2 Relazioni

2.1 Definizione

Una relazione R tra due insiemi A, B **è un insieme di coppie ordinate** $< a , b >$ con $a \in A,\ b \in B$.
La relazione R è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

$R : A \times B = \{ < a , b > : a \in A,\ b \in B \}$
$R \subseteq A \times B$
Si può alternativamente scrivere come aRb oppure $R(a , b)$.

Caratteristiche delle relazioni:

- **dominio** di $R = Dom(R)$: insieme degli elementi a tali che $< a , b > \in R$ per qualche b
- **codominio** di $R = Codom(R)$: insieme degli elementi b tali che $< a , b > \in R$ per qualche a
- **campo** di R = unione del domino e del codominio
- **arietà** di R = numero degli insiemi su cui la relazione è definita (quindi anche il suo numero di elementi o variabili indipendenti)

Relazioni n-arie

Una generica relazione n-aria è una relazione tra n insiemi. Ovvero un sottoinsieme del prodotto cartesiano degli insiemi $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.

Una relazione n-aria è definita quindi come un insieme di n-uple ordinate $< s_1 , s_2 , \ldots , s_n >$.

Relazione unaria

Una relazione definita su un solo insieme A.

$R : A = \{ a \in A : R(a) \}$
L'insieme R è composto dagli elementi che godono della proprietà di appartenere all'insieme A.

2.2 Proprietà delle relazioni

Riflessività

$\forall\ x \in Dom(R) : xRx$
$(< x , x > \in R)$

Irriflessività

$\forall\ x \in Dom(R) : x \not{R}\ x$
$(< x , x > \notin R)$

Una non esclude l'altra. Esistono relazioni né riflessive né irriflessive.

Simmetria

$\forall\ x, y \in Dom(R) : xRy \Rightarrow yRx$

$(<x, y> \in R \Rightarrow <y, x> \in R)$

Asimmetria

$\forall\ x, y \in Dom(R) : xRy \Rightarrow y \not R x$

$(<x, y> \in R \Rightarrow <y, x> \notin R)$

Antisimmetria

$\forall\ x, y \in Dom(R) : xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

$(<x, y> \in R \wedge <y, x> \in R \Rightarrow x=y)$

Una non esclude l'altra.

Transitività

$\forall\ x, y, z \in Dom(R) : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$(<x, y> \in R \wedge <y, z> \in R \Rightarrow <x, z> \in R)$

Intransitività

$\forall\ x, y, z \in Dom(R) : xRy \wedge yRz \Rightarrow x \not R z$

$(<x, y> \in R \wedge <y, z> \in R \Rightarrow <x, z> \notin R)$

Sono mutualmente esclusive tra loro.

Chiusura Transitiva

Bisogna controllare per ogni **coppia di coppie** la loro transitività.

Ovvero si deve controllare che la relazione abbia come dominio **esattamente tutte le possibili permutazioni e nessun'altra coppia**.

Esempio:

$$\boldsymbol{R} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} = \{\, 1, 2, 3 \,\} \quad \boldsymbol{B} = \{\, 1, 2, 3 \,\}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} = \{ & <1\,,\,1>, <2\,,\,2>, <3\,,\,3>, \\ & <1\,,\,2>, <1\,,\,3>, \\ & <2\,,\,1>, <2\,,\,3>, \\ & <3\,,\,1>, <3\,,\,2> \} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{R}$ rispetta la chiusura transitiva.

2.3 Relazione di equivalenza / identità

Una relazione binaria è detta di equivalenza o d'identità se valgono le seguenti proprietà:

- $R : A \times A$
- riflessiva:

ogni elemento di A è in relazione con sé stesso ($\forall\ a, a \in A$)	

ogni elemento di A è in relazione con sé stesso ($\forall\ a, a \in A$)
si indica con $a \sim a$ oppure aRa

- simmetrica:

presi due elementi a , b di A qualsiasi, se a è in relazione con b allora b è in relazione con a
si indica con $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ oppure $aRb \Rightarrow bRa$

- transitiva:

presi tre elementi a , b , c di A qualsiasi, se a è in relazione con b e b è in relazione con c, allora a è in relazione con c
si indica con $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$ oppure $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

2.4 Funzioni

Le funzioni sono particolari tipi di relazioni.
Per cui **tutte le funzioni sono relazioni**, ma **non tutte le relazioni sono funzioni**.

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ è una relazione $f: \subseteq X \times Y$ tale che $\forall\ x \in X,\ \exists\ y$ unico per cui $< x , y > \in f$.

Una funzione(propriamente detta) è **definita per tutti gli elementi del suo dominio (cioè è totale)** ed associa a **ogni elemento del dominio uno e un solo elemento unico del codominio**.

Una funzione(propriamente detta) è quindi **biiettiva (e quindi è anche invertibile)**.

Se $x \in X$ è nel dominio di f allora si dice che $f(x)$ è definito oppure che f è definita in x.

Dominio, codominio e immagine

Data una funzione $f: X \rightarrow Y$

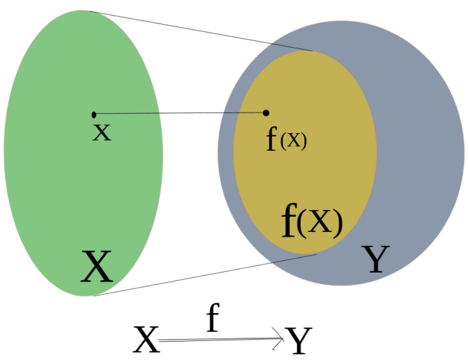
Dominio : $Dom(f) = X$.

Codominio : $Codom(f) = Y$.

$Codom(f) \supseteq Im(f)$.

Immagine : $Im(f) = Y$.

$Im(f) \subseteq Codom(f)$



La differenza tra $Im(f)$ e $Codom(f)$ è che **il codominio è sempre dato e già definito**, mentre **l'immagine può essere calcolata a partire dal codominio e dalle leggi che regolano la funzione**.

Funzione totale e parziale

Data una funzione $f: X \rightarrow Y$

Se il dominio di f coincide con X allora si dice **totale**.

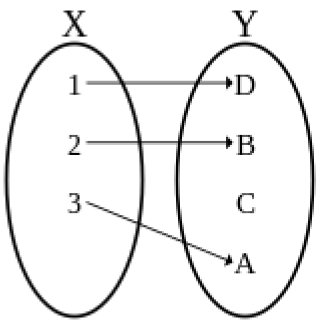
Se il dominio di f non coincide con X allora si dice **parziale**.

Funzione iniettiva

Data una funzione $f: X \rightarrow Y$

Se $\forall\ x_1,x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, risulta che $f(x_1) \neq f(x_2)$, allora si dice **iniettiva**.

Ovvero ogni elemento di X produce **almeno un elemento unico** in Y.
(ogni elemento di X ha almeno un immagine in Y).



Funzione suriettiva

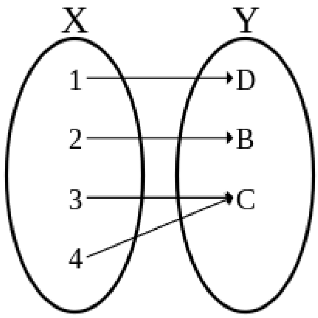
Data una funzione $f: X \to Y$

Se $\forall\ y \in Y,\ \exists\ x \in X$ tale che $f(x) = y$, allora si dice **suriettiva**.

Equivale a dire che $f(X) = Y$ oppure che $Im(f) = Codom(f)$.

Ovvero ogni elemento di Y è prodotto da **almeno un elemento** di X.

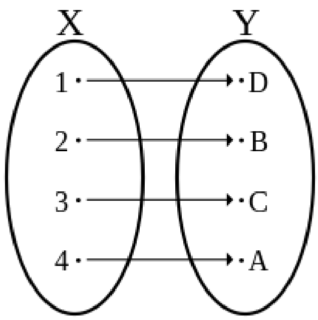
(ogni elemento di Y ha almeno una controimmagine in X).



Funzione biiettiva / biunivoca

Data una funzione $f: X \to Y$

Si dice **biiettiva** se è sia **iniettiva** sia **suriettiva**.



Funzione composta

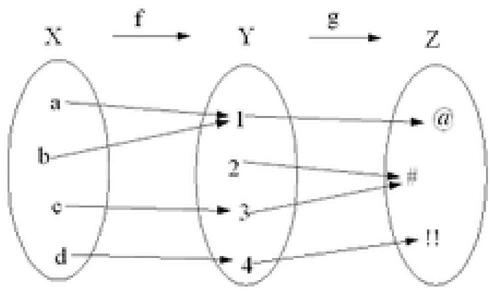
Date due funzioni f, g

si dice **funzione composta** $f \circ g$ oppure $f(g(x))$.

Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$

allora $f \circ g : X \rightarrow Z$.

Ovvero la funzione composta può essere calcolata solamente se $Im(g) \subseteq Dom(f)$.



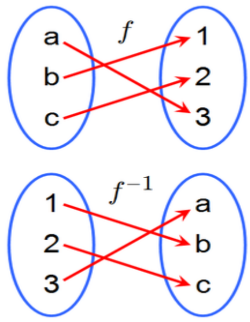
Funzione invertibile

Data una funzione $f : X \rightarrow Y$

si dice **invertibile** se è biiettiva.

La funzione inversa è $f^{-1} : Y \rightarrow X$.

Se $f(x) = y$ allora $f^{-1}(y) = x$.



Esempio:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = (2x + 8)^3$$

$$y = (2x + 8)^3$$
$$\sqrt[3]{y} = 2x + 8$$
$$\sqrt[3]{y} - 8 = 2x$$
$$\frac{1}{2}(\sqrt[3]{y} - 8) = x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{y} - 8)$$

2.4 Operazioni

Le operazioni sono particolari tipi di funzioni, dove **gli argomenti e l'elemento prodotto appartengono tutti allo stesso insieme**. Sono quindi quelle funzioni del tipo $R : A \to A$.

Esempio:

$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ = la funzione somma sui numeri naturali

$Dom(+) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
$Codom(+) = \mathbb{N}$.
$Im(+) = \mathbb{N}$.

$Im(+) = Codom(+)$. Infatti l'operatore $+$ è una funzione suriettiva