensionale**, ovvero tramite elencazione di tutti i suoi elementi
- scrittura **intensionale**, ovvero tramite descrizione di una o più proprietà che gli elementi rispettano

Esempio:

$$\begin{aligned} &\text{Estensionale} : \boldsymbol{A} = \{4, 6, 8\} \\ &\text{Intensionale} : \boldsymbol{A} = \{x \in \mathbb{N} : x = 2y \wedge y \in \mathbb{N} \wedge 1 < y < 5\} \end{aligned}$$

entrambi i metodi di scrittura descrivono lo stesso insieme $\boldsymbol{A}$ dei numeri pari compresi tra $\mathbf{2}$ e $\mathbf{10}$.

Gli insiemi possono anche essere categorizzati come:

- **discreti**: un insieme, in cui scelti due numeri, **non sempre** è ***possibile trovare un terzo numero compreso tra i due numeri***
- **densi**: un insieme, in cui scelti due numeri è **sempre** ***possibile trovare un terzo numero compreso tra i due numeri***
- **continui**: un insieme, in cui presi due numeri è **sempre presente un terzo numero (ovvero è denso e non ha "buchi" o "spazi vuoti")**

Esempio:

Insieme $\mathbb{N}$ = insieme dei numeri **naturali** (interi non negativi)

insieme **infinito**, **discreto** $\|\mathbb{N}\| = \aleph_0$

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$

Insieme $\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri **interi** (interi con segno)

insieme **infinito**, **discreto** $\|\mathbb{Z}\| = \aleph_0$

$\mathbb{Z} = \{ -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

Insieme $\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri **razionali** (esprimibili tramite funzioni)

insieme **infinito**, **denso** $\|\mathbb{Q}\| = \aleph_0$

$\mathbb{Q} = \{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots \}$

Insieme $\mathbb{I}$ = insieme dei numeri **irrazionali** (non esprimibili tramite funzioni)

$\mathbb{I} = \{ \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \pi, e, \dots \}$

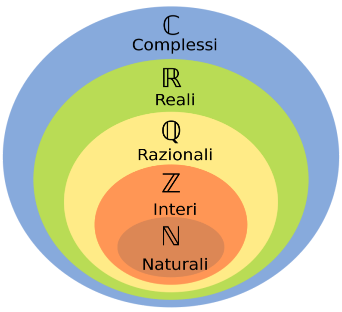
Insieme $\mathbb{R}$ = insieme dei numeri **reali**

insieme **infinito**, **continuo** $\|\mathbb{R}\| = 2^{\aleph_0}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Insieme $\mathbb{C}$ = insieme dei numeri **complessi**

Ordine di grandezza degli insiemi numerici: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$



1.4 Insiemi di insiemi e funzione caratteristica

Insieme potenza / insieme delle parti di un insieme

Dato un insieme A, si indica il suo insieme potenza $\mathcal{P}(A)$ come l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A, compreso A stesso e l'insieme vuoto.
Gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ sono insiemi.

Proprietà:

- $||\mathcal{P}(A)|| = 2^{||A||}$

Esempio:

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$
$$||A|| = 3$$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$$
$$||\mathcal{P}(A)|| = 2^{||A||} = 8$$

Insieme universo e insieme complementare

Dato un insieme A, si indica il suo insieme universo come l'insieme U che può contenere A come suo sottoinsieme.

Dato un insieme A, si indica il suo insieme complementare come l'insieme A^C che contiene tutti gli elementi dell'insieme universo U che non appartengono ad A.

$$A^C = \{ x : x \in U \land x \notin A \}$$

Proprietà:

- $A \subseteq U$
- $A^C = U \setminus A$
- $U^C = \varnothing$
- $\varnothing^C = U$

Esempio:

$$A = \{3, 6, 9\}$$
$$U = \mathbb{N}$$
$$A^C = \{x \in U : x \neq 3 \land x \neq 6 \land x \neq 9\}$$

Partizione di un insieme

Dato un insieme A, si indica una sua partizione $PAR(A)$ come un insieme di sottoinsiemi che rispettano queste caratteristiche:

- i sottoinsiemi non sono vuoti
- i sottoinsiemi sono disgiunti a coppie
- l'unione di tutti i sottoinsiemi è l'insieme A stesso

I singoli sottoinsiemi della partizione si chiamano **classi della partizione**.

Proprietà:

- una partizione di A è un insieme di sottoinsiemi dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$
- l'insieme A stesso può essere una partizione di A

Esempio:

$$A = \mathbb{N}$$

$$PAR(A) = \{P, D\}$$

P = insieme dei numeri pari (classe della partizione)

D = insieme dei numeri dispari (classe della partizione)

$$P \neq \varnothing \text{ , } D \neq \varnothing$$

$$P \cap D = \varnothing$$

$$P \cup D = \mathbb{N}$$

Funzione caratteristica

Dato un insieme A, e un elemento x, si definisce la sua funzione caratteristica come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

1.5 Altri tipi di insiemi

Gli insiemi che abbiamo trattato fino ad ora sono gli insiemi propriamente detti, ma esistono anche i seguenti tipi di insiemi.

Multiinsieme

In un multiinsieme:

- non si considera l'**ordine** in cui gli elementi vengono rappresentati
- si considera la **molteplicità** degli elementi
- si rappresentano con ***( )***

Esempio:

$$A = (\,1,\,2,\,3\,) \qquad \|A\| = 3$$
$$B = (\,3,\,2,\,1\,) \qquad \|B\| = 3$$
$$C = (\,1,\,1,\,2,\,3\,) \qquad \|C\| = 4$$

$$A = B \qquad A \neq C$$

Sequenza ordinata / n-upla

In una sequenza ordinata:

- si considera l'**ordine** in cui gli elementi vengono rappresentati
- si considera la **molteplicità** degli elementi
- si rappresentano con **< >**

Esempio:

$$\boldsymbol{A} = \langle 1, 2, 3 \rangle \qquad \|\boldsymbol{A}\| = 3$$

$$\boldsymbol{B} = \langle 3, 2, 1 \rangle \qquad \|\boldsymbol{B}\| = 3$$

$$\boldsymbol{C} = \langle 1, 1, 2, 3 \rangle \qquad \|\boldsymbol{C}\| = 4$$

$$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{C}$$