2024 年秋概率论与数理统计试题 A 回忆版

编者：Gaster；参与编辑：Gaster、大半凉

考试时间：2024 年 12 月 15 日 16:00 ~ 18:00

免责声明：本试题是在离开考场后，回忆出来的，不存在任何作弊行为；

本试题不保证题干、选项与原题一致，但考察的中心思想一致。

本次考试为闭卷考试，禁止使用计算器。卷面满分 70 分。

一、填空题（每题 2 分）

1. $P(A)=0.4, P(B)=0.5$，且$P(A\cup B)=0.6$，则$P(\bar{A}\cup\bar{B})=$ _____.
2. 设X服从$P(X=k)=\frac{a}{k(k+1)}, k=1,2,\cdots$，则$a=$_____.
3. 设$X\sim P(\lambda)$，$E[(X-1)(X-2)]=1$，则$\lambda=$_____.
4. 设$E(X)=2, E(Y)=3, D(X)=4, D(Y)=16, E(XY)=14$，根据切比雪夫不等式，$P(|3X-2Y|\geq 3)\leq$_____.
5. 设$X\sim P(\lambda), X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$X$的简单随机样本，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a^{X_i}$是$e^{\lambda}$的无偏估计量，则 $a=$_____.

二、选择题（每题 2 分）

1. 设事件A, B, C相互独立，$0<P(B)<1$，下列选项正确的是(　)

   A. $B-A$和$A-B$独立；　　B. AC和BC独立；

   C. $P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$；　　D. $P(C|AB)=P(C|A)P(C|B)$.

2. 下列命题是假命题的是(　)

   A. $P(A|B)=P(A)$，则$P(A|\bar{B})=P(A)$；

   B. $P(A|B)>P(A)$，则$P(\bar{A}|\bar{B})>P(\bar{A})$；

   C. $P(A|B)>P(A|\bar{B})$，则$P(A)>P(AB)$；

   D. $P(A|A\cup B)>P(\bar{A}|A\cup B)$，则$P(A)>P(B)$.

3. $X\sim N(0,\sigma^2), Y\sim N(0,\sigma^2)$，且$X, Y$相互独立，则$P(|X-Y|<1)$(　)

   A. 与μ无关，与σ^2有关；　　B. 与μ无关，与σ^2无关；

   C. 与μ有关，与σ^2无关；　　D. 与μ有关，与σ^2有关.

4. X_1, X_2, X_3, X_4, X_5是取自总体$X\sim N(\mu,1)$的样本，则下列哪个不服从卡方分布(　)

   A. $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$；　　**C.** $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$；

   B. $2(X_n-X_1)^2$；　　D. $n(\bar{X}-\mu)^2$.

5. X_1,X_2,X_3,X_4,X_5是取自总体$X\sim N(0,1)$的样本，则统计量$\frac{X_1+X_2}{|X_3-X_4+2|}$服从(　)

A. $N(0,1)$； B. $t(1)$； C. $\chi^2(1)$； D. $F(1,1)$.

三、（5 分）随机变量X的分布列如下：

X	-1	0	1
P	0.2	a	b

且满足$4P(X=0)=P(|X|=1)$，求：

(1) a,b的值；

(2) X的分布函数；

(3) $P(X\le 0|X\ge 0)$.

四、（5 分）盒子里有六个小球，红球、白球、黑球分别为1,2,3个，从中摸两个球，设X为红球个数，Y为白球个数，求：

(1) (X,Y)的联合概率密度；

(2) 设$Z=XY$，求Z的概率分布；

(3) 求$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

五、（8 分）从$(1,3)$中随机取一个数，记为X，再从$(X,3)$中取一个数，设为Y.求：

(1) $f(x,y)$；

(2) $f_Y(y)$；

(3) $P(X+Y\leq 4)$.

六、（8 分）$X_1, X_2 \cdots, X_n$是取自总体$X \sim N(0, \sigma^2)$的样本，设$\bar{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，求$D\left[\overline{X}^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)S^2\right]$.

七、（10 分）X的概率密度函数是

$$f(x;a)=\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}x, 0<x<a \\ 0, 其他\end{cases}.$$

$X_1, X_2 \cdots, X_n$是取自总体的一组样本，求a的矩估计$\hat{a}_M$和最大似然估计$\hat{a}_L$.

八、（10 分）$X \sim N(0,\sigma^2), Y \sim N(0,2\sigma^2)$，且$X,Y$相互独立，设$Z = X - Y, Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$是取自总体的一个样本，求：

(1) Z的概率密度；

(2) σ^2的极大似然估计$\widehat{\sigma^2}$；

(3) 判断$\widehat{\sigma^2}$是否是σ^2的无偏估计.

九、（4 分）某加工厂加工的每箱商品的质量是随机数，且满足均值为$50kg$，标准差为$2.5kg$，已知一辆货车载重上限为$5.05t$，试根据中心极限定理求每辆货车的最大载货箱数使得不会超重的概率为$0.997(\Phi(2) = 0.997)$.