3 Rappresentazioni

3.1 Introduzione

Esistono più modi per rappresentare delle relazioni. I seguenti modi sono usati per rappresentare **relazioni binarie**:

- tabelle
- matrici booleane
- grafi e alberi

3.2 Tabelle

Data una relazione binaria $R \subseteq A \times B$ con $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$, $B = \{ b_1, b_2, \ldots, b_m \}$.

$R = \{ r_1, r_2, \ldots, r_k \}$ dove r_i è una generica coppia ordinata = $< a_s, b_t >$ con $a_s \in A$, $b_t \in B$ che sono generici elementi.

Una tabella che rappresenta la relazione R sarà formata in questo modo:

A	B
a_s	b_t
$\ldots$	$\ldots$
a_s	b_t

Esempio:

$R \subseteq A \times B$

$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{1, 2, 3\}$

$R = \{<1\,,2>, <2\,,1>, <3\,,2>, <4\,,3>\}$.

A	B
1	2
2	1
3	2
4	3

3.3 Matrici booleane

Data una relazione binaria $R \subseteq A \times B$ con $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

$R = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ dove r_i è una generica coppia ordinata = $< a_s, b_t >$ con $a_s \in A$, $b_t \in B$ che sono generici elementi.

Una matrice booleana che rappresenta la relazione R sarà formata in questo modo:

	b_1	$\dots$	b_m
a_1	0	0	0
$\dots$	1	1	0
a_n	0	1	0

dove [a_s, b_t] vale:

- 1 se $< a_s, b_t > \in R$
- 0 se $< a_s, b_t > \notin R$

Esempio:

$R \subseteq A \times B$

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $B = \{ 1, 2, 3 \}$

$R = \{ <1, 2>, <2, 1>, <3, 2>, <4, 3> \}$.

	b_1	b_2	b_3
a_1	0	1	0
a_2	1	0	0
a_3	0	1	0
a_4	0	0	1

Proprietà delle matrici booleane quadrate

Riflessività

Se la **diagonale principale** è composta da tutti ***1*** la relazione è **riflessiva**.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	1	1	1	0
a_2	0	1	1	0
a_3	0	0	1	0
a_4	1	0	1	1

Irriflessività

Se la **diagonale principale** è composta da tutti ***0*** la relazione è **irriflessiva**.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	1	1	0
a_2	0	0	1	0
a_3	0	0	0	0
a_4	1	0	1	0

Simmetria

Se ci sono ***1*** **simmetrici rispetto alla diagonale principale**,
la relazione è **simmetrica**.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	1	1	0
a_2	1	0	0	0
a_3	1	0	0	1
a_4	0	0	1	0

Asimmetria

Se rispetto agli ***1*** i loro **specchiati rispetto al centro della matrice** sono ***0***,
la relazione è **asimmetrica**.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	1	1	0
a_2	0	0	0	0
a_3	0	0	0	1
a_4	0	0	0	0

Antisimmetria

Se rispetto agli ***1*** i loro **specchiati alla diagonale principale** sono ***0***,
la relazione è **antisimmetrica**.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	1	0	0
a_2	0	0	1	0
a_3	0	1	0	0
a_4	0	0	1	0

Funzione

Se **ogni riga ha al massimo un *1***, la relazione è una **funzione**.

Funzione totale

Se **ogni riga ha esattamente un *1***, la relazione è una **funzione totale**.

Funzione iniettiva

Se **ogni colonna ha al massimo un *1***, la relazione è una **funzione iniettiva**.

Funzione suriettiva

Se **ogni colonna ha almeno un *1***, la relazione è una **funzione suriettiva**.

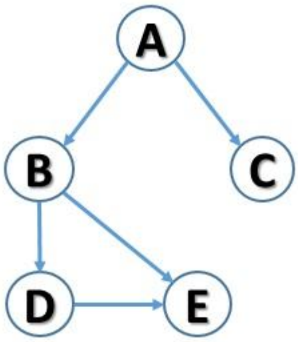
Funzione biiettiva

Se **ogni colonna ha esattamente un *1***, la relazione è una **funzione biiettiva**.

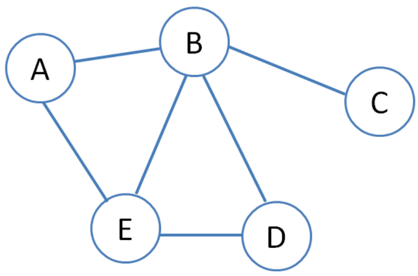
3.4 Grafi

Un grafo è un insieme di **nodi** (identificati da nomi) collegati da **archi**.
I grafi si dividono in due grandi gruppi:

- **grafi diretti / orientati**: gli archi **hanno un verso** e vanno percorsi in quel modo



- **grafi indiretti / non orientati**: gli archi **non hanno verso** e possono essere percorsi in ogni modo (avanti e indietro). Gli archi non orientati possono essere anche interpretati come una coppia di archi orientati che collegano due nodi e che vanno in versi opposti



3.4.1 Archi e nodi

Arco entrante
Arco che rispetto ad un nodo, **arriva nel nodo**.

Arco entrante
Arco che rispetto ad un nodo, **parte dal nodo**.

Gradi di un nodo **Grado di ingresso**: numero di archi entranti di un nodo. **Grado di uscita**: numero di archi uscenti di nodo.

Nodo sorgente
Un nodo che **non ha archi entranti**, ovvero il suo **grado di ingresso è *0***.

Nodo pozzo
Un nodo che **non ha archi uscenti**, ovvero il suo **grado di uscita è *0***.

Nodo isolato
Un nodo che **non ha né archi entranti, né archi uscenti** ovvero il suo **grado di ingresso e di uscita è *0***.
Può essere considerato come un nodo sia sorgente sia pozzo.

Nodo cappio
Un nodo che **ha un arco che parte e arriva a sé stesso**, ovvero il suo **grado di ingresso e di uscita sono almeno *1***.

Proprietà delle relazioni nei grafi

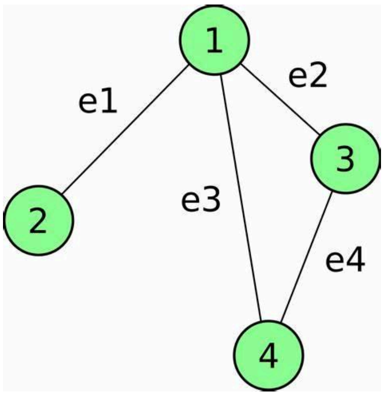
Riflessività Quando **tutti i nodi del grafo hanno un cappio**.
Irriflessività Quando **nessun nodo del grafo ha un cappio**.

Simmetria Quando **per ogni arco, esiste l'arco di verso opposto**.
Asimmetria Quando **per ogni arco, non esiste mai l'arco di verso opposto**.

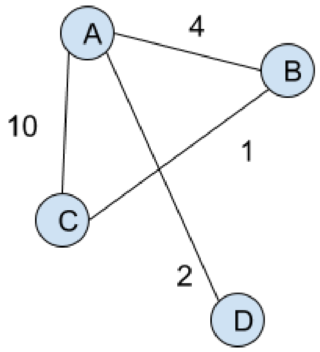
Transitività Quando **per ogni coppia di archi che collegano** $N_1 \longrightarrow N_2$ **,** $N_2 \longrightarrow N_3$ **esiste un arco che collega** $N_1 \longrightarrow N_3$.

3.4.2 Grafi particolari

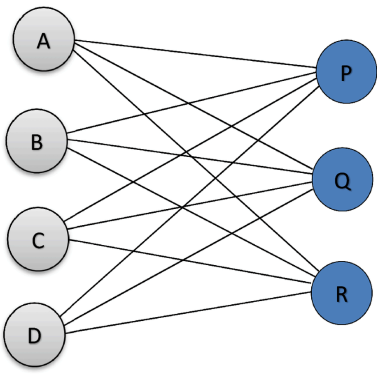
Grafo etichettato: grafo in cui **anche gli archi hanno dei nomi.**



Grafo pesato: grafo in cui **gli archi hanno dei pesi.**



Grafo bipartito: grafo in cui **i nodi possono essere divisi in due sottoinsiemi tali che ogni nodo di questi due insiemi è collegato solo a nodi dell'altro insieme.**



3.4.3 Proprietà dei grafi

Cammino Una **sequenza finita di nodi** collegati da **archi orientati**.
Semicammino Una **sequenza finita di nodi** collegati da **archi non orientati**.
Lunghezza del cammino / semicammino **Numero degli archi del cammino**. Alternativamente, il **numero dei nodi del cammino/semicammino - *1***.

Ciclo di un grafo Un **cammino** del grafo che **parte da un nodo e arriva allo stesso nodo**. Ogni **nodo cappio è un ciclo**.
Semiciclo di un grafo Un **semicammino** del grafo che **parte da un nodo e arriva allo stesso nodo**. Ogni **nodo cappio è un ciclo**.

Grafo connesso Un grafo in cui per **ogni coppia di nodi esiste un cammino/semicammino tra essi**. Ovvero **non esistono nodi isolati**.
Grafo completo Un grafo in cui per **ogni nodo è collegato direttamente con tutti gli altri nodi**, **ma non con sé stesso**.
Grafo aciclico Un grafo in cui **non esistono cicli**.
DAG (Direct Acyclic Graph) Grafo **orientato**, **aciclico**.

3.5 Alberi

Gli alberi sono particolari tipi di grafi.
Per la precisione sono **DAG connessi**, con un solo nodo sorgente, chiamato radice e **ogni nodo non-radice ha un solo nodo entrante**.

Radice

L'**unico nodo sorgente**, è il padre di ogni nodo.

Nodo non-radice

I nodi dell'albero, vengono chiamati **padri** rispetto ai nodi collegati con i loro archi uscenti e **figli** rispetto ai nodi collegati con i loro archi entranti.

Rami

Gli archi dell'albero.

Foglie

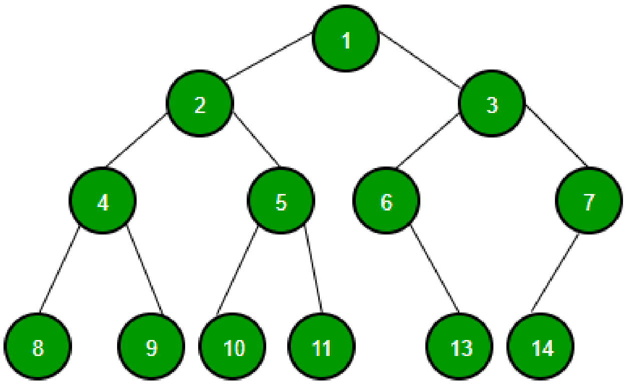
I **nodi pozzi** dell'albero.

Livello del nodo La **lunghezza del cammino che parte dalla radice e arriva al nodo**. Formulabile come : **livello del nodo padre + *1***.
Livello della radice Il livello della radice è ***0***.
Altezza di un albero Il **massimo tra tutti i livelli dei nodi**.

3.5.1 Alberi particolari

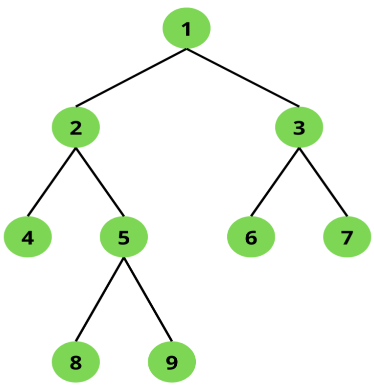
Albero binario

Un albero in cui ogni nodo **ha al massimo *2* nodi figli**.



Albero strettamente binario

Un albero in cui ogni nodo **ha *2* oppure *0* nodi figli**.



Albero n-ario

Un albero in cui ogni nodo **ha al massimo *n* nodi figli**.

Albero bilanciato

Un albero in cui **tutti i cammini dalla radice alle foglie hanno la stessa lunghezza**.

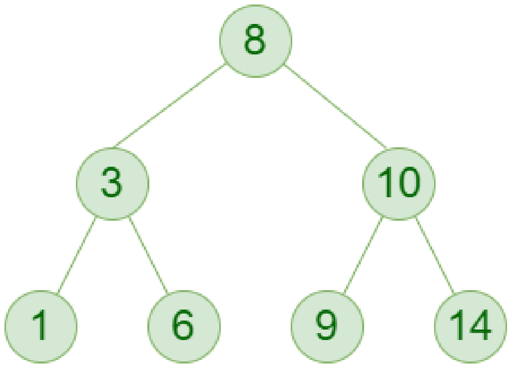
Perciò basta calcolare **solamente *1* cammino radice ⟶ foglia per trovare l'altezza**.

Albero di ricerca

Un albero in cui **ogni nodo a sinistra della radice deve essere minore di essa e ogni nodo a destra della radice deve essere maggiore di essa**.
Inoltre **ogni sottoalbero deve essere di ricerca**.

BST (Binary Search Tree)

Un **albero di ricerca** in cui ogni nodo **ha al massimo *2* nodi figli**.



3.5.2 Metodi di visita

Visita in-order

Prima visito il sottoalbero sinistro, poi la radice, infine il sottoalbero destro.

Visita pre-order

Prima visito la radice, poi il sottoalbero sinistro, infine il sottoalbero destro.

Visita post-order

Prima visito il sottoalbero sinistro, poi il sottoalbero destro, infine la radice.

Visita in-order al contrario

Prima visito il sottoalbero destro, poi la radice, infine il sottoalbero sinistro.

Visita a livelli
Prima visito la radice, poi tutti i nodi del secondo livello da sinistra, poi i nodi del terzo livello da sinistra e così via per ogni livello successivo.