Семинары по теории финансов

ВМ

4 января 2017 г.

Содержание

1 Семинар 1. Основы проведения финансовых расчетов

1.1 Задача 1

У английской системы формула:

$$D_{ACT} = N(d_e) - N(d_s) + 365(y_e - y_s) + k \tag{1.1.1}$$

k – число високосных лет в дырке.

$\boxed{\text{а}}$ От 1 января 2009 года по 23 марта 2010 года. 23 марта – 82 день года, как видно в таблице:

$$82 - 1 + 365 \cdot (2010 - 2009) + 0 = 446 \tag{1.1.2}$$

А теперь надо на теоретической шкале это отложить от нуля. Ноль ставим в текущую дату, здесь это 01 января 2009 года. Теоретическая шкала, как известно, в годах, для этого делим всегда в этом курсе на 365[1]:

$$t = \frac{446}{365} = 1.3313 \tag{1.1.3}$$

$\boxed{\text{б}}$ От 14 февраля 2008 года до 15 мая 2020 года. Заметим, что мы в любом году смотрим номер дня вне зависимости от високосности года, потому что прибавляем все в конце.

$$135 - 45 + 365(2020 - 2008) + 4 = 4474 \tag{1.1.4}$$

Здесь тоже и в 2008 году, и в 2020 году попадает 29 февраля.

$$t = \frac{4474}{365} = 12.2575 \tag{1.1.5}$$

$\boxed{\text{в}}$ 19 марта 1976 года – 10 февраля 2009 года

[1] В экселе на тему есть функция ДОЛЯГОДА, где надо выбирать нужную опцию по подсчету дней. Надо заметить, что он не делит всегда на 365.

$$41 - 78 + 365 \cdot 33 + 8 = 12016 \tag{1.1.6}$$

$\boxed{\text{г}}$ 12 ноября 1980 года – 30 июня 2010 года

$$181 - 316 + 365 \cdot 30 + 7 = 10822 \tag{1.1.7}$$

$\boxed{\text{д}}$ 22 апреля 1954 года – 31 января 2011 года

$$31 - 112 + 365 \cdot 57 + 14 = 20738 \tag{1.1.8}$$

$\boxed{\text{е}}$ 17 февраля 2007 года – 18 августа 2010 года

$$230 - 48 + 365 \cdot 3 + 1 = 1278 \tag{1.1.9}$$

По шкале:

$$t = \frac{1278}{365} = 3.5014 \tag{1.1.10}$$

1.2 Задача 2

Студент экономического факультета получает стипендию по 15 и 16 числам каждого месяца. Исключение лишь месяц июнь, когда сразу «падает» стипендия за июнь, июль и август месяц. Если 15 и 16 числа являются выходным (суббота/воскресенье), то стипендия зачисляется на счет 17 числа. Ставка процента, начисляемая банком в конце года по счету равна 3% годовых, а средний ежемесячный размер стипендии равен 1500 рублей. Допустим, студент в течение 2010 года получал стипендию, но не снимал ее со счета. Какую сумму он сумеет снять через год (отсчет ведется с января месяца текущего года).

Строим черновые даты. Проверяем экселем, какой это был день недели: если это была суббота, то сдвигаем на 2 дня вперед, если воскресенье, то на день, иначе оставляем.

Строим из всего этого таблицу. Когда считаем проценты, не забываем, что разные сроки лежат разные суммы. Используем ДОЛЯГОДА, в этом случае проценты начисляются в конце года и зависят от того, сколько оно все лежало по сроку от года.

В итоге он снимает 18 282.45 рубля.

Черновая Дата	День Недели	Исправленное число	Поступления, руб.	Начисляемые проценты, руб.
1/15/2010	5	1/15/2010	1500	43.15
2/15/2010	1	2/15/2010	1500	39.33
3/15/2010	1	3/15/2010	1500	35.88
4/15/2010	4	4/15/2010	1500	32.05
5/15/2010	6	5/17/2010	1500	28.11
6/15/2010	2	6/15/2010	4500	73.60
7/15/2010	4	7/15/2010	0	0.00
8/15/2010	7	8/16/2010	0	0.00
9/15/2010	3	9/15/2010	1500	13.19
10/15/2010	5	10/15/2010	1500	9.49
11/15/2010	1	11/15/2010	1500	5.67
12/15/2010	3	12/15/2010	1500	1.97
	Конец	12/31/2010	-18000	-282.45
		Итог	18282.45	

1.3 Задача 3

Третьего марта на счет поступила 1000 рублей, 18 августа того же года со счета было снято 200 рублей, а первого октября того же года положено 430 рублей. Найти величину вклада на 31 декабря этого года, если банк начисляет 23% годовых, используя систему ACT/ACT.

Здесь плохо то, что сумма вклада менялась все время.

Считаем быстро число дней, нам все равно, високосный ли год. 1000 рублей лежала 168 дней, 800 полежали 44 дня, а потом до конца уже долежало 91 день.

Запросто считаем итоговую сумму:

$$23\% \cdot \left(1000\frac{168}{365} + 800\frac{44}{365} + 1230\frac{91}{365}\right) + 1230 = 1428.58 \tag{1.3.1}$$

Количество дней	Сумма вклада, руб.	Начисляемые проценты, руб
168	1000	105.86
44	800	22.18
91	1230	70.53
Конец	1230	198.58
		1428.58

1.4 Задача 4

Надо найти гору эквивалентных ставок и эффективных ставок к ним в друзья.

$\boxed{\text{а}}$ Простой процент на 6 лет три раза в года под 15%:

$$FV = S\left(1 + \frac{0.15}{3} \cdot 6 \cdot 3\right) \tag{1.4.1}$$

Отсюда видно, что число начислений простых процентов не влияет на результат.

Теперь ищем эквивалентную за 5 лет простую поквартальную:

$$S\left(1+\frac{0.15}{3}\cdot 6\cdot 3\right)=S\left(1+\frac{i}{4}\cdot 5\cdot 4\right) \tag{1.4.2}$$

$$1.9=1+5i \tag{1.4.3}$$

$$i=18\% \tag{1.4.4}$$

Теперь сложную:

$$S\left(1+\frac{0.15}{3}\cdot 6\cdot 3\right)=S\left(1+\frac{i}{4}\right)^{5\cdot 4} \tag{1.4.5}$$

$$4(\sqrt[20]{1.9}-1)=i \tag{1.4.6}$$

$$i=13.04\% \tag{1.4.7}$$

А теперь непрерывную (ясно, что кварталы не в тему):

$$S\left(1+\frac{0.15}{3}\cdot 6\cdot 3\right)=S\cdot e^{5\delta} \tag{1.4.8}$$

δ здесь номинальная ставка. Решив все эти уравнения, найдем все.

$$1.9=e^{5\delta} \tag{1.4.9}$$

$$\ln 1.9=5\delta \tag{1.4.10}$$

$$\delta=12.84\% \tag{1.4.11}$$

Эффективная ставка – годовая ставка с начислением процентов один раз в год, дающая тот же итог:

$$S\left(1+\frac{0.15}{3}\cdot 6\cdot 3\right)=S(1+i_{ef})^6 \tag{1.4.12}$$

$$\sqrt[6]{1.9}-1=i_{ef} \tag{1.4.13}$$

$$i_{ef} = 11.29\% \tag{1.4.14}$$

$\boxed{\text{б}}$ Теперь 12%, сложная, 12 раз в год; 3 года. Для нее:

$$S\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12\cdot 3} \tag{1.4.15}$$

Быстро ищем все ставки. Простая:

$$S\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12\cdot 3} = S\left(1+\frac{i}{4}\cdot 5\cdot 4\right) \tag{1.4.16}$$

$$1.01^{36} = 1+5i \tag{1.4.17}$$

$$i = 8.62\% \tag{1.4.18}$$

Сложная:

$$S\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12\cdot 3} = S\left(1+\frac{i}{4}\right)^{5\cdot 4} \tag{1.4.19}$$

$$4\left(\sqrt[20]{1.01^{36}}-1\right) = i \tag{1.4.20}$$

$$i = 7.23\% \tag{1.4.21}$$

Непрерывная:

$$S\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12\cdot 3} = S\cdot e^{5\delta} \tag{1.4.22}$$

$$36\ln 1.01 = 5\delta \tag{1.4.23}$$

$$\delta = 7.16 \tag{1.4.24}$$

Эффективная:

$$S\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12\cdot 3} = S(1+i_{ef})^3 \tag{1.4.25}$$

$$1.01^{12} - 1 = i_{ef} \tag{1.4.26}$$

$$i_{ef} = 12.68\% \tag{1.4.27}$$

$\boxed{\text{в}}$ Здесь 12%, непрерывная; 4 года. С ней выходит:

$$S \cdot e^{0.12 \cdot 4} \tag{1.4.28}$$

Быстро ищем все ставки. Простая:

$$S \cdot e^{0.12 \cdot 4} = S\left(1 + \frac{i}{4} \cdot 5 \cdot 4\right) \tag{1.4.29}$$

$$e^{0.48} = 1 + 5i \tag{1.4.30}$$

$$i = 12.32\% \tag{1.4.31}$$

Сложная:

$$S \cdot e^{0.12 \cdot 4} = S\left(1 + \frac{i}{4}\right)^{5 \cdot 4} \tag{1.4.32}$$

$$4(\sqrt[20]{e^{0.48}} - 1) = i \tag{1.4.33}$$

$$i = 9.72\% \tag{1.4.34}$$

Непрерывная:

$$S \cdot e^{0.12 \cdot 4} = S \cdot e^{5\delta} \tag{1.4.35}$$

$$\delta = 9.60\% \tag{1.4.36}$$

Эффективная:

$$S \cdot e^{0.12 \cdot 4} = S(1 + i_{ef})^4 \tag{1.4.37}$$

$$i = 12.75\% \tag{1.4.38}$$

$\boxed{\text{г}}$ Под конец внезапно 10%, простая, ежемесячно; 2 года:

$$S \cdot \left(1 + \frac{0.12}{12} \cdot 2 \cdot 12\right) \tag{1.4.39}$$

Быстро ищем все ставки. Простая:

$$S \cdot \left(1 + \frac{0.10}{12} \cdot 2 \cdot 12\right) = S\left(1 + \frac{i}{4} \cdot 5 \cdot 4\right) \tag{1.4.40}$$

$$1.20 = 1 + 5i \tag{1.4.41}$$

$$i = 4.00\% \tag{1.4.42}$$

Сложная:

$$S \cdot \left(1 + \frac{0.10}{12} \cdot 2 \cdot 12\right) = S\left(1 + \frac{i}{4}\right)^{5 \cdot 4} \tag{1.4.43}$$

$$4\left(\sqrt[20]{1.2} - 1\right) = i \tag{1.4.44}$$

$$i = 3.66\% \tag{1.4.45}$$

Непрерывная:

$$S \cdot \left(1 + \frac{0.10}{12} \cdot 2 \cdot 12\right) = S \cdot e^{5\delta} \tag{1.4.46}$$

$$\ln 1.2 = 5\delta \tag{1.4.47}$$

$$\delta = 3.65\% \tag{1.4.48}$$

Эффективная:

$$S \cdot \left(1 + \frac{0.10}{12} \cdot 2 \cdot 12\right) = S(1 + i_{ef})^2 \tag{1.4.49}$$

$$i = 9.54\% \tag{1.4.50}$$

1.5 Задача А1

На последней странице материалов (Приложение 1) приведен рекламный проспект банка Москвы. Рассчитайте, какую сумму на руки получит вкладчик Папуасов, который сегодня открыл вклад «Максимальный доход» на срок 731 день на сумму в 200000 рублей. Начисленные проценты вкладчик не изымал, т.е. они капитализировались. Однако, 03 мая 2017 года вкладчику потребовались срочно деньги, и он закрыл вклад. Расчет необходимо проводить с учетом налогов[2][3].

Видим из таблицы, что у него ставка будет 7.5%, налога не будет, так как ставка была 8% у ЦБ. Там ежемесячно платят проценты, капитализуются и все такое.

У него есть льготные условия досрочного расторжения – если вклад пролежал не меньше 181 дня, то ему дают 60% процентов от положенных по договору.

Сегодня у нас тут 10 сентября 2016 года, он открывает вклад на свои 200 000 рублей. Достаточно ясно, что до 3 мая 2017 года здесь будет больше 181 дня, поэтому льготные условия у дяденьки наступают.

Когда заполняем последние проценты, поправляем на неполноту месяца. В итоге у него на 3 мая 200 000 его плюс 9 916.84 рублей с процентов, но дают ему только 60%.

---

[2] Вклады со ставками ниже ключевой ставки не облагаются налогами.

[3] Согласно ст. 214.2 Налогового кодекса Российской Федерации, под налогообложение процентных доходов попадают доходы:

1. по рублевым вкладам, если процентная ставка по вкладу превышает ставку рефинансирования Центрального Банка Российской Федерации на 5 процентных пунктов, действующей в течение периода, за который начислены указанные проценты;
2. по валютным вкладам, если процентная ставка по вкладу превышает 9% годовых.

Налог по вкладам физических лиц рассчитывается из процентных доходов, которые вкладчик получил сверх определенных законом норм. Для расчета налога важна только номинальная ставка по вкладу, которая указана в договоре, даже если эффективная ставка по вкладу получается выше установленных законом норм.

Дни начислений	Основная сумма, руб.	Проценты, руб.	Совокупная сумма, руб.
9/10/2016	200,000.00	0	200,000.00
10/10/2016	200,000.00	1,250.00	201,250.00
11/10/2016	200,000.00	1,257.81	202,507.81
12/10/2016	200,000.00	1,265.67	203,773.49
1/10/2017	200,000.00	1,273.58	205,047.07
2/10/2017	200,000.00	1,281.54	206,328.61
3/10/2017	200,000.00	1,289.55	207,618.17
4/10/2017	200,000.00	1,297.61	208,915.78
5/3/2017	200,000.00	1,001.05	209,916.84
		9,916.84	
			205,950.10

Альтернативно может быть, если ему понижают ставку до 0.6 ретроактивно в момент расторжения.

Дни начислений	Основная сумма, руб.	Проценты, руб.	Совокупная сумма, руб.
9/10/2016	200,000.00	0	200,000.00
10/10/2016	200,000.00	750.00	200,750.00
11/10/2016	200,000.00	752.81	201,502.81
12/10/2016	200,000.00	755.64	202,258.45
1/10/2017	200,000.00	758.47	203,016.92
2/10/2017	200,000.00	761.31	203,778.23
3/10/2017	200,000.00	764.17	204,542.40
4/10/2017	200,000.00	767.03	205,309.43
5/3/2017	200,000.00	590.26	205,899.70
		5,899.70	
			205,899.70

1.6 Задача 5

Определить число дней между датами по методике ACT/360 и укажите точку на теоретической шкале от нуля.

Число дней считаем по формуле:

$$D_{ACT} = N(d_e) - N(d_s) + 365(y_e - y_s) + k \tag{1.6.1}$$

$\boxed{\text{а}}$ 16 апреля 1954 года – 02 января 2007 года

$$2 - 106 + 365(2007 - 1954) + 13 = 19254 \tag{1.6.2}$$

$$t = \frac{19254}{360} = 53.4833 \tag{1.6.3}$$

$\boxed{\text{б}}$ 25 декабря 2000 года – 8 августа 2008 года

$$220 - 359 + 365(2008 - 2000) + 2 = 2783 \tag{1.6.4}$$

$$t = \frac{2783}{360} = 7.7306 \tag{1.6.5}$$

$\boxed{\text{в}}$ 6 июня 2006 года – 1 сентября 2013 года

$$244 - 157 + 365(2013 - 2006) + 2 = 2644 \tag{1.6.6}$$

$$t = 7.3444 \tag{1.6.7}$$

$\boxed{\text{г}}$ 02 февраля 2004 года – 29 октября 2009 года

$$302 - 33 + 365(2009 - 2004) + 2 = 2096 \tag{1.6.8}$$

$$t = 5.8222 \tag{1.6.9}$$

$\boxed{\text{д}}$ 03 марта 2004 года – 16 ноября 2011 года

$$320 - 62 + 365(2011 - 2004) + 1 = 2814 \tag{1.6.10}$$

$$t = \frac{2814}{360} = 7.8167 \tag{1.6.11}$$

$\boxed{\text{е}}$ 24 мая 2000 года – 24 мая 2020 года

$$365(2020 - 2000) + 5 = 7305 \tag{1.6.12}$$

$$t = 20.2917 \tag{1.6.13}$$

1.7 Задача 6

Определить число дней между датами по методике 30/360 и укажите точку на теоретической шкале от нуля. Тут формула:

$$D_{30/360} = 360(y_e - y_s) + 30(m_e - m_s) + (d_e - d_s) \tag{1.7.1}$$

Просто берем порядковые числа и суем.
$\boxed{\text{а}}$ 12 декабря 1993 года – 28 февраля 2008 года

$$360(2008 - 1993) + 30(2 - 12) + (28 - 12) = 5116 \tag{1.7.2}$$

$$t = \frac{5116}{360} = 14.2111 \tag{1.7.3}$$

$\boxed{\text{б}}$ 9 мая 1945 года – 30 декабря 2015 года

$$360(2015 - 1945) + 30(12 - 5) + (30 - 9) = 25431 \tag{1.7.4}$$

$$t = \frac{25431}{360} = 70.6417 \tag{1.7.5}$$

$\boxed{\text{в}}$ 10 февраля 2009 года – 1 марта 2013 года

$$360 \cdot 4 + 30 \cdot 1 - 9 = 1461 \tag{1.7.6}$$

$$t = \frac{1461}{360} = 4.0583 \tag{1.7.7}$$

$\boxed{\text{г}}$ 21 июня 2009 года – 31 октября 2009 года

$$30(10 - 6) + 10 = 130 \tag{1.7.8}$$

$$t = \frac{130}{360} = 0.3611 \tag{1.7.9}$$

$\boxed{\text{д}}$ 16 мая 2008 года – 31 декабря 2014 года

$$360(2014 - 2008) + 30(12 - 5) + (31 - 16) = 2385 \tag{1.7.10}$$

$$t = \frac{2385}{360} = 6.6250 \tag{1.7.11}$$

1.8 Задача 7

Господин Агеев открыл вклад на имя своего шестилетнего сына в размере 20 000 рублей. По условиям банка этот вклад сын сможет забрать по достижении 16 лет, до этого момента банк обещает выплачивать с последующей капитализацией 5,5% в рублях. Сколько денег сможет получить сын Агеева?

В этой задаче предполагается думать, что сыну ровно 6.0000 лет, а заберет он деньги в 16.0000 лет. В таких условиях достаточно просто сделать сложные проценты:

$$FV = 20000\,(1+0.055)^1\,0 = 34162 \tag{1.8.1}$$

Эта сумма берется от того, что мы округляем $(1+0.055)^1\,0$ сразу до четырех знаков, получая 1.7081.

1.9 Задача АА1

На последней странице материалов (Приложение 1) приведен рекламный проспект банка Москвы. Рассчитайте, какую сумму на руки получит вкладчик Звездуллин, который сегодня (10 сентября) открыл вклад «Максимальный рост» на срок 731 день на сумму в 500 000 рублей. Начисленные проценты вкладчик не изымал, т.е. они капитализировались. 24 января 2015 года вкладчик сделал еще дополнительный взнос на сумму 100 000 рублей. Однако, 03 мая 2015 года вкладчику потребовались срочно деньги, и он закрыл вклад. Расчет необходимо проводить с учетом налогов.

Эта задача похожа на задачу А1, но еще более аутистичная. Считаем число дней до закрытия:

$$d = 123 - 253 + 365(2017 - 2016) = 235 \tag{1.9.1}$$

Значит, у него случились льготные условия. Никакого налога на них не будет, ибо ставка существенно ниже. Аналогично строим таблицу с процентами, которые начисляются каждый месяц. Просто начисляем в январе проценты с основного куска вклада, а еще добавляем 14 дней лежавшие 100 000.

Дата	Дней	Сумма, руб.	Проценты, руб.	Совокупно, руб.	Экстра, руб.
9/10/2016		500,000.00		500,000.00	
10/10/2016	30	500,000.00	1,701.37	501,701.37	
11/10/2016	31	500,000.00	1,764.06	501,764.06	
12/10/2016	30	500,000.00	1,707.37	501,707.37	
1/10/2017	31	500,000.00	1,764.09	501,764.09	
2/10/2017	31	600,000.00	1,923.08	601,923.08	100000
3/10/2017	28	600,000.00	1,911.64	601,911.64	
4/10/2017	31	600,000.00	2,116.42	602,116.42	
5/3/2017	23	600,000.00	1,570.78	601,570.78	

1.10 Задача A2

Пенсионер А.А.Кутузов пришел в банк ВТБ24 открыть вклад «Оптимальный выбор» в размере 1 500 000 рублей. Он выбрал ежеквартальное начисление процентов по вкладу с дальнейшей их капитализацией и не планирует дополнительных взносов или каких-то расходов с этого счета. Пенсионер открыл вклад на свое имя и предъявил пенсионное удостоверение гражданина РФ. Полное описание вклада см. Приложение 2, которое предлагает банк в качестве официального документа на своем сайте (информация на 18.01.2014).

$\boxed{\text{а}}$ Найдем эффективную ставку, если происходит ежеквартальное начисление под 9.25%, а сам вклад длится 545 дней (18 месяцев). Очевидно, что:

$$\left(1+\frac{0.0925}{4}\right)^2\left(1+\frac{0.0525}{4}\right)^4=(1+i_{ef})^{1.5} \tag{1.10.1}$$

Округляем на каждом шагу:

$$1.0231^2 1.0131^4=(1+i_{ef})^{1.5} \tag{1.10.2}$$

$$1.0467\cdot 1.0534=(1+i_{ef})^{1.5} \tag{1.10.3}$$

$$i_{ef}=6.73\% \tag{1.10.4}$$

$\boxed{\text{б}}$ Сколько рублей снимет со счета пенсионер А.А.Кутузов, если прервет вклад спустя 181 день со дня его открытия?

День открытия не считается, потом прошло 181 день, и вот он приходит на 182 день. У него уже льготные условия закрытия. Тупо считаем:

$$FV = 1500000 \left(1 + 0.6 \frac{0.0925}{4}\right)^2 = 1541700 \tag{1.10.5}$$

$\boxed{\text{в}}$ Потому что они хитрые, что тут может быть туманно?

2 Семинар 2. Наращение и дисконтирование, учет налогов и инфляции

Помним, что R – член ренты *в годовом выражении*, p – количество платежей в год, m – количество начисление процентов в год, n – число лет, i – процентная ставка[4]

Вот пусть там что-то нам там падает года. Какая должны быть приведенная стоимость? Нам должно быть все равно, класть ли деньги под ставку i и получить в конце FVA, или сразу же получить это разом.

Ну, для этого надо считать сумму приведенных платежей:

$$FVA = \frac{R}{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{x} + \dots \tag{2.0.1}$$

Ясно, что первый платеж мы получаем через $1/p$ лет. При этом проходит m/p начислений:

$$FVA = \frac{R}{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm-\frac{m}{p}} + \frac{R}{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm-2\frac{m}{p}} + \dots + \frac{R}{P} = \tag{2.0.2}$$

$$= \frac{\frac{R}{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm-\frac{m}{p}}}{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}} - \frac{\frac{R}{p}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}} = \frac{R}{p}\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \tag{2.0.3}$$

А теперь дисконтирование, нужное для аннуитета. Давайте снова выведем все.

$$PVA = \frac{R}{P}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-\frac{m}{p}} + \frac{R}{P}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-2\frac{m}{p}} + \dots + \left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} = \tag{2.0.4}$$

$$= \frac{\frac{R}{P}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}} - \frac{\frac{R}{P}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-nm-\frac{n}{p}}}{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}} = \frac{R}{P}\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-nm}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \tag{2.0.5}$$

Важно помнить, что:

$$FVA = PVA\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} \tag{2.0.6}$$

[4]Можем ради скуки предположить, что $p > m$, хотя это не так мешает.

Из всего этого удовольствия можно искать аннуитеты, например.

2.1 Задача 1

В банке Швейцарии есть вклад, который был открыт в самом начале 1697 года. Первоначальная сумма вклада равна 1 франку. Определить сумму вклада на конец 2015 года[5], если банк начисляет кучу разных вещей.

$\boxed{\text{а}}$ 2% с начислением раз в год. Пользуемся простой формулой.

$$A = (1 + 0.02)^{319} = 553.93 \tag{2.1.1}$$

Занудно можно было бы посчитать:

$$(1 + 0.02)^{318}\left(1 + 0.02\frac{364}{365}\right) = 553.90 \tag{2.1.2}$$

$\boxed{\text{б-е}}$ Все просто:

$$A = \left(1 + \frac{0.02}{x}\right)^{319x} \tag{2.1.3}$$

Для двух начислений в год:

$$A = \left(1 + \frac{0.02}{2}\right)^{319\cdot 2} = 571.53 \tag{2.1.4}$$

Для каждого месяца:

$$A = \left(1 + \frac{0.02}{12}\right)^{319\cdot 12} = 586.80 \tag{2.1.5}$$

Для раз в три года:

$$A = (1 + 3\cdot 0.02)^{319/3} = 490.75 \tag{2.1.6}$$

[5]Ехидно можно заметить, что эта штука пролежала 319 лет (2015-1697) без одного дня.

2.2 Задача А2

Олав хочет купить себе iPhone 5 и рассматривает две возможности. Он может пойти в магазин в Осло и купить телефон в рассрочку на год с контрактом, выплачивая по 550 NOK в месяц или полететь в Нью-Йорк и купить там iPhone 5C (он знает, что их начинки совпадают) за 549$ без контракта. Билет Осло-NY-Осло стоит 3300 NOK. Олав очень любит деньги и чувствует, что каждый месяц они теряют 1% своей ценности. Курс валют 1 USD = 5 NOK. Если считать, что инфляции ни в Норвегии, ни в США нет, то какую альтернативу ему выбрать?

Надо для этого неудачника все посчитать и решить. Приведем к нулевому моменту.

Для Нью-Йорка:

$$NY = 3300 + 549 \cdot 5 = 6045 NOK \tag{2.2.1}$$

Можно тупо посчитать для каждого платежа его стоимость, а можно сунуть в формулу. Важно помнить, что первые 550 крон он заплатит через месяц по умолчанию. Вычисляем в экселе множитель дисконтирования – =1/СТЕПЕНЬ(Ставка%+1, Номер платежа).

Платеж	Размер, NOK	Ставка	d	PV, NOK
1	550	1%	0.9901	544.56
2	550	1%	0.9803	539.17
3	550	1%	0.9706	533.83
4	550	1%	0.9610	528.55
5	550	1%	0.9515	523.33
6	550	1%	0.9420	518.10
7	550	1%	0.9327	512.99
8	550	1%	0.9235	507.93
9	550	1%	0.9143	502.87
10	550	1%	0.9053	497.92
11	550	1%	0.8963	492.97
12	550	1%	0.8874	488.07
				6190.29

2.3 Задача 2

Третьего июня 2009 года инвестор (для определенности в Москве) приобрел паи указанных в таблице ниже ПИФов, а первого февраля 2010 года он решил выйти из них (все продать). Определите доходность (процентов годовых), которую получил инвестор, при выполнении следующих условий:

- Банк выплачивает деньги через 15 календарных дней после дня закрытия инвестором позиции
- При приобретении паев банк взимает комиссионный сбор в размере 1.5% от суммы сделки.
- Если инвестор держал пай менее года, то при продаже (на дату закрытия) банк взимает также комиссию в размере 1.5% от суммы сделки.

Для памяти – доходность за период владения:

$$d = \frac{V_k - V_H}{V_H} \tag{2.3.1}$$

За год, если мы держали t дней:

$$d = \frac{V_k - V_H}{V_h} \cdot \frac{365}{t} \tag{2.3.2}$$

Он продал 1 февраля, а получит 16. Это снизит доходность. Считает все по 16 февраля. Значит, $t = -(03.06.2009 - 16.02.2010)$

Считаем на начало:

$$V_H = q_{\text{штук}} \cdot P_H \cdot (1 + 0.015) \tag{2.3.3}$$

Логика отсутствия округлений в условии неочевидна:

$$V_H = 7.48158 \cdot 790.12 \cdot 1.015 + 6.82384 \cdot 1153.03 \cdot 1.015 + 3.62189 \cdot 2176.15 \cdot 1.015 \tag{2.3.4}$$

$$V_H = 21999.98 \tag{2.3.5}$$

Это мы нашли столько, сколько он сам вбухал, а не сколько это кому-то стоит. А еще в конце банк тоже обгрызает:

$$V_K = q_{\text{штук}} \cdot P_K \cdot (1 - 0.015) \tag{2.3.6}$$

$$V_K = 7.48158 \cdot 968.34 \cdot 0.985 + 6.82384 \cdot 1806.09 \cdot 0.985 + 3.62189 \cdot 2613.53 \cdot 0.985 \tag{2.3.7}$$

$$V_K = 28599.52 \tag{2.3.8}$$

Тогда это значит, что:

$$d = 0.3000 \cdot \frac{365}{258} = 0.3000 \cdot 1.4147 = 42.44\% \tag{2.3.9}$$

Давайте теперь реальную доходность:

$$1 + r = \frac{1 + i}{1 + \pi} \tag{2.3.10}$$

Надо все годовое сунуть. Берем ИПЦ на начало июня, а потом на конец февраля, получаем инфляцию с 1 июня по 28 февраля 2010, а потом это надо корректировать.

$$\frac{CPI_{28.02.10} - CPI_{01.06.09}}{CPI_{01.06.09}} = \pi^* \tag{2.3.11}$$

$$\pi^* = 1.0350 \tag{2.3.12}$$

Корректируем:

$$\tilde{\pi} = \pi^* \frac{d(03.06.09; 16.02.10)}{d(01.06.09; 28.02.10)} \tag{2.3.13}$$

$$\tilde{\pi} = 1 + 0350 \frac{258}{272} = 1.0332 \tag{2.3.14}$$

И потом:

$$\frac{\frac{V_k}{1+\tilde{\pi}} - V_H}{V_H} \frac{365}{dt} \tag{2.3.15}$$

$$d_\pi = 36.53\% \tag{2.3.16}$$

Налог 13% на доход от ПИФов. Пока поверим, что облагается то, что после комиссии.

Номинальная с налога:

$$\frac{0.87 \cdot (V_k - V_H)}{V_H} \frac{365}{dt} = 36.92\% \tag{2.3.17}$$

Реальная с учетом налогов:

$$\frac{\frac{V_k}{1+\tilde{\pi}} - V_H - 0.13(V_k - V_H)}{V_H} \frac{365}{dt} \tag{2.3.18}$$

Или интуитивно: сначала нам спилили налог в рублях с конца, потом оставшуюся сумму мы дефлируем и по ней считаем:

$$\frac{\frac{V_K - 0.13(V_K - V_H)}{1+\pi} - V_H}{V_H} \frac{365}{258} = 30.04\% \tag{2.3.19}$$

2.4 Задача 3

Найдите текущую стоимость платежей на момент 01.01.2014, если платежи в размере 1000 рублей будете получать по 3 числам каждого месяца в течение всего 2014 года. При этом ставка дисконтирования в первые четыре месяца (до 3 апреля включительно) с оставляет 12%, а затем повышается на три процентных пункта.

Простыми процентами будет:

$$d_1 = \frac{1}{1+0.12\frac{2}{365}} \tag{2.4.1}$$

$$d_2 = \frac{1}{1+0.12\frac{33}{365}} \tag{2.4.2}$$

А вот потом внезапно к пятом месяцу и смене ставки:

$$d_5 = \frac{1}{1+0.12\frac{92}{365}} \frac{1}{1+0.15\frac{30}{365}} \tag{2.4.3}$$

Это извращенный способ со гибридным вариантом. Для сложных процентов в мире будет произведение со степенями уже.

Можно проще:

$$PV = 1000\left(\frac{1}{1+0.12\frac{2}{365}} + \frac{1}{1+0.12\frac{33}{365}} + \dots + \frac{1}{1+0.12\frac{120}{365}+0.15\frac{2}{365}} + \dots\right) = \tag{2.4.4}$$

$$= 1000\left(\frac{1}{1+0.12\frac{2}{365}} + \frac{1}{1+0.12\frac{120}{365}+0.15\frac{216}{365}}\right) \tag{2.4.5}$$

Дата	Платеж	Ставка	Количество дней, нак.	После изменения	d	PV
1/1/2014						
1/3/2014	1000	12%	2		0.9993	999.3
2/3/2014	1000	12%	33		0.9893	989.3
3/3/2014	1000	12%	61		0.9803	980.3
4/3/2014	1000	12%	92		0.9706	970.6
5/3/2014	1000	15%	122	30	0.9523	952.3
6/3/2014	1000	15%	153	61	0.9408	940.8
7/3/2014	1000	15%	183	91	0.9301	930.1
8/3/2014	1000	15%	214	122	0.9192	919.2
9/3/2014	1000	15%	245	153	0.9085	908.5
10/3/2014	1000	15%	275	183	0.8985	898.5
11/3/2014	1000	15%	306	214	0.8883	888.3
12/3/2014	1000	15%	336	244	0.8787	878.7
						11255.9

2.5 Задача АА2

Ведущий аналитик фонда прямых инвестиций Пономарев Никита уже несколько лет почти круглый год колесит по России в поисках компаний, для участия в переговорах и закрытиях сделок. На первой неделе октября 2013 года он открыл обезличенный металлический счет (ОМС) в Вернадском отделении ВТБ24 на сумму своего годового бонуса в размере 1 млн рублей. Подробную информацию по ОМС, предлагаемую банком ВТБ24, можно найти в приложении 3. На первой же неделе октября 2015 года он закрыл счет и снял деньги (других вкладов у него не было).

Основываясь на информации приложения 3 и динамики цены палладия (график приведен ниже), определить какую сумму Никита снял, чтобы потратить, если он сразу оставил на счету сумму, необходимую для уплаты налога по ОМС. Оснований для получения налоговых вычетов у Никиты нет.

Находим, что по цене продажи 760 рублей за грамм Никита смог купить 1315.7895 грамм. Все это мило лежало, а потом могло быть им продано назад банку по 1350 рублей за грамм.

Просто тупо считаем:

$$760 \cdot 1315.7895 + 0.87 \cdot 1315.7895 \cdot (1350 - 760) = 1675394.88 \tag{2.5.1}$$

2.6 Задача 4

С паспортами все просто. Посмотрим на два варианта мира. Первый для человека, который каждые пять лет меняет свой паспорт:

$$PV = 1000 + \frac{1000}{(1+i)^5} + \frac{1000}{(1+i)^{10}} + \dots \tag{2.6.1}$$

Второй для десятилетных паспортов:

$$PV = 2500 + \frac{2500}{(1+i)^{10}} + \dots \tag{2.6.2}$$

Эти вариант легко сравнить. В года 0, 10, 20 мы тратим на полторы тысячи больше, а в года 5, 15, 25 на тысячу меньше. Но при этом ясно, что +1500 хватит, чтобы перекрыть $\frac{1000}{(1+i^5}$. Значит, стало дороже.

2.7 Задача 5

Нарисуем график.

Первые два года у нас непрерывная ставка равна 6%, потом еще три года 7%, а потом 8%. Просто дисконтируем по кусочкам. Множитель:

$$d = e^{-t\delta} \tag{2.7.1}$$

Считаем:

$$PV(CF_1) = CF_1 \cdot e^{-0.06} = 21043.73 \tag{2.7.2}$$

$$PV(CF_2) = CF_2 \cdot e^{-0.06 \cdot 2} = 20803.61 \tag{2.7.3}$$

$$PV(CF_3) = CF_3 \cdot e^{-0.06 \cdot 2} \cdot e^{-0.07} = 20315.91 \tag{2.7.4}$$

$$PV(CF_4) = CF_4 \cdot e^{-0.06 \cdot 2} \cdot e^{-0.07 \cdot 2} = 12088.55 \tag{2.7.5}$$

$$PV(CF_5) = CF_5 \cdot e^{-0.06 \cdot 2} \cdot e^{-0.07 \cdot 3} = 12070.01 \tag{2.7.6}$$

И до конца:

$$PV(CF_6) = CF_6 \cdot e^{-0.06 \cdot 2} \cdot e^{-0.07 \cdot 3} \cdot e^{-0.08} = 18509.21 \tag{2.7.7}$$

Существенно то, что это подход для кусочной функции. Если δ живет как-то иначе, то возвращаемся к главному:

$$PV = FV \cdot e^{\int_0^t \delta(x) dx} \tag{2.7.8}$$

2.8 Задача 6

В начале января текущего года Вы выиграли приз в одной телепрограмме в размере 200 000 рублей. Вам предлагается две схемы получения приза. Первая программа: получение 80 000 рублей немедленно и оставшуюся сумму по 10 000 в конце каждого года. Вторая программа: получение приза равными частями в конце года, начиная с текущего, в течение 10 лет. Ставка дисконтирования составляет 5% за год в экономике данной страны. Определите, какую схему стоит выбрать.

Надо занудно посчитать просто PV:

$$PV_1 = 800000 + \sum_{t=1}^{12} \frac{10000}{(1+0.05)^t} \tag{2.8.1}$$

Аналогично строим вторую и получаем табличку.

Год	Выплата, руб.	Множитель	PV
0	100000	1	100000
1	10000	0.9524	9524
2	10000	0.907	9070
3	10000	0.8638	8638
4	10000	0.8227	8227
5	10000	0.7835	7835
6	10000	0.7462	7462
7	10000	0.7107	7107
8	10000	0.6768	6768
9	10000	0.6446	6446
10	10000	0.6139	6139
	200000		177216

Год	Выплата, руб.	Множитель	PV
0	80000	1	80000
1	10000	0.9524	9524
2	10000	0.907	9070
3	10000	0.8638	8638
4	10000	0.8227	8227
5	10000	0.7835	7835
6	10000	0.7462	7462
7	10000	0.7107	7107
8	10000	0.6768	6768
9	10000	0.6446	6446
10	10000	0.6139	6139
11	10000	0.5847	5847
12	10000	0.5568	5568
	200000		168631

Очевиден выбор второго варианта.

3 Семинар 3. Наращение и дисконтирование, процентные ставки

3.1 Задача 1

. Фирма планирует получение кредита в сумме 10 млн рублей. Банк предоставляет кредит под 200% годовых. На какой срок фирма может взять кредит с тем, чтобы подлежащая возврату сумма не превысила 16 млн рублей?

Очевидно, что брать меньше, чем на год. Простые проценты:

$$10\left(1+2\frac{t}{365}\right)\leqslant 16 \tag{3.1.1}$$

Превращаем в равенство:

$$\frac{20t}{365}=6 \tag{3.1.2}$$

$$t=109.5 \tag{3.1.3}$$

Находим t. Округляем в меньшую сторону, чтобы больше не набежало. Значит, на 109 дней.

3.2 Задача 2

Определить эффективную ставку сложных процентов с тем, чтобы получить такую же наращенную сумму, как и при использовании номинальной ставки 18% при ежеквартальном начислении процентов.

Написано убого, но сводится к поиску эффективной ставки:

$$(1+i_{ef})^n=\left(1+\frac{0.18}{4}\right)^{4n} \tag{3.2.1}$$

$$i_{ef}=19.25\% \tag{3.2.2}$$

3.3 Задача 3

Господин Иванов решил взять в банке «Банк Города» кредит на один год. Стандартный кредитный договор в банке устанавливает ежемесячное начисление декурсивных процентов по кредиту, исходя из расчета 30% годовых. Однако господин Иванов предложил банку начислять проценты ежеквартально. Поскольку банк не в силах отказать г-ну Иванову, то какую ставку при этом предложит банк по кредиту?

Банку надо просто найти эквивалентную ставку:

$$\left(1+\frac{0.3}{12}\right)^{12n}=\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n} \tag{3.3.1}$$

$$1+\frac{i}{4}=1.025^3 \tag{3.3.2}$$

$$i=30.76\% \tag{3.3.3}$$

3.4 Задача 4

Используя следующие спот-ставки для различных периодов времени до погашения с сегодняшнего дня, найдем форвардные ставки между первым и вторым годом, вторым и третьим, третьим и четвертым.

Спот-ставка – ставка, действующая от сейчас на какое-то количество лет. Важно помнить, что они даются в годовом измерении.

Форвардная ставка обговорена сейчас, а действовать будет в какой-то период в будущем.

И вот есть условие отсутствия арбитража. Нам должно быть все равно, как складывать деньги:

$$(1+S_2)^2=(1+S_1)(1+f_{1,2}) \tag{3.4.1}$$

Подставляем:

$$f_{1,2}=\frac{(1+S_2)^2}{1+S_1}-1 \tag{3.4.2}$$

$$f_{1,2}=\frac{1.1130}{1.050}-1=6\% \tag{3.4.3}$$

Значит, дальше аналогично:

$$(1 + S_3)^3 = (1 + S_2)^2(1 + f_{2,3}) \tag{3.4.4}$$

$$f_{2,3} = \frac{(1 + S_3)^3}{(1 + S_2)^2} - 1 \tag{3.4.5}$$

$$f_{2,3} = \frac{1.2079}{1.1130} - 1 = 8.53\% \tag{3.4.6}$$

И дальше все ясно:

$$f_{3,4} = \frac{(1 + S_4)^4}{(1 + S_3)^3} - 1 \tag{3.4.7}$$

$$f_{3,4} = \frac{1.3108}{1.2079} - 1 = 8.52\% \tag{3.4.8}$$

А вот ради интереса между первым и четвертым годом:

$$(1 + S_4)^4 = (1 + S_1)(1 + f_{1,4})^3 \tag{3.4.9}$$

$$(1 + f_{1,4})^3 = \frac{(1 + S_4)^4}{1 + S_1} \tag{3.4.10}$$

$$f_{1,4} = 7.68\% \tag{3.4.11}$$

3.5 Задача 5

Ясно сразу, что спот-ставка на год – 10%.
На три года:

$$(1 + S_3)^3 = (1 + S_1)(1 + f_{1,2})(1 + f_{2,3}) \tag{3.5.1}$$

$$S_3 = \sqrt[3]{1.1 \cdot 1.095 \cdot 1.09} - 1 = 9.50\% \tag{3.5.2}$$

На четыре года:

$$(1 + S_4)^4 = (1 + S_1)(1 + f_{1,2})(1 + f_{2,3})(1 + f_{3,4}) = 9.25\% \tag{3.5.3}$$

3.6 Задача 6

Предположим, что текущая годовая спот-ставка равна 6%, а форвардные ставки через год и через два года равны соответственно $f_{1,2} = 9\%$, $f_{2,3} = 10\%$. Какова должна быть рыночная цена для 8%-ной купонной облигации номиналом в 1000 долларов, погашаемой через три года? Первая купонная выплата должна произойти через год. Выплаты проводятся ежегодно.

Через год падает 80 долларов, через два еще 80, а потом 1080. Цена будет PV от всех этих потоков:

$$P_0 = PV(CF) = \frac{80}{1+S_1} + \frac{80}{(1+S_2)^2} + \frac{1080}{(1+S_3)^3} \tag{3.6.1}$$

При этом:

$$(1+S_2)^2 = (1+S_1)(1+f_{1,2}) \tag{3.6.2}$$

$$(1+S_3)^3 = (1+S_1)(1+f_{1,2})(1+f_{2,3}) \tag{3.6.3}$$

Вся задача состоит в поиске этих ставок:

$$S_2 = 7.49\% \tag{3.6.4}$$

$$S_3 = 8.32\% \tag{3.6.5}$$

$$PV = 994.59 \tag{3.6.6}$$

3.7 Задача 7

Рыночная функция дисконтирования – вектор коэффициентов дисконтирования. Помним, что $d_k = \frac{1}{(1+S_k)^k}$.

Предположим, правительство выпустило три облигации. По первой выплачивается $1 000 через год, а в настоящее время она продается за $909,09. По второй выплачивается \$100 через год и \$1100 спустя еще год, и в настоящее время она продается на рынке по \$991,81. По третьей выплачивается по \$100 каждый год в течение двух лет, а через три года \$1100, и продается такая облигация за \$997,18.

$\boxed{\text{а}}$ Ищем множители:

$$909.09 = 1000 \cdot d_1 \tag{3.7.1}$$

$$d_1 = 0.9091 \tag{3.7.2}$$

Двухлетняя:

$$991.81 = 1100 d_2 + 100 d_1 \tag{3.7.3}$$

$$d_2 = 0.8190 \tag{3.7.4}$$

Трехлетняя:

$$997.18 = 100 d_1 + 100 d_2 + 1100 d_3 \tag{3.7.5}$$

$$d_3 = 0.7494 \tag{3.7.6}$$

$\boxed{\text{б}}$ Ищем форвардные ставки. Выворачиваем множители и получает все спот-ставки. Дальше по традиции:

$$f_{0,1} = S_1 = \frac{1}{d_1} - 1 = 10\% \tag{3.7.7}$$

$$d_2 = \frac{1}{(1+S_2)^2} = \frac{1}{(1+S_1)(1+f_{f,2})} = \frac{d_1}{1+f_{1,2}} \tag{3.7.8}$$

$$f_{1,2} = \frac{d_1}{d_2} - 1 = \frac{0.9091}{0.8190} - 1 = 11\% \tag{3.7.9}$$

Теперь ищем $f_{1,3}$:

$$d_3 = \frac{1}{(1+f_{1,3})^2} = \frac{d_1}{(1+f_{1,3})^2} \tag{3.7.10}$$

$$f_{1,3} = \sqrt{\frac{d_1}{d_3}} - 1 = 10.14\% \tag{3.7.11}$$

Еще надо бы найти $f_{2,3}$:

$$(1+S_1)(1+f_{1,3})^2 = (1+S_1)(1+f_{1,2})(1+f_{2,3}) \tag{3.7.12}$$

$$f_{2,3} = 9.28\% \tag{3.7.13}$$

$\boxed{\text{в}}$ Наш друг г-н Сусликов предлагает Вам дать ему взаймы \$1 500 сейчас, а взамен он заплатит нам \$500 через один год, \$600 – через два года и \$700 – через три года. Предполагая, что г-н Сусликов не подведет, согласимся ли мы дать ему взаймы? Считаем PV:

$$NPV = -1500 + 500d_1 + 600d_2 + 700d_3 \tag{3.7.14}$$

$$NPV = -29.47 \tag{3.7.15}$$

Обойдется.

3.8 Задача Б3

Нам предложили поучаствовать в замечательной инвестиционной возможности: 01 января 2016 года мы платим 1000 рублей, а 01 июля 2016 года получаем 2000 рублей, а 31 декабря 2016 получаем еще 3000 рублей. Определим среднюю доходность предлагаемой инвестиционной возможности. При расчетах не учитывать налоги и инфляцию.

Надо все время считать число дней. У нас високосный год. Значит, $182-1+1 = 182$.

Под средней ставкой обычно понимают IRR. Для случая без отрицательных потоков в середине:

$$-I_0 + \frac{CF_{t_1}}{(1+IRR)^{t_1}} + \cdot + \frac{CF_{t_n}}{(1+IRR)^{t_n}} = 0 \tag{3.8.1}$$

Пытаемся посчитать:

$$-1000 + \frac{2000}{(1+r)^{\frac{182}{366}}} + \frac{3000}{(1+r)^{\frac{365}{366}}} = 0 \tag{3.8.2}$$

Правда, это мы не посчитаем. Проще:

$$-1000 + \frac{2000}{(1+r)^{0.5}} + \frac{3000}{(1+r)^{1}} = 0 \tag{3.8.3}$$

Вводим $x = \frac{1}{(1+r)^{0.5}}$:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \tag{3.8.4}$$

Корень -1 выбрасываем, берем:

$$\frac{1}{(1+r)^{0.5}} = \frac{1}{3} \tag{3.8.5}$$

$r = 8$ или 800%.

3.9 Задача Б2

Ищем первоначальную стоимость, при которой Алене пофиг, какие вариантом пользоваться.

$\boxed{\text{Вариант А}}$ Первая покупка:

$$T_1 = 0.13 \cdot 800(114.15 - x) \tag{3.9.1}$$

Вторая:

$$T_2 = 0.13 \cdot 800(114.15 - 48.39) \tag{3.9.2}$$

Третья:

$$T_3 = 0.13 \cdot 800(114.15 - 57.63) \tag{3.9.3}$$

НДФЛ будет суммой этого, но у нее есть вычет.

$$t_1 = 0.13 \cdot 800 \cdot x \tag{3.9.4}$$

$$t_2 = 0.13 \cdot 800 \cdot 49.39 \tag{3.9.5}$$

$$t_3 = 0.13 \cdot 800 \cdot 57.63 \tag{3.9.6}$$

Ее выгода $t_1 + t_2 + t_3 - T_1 - T_2 - T_3$. Если эта штука больше нуля, то ей выгоден вариант А. Если она меньше нуля, то вариант Б. Значит, нам нужно искать точку нуля.

$\boxed{\text{Вариант Б}}$ Никаких налогов.
Решаем уравнение:

$$x + 48.39 + 57.63 - (114.15 - x) - (114.15 - 48.39) - (114.15 - 57.63) = 0 \tag{3.9.7}$$

3.10 Задача М4

Ну вот 17.10.2015 он кладет деньги. Ставка начинает работать 01.11.2015 до 31.01.2016. А потом все лежит до 07.03.2016.

Значит, сначала все лежит под 3%. Потом лежит под 3%+x, потом не больше 91 дня лежит под 10%.

Первый интервал – 15 дней. Потом 91 день, а потом еще 36.

Ищем дополнительную процентную ставку для чувака:

$$x = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \cdot 0.75 \cdot \frac{365}{91} = \frac{1229.94 - 1168.75}{1168.75} \cdot 0.75 \cdot \frac{365}{91} = 15.7497\% \tag{3.10.1}$$

Он получает полную ставку, так как это меньше 18% Ищем эффективную ставку:

$$i_{ef} = \left(0.03\frac{15}{365} + 0.1875 \cdot \frac{91}{365} + 0.1\frac{36}{365}\right) \cdot \frac{365}{15+91+36} \tag{3.10.2}$$

$$i_{ef} = 2.7504 \cdot (0.0012 + 0.0467 + 0.0099) \tag{3.10.3}$$

$$i_{ef} = 15.90\% \tag{3.10.4}$$

$\boxed{\text{б}}$

$$\frac{P_1 - P_0}{P_0} \cdot 0.75 \cdot \frac{365}{91} = \frac{x - 1168.75}{1168.75} \cdot 0.75 \cdot \frac{365}{91} = 0.18 \tag{3.10.5}$$

$$P_1 = 1238.68 \tag{3.10.6}$$

3.11 Задача В3

Есть некий Иван, тоже открывающий ИИС. Надо найти цену последней покупки паев, при которой ему все безразлично.

При первом варианте он платит налоги, но получает вычет от взноса на счет. Тогда считаем сумму налогов:

$$T_1 = 0.13 \cdot (x - 142.74) \cdot 100 \tag{3.11.1}$$

$$T_2 = 0.13 \cdot (x - 109.39) \cdot 100 \tag{3.11.2}$$

$$T_3 = 0.13 \cdot (x - 121.78) \cdot 100 \tag{3.11.3}$$

Зато с этого он получает вычет:

$$t_1 = 0.13 \cdot 100 \cdot 142.74 \tag{3.11.4}$$

$$t_2 = 0.13 \cdot 100 \cdot 109.39 \tag{3.11.5}$$

$$t_3 = 0.13 \cdot 100 \cdot 121.78 \tag{3.11.6}$$

Значит, уравнение:

$$t_1 + t_2 + t_3 = T_1 + T_2 + T_3 \tag{3.11.7}$$

После сокращения всего на свете:

$$3x = 2(142.74 + 109.39 + 121.78) \tag{3.11.8}$$

$$x = 249.25 \tag{3.11.9}$$

3.12 Задача Ц4

17 октября 2014 года какой-то дурак решит вбухать 3 500 000 рублей в депозит до 15 февраля 2016 года.

Находим сразу ставку от НЛМК:

$$d = 32 - 319 + 365 = 78 \tag{3.12.1}$$

$$x = \frac{P_1 - P_0}{P_0}\frac{365}{78} \cdot 0.85 = 20.44\% > 17.5\% \tag{3.12.2}$$

Значит, он получает возможный максимум в 20.5% за период.

Ищем ставку:

$$1 + 0.03\frac{29}{365} + 0.205\frac{78}{365} + 0.1\frac{35}{365} = 1.0558 \tag{3.12.3}$$

Значит, $i_{ef} = 14.34\%$.

$\boxed{\text{в}}$ Найдем цену:

$$\frac{P_1 - 73.68}{73.68}\frac{365}{78} \cdot 0.85 = 17.5\% \tag{3.12.4}$$

$$P_1 = 76.43 \tag{3.12.5}$$

4 Семинар 4. Финансовые ренты

4.1 Задача 1

Рента 1: $R_1 = 240000$, $p_1 = 12$, $\frac{R_1}{p_1} = 20000$, $m = 1$, $n_1 = 5$.

Потом ренты делятся на две штуки. У ренты 2 $p_2 = 4$, а у ренты 3 $n = 2$. Надо найти $\frac{R_2}{p_2}$, R_3.

Главная формула:

$$PVA = \frac{R}{P}\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \tag{4.1.1}$$

Понимаем из эквивалентности, что:

$$PV_1 = PV_2 + PV_3 \tag{4.1.2}$$

Находим PV_1:

$$PV = 20000\frac{1-1.12^{-5}}{1.12^{1/12}-1} = 911755.89 \tag{4.1.3}$$

Вдруг понимаем, что:

$$PV_2 = 0.7PV_1 \tag{4.1.4}$$

Из этого следует, что:

$$PV_3 = 0.3PV_1 \tag{4.1.5}$$

Скидку лучше учтем в конце.

Получаем $PVA_1 = 911755.89$, $PVA_2 = 638229.12$, $PVA_3 = 273526.77$.

Теперь можно записать для второй ренты:

$$\frac{R_2}{4}\frac{1-(1+0.12)^{-5}}{(1+0.12)^{1/4}-1} = 638229.22 \tag{4.1.6}$$

Для Акакия без учета скидки:

$$\frac{R_3}{12}\frac{1-(1+0.12)^{-2}}{(1+0.12)^{\frac{1}{12}}-1} = 273526.77 \tag{4.1.7}$$

Из этого мы находим $\left(\frac{R}{p}\right)_3$. Это надо умножить на 0.85 и получить ответ.

4.2 Задача 2

Имеется рента с параметрами: 10 000 рублей один раз в конце года, ставка процента 18% годовых, срок ренты шесть лет. Найти требуемый параметр новой ренты, если прочие условия равны.

Сначала считаем PVA:

$$PVA = 10000\frac{1-1.18^{-6}}{1.18-1} = 34976.03 \tag{4.2.1}$$

$\boxed{\text{а}}$ Размер платежа ренты, начисление процентов полугодовое. Считаем приведенную стоимость. Ищем R/p.

$$\frac{R}{p} = PVA\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}} \tag{4.2.2}$$

Выходит 10 208.45 рублей, потому что $m = 2$. В пункте $\boxed{\text{в}}$ 2347.04 рублей, потому что $m = 1$, а вот $p = 4$.

$\boxed{\text{б}}$ А теперь вдруг непрерывное начисление. Раньше мы помнили, что надо как-то в году падали кусочки по R/p. Как бы мы продисконтировали первый платеж и его друзей?

$$PVA = \frac{R}{p}\cdot e^{-\frac{\delta}{p}} + \frac{R}{p}\cdot e^{-\frac{2\delta}{p}} + \cdots + \frac{R}{p}\cdot e^{-\delta n} = \tag{4.2.3}$$

$$= \frac{R}{p}\left[\frac{e^{-\frac{\delta}{p}}}{1-e^{-\frac{\delta}{p}}}\right] - \frac{R}{p}\left[\frac{e^{-\delta\left(n+\frac{1}{p}\right)}}{1-e^{-\frac{\delta}{p}}}\right] = \frac{R}{p}\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1} \tag{4.2.4}$$

По этой формуле и находим.

$\boxed{\text{г}}$ Вот это кривовато. Подставляем в формулу, находим число лет, требующую для 4000. Выразим n.

$$PVA = \frac{R}{p}\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \tag{4.2.5}$$

$$PVA \cdot \frac{p}{R} = \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \tag{4.2.6}$$

$$PVA \cdot \frac{p}{R} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - PVA \cdot \frac{p}{R} = 1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn} \tag{4.2.7}$$

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn} = 1 - PVA \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right] \frac{p}{R} \tag{4.2.8}$$

Логарифмируем:

$$-mn \ln(1 + \frac{i}{m}) = \ln \left(1 - PVA \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right] \frac{p}{R}\right) \tag{4.2.9}$$

В итоге:

$$n = \frac{\ln\left(1 - PVA \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right] \frac{p}{R}\right)}{-m \ln(1 + \frac{i}{m})} \tag{4.2.10}$$

Придется растянуть на год вперед и слегка растянуть. А потом и окажется, что решения нет. Магия.

$\boxed{\text{д}}$ Теперь ищем ставку. У нас есть PVA, 8000 рублей в год и 8 лет.

$$PVA = \frac{R}{p} \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \tag{4.2.11}$$

Подставляем:

$$34976.03 = 8000 \frac{1 - (1 + i)^{-8}}{i} \tag{4.2.12}$$

$$4.372i = 1 - (1 + i)^{-8} \tag{4.2.13}$$

4.3 Задача 3

Два вклада отличаются друг от друга на 100 рублей. Больший вклад вложен на 6 месяцев под 10% годовых, а меньший – на 10 месяцев под 15% годовых. Определить размеры вкладов, если проценты, полученные по этим вкладам равны.

Раз меньше года, то простые проценты. Пусть размер второго вклада x.

$$I = (x + 100) \cdot 0.1 \cdot \frac{6}{12} \tag{4.3.1}$$

$$I = x \cdot 0.15 \cdot \frac{10}{12} \tag{4.3.2}$$

$$1.5x = 0.6x + 60 \tag{4.3.3}$$

$$x = 60.67 \tag{4.3.4}$$

4.4 Задача 4

Страховая компания, заключившая договор с производственной фирмой на 3 года, поступающие ежегодные страховые взносы – 5 млн. рублей помещает в банк под 15% годовых с начислением процентов по полугодиям. Определить сумму, полученную страховой фирмой по условиям этого контракта.

Надо догадаться, что хотят FVA. Главная формула:

$$FVA = \frac{R}{p} \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 5 \cdot 10^6 \frac{1.075^{3 \cdot 2} - 1}{1.075^2 - 1} = 17455470.20 \tag{4.4.1}$$

4.5 Задача 5

Страховая компания, заключившая договор с производственной фирмой на три года, поступающие ежегодные страховые взносы – 5 млн. рублей (взнос поступает двумя равными платежами – каждые полгода) помещает в банк под 15% годовых с начислением процентов раз в году. Определить сумму, полученную страховой фирмой по условиям этого контракта.

$$FVA = \frac{R}{p}\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = \frac{5\cdot 10^6}{2}\frac{1.15^3-1}{1.15^{1/2}-1} = 17990853.47 \tag{4.5.1}$$

4.6 Задача 6

Страховая компания, заключившая договор с производственной фирмой на три года, поступающие ежегодные страховые взносы – 5 млн. рублей (взнос поступает двумя равными платежами – каждые полгода) помещает в банк под 15% годовых с начислением процентов два раза в год (по полугодиям). Определить сумму, полученную страховой фирмой по условиям этого контракта.

$$FVA = \frac{R}{p}\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = \frac{5\cdot 10^6}{2}\frac{1.075^{3\cdot 2}-1}{1.075-1} = 18110050.85 \tag{4.6.1}$$

4.7 Задача 7

Страховая компания, заключившая договор с производственной фирмой на три года, поступающие ежегодные страховые взносы – 5 млн. рублей (взнос поступает двумя равными платежами – каждые полгода) помещает в банк под 15% годовых с начислением процентов ежеквартально. Определить сумму, полученную страховой фирмой по условиям этого контракта.

$$FVA = \frac{R}{p}\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = \frac{5\cdot 10^6}{2}\frac{1.0375^{3\cdot 4}-1}{1.0375^2-1} = 18174347.85 \tag{4.7.1}$$

4.8 Задача 8

Годовой платеж в размере 41200 рублей вносится два раза в год (по полугодиям) равными суммами по 20600 рублей в течение трех лет, проценты начисляются раз в год из расчета 20% годовых. Определить современную величину такой ренты.

$$PVA = \frac{R}{P}\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = 20600\frac{1-1.20^{-3}}{1.2^{1/2}-1} = 90928.74 \tag{4.8.1}$$

90928.74 наш ответ.

4.9 Задача 9

Фирма предполагает создать специальный фонд в размере 150 000 рублей, для чего будет ежегодно вносить в банк 43196 рублей под 15% годовых. Определить срок, необходимый фирме для создания подобного фонда.

Насилуем формулу для FVA.

$$FVA = \frac{R}{p}\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = 150000 \tag{4.9.1}$$

Быстренько суем все числа:

$$150000 = 43196\frac{1.15^{n}-1}{0.15} \tag{4.9.2}$$

$$n = 3.0000 \tag{4.9.3}$$

4.10 Задача 10

Банк рассматривает условия предоставления кредита своему клиенту в размере 28000 рублей под 10% годовых. На какой срок банк может выдать кредит, если клиент в состоянии его погашение производить равными ежегодными выплатами в конце каждого года в размере не более 7200 рублей?

Здесь PVA.

$$PVA = \frac{R}{P}\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = 7200\frac{1-1.1^{-n}}{0.1} = 28000 \tag{4.10.1}$$

$$n = 5.167 \tag{4.10.2}$$

Придется выдавать на шесть лет.

4.11 Задача 11

Имеется соглашение о выплате немедленной годовой ренты сроком на четыре года. Величина годового платежа 20000 рублей, процентная ставка 10% годовых. По новому соглашению оплата производится с отсрочкой в два года при сохранении предыдущего размера годового платежа. Определить срок новой ренты.

Немедленная рента – начиная сразу. Это не значит, что сейчас. Первый платеж здесь через год все равно.

Все так шло хорошо, а потом вдруг отсрочка. Все равно должно быть все эквивалентно:

$$PVA_1 = PVA_2 \tag{4.11.1}$$

Бстро находим, что $PVA_1 = 63397.31$. Нельзя забыть продисконтировать PVA_2.

Записываем PVA_2:

$$20000\frac{1-1.1^{-n}}{0.1} = 63397.31 \cdot 1.1^2 \tag{4.11.2}$$

$$n = -\frac{\ln\left(1-\frac{0.1\cdot 63397.31\cdot 1.1^2}{20000}\right)}{\ln(1.1)} \tag{4.11.3}$$

$$n \approx 5.75 \tag{4.11.4}$$

Ну, если так, то придется платить пять лет, а еще кусочек добавить дурочкам сразу.

4.12 Задача 12

Вячеслав сейчас обучается в Норвегии за счет королевства и рассматривает для себя две возможности продолжения карьеры: в Норвегии или в России. Оставаясь в Норвегии, он будет вынужден на протяжении 10 лет выплачивать по 3000 NOK в счет погашения образовательного кредита и 9000 NOK в месяц на протяжении 20 лет в счет погашения ипотечного кредита. Среднерыночная заработная плата после окончания бизнес-школы в Норвегии составляет 30 000 NOK в месяц, при этом раз в 7 лет можно рассчитывать на повышение и рост ежемесячной зарплаты на 10000 NOK. В России можно рассчитывать на стартовую зарплату в 60 000 рублей в месяц и рост ее на 30 000 рублей в месяц каждый второй год. На решение жилищного вопроса в Москве уходит в среднем 30 000 рублей в месяц. Какое решение примет Вячеслав: остаться в Норвегии или уехать назад в Россию, если 1 NOK = 6 рублям, норвежские банки предлагают ставку 3% по депозитам, российские банки дают 8% годовых и эти цифры не будут меняться в обозримом будущем.

Надо просто посчитать очень много всяких PVA.

$$PVA = \frac{R}{P}\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \tag{4.12.1}$$

$\boxed{\text{Норвегия}}$ Считаем для образовательного кредита:

$$PVA_b = -\frac{3000}{1}\frac{1-1.03^{-10}}{0.03} = -25590.61 \tag{4.12.2}$$

А теперь для ипотеки:

$$PVA_m = -9000\frac{1-1.03^{-20}}{1.03^{1/20}-1} = -2715908.80 \tag{4.12.3}$$

А вот теперь считаем его идиотские зарплаты. Сначала основная часть:

$$PVA_w = 30000\frac{1-1.03^{-20}}{1.03^{1/12}-1} = 5429141.42 \tag{4.12.4}$$

Теперь идиотский бонус, который он получал 13 лет.

$$PVA_b = \frac{1}{1.03^7} 10000 \frac{1 - 1.03^{-13}}{1.03^{1/12} - 1} = 1293648.67 \tag{4.12.5}$$

И еще один:

$$PVA_b = \frac{1}{1.03^{14}} 10000 \frac{1 - 1.03^{-6}}{1.03^{1/12} - 1} = 658953.64 \tag{4.12.6}$$

В итоге он на 4976612.50 крон в плюсе. Это 29 859 675 рублей.

$\boxed{\text{Россия}}$ А теперь считаем о России.

Этот мужик уже всех страшно достал. Включим сразу квартиру ему в зарплату и посчитаем базовую зарплату:

$$PVA = 30000 \frac{1 - 1.108^{-20}}{1.08^{1/20} - 1} = 3662331.91 \tag{4.12.7}$$

А еще он получает каждые два года дополнительные 30 000 рублей к зарплате. Это все надо считать:

$$PVA = \frac{1}{1.08^2} 30000 \frac{1 - 1.108^{-18}}{1.08^{1/20} - 1} = 2997144.56 \tag{4.12.8}$$

$$\vdots$$

$$PVA = \frac{1}{1.08^{18}} 30000 \frac{1 - 1.108^{-2}}{1.08^{1/20} - 1} = 166462.49 \tag{4.12.9}$$

А все ради вывода, что лучше ему в Норвегии.

5 Семинар 5. Потребительский кредит

5.1 Задача 1

В Сбербанке 01.02.2008 был получен кредит на 7 месяцев (до 01.09.2008) под 12% годовых в размере 28 000 рублей. Погашение основного долга происходит ежемесячно равными частями. Составить график погашения кредита, если получатель гарантирует оплату 3 числа каждого месяца.

Строим график. Формула дана:

$$z = \frac{S}{T} + O\frac{D}{365(366)}\frac{r\%}{100\%} \tag{5.1.1}$$

S – сумма предоставляемого кредита, T – срок пользования кредитом (в месяцах, кварталах), O – остаток задолженности по основному долгу, D – фактическое количество календарных дней в платежном периоде, $r\%$ – процентная ставка по кредиту, годовых)

Здесь важно то, что погашение идет кусками по 4 000 рублей. Считаем процентики, а потом и совокупные платежи.

Дата	Дней	Тело долга	Погашение тела долга	Проценты	Совокупные выплаты
2/1/2008	0	28000			
3/3/2008	31	24000	4000	284.59	4284.59
4/3/2008	31	20000	4000	243.93	4243.93
5/3/2008	30	16000	4000	196.72	4196.72
6/3/2008	31	12000	4000	162.62	4162.62
7/3/2008	30	8000	4000	118.03	4118.03
8/3/2008	31	4000	4000	81.31	4081.31
9/1/2008	29	0	4000	38.03	4038.03
Итого			28000	1125.23	29125.23

5.2 Задача 2

Предприятие получило кредит на 500 млн рублей на 4 года под 18% годовых в банке города. Одновременно с получением кредита предприятие открыло в областном банке счет, на котором стала формировать фонд погашения этого кредита. Проценты, начисляемые областным банком равны 20% годовых. Все проценты являются сложными и начисляются раз в год в конце года. Определить величину ежегодных взносов в погасительный фонд и составить план погашения данного кредита. (Подразумевается, что предприятие будет платить сначала лишь проценты, а потом выплатит весь основной долг). Определить размер экономии средств, которую получило предприятие благодаря погасительному фонду.

Внимание к тому, что он платит проценты сразу, а не копит.

Чтобы посчитать все для погасительного фонда для тела долга, надо FVA:

$$FVA = \frac{A}{1} \frac{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^4 - 1}{\left(1 + \frac{20}{1}\right)^{\frac{1}{1}} - 1} = 500 \tag{5.2.1}$$

$$A = 500 \cdot 10^6 \frac{0.2}{1.2^4 - 1} = 93144560.36 \tag{5.2.2}$$

Это отчисления с конца первого года. Экономия – в сумме он платит 372 578 241.44, а не 500 (проценты отдельно).

Дата	Тело долга, руб.	Погашение тела долга, млн. руб.	Проценты, руб.	Отчисления в фонд	Сумма на фонде
0	500000000	0		0	0
1	500000000	0	90 000000	93144560.36	93144560.36
2	500000000	0	90 000000	93144560.36	204918032.8
3	500000000	0	90 000000	93144560.36	339046199.7
4	0	500000000	90 000000	93144560.36	500000000

5.3 Задача 3

Кредит в сумме 40 млн. рублей, выданный на 5 лет под 6% годовых, подлежит погашению равными ежегодными выплатами в конце каждого года. Проценты начисляются в конце года. После выплаты третьего платежа достигнута договоренность между кредитором и заемщиком о продлении срока погашения займа на 2 года и увеличении процентной ставки с момента конверсии до 10%. Необходимо составить план погашения оставшейся части долга.

Надо посчитать аннуитет для первой схемы:

$$A = 40\frac{0.06}{1 - 1.06^{-5}} \tag{5.3.1}$$

Дата	Тело долга	Выплаты тела долга, руб.	Проценты	Совокупный платеж
0	40000000			
1	32904143.98	7095856.02	2400000	9495856.02
2	25382536.6	7521607.38	1974248.64	9495856.02
3	17409632.78	7972903.82	1522952.2	9495856.02
4	13658365.21	3751267.57	1740963.28	5492230.85
5	9531970.88	4126394.33	1365836.52	5492230.85
6	4992937.12	4539033.76	953197.09	5492230.85
7	0	4992937.12	499293.71	5492230.83
Итого		40000000	10456491.44	50456491.44

5.4 Задача 4

Банк выдал долгосрочный кредит в сумме 400 000 рублей на 5 лет под 6% годовых. Погашение кредита должно производиться равными ежегодными выплатами в конце каждого года, включающими погашение основного долга и процентные платежи. Начисление процентов производится раз в году. Составить план погашения кредита и рассчитать эффективную ставку по этому кредиту (по указанию ЦБ РФ «О порядке расчета и доведения до заемщика – физического лица полной стоимости кредита»). Допустим, что за оформление кредита банк берет единовременную комиссию в размере 1% от суммы кредита. Насколько эта комиссия увеличивает эффективную ставку по кредиту? Теперь допустим, что единовременной комиссии банк не берет, но за каждую операцию взимает комиссию в размере 0,5% от суммы кредита. Какова теперь эффективная ставка по этому кредиту?

Сначала доходность у нас выходит 6%, а с комиссией 6.37%, только с комиссией 6.77%. Со всем фаршем становится 7.15%

Дата	Тело долга	Выплаты тела долга, руб.	Проценты	Совокупный платеж	Комиссия	С комиссией
0	400000			-400000	4000	-396000
1	329041.44	70958.56	24000	94958.56	2000	96958.56
2	253825.37	75216.07	19742.49	94958.56	2000	96958.56
3	174096.33	79729.04	15229.52	94958.56	2000	96958.56
4	89583.55	84512.78	10445.78	94958.56	2000	96958.56
5	0	89583.55	5375.01	94958.56	2000	96958.56
				6.00%		7.15%

5.5 Задача 5

Кредитное учреждение «А***-банк» предоставило ОАО «Титан-А» два кредита. Первый кредит был выдан на 200 млн рублей под 11% годовых на 6 лет. Погашение первого кредита должно производиться равными полугодовыми платежами, при этом проценты по кредиту также начисляются по полугодиям. Второй кредит выдан в размере 250 млн рублей на срок 4 года по ставке 14% годовых. Погашение второго кредита происходит равными годовыми платежами с начислением процентов раз в году в конце года. В конце второго года банком в ходе переговоров с руководством ОАО была достигнута договоренность об объединении двух кредитов в один на следующих условиях. Консолидированный долг имеет срок погашения 8 лет. Погашение этого долга происходит равными полугодовыми платежами, а начисление процентов – полугодовое при ставке 18% годовых. Определить величину срочной уплаты по консолидированному долгу за полгода.

Сначала считаем вариант для первого кредита. Из формулы для PVA находим R/p. Аналогично со вторым.

Потом под 18% все складывается.

Дата	Тело долга	Выплаты тела долга, руб.	Проценты	Совокупный платеж
0	200000000			
0.5	187794153.8	12205846.24	11000000	23205846.24
1	174916986	12877167.78	10328678.46	23205846.24
1.5	161331574	13585412.01	9620434.23	23205846.24
2	146998964.3	14332609.67	8873236.57	23205846.24
2.5	131878061.1	15120903.2	8084943.04	23205846.24
3	115925508.2	15952552.88	7253293.36	23205846.24
3.5	99095564.93	16829943.29	6375902.95	23205846.24
4	81339974.76	17755590.17	5450256.07	23205846.24
4.5	62607827.13	18732147.63	4473698.61	23205846.24
5	42845411.38	19762415.75	3443430.49	23205846.24
5.5	21996062.77	20849348.61	2356497.63	23205846.24
6	0	21996062.77	1209783.45	23205846.22

Дата	Тело долга	Выплаты тела долга, руб.	Проценты	Совокупный платеж
2	288284405.3			
2.5	279549413.8	8734991.45	25945596.47	34680587.92
3	270028273.1	9521140.68	25159447.24	34680587.92
3.5	259650229.8	10378043.34	24302544.58	34680587.92
4	248338162.5	11312067.24	23368520.68	34680587.92
4.5	236008009.3	12330153.29	22350434.63	34680587.92
5	222568142.2	13439867.09	21240720.83	34680587.92
5.5	207918687	14649455.13	20031132.79	34680587.92
6	191950780.9	15967906.09	18712681.83	34680587.92
6.5	174545763.3	17405017.64	17275570.28	34680587.92
7	155574294.1	18971469.22	15709118.7	34680587.92
7.5	134895392.6	20678901.45	14001686.47	34680587.92
8	112355390.1	22540002.58	12140585.34	34680587.92
8.5	87786787.23	24568602.82	10111985.1	34680587.92
9	61007010.16	26779777.07	7900810.85	34680587.92
9.5	31817053.15	29189957.01	5490630.91	34680587.92
10	0	31817053.14	2863534.78	34680587.94

5.6 Задача A1

Предприятие по производству бутилированной питьевой воды взяло кредит в размере два миллиона рублей на два с половиной года. При этом договоренность с банком относительно графика погашения основного долга выглядит следующим образом: первый платеж равен 1/12 долга, второй – 1/9 долга, третий – 1/6 долга, четвертый – 1/3 долга, и пятый – оставшаяся часть долга. Банк начисляет проценты ежеквартально, а предприятие делает взнос каждые полгода (в конце периода). Составьте план погашения этого кредита, если эффективная процентная ставка банка по кредитным операциям составляет 12% годовых.

В таблице достаточно даты для моментов выплат по кредит. А вот беда в другом. У нас есть эффективная ставка.

$$1 + i_{ef} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^4 \tag{5.6.1}$$

Но понимаем, что нам не так нужно считать это все. Проценты в конце первого полугодия будут иметь вид:

$$\% = D\left(1 + \frac{i_{nom}}{4}\right)^2 = D(\sqrt{1.12} - 1) \tag{5.6.2}$$

Дата	Тело долга, руб.	Погашение	Коэффициент списания	Проценты	Совокупные платежи
0	2000000	-			
0.5	1833333.33	166666.67	0.083333333	116600	283266.67
1	1611111.11	222222.22	0.111111111	106883.33	329105.55
1.5	1277777.78	333333.33	0.166666667	93927.78	427261.11
2	611111.11	666666.67	0.333333333	74494.44	741161.11
2.5	0	611111.11	Пфф	35627.78	646738.89
		2000000		427533.33	2427533.33

5.7 Задача A2

Предприятие по производству маленьких гипсовых фигурок для садовых участков взяло кредит в размере один миллион рублей на три года. При этом удалось договориться с банком о том, что в первый год будет погашено лишь 15% основного долга, затем 1/6 основного долга, и в последний год – все остальное. Банк начисляет проценты непрерывно, а предприятие делает взнос каждые полгода (в конце периода). Составьте план погашения этого кредита, если эффективная процентная ставка банка по кредитным операциям составляет 10% годовых.

Главная формула сюда:

$$1 + i_{ef} = e^{\delta} \tag{5.7.1}$$

$$e^{\delta} = 1.1 \tag{5.7.2}$$

$$e^{0.5\delta} = \sqrt{1.1} \tag{5.7.3}$$

Значит, проценты очень просто посчитать:

$$D\left[e^{0.5\delta} - 1\right] \tag{5.7.4}$$

5.8 Задача А3

В банке «Банк-Муму» был взят кредит на сумму 50 000 рублей под 18% годовых на четыре года. Составьте план погашения этого кредита аннуитетными платежами (срочная уплата), если платежи по кредиту делаются каждый год, а проценты начисляются по полугодиям.

Здесь все проще:

$$I_t = D_{t-1}\left(1 + \frac{i}{2}\right)^2 \tag{5.8.1}$$

5.9 Задача А4

В банке «Ва-Банк» был взят кредит на сумму 45 000 рублей под 7% (дискретная ставка) годовых на три года. Составьте план погашения этого кредита аннуитетными платежами, если платежи делаются каждые полгода, а проценты начисляются непрерывно. Раз непрерывно, то эта формула:

$$PVA = \frac{1 - e^{-n\delta}}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1} A \tag{5.9.1}$$

Проценты простейшим образом сюда:

$$D\left[e^{0.5\delta} - 1\right] \tag{5.9.2}$$

5.10 Задача Кр

Дата	Тело долга, руб	Выплата тела долга, руб.	Проценты, руб	Совокупный платеж
0	100,000.00	-100,000.00	-	100,000.00
1	85,459.06	14,540.94	16,000.00	30,540.94
2	68,591.57	16,867.49	13,673.45	30,540.94
3	49,025.28	19,566.29	10,974.65	30,540.94
4	26,328.38	22,696.90	7,844.04	30,540.94
5	-	26,328.38	4,212.54	30,540.92

6 Семинар 7. Критерии NPV и IRR

6.1 Задача 1

Инвестиционный проект имеет капитальные вложения в размере 33 000 руб., а ожидаемые чистые денежные поступления составляют 7 000 руб. в год в течение восьми лет, за исключением третьего года, когда чистые денежные потоки составят -3 000 рублей.

$\boxed{\text{а}}$ Считаем NPV:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} = 636.11 \tag{6.1.1}$$

$\boxed{\text{б}}$ Найдем NPV, если компания может выйти в любой момент. Ну, понятно, как считать: считаем по максимуму, за сколько фирма может продать. Достаточно ясно, что все сразу совпадет и никого она не обманет.

Дата	CF	DCF	FV CF	Cum CF	Cum DCF
0	-33000	-33000.00	-56700.14	-33000	-33000
1	7000	6542.06	11240.47	-26000	-26457.94
2	7000	6114.07	10505.11	-19000	-20343.87
3	-3000	-2448.89	-4207.65	-22000	-22792.76
4	7000	5340.27	9175.57	-15000	-17452.49
5	7000	4990.90	8575.30	-8000	-12461.59
6	7000	4664.40	8014.3	-1000	-7797.20
7	7000	4359.25	7490	6000	-3437.99
8	7000	4074.06	7000	13000	636.11

$\boxed{\text{в}}$ Считаем кучу разных показателей.

1. $MIRR$. Помним, что IRR часто плохо определена. Поэтому лучше просто: все отрицательные потоки по рыночной ставке авансируем к началу. К концу финализуем доходы (по WACC, по доходности активов и прочему, но в этой задаче по рыночной ставке).

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{COF_t}{(1+r)^t} = \frac{\sum_{t=0}^{n} CIF_t(1+WACC)^{n-t}}{(1+MIRR)^n} \tag{6.1.2}$$

Просто оттоки COF все приводим к началу, а притоки наращиваем к концу по $WACC$, после чего дисконтируем по $MIRR$ разом к началу все приведенные к концу CIF.

2. PI – стоит быть аккуратными с негативным потоками после первого, иногда их выносят вперед:

$$PI = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+t)^t}}{|CF_0|} \tag{6.1.3}$$

3. Всякие индексы окупаемости: PBP только грубо смотрит год, когда суммарные потоки становятся положительными. Это седьмой год.

   $PPBP$ смотрит точно, но предполагает линейность потока. Тогда 6.1429:

$$PPBP = 6 + \frac{-1000}{6000-(-1000)} \tag{6.1.4}$$

   $DPBP$ смотрит на чистые потоки. $PDPBP$ имеет ту же логику.

$$PDPBP = 7 - \frac{3437.95}{636.11+3437.95} \tag{6.1.5}$$

NPV	636.11
IRR	7.46%
MIRR	7.24%
PI	1.0193
PBP	7
PPBP	6.1429
DPBP	8
PDPBP	7.8439

6.2 Задача 2

Строительство завода по производству азотистых удобрен ий обойдется в £1 000 000 и займет полных два года. В течение десяти лет после строительства завод будет приносить доход £X ежегодно, затем он может быть продан за £200 000. Ясно, что $\mathrm{E}(CF_t) = 200000$. Средняя ставка равна 10%.

Дата	CF	DCF	FV CF	Cum CF	Cum DCF	S	D S
0	-1000000	-1000000.00	-3138428.377	-1000000	-1000000		507815.46
1	0	0.00	0	-1000000	-1000000		
2	0	0.00	0	-1000000	-1000000		
3	200000	150262.96	471589.538	-800000	-849737.03	100000	75131.48
4	200000	136602.69	428717.76	-600000	-713134.34	100000	68301.34
5	200000	124184.26	389743.42	-400000	-588950.08	100000	62092.13
6	200000	112894.79	354312.2	-200000	-476055.29	100000	56447.393
7	200000	102631.62	322102	0	-373423.67	100000	51315.81
8	200000	93301.48	292820	200000	-280122.19	100000	46650.73
9	200000	84819.52	266200	200000	-195302.67	100000	42409.761
10	200000	77108.66	242000	400000	-118194.01	100000	38554.32
11	200000	70098.78	220000	600000	-48095.23	100000	35049.38
12	400000	127452.33	400000	1000000	79357.09	100000	31863.08

$\boxed{\text{а}}$ NPV равен 79357.09. Простой срок окупаемости – семь лет. Дисконтированный – 12 лет.

$\boxed{\text{в}}$ Ищем PV страховых потоков по максимуму. Тогда мы найдем для единоразовой выплаты. Максимум они готовы выдать 587916.46. Важно, что если они ее возьмут, то NPV не изменится.

$\boxed{\text{г}}$ Магия страховки теперь в том, что мы хотим платить аннуитетами, да еще и в начале каждого года. Отсюда 12 слагаемых:

$$x + \frac{x}{1.1} + \dots + \frac{x}{1.1^{11}} = \frac{1.1x}{0.1} - \frac{\frac{x}{1.1^{12}}}{1 - \frac{1}{1.1}} = x\left(\frac{1.1}{0.1} - \frac{0.1}{0.1 \cdot 1.1^{11}}\right) = 507815.46 \quad (6.2.1)$$

Отсюда находим, что:

$$x = 74528.69 \tag{6.2.2}$$

Предложить за 400 000 единовременно страховку на все время она может запросто, фирма с радостью согласится.

NPV	79357.09
IRR	11.21%
MIRR	10.70%
PI	1.08
PBP	7
PPBP	7
DPBP	12.00
PDPBP	11.38

6.3 Задача 3

Автосалон «Первый» является официальным дилером четырех успешных немецких марок автомобилей, также он имеет в своем составе круглосуточную автомойку, станцию технического облуживания автомобилей (где клиенты автосалона могут проходить ТО и делать диагностику своего авто). Помимо этого, салону принадлежит кузовной цех, в котором осуществляется ремонт автомашин после аварии по страховкам ОСАГО и КАСКО.

В настоящий момент оттенки окраски автомобилей являются чрезвычайно сложной комбинаций нескольких простых исходных цветов. Обычно мастера покраски из кузовного цеха вручную подбирают пропорции смешивания для нахождения необходимого «колёра», но при этом тратится слишком много времени и краски, что завышает затраты салона в целом.

Руководство рассматривает возможность снижения затрат по оплате труда, намереваясь закупить специальную краскосмешивающую машину. В результате, по расчетам специалистов отдела маркетинга, экономия от снижения затрат составит порядка 5 000 рублей в год. Краскосмешивающая машина «Радуга 2009» стоит сейчас 35 000 рублей, ее расчетный срок службы составляет 15 лет. По расчетам этого же отдела затраты на капитал автосалона ($WACC$) в целом равны 12%.

$\boxed{\text{а}}$ Считаем NPV и IRR для проекта: $NPV = -945.68$, $IRR = 11.49\%$. Не очень хорошо.

Год	CF	DCF
0	-35,000.00	-35,000.00
1	5,000.00	4,464.29
2	5,000.00	3,985.97
3	5,000.00	3,558.90
4	5,000.00	3,177.59
5	5,000.00	2,837.13
6	5,000.00	2,533.16
7	5,000.00	2,261.75
8	5,000.00	2,019.42
9	5,000.00	1,803.05
10	5,000.00	1,609.87
11	5,000.00	1,437.38
12	5,000.00	1,283.38
13	5,000.00	1,145.87
14	5,000.00	1,023.10
15	5,000.00	913.48
		-945.68

$\boxed{\text{б}}$ За дополнительные 500 рублей в год платы по абонентскому обслуживанию автосалон с помощью специалистов ремонтного бюро «Как и прежде» может поддерживать работоспособность машины «Радуга 2009» неограниченно долго, а чистый поток от работы данной машины составит 4 500 рублей ежегодно неограниченно долго.

Это значит, что тогда у нас получается $CF_{t>0} = 4500$. Тогда просто считаем перпетуитет:

$$NPV = -35000 + \frac{4500}{0.12} = 2500 \tag{6.3.1}$$

Так уже намного веселее.

$\boxed{\text{в}}$ Вместо контракта с ремонтным бюро инженеры автос алона сумели разработать приспособление, которое позволяет мощности машины оставаться неизменной неограниченно долго. Реинвестируя 20% от ежегодной экономии затрат в закупку новых запчастей, инженеры автосалона могут увеличить экономию затрат на 4% ежегодн о. Например, если в конце первого года 20% от 5 000 рублей экономии затрат (1 000 рублей) будет реинвестироваться в запчасти, то чистый поток от использования машины составит всего 4 000 рублей за первый год. В следующем году, экономия затрат составит уже 5 200 рублей или 4 160 рублей чистого потока (снова 20% инвестировали в машину). Другими словами, до тех пор, пока в конце года инвестируется 20% от экономии затрат, экономия затрат за следующий год возрастает на 4% в год.

Давайте запишем NPV:

$$NPV = -35000 + \frac{0.8 \cdot 5000(1+0.04)^0}{1.12} + \frac{0.8 \cdot 5000(1+0.04)^1}{1.12^2} + \frac{0.8 \cdot 5000(1+0.04)^2}{1.12^3} + \dots \tag{6.3.2}$$

Можно просто и тупо посчитать: $b_1 = \frac{4000}{1.12}$, $q = \frac{1.04}{1.12}$.

$$NPV = -35000 + 50000 = 15000 \tag{6.3.3}$$

$\boxed{\text{г}}$ Отсюда ясно, что инженерам можно дать по максимуму 12 500 рублей премии. Это можно либо единовременно, либо аннуитетами.

$$12500 = A\frac{1 - 1.12^{-1}}{1.12^{1/12} - 1} \tag{6.3.4}$$

$$A = 1107.03 \tag{6.3.5}$$

6.4 Задача 4

Кривая доходности ОФЗ – спот-ставки (теноры кривой ОФЗ). Используем следующую логику:

$$PV(CF_5) = \frac{CF_5}{(1 + YTM_{5Y})^5} \tag{6.4.1}$$

$$PV(CF_7) = \frac{CF_7}{(1 + YTM_{7Y})^7} \tag{6.4.2}$$

Все дисконтируем по ОФЗ.

Год	CF	Ставка	DCF
0	-200		-200
1	10	8.76%	9.19
2	15	8.66%	12.70
3	20	8.82%	15.52
4	25	8.85%	17.81
5	30	8.84%	19.64
6	35	8.83%	21.07
7	40	8.83%	22.12
8	45	8.82%	22.88
9	40	8.82%	18.69
10	35	8.82%	15.03
		NPV	-25.33

6.5 Задача 5

Имеется инвестиционный проект, рассчитанный на три года, по которому известны его денежные потоки, подсчитанные в реальном выражении. По стране широко распространен прогноз Минэкономразвития по инфляции: 10% годовых в течение обозримого будущего, а в настоящий момент ставка дисконтирования в стране равна 15 процентам (средняя доходность широкого сводного индекса). Проект и все другие альтернативы вложений имеют сходную величину риска.

Дисконтировать тут надо по реальной ставке. Можно просто инфлировать, а потом дисконтировать все, а можно просто посчитать реально:

$$1 + r = \frac{1+i}{1+\pi} \tag{6.5.1}$$

Тогда просто $r = \frac{1.15}{1.1} - 1 = 4.55\%$. По этой ставке и дисконтируем.

7 Семинар 8. Критерии PBP и PI, EAA

7.1 Задача 1

Фирма выделила на реализацию инвестиционных проектов своих сотрудников 20 000 рублей, имея кредитную линию в банке на 30 000 рублей под 10% годовых, которую она также могла бы использовать на эти цели. От сотрудников поступило четыре инвестиционных проекта, по которым уже были посчитаны все критерии.

Критерий	Проект А	Проект Б	Проект В	Проект Г
Срок жизни, мес.	36	23	29	34
DPBP, мес.	20	22	24	26
IRR, %	15	12	11	14
PI, доли	1,2	1,05	1,07	1,15
NPV, руб.	10 400	3 000	3 200	3 000

Сразу отваливается проект Г – слишком долгий.

Тут ограничения по сроку и по финансированию – у них не больше 50 000. Сразу видим, что $IRR > 10\%$ для всех, поэтому не противно использовать кредит. Правда, чтобы удовлетворить ограничениям по объему финансирования, надо найти инвестиции. Преобразуем PI:

$$PI = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t}}{|I|} = \frac{NPV + |I_0|}{|I_0|} \tag{7.1.1}$$

Значит:

$$|I_0| = \frac{NPV}{PI - 1} \tag{7.1.2}$$

Сразу выбираем В.

	NPV	PI	I_0
А	10,400.00	1.20	52,000.00
Б	3,000.00	1.05	60,000.00
В	3,200.00	1.07	45,714.29

7.2 Задача 2

Предприятие ЗАО «Канари» получило на рассмотрение пять инвестиционных проектов, данные по которым представлены в таблице (данные в млн рублей):

Проект	CF0	Денежные потоки проекта, CFt		Текущая стоимость CF при r=10%	NPV при r=10%
		t = 1	t = 2		
A	-15	+17	+17	30	15
B	-5	+5	+10	13	8
C	-12	+12	+12	21	9
D	-8	+12	+11	20	12
E	-20	+10	+10	17	-3

Тут странные дела.

E сразу отметаем за отрицательный NPV. Для остальных тоскливо считаем PI и ранжируем:

	PI	I	d
B	2.6	5	1
D	2.5	8	1
A	2	7	0.47
C	1.75	0	0
E	0.85	0	0

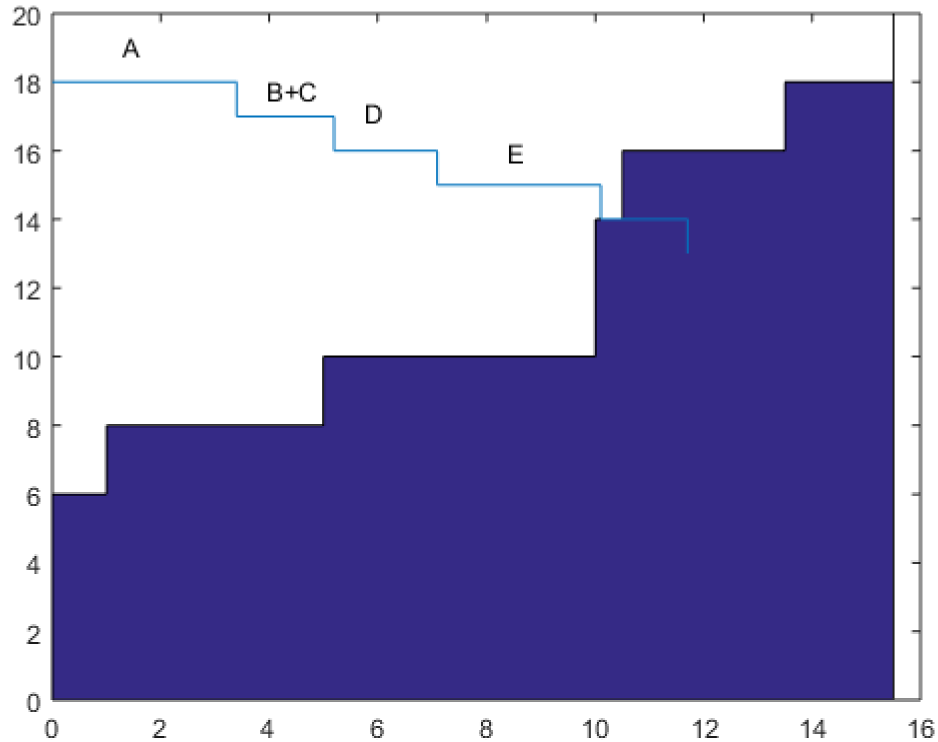
Значит, полностью финансируем два проекта и еще один на 47%.

7.3 Задача 3

Очень простой принцип: принимаем проект, когда IRR больше ставки привлечения.

Для этого сначала строим предельные ставки, потом строим по проектам. Единственный затык может быть в получении кредитов в банках. Предполагаем, что первый миллиард дадут под 6%, а следующие 4 по 8%.

Выбираем $A - E$. Проект F уже не финансирует себя полностью, поэтому проживем без него.



7.4 Задача А3

ООО «Тюфяк +» планирует построить лагерь для игры в пейнтбол недалеко от Владивостока. Инвестиции в строительство составят 250 млн рублей, а положительные денежные начнут поступать уже на следующий год после сделанных инвестиций. Поскольку данные лагеря по дразумевают серьезное изменение ландшафта и экосистемы в районе застройки, то данные лагеря вызывают возмущение «зеленых» партий в регионе. Путем опроса своих знакомых юристов и политиков гендиректор ООО выяснил, что с вероятностью 10% в этом году в окружной суд будет подан иск о запрете строительства подобных лагерей на территории Дальнего Востока. Подобный иск может быть, как отклонен, так и удовлетворен, причем с равными вероятностями.

В случае удовлетворения иска, все существующие лагеря для пейтнбола будут немедленно ликвидированы и запрещены к эксплуатации в будущем (т.е. денежные потоки от них равны нулю на бесконечном отрезке времени). В случае отклонения иска, раздутая «зелеными» кампания привлечет дополнительный интерес к пейнтболу и увеличит денежные потоки от эксплуатации лагеря до 100 млн рублей в год на бесконечно долгий промежуток времени. В случае, если иск не будет подан в этом году, то и в дальнейшем он не будет подан, поэтому денежные потоки от эксплуатации лагеря составят 50 млн рублей еж егодно на бесконечном промежутке времени. Ставка дисконтирования равна 10% за год.

$\boxed{\text{а}}$ Посчитаем NPV при решении строить немедленно. У нас такое распределение:

p	CF_t
0.9	50
0.05	0
0.05	100

$$NPV = -250 + \frac{\mathrm{E}_0[CF_t]}{0.1} = 250 \tag{7.4.1}$$

$\boxed{\text{б}}$ Предположим, что гендиректор ООО решил подождать со строительством лагеря на один год. Другими словами, через год он сумеет узнать, был ли подан иск или нет, и если «да», то был ли иск отклонен или удовлетворен.

Сделаем просто: считаем NPV разных сценариев на момент времени 1

p	NPV_1
0.9	250
0.05	0
0.05	750

Считаем NPV на сейчас:

$$NPV = \frac{0.9 \cdot 250 + 0.05 \cdot 750}{1.1} = 238.64 \tag{7.4.2}$$

Лучше прямо сейчас делать.

$\boxed{\text{в}}$ Теперь предположим, что вероятность подачи иска увеличилась до 30%. Наша табличка:

p	NPV_1
0.7	250
0.15	0
0.15	750

$$NPV = \frac{0.7 \cdot 250 + 0.15 \cdot 750}{1.1} = 261.36 \tag{7.4.3}$$

Если же мы строим сейчас, то $NPV = 250$. Значит, здесь лучше ждать.

$\boxed{\text{г}}$ Всегда есть две NPV – сейчас или ждать. NPV на вариант с ожиданием от возможности уйти не изменится.

Тогда мы просто дополнительно включаем вариант, где иск проигран:

$$NPV = -250 + \frac{0.7 \cdot 250 + 0.15 \cdot 750}{1.1} + 0.15\frac{250}{1.1} = 284.09 \tag{7.4.4}$$

7.5 Задача А4

Всемирный Банк Реконструкции и Развития выделил Нигерии трехлетний беспроцентный кредит в размере 7 млн долларов. Правительство Нигерии с вероятностью 0,2 сумеет вернуть кредит вовремя, а с вероятностью 0,5 вернет кредит только через 6 лет или не вернет вообще.

Ищем IRR:

$$-7 + \frac{0.2 \cdot 7}{(1+r)^3} + 0.5\frac{7}{(1+r)^6} = 0 \tag{7.5.1}$$

$$\frac{1}{(1+r)^3} = x > 0 \tag{7.5.2}$$

$$5x^2 + 2x - 10 = 0 \tag{7.5.3}$$

$$x = \frac{-2+\sqrt{204}}{10} \tag{7.5.4}$$

$$r = -6.62\% \tag{7.5.5}$$

7.6 Задача A5

Тайваньская компания HTC рассматривает две альтернативы увеличения производственных мощностей по вы пуску смартфонов по заказу компании Microsoft. Первая – построить новый завод в уезде Хуалянь недалеко от города Юй Ли Чжень, вторая – реконструировать уже имеющийся завод в городе Таоюане. Реализация любого из рассматриваемых проектов позволит компании HTC выполнить заказ.

С разными сроками можно по-разному. Либо искать повторение проектов (здесь 12 лет – минимально общий краткий спрос) и смотрят NPV по повторенным, либо смотрят EAA – equivalent *annual* annuity.

Есть проект 1 с NPV_1, второй с NPV_2, сроки разные ($n_1 \neq n_2$). Считаем размер аннуитетного платежа, который нужен, чтобы за n_1 лет получить NPV_1, аналогично со второй. Где больше платеж, тот проект и выбираем.

Раз все $annual$, то считаем, что $m = p = 1$:

$$NPV = PVA = EAA \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{7.6.1}$$

$$EAA = \frac{NPV \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \tag{7.6.2}$$

Считаем обычно к годовым платежам.

	CF_1	CF_2	DCF_1	DCF_2
0	-10,000,000.00	-2,000,000.00	-10,000,000.00	-2,000,000.00
1	1,000,000.00	500,000.00	943,396.23	471,698.11
2	2,000,000.00	1,000,000.00	1,779,992.88	889,996.44
3	2,500,000.00	1,200,000.00	2,099,048.21	1,007,543.14
4	3,000,000.00	1,500,000.00	2,376,280.99	1,188,140.49
5	3,200,000.00		2,391,226.15	
6	3,500,000.00		2,467,361.89	
		NPV	2,057,306.35	1,557,378.19
		EAA	418,379.23	449,446.10

7.7 Задача AA4

Ваши родители дали в долг на три месяца 10 000 рублей одному из Ваших родственников. По Вашим наблюдениям этот родственник лишь с вероятностью 0.2 сумеет вернуть деньги вовремя, с в ероятностью 0.5 вернет только через полгода, либо не вернет вообще.

Пишем занимательное уравнение:

$$-1+0.2\frac{1}{(1+IRR)^{0.25}}+0.5\frac{1}{(1+IRR)^{0.5}}=0 \tag{7.7.1}$$

$$\frac{1}{(1+IRR)^{0.25}}=x>0 \tag{7.7.2}$$

$$-1+0.2x+0.5x^2=0 \tag{7.7.3}$$

$$5x^2+2x-10=0 \tag{7.7.4}$$

$$x=1.2283 \tag{7.7.5}$$

$$IRR=-56.07\% \tag{7.7.6}$$

8 Семинар 9. Инвестиционные решения-3

8.1 Задача 1

Рассматривается возможность реализации проекта по строительству завода по производству мебели. Инвестиции по этому проекту составят 4 миллиона рублей и будут потрачены в момент начала реализации проекта. Строительство и запуск завода займет один год. Прибыль в первый год после запуска завода составит 1 миллион рублей. Прибыль во второй и последующий годы после запуска завода составит 2 миллиона рублей. Через 5 лет с момента начала строительства завода ожидается, что применяемая технология устареет, в связи с чем производство будет закрыто, а все оборудование будет продано по остаточной стоимости 0,5 миллиона рублей. Ставка дисконтирования для подобных проектов составляет 10% годовых.

а Считаем NPV. Тут мы производим какую-то мебель.

Дата	CF	DCF
0	-4	-4.00
1	0	0.00
2	1	0.83
3	2	1.50
4	2	1.37
5	2.5	1.55
	NPV	1.25

б Здесь предлагается считать IRR вручную. Чтобы посчитать примитивно, берем $r_1 < r_2$ такие, что $NPV(r_1) > 0$, а $NPV(r_2) < 0$. Тогда можно тупо:

$$IRR \approx r_1 + \frac{NPV(r_1)}{NPV(r_1) - NPV(r_2)}(r_2 - r_1) \tag{8.1.1}$$

Попробуем взять сразу $r = 10\%$ и $NPV(r) = 1.25$. Значит, нужно искать вторую ставку больше. Пробуем $r_2 = 20\%$, $NPV(r_2) = -0.18$ миллионов рублей.

Суем в формулу:

$$IRR \approx 10\% + \frac{1.25}{1.25 + 0.18}(20\% - 10\%) \approx 18.74\% \tag{8.1.2}$$

8.2 Задача 2

В этой задаче есть по два сценария на притоки и оттоки денег. Всего четыре варианта мира:

	Базовый	Альтернативный
Базовый	(-10,-30, 10)	(-20,-60, 10)
Альтернативный	(-10,-30, 8)	(-20,-60, 8)

Эти потоки можно записать как $(-a, -b, x)$, где все хорошее начинается только с пятого года. Тогда:

$$NPV = -a - \frac{b}{1.1} + \frac{x}{1.1^5} + \frac{x}{1.1^6} + \dots \tag{8.2.1}$$

Как это свернуть? Пусть $b_1 = \frac{x}{1.1^5}$, $q = \frac{1}{1.1}$. Тогда:

$$\sum b = \frac{\frac{x}{1.1^5}}{1 - \frac{1}{1.1}} = \frac{\frac{x}{1.1^5}}{\frac{0.1}{1.1}} = \frac{10x}{1.1^4} \tag{8.2.2}$$

В итоге:

$$NPV = -a - \frac{b}{1.1} + \frac{10x}{1.1^4} \tag{8.2.3}$$

Тогда NPV:

	Базовый	Альтернативный
Базовый	31.03	-6.24
Альтернативный	17.37	-19.90

8.3 Задача 3

Наша компания планирует реализовать проект по открытию гостиницы в одном из российских городов. Инвестиции составят 1 млн рублей. Если гостиница станет популярной, то годовая прибыль составит 300 тысяч рублей в год и будет получена уже в первый год реализации проекта. Если наши прогнозы не оправдаются, и гостиница не станет популярной, то годовая прибыль составит всего 50 тысяч рублей в год (также будет получена уже в первый год реализации проекта).

Мы получили коммерческое предложение от известной компании, специализирующейся на исследованиях рынка и консалтинге в области маркетинга. Данная компания предлагает детально изучить потенциальный спрос на услуги гостиниц и разработать маркетинговый план, что позволит обеспечить вероятность реализации хорошего сценария, равную 80%.

Адекватная ставка дисконтирования для подобных проектов составляет 10%. Используем предположение, что выполнение работ консалтинговой компанией не п риводит к изменению ставки дисконтирования по проекту.

Запишем исходную величину NPV. Понимаем, что проект бесконечный:

$$NPV = -1000 + \frac{300p + 50(1-p)}{0.1} = -500 + 2500p \tag{8.3.1}$$

При $p = 80\%$ $NPV = 1500$. А при $r = 20\%$ $NPV = 0$. Значит, будем готовы заплатить не больше 1500 тысяч. Если ставки меньше, заметим, не будем принимать проект, поэтому остались бы с нулем.

$$x = \begin{cases} 1500, p \in [0, 20\%) \\ 2000 - 2500p, p \in [20\%, 80\%) \\ 0, p \in [80\%, 100\%] \end{cases} \tag{8.3.2}$$

8.4 Задача 4

Крупная авиакомпания планирует приобрести новую модель широкофюзеляжного авиалайнера. Стоимости приобретения авиалайнера составит 1 млрд. рублей. В результате приобретения ежегодная прибыль возрастет на 200 миллионов рублей. Ставка дисконтирования для авиакомпании составляет 15%.

Предполагаем здесь бесконечность использования. Тогда NPV:

$$NPV = -10^9 + \frac{2 \cdot 10^8}{0.15} = 3.33 \cdot 10^8 \tag{8.4.1}$$

Считать IRR для бесконечного проекта тоже не совсем паршиво:

$$-10^9 + \frac{2 \cdot 10^8}{IRR} = 0 \tag{8.4.2}$$

$$IRR = 20\% \tag{8.4.3}$$

Поток здесь обычный, поэтому $MIRR$ совпадает. Осталость посчитать сроки окупаемости. Сразу ясно, что на пятый год случится простая и простая точная окупаемость. С дисконтированной интереснее – только к десятом году накопленные дисконтированные потоки становятся положительными. Точный срок:

$$PDPBP = 9 + \frac{-45683216.05}{3753725.171 - 45683216.05} = 9.92 \tag{8.4.4}$$

8.5 Задача М

$\boxed{\text{а}}$ Бесконечная история про Пышку-Малышку сводится к следующей таблице:

	Касса	Модернизация	Павильон	Аренда
0	-75	-50	-125	-11
1	44	27	70	12
2	44	27	70	13
3	44	27	70	14
IRR	35%	29%	31%	100%
NPV	25.46	11.65	34.83	18.47
PI	1.34	1.23	1.28	2.68
$PDPBP$	2.12	2.34	2.24	1.06

- Если выбирать по IRR, то берем четвертый проект, а потом еще кассу;
- Если брать по NPV, то все спустить придется на павильон, даже если суммарный NPV от 1 и 4 проектов бы помог больше;
- PI отправляет нас той же дорогой, что IRR. Аналогично $PDPBP$.

Не надо никуда пихать оставшиеся средства.

$\boxed{\text{б}}$ Компания «Кусочег неба» планирует приобрести один среднемагистральный пассажирский самолет и остановила свой выбор на двух самолетах. Первый – российский самолет Сухой SuperJet-100 в комплектации SSJ 100-95LR, а второй – британский Avro RJ-100. Самолеты имеют похожие летно-технические характеристики, а имеющиеся различия компания считает несущественными для себя.

Нам надо выбрать между самолетами для этих нехороших людей. Сделаем через EAA. Для этого надо считать сначала NPV. $NPV_S = -50138.25$, а $NPV_A = -54397.30893$.

Используем формулу:

$$NPV = A\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{8.5.1}$$

$$EAA = \frac{NPV \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \tag{8.5.2}$$

Для Авро это $EAA_A = -17160.76$, а для SSJ $EAA_S = -20161.33$. Определенно ясно, что первый лучше.

Если же делать цепным повтором, то придется на 20 лет растянуть все.

	CF_s	CF_A	DCF_S	DCF_A
0	29,000.00	31,000.00	29,000.00	31,000.00
1	8,500.00	6,000.00	7,727.27	5,454.55
2	8,500.00	7,000.00	7,024.79	5,785.12
3	8,500.00	8,000.00	6,386.18	6,010.52
4	29,000.00	9,000.00	19,807.39	6,147.12
5	8,500.00	31,000.00	5,277.83	19,248.56
6	8,500.00	6,000.00	4,798.03	3,386.84
7	8,500.00	7,000.00	4,361.84	3,592.11
8	29,000.00	8,000.00	13,528.71	3,732.06
9	8,500.00	9,000.00	3,604.83	3,816.88
10	8,500.00	31,000.00	3,277.12	11,951.84
11	8,500.00	6,000.00	2,979.20	2,102.96
12	29,000.00	7,000.00	9,240.29	2,230.42
13	8,500.00	8,000.00	2,462.15	2,317.32
14	8,500.00	9,000.00	2,238.32	2,369.98
15	8,500.00	31,000.00	2,034.83	7,421.15
16	29,000.00	6,000.00	6,311.24	1,305.77
17	8,500.00	7,000.00	1,681.68	1,384.91
18	8,500.00	8,000.00	1,528.80	1,438.87
19	8,500.00	9,000.00	1,389.82	1,471.57
			134,660.33	122,168.56

Так как это все расходы, ясно, что Авро и здесь побеждает.

8.6 Задача AA3

ООО «Тейросистема» рассматривает проект с кучей характеристик и ставкой 10%.

$\boxed{\text{а}}$ Считаем NPV без возможности выхода из проекта:

$$NPV = 200 + \frac{0.5 \cdot 40 + 0.5 \cdot 80}{1.1} + \dots + \frac{60}{1.1^4} = -9.81 \tag{8.6.1}$$

$\boxed{\text{б}}$ А теперь вдруг возможность выхода. Но тут слажно, как интерпретировать знания фирмы. Детерминируется ли поток в первый период или остается он случайным каждый год.

Пусть полностью детерминируется: если $CF_1 = 40$, то мы знаем, что всегда потом по 40:

$$150 > \frac{40}{1.1} + \frac{40}{1.1^2} + \frac{40}{1.1^3} \approx 99.47 \tag{8.6.2}$$

Если же 80:

$$150 < \frac{80}{1.1} + \frac{80}{1.1^2} + \frac{80}{1.1^3} \approx 198.94 \tag{8.6.3}$$

Значит, если в жизни все хорошо, то остаемся, если нет, то выходим.

$\boxed{\text{в}}$ Берем и тупо смотрим. В плохом случае:

$$NPV_b = -200 + \frac{190}{1.1} = -27.27 \tag{8.6.4}$$

В хорошем случае:

$$NPV_g = -200 + \frac{80}{1.1} + \dots \frac{80}{1.1^4} = 53.59 \tag{8.6.5}$$

Тогда берем матожидание этого:

$$NPV = 0.5(-27.27 + 53.59) = 13.16 \tag{8.6.6}$$

$13.16 - (-9.81)$ можно рассматривать как стоимость опциона на выход.

8.7 Задача Y3

Раз одинаковые ренты, то PVA:

$$PVA = \frac{R}{p}\frac{1 - (1 + \frac{i}{m})^{-nm}}{(1 + \frac{i}{m})^{m/p} - 1} \tag{8.7.1}$$

Значит:

$$NPV = -6 + 3\frac{1 - 1.2^{-10}}{0.2} \tag{8.7.2}$$

Таблица 1: My caption

t	CF	DCF	$CumDCF$
0	-6	-6.00	-6.00
1	3	2.50	-3.50
2	3	2.08	-1.42
3	3	1.74	0.32
4	3	1.45	1.77
5	3	1.21	2.97
6	3	1.00	3.98
7	3	0.84	4.81
8	3	0.70	5.51
9	3	0.58	6.09
10	3	0.48	6.58
		6.58	

$PDBPB = 2.82$.

8.8 Задача Z2

$$NPV = -500 + \frac{600}{1.2} + \cdots + \frac{600}{1.2^5} = -500 + 600\frac{1-1.2^{-5}}{0.2} = 2015.48 \tag{8.8.1}$$

Очевидно, что $PBP = 1$, $PPBP = 10$ месяцев, $PDPBP = 1$.

3500 он отдает в момент 1. Потом по $500x$ в момент 1, 2, 3, 4 и 5. А потом почему-то уехал.

$$-3500 + 500 + 500x\frac{1-1.2^{-4}}{0.2} = 0 \tag{8.8.2}$$

$$x\left(1 + \frac{1-1.2^{-4}}{0.2}\right) - 7 \tag{8.8.3}$$

$$x = \frac{1.4}{1.2 - 1.2^{-4}} \tag{8.8.4}$$

9 Семинар 10. Оценка стоимости облигации

Есть P, MV, r (или YTM) – требуемая доходность (или к погашению) и c – купонная доходность. При этом ставки должны быть в едином временном пространстве. Отсюда три случая:

- $r = c$, тогда $P = MV$ – паритетная ставка;
- $r > c$, тогда $P < MV$. Это все потому, что:

$$P = \frac{C_1}{1+r} + \dots + \frac{C_n + MV}{(1+r)^n} \tag{9.0.1}$$

- $r < c$, тогда $P > MV$

Два типа задач:
Здесь все известно, мы ищем про цену:

$$P = \frac{C_1}{1+r} + \dots + \frac{C_n + MV}{(1+r)^n} \tag{9.0.2}$$

А вот если мы знаем все купонные потоки, цену, надо искать YTM:

$$P = \frac{C_1}{1+YTM} + \dots + \frac{C_n + MV}{(1+YTM)^n} \tag{9.0.3}$$

YTM – аналог IRR. Можно рассмотреть это все инвестиционный проект:

$$-P + \frac{C_1}{1+YTM} + \dots + \frac{C_n + MV}{(1+YTM)^n} = 0 \tag{9.0.4}$$

Правда, есть более тонкие вещи с YTM.

Но отткуда брать в природе r? Можем брать компании того же сектора, брать по ним и их *торгуемым* облигациям. Строим модель:

$$\begin{gathered} P_1 = CF_{11}\alpha_1 + \dots + CF_{1T}\alpha_T + \varepsilon \\ \vdots \\ P_k = CF_{k1}\alpha_1 + \dots + CF_{kT}\alpha_T + \varepsilon \end{gathered} \tag{9.0.5}$$

Типа предлагается взять МНК-оценки.

9.1 Задача 1

Купон 10% в год, платят два раза в год. Значит, делим на 50 два раза в год.

$$P = \frac{50}{1+0.06} + \frac{50}{(1+0.06)^2} + \dots + \frac{50+1000}{(1+0.06)^{40}} \tag{9.1.1}$$

Считаем прогрессией, выкинув 1000:

$$\Pi = \frac{50}{0.06} - \frac{\frac{50}{0.06}}{1.06^{40}} + \frac{1000}{1.06^{40}} = \frac{50}{0.06}\left(1 - \frac{1}{1.06^{40}}\right) + \frac{1000}{1.06^{40}} \tag{9.1.2}$$

Можно через PV (если ничего не сказано, то по умолчанию считаем $m = p$)

$$PV = \frac{R}{p}\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m/p}-1} = 50\frac{1-1.06^{-40}}{0.06} \tag{9.1.3}$$

9.2 Задача 2

Облигации корпорации MacroHard имеют 8% купон, выплачиваемый каждое полугодие. Номинальная стоимость равна 1 000 рублей, и срок погашения наступит через 6 лет, в настоящее время облигации продаются по 911,37 рублей.

Мы можем приближенно посчитать YTM по купеческой формуле: берем годовой купон C, цену покупки P_0 и номинал MV, число лет N и выходит:

$$YTM \approx \frac{C + \frac{MV-P_0}{N}}{\frac{MP+P_0}{2}} = \frac{80 + \frac{1000-911.37}{6}}{\frac{1000+911.37}{2}} \approx 9{,}92\% \tag{9.2.1}$$

С паритетной облигацией все точно. С премиальной облигацией будем отрицательный член в числителе, доходность ниже купонной, с дисконтной будет наоборот.

9.3 Задача 3

Имеются две облигации, идентичные по всем параметрам, кроме купонов и их текущих рыночных цен. Срок погашения обеих облигаций наступает через 12 лет, а номинал обеих облигаций равен 1 000 рублей. Первая облигация имеет купонную ставку 10% и сейчас продается по 935.08 рубля. Вторая имеет купонную ставку 12%.

Находим YTM для первой, подставляем во второй. При этом понимаем магию целочисленности: можем перебирать, либо просто по формуле.

$$YTM \approx \frac{C + \frac{MV - P_0}{N}}{\frac{MP + P_0}{2}} = \frac{100 + \frac{1000-935.08}{12}}{\frac{1000+935.08}{2}} \approx 10.89\% \tag{9.3.1}$$

Подозревается, что $YTM = 11\%$, так как первая облигация дисконтная. Тогда для второй облигации:

$$P = \frac{60}{1.055} + \frac{60}{1.055^2} + \cdots + \frac{60+1000}{1.055^{24}} \tag{9.3.2}$$

Посчитаем через PVA:

$$PV = \frac{R}{p} \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/p} - 1} = 60 \frac{1 - 1.055^{-24}}{0.055} \tag{9.3.3}$$

Не забываем прибавить еще дисконтированную стоимость по номиналу. В итоге $P = 1065.76$.

9.4 Задача 4

Корпорация ТТС в настоящее время имеет на рынке два типа облигаций. Облигация M имеет номинальную стоимость \$25 000 и срок ее погашения – через 20 лет. По данной облигации не выплачивалось никаких платежей в течение первых 6 лет, затем каждые полгода выплачивалось по \$1 500 в течение 8 лет, а затем платили каждые полгода по \$2 000 в течение последних 6 лет. Облигация H также имеет номинальную стоимость \$25 000 и срок ее погашения наступает через 20 лет, однако она является бескупонной облигацией. Требуемая доходность по облигациям равна 10%, начисляемых каждые полгода.

$\boxed{\text{а}}$ Сразу используем бесконупонность первой:

$$P_H = \frac{25000}{1.05^{40}} \tag{9.4.1}$$

$\boxed{\text{б}}$ Для другой придется нудно считать:

$$PV = \frac{1500}{1.05^{13}} + \cdots + \frac{1500}{1.05^{28}} + \frac{2000}{1.05^{29}} + \cdots + \frac{2000}{1.05^{40}} + \frac{25000}{1.05^{40}} = 17125.37 \tag{9.4.2}$$

9.5 Задача 5

Компания АБВ имеет на рынке облигации с 10%-ными купонами, по которым осуществляются выплаты каждые полгода и их YTM равна 8,5% годовых. Текущая доходность по этим облигациям равна 9,02%.

Как мы помним, текущая доходность:

$$CY = \frac{C}{P_0} = \frac{0.1MV}{P_0} = 0.0902 \tag{9.5.1}$$

Это значит, что:

$$MV = 0.902P_0 \tag{9.5.2}$$

Тогда делим YTM пополам, хотя можно было и корнем:

$$P_0 = \frac{0.05 \cdot 0.902P_0}{1.0425} + \cdots + \frac{0.05 \cdot 0.902P_0}{1.0256^{2N}} + \frac{0.902P_0}{1.0425^{2N}} \tag{9.5.3}$$

P_0 сокращается бодро. Считаем:

$$1 = \frac{0.05 \cdot 0.902}{0.0425}\left(1 - \frac{1}{1.0425^{2N}}\right) + \frac{0.902}{1.0425^{2N}} \tag{9.5.4}$$

Пусть $x = \dfrac{1}{1.0425^{2N}}$:

$$\frac{0.05 \cdot 0.902}{0.0425} - \frac{0.05 \cdot 0.902}{0.0425}x + 0.902x = 1 \tag{9.5.5}$$

Полугодий должно быть нормальное число. Их выходит что-то около 21 штуки, 10.5 лет.

9.6 Задача C2

Мы планируем приобрести облигацию правительства Уганды, по которой только что был выплачен купон и до погашения которой теперь осталось семь лет. Номинал этой облигации составляет 100 000 UGX (угандийских шиллингов), купонная ставка 10% с годовой выплатой, облигация не имеет опций досрочного погашения или конвертации.

Надо считать спот-ставки.

$$P_0 = \frac{10000}{1.121} + \frac{10000}{(1+S_2)^2} + \frac{10000}{1.14553^3} + \frac{10000}{(1+S_4)^4} + \frac{10000}{1.147^5} + \frac{10000}{(1+S^6)^6} + \frac{110000}{(1+S_7)^7} \quad (9.6.1)$$

Ну, нам предлагается оценить тут регрессию:

$$S_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \quad (9.6.2)$$

Можно тупее:

$$1 + S_2 = \frac{1.121 + 1.14553}{2} = 1.1333 \quad (9.6.3)$$

$$1 + S_4 = \frac{1.14553 + 1.147}{2} = 1.1463 \quad (9.6.4)$$

Для последних взвешенные на информации пятилетней и десятилетней ставок:

$$1 + S_6 = \frac{4}{5}1.147 + \frac{1}{5}1.14704 = 1.147008 \quad (9.6.5)$$

$$1 + S_7 = \frac{3}{5}1.147 + \frac{2}{5}1.14704 = 1.147016 \quad (9.6.6)$$

9.7 Задача А1

Вероятность смены правительства в стране Кинтулл, в которой нет инфляции, в каждом году равна 10%. Определить доходность к погашению (% годовых) бескупонных государственных облигаций, если они погашаются ровно через три года, а размещаются сейчас на первичном рынке за 80% номинала.

Вероятность, что не отставят, – 0.729. При этом получить отставку можно с вероятностью 0.271.

Ну, все просто:

$$(1+r)^3 = \frac{CF_3}{P_0} = \frac{MV}{0.8MV} = 1.25 \tag{9.7.1}$$

$$r = 7.72\% \tag{9.7.2}$$

В случае отставки -100%. В итоге просто взвесить. Значит,

$$\mathrm{E}(r) = 0.729 \cdot 7.72\% + 0.271 \cdot (-100\%) = -21.47\% \tag{9.7.3}$$

Можно подумать, что можно попробовать зайти так:

$$P_0 = \frac{\mathrm{E}(CF_3)}{(1+r)^3} \tag{9.7.4}$$

Тогда будет:

$$0.8MV = \frac{0.729MV}{(1+r)^3} \tag{9.7.5}$$

$$(1+r)^3 = 0.91125 \tag{9.7.6}$$

$$r = -3.05\% \tag{9.7.7}$$

Все совсем разное. Но вот считать надо по отдельности, а потом взвешивать. Так что -21.47%.

9.8 Задача А2

У нас есть консоль номиналом 1000 с ежегодной ставкой 1%. У нас такая кривая:

YieldCurve.com	Yield Curve figures updated weekly since October 2003 For historical & animated yield curve data use drop-down menu					
UK Gilt	6 Month	1 Year	2 Year	5 Year	10 Year	30 Year
December 14, 2009	0.54	0.62	1.23	2.68	3.86	4.39
December 7, 2009	0.51	0.66	1.20	2.64	3.71	4.25

А после 30 лет ставка не меняется. Как-то ужасно. Просто занудно выписываем:

$$P = \frac{10}{1.0062} + \frac{10}{1.0123^2} + \dots + \frac{10}{0.0439} \cdot \frac{1}{1.0439^{30}} \tag{9.8.1}$$

При это остается открытым вопрос, что делать с неизвестными ставками. Предлагается считать их аналогично Уганде.

9.9 Задача А4

Номинал облигации равен 1000 евро, выкупная цена 1100 евро, ставка купона равна 3% с полугодовыми выплатами. Инвестор приобрел облигацию, когда ее доходность к отзыву была 8%, и продал ее через 2 года, при этом доходность к отзыву не изменилась. Сколько денег сумел заработать рациональный инвестор от владения этой облигации, если отзыв облигации был возможен через 4 года с момента ее покупки?

Надо понять, за сколько он ее купил и сколько денег он получил за время держания. Доходность к отзыву – держим ее 4 года, а потом ее могут отозвать. До отзыва оставалось два года.

Помним, что доходность к отзывы – как доходность к погашению. Получил:

$$P_0 = \frac{15}{1.04} + \dots \frac{15 + 1100}{1.04^8} \tag{9.9.1}$$

$p = m$. Не используем $p = 2$, уже учли.

$$P_0 = \frac{1100}{1.04^8} + 15\frac{1 - 1.04^{-8}}{0.04} = 904.75 \tag{9.9.2}$$

$$P_2 = \frac{1100}{1.04^8} + 15\frac{1 - 1.04^{-4}}{0.04} = 994.73 \tag{9.9.3}$$

Значит, $\Delta = 89.98 + 60$ из купонов.

10 Семинар 11. Дюрация и выпуклость

Ясно, что чем выше ставка дисконтирования, тем ниже цена облигации. Облигации характеризуются разным процентным риском – чувствительностью к процентной ставке.

Более длительные облигации больше чувствительны к изменению ставки.

Возьмем цену облигации P и запишем ее по-простому:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} \tag{10.0.1}$$

А потом хотим разложить в ряд Тейлора:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\sum_{t=1}^{n} \frac{tCF_t}{(1+r)^{t+1}} = -\frac{1}{1+r} \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} t \tag{10.0.2}$$

Помним разложение:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f' \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f'' \cdot (x - x_0)^2 + o(x^2) \tag{10.0.3}$$

Из этого сразу:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f' \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f'' \cdot (x - x_0)^2 + o(x^2) \tag{10.0.4}$$

Это как бы изменение цены облигации в абсолютном выражении. А теперь умножаем производную на Δr. Тогда:

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial r} \Delta r \tag{10.0.5}$$

$\frac{\partial P}{\partial r}$ называется денежной дюрацией D_{money}.

А потом можно немного изменить:

$$D_{Mac} = -\frac{\partial P}{\partial r} \cdot \frac{1+r}{P_0} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{CF_t}{(1+r)^t}}{P_0} t \tag{10.0.6}$$

Это волшебная дюрация Маколея – средневзвешенный срок до погашения. Веса – потоки денежные, легко увидеть, что они суммируются к единице. Чем выше этот срок, тем чувствительность к процентной ставке выше. Если дюрация выше, у бумаги выше процентный риск.

Дюрация меряет чувствительность к параллельным сдвигам произвольных кривых.

Есть еще модифицированная дюрация:

$$D_{mod} = \frac{D_{money}}{P_0} = \frac{D_{mac}}{1+r} \tag{10.0.7}$$

Из этого мы хотим искать процентное изменение:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_{mod}\Delta r = \frac{-D_{mon}}{P_0}\Delta r \tag{10.0.8}$$

У бескупонной облигации $D_{mac} = n$. Можно представлять весы, находящиеся в равновесии. Чем выше купонный платеж, тем меньше модифицированная и дюрация Маколея.

А если по полугодиям? Довольно сложно.

А зачем выпуклость в мире? Ну, линеаризуем с дюрацией. Используя вторую производную, можем смотреть выпуклость.

$$C = \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{t=1}^{n} \frac{\frac{CF_t}{(1+r)^t}}{P_0} t(t+1) \tag{10.0.9}$$

Это тоже средневзвешенный показатель. Если использовать выпуклость, то записывается:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_{mod}\Delta r + \frac{1}{2}C\Delta r^2 \tag{10.0.10}$$

10.1 Задача 1

Рыночная ставка процента равна 10%. На рынке появилась облигация номиналом 50 000 рублей с 14% купоном с годовыми выплатами, а ее погашение наступит ровно через 4 года.

Надо надо выяснить, на сколько процентов меняется цена облигации при уменьшении процентной ставки 1 п.п. Учтем, что $\Delta_{true} = 1759.57$.

$\boxed{\text{а}}$ Сначала делаем чисто по дюрации: считаем дюрацию Маколея, а потом модифицированную дюрацию, из которой находим все. Очевидно, что тогда изменение – $+3.057\%$.

D_{mac}	3.362432869
D_{mod}	3.056757154
C	13.04341793

Дюрация недолетает: по дюрации – $\Delta_d = 1722.17$.

t	CF_t	DCF_t	t	CF_t	DCF_t	t(t+1)
1	7000	6363.64	1	7000	6422.02	2
2	7000	5785.12	2	7000	5891.76	6
3	7000	5259.2	3	7000	5405.28	12
4	57000	38931.77	4	57000	40380.24	20
		56339.73			58099.3	

$\boxed{\text{б}}$ Считаем с выпуклостью. С выпуклостью чуть иначе, но $\Delta_d = 1758.91$. Почти истинное значение вышло.

10.2 Задача 2

Рыночная ставка процента равна 12%. На рынке появилась облигация номиналом 100 000 рублей с 16% купоном с годовыми выплатами, а ее погашение наступит ровно через 5 лет.

Надо выяснить, на сколько процентов изменится цена облигации при уменьшении ставки процента на 1 п.п.

$\boxed{\text{а}}$ Считаем только по дюрации.

CF	DCF	$t(t+1)$	
1	16000	14285.71429	2
2	16000	12755.10204	6
3	16000	11388.48397	12
4	16000	10168.28925	20
5	116000.00	65821.51526	30
		114419.1048	

$D_{mod} = 3.46$. Значит, на 3.46%.

$\boxed{\text{б}}$ Выпуклость получается $C = 16.86$. Тогда изменение будет уже на 3.55%.

10.3 Задача 3

Облигация государства номиналом 100 д.е. погашается ровно через три года. Купонная ставка облигации равна 8.5% от номинала, а доходность к погашению сейчас по биржевым котировкам, равна 4.2% годовых. YTM суем в r

$\boxed{\text{а}}$ Ищем денежную дюрацию:

$$D_{mon} = \frac{1}{1+r} \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} t = 298.96 \tag{10.3.1}$$

t	CF	DCF		
1	8.5	8.16	D_{mon}	298.96
2	8.5	7.83	D_{mac}	2.78
3	108.5	95.90	D_{mod}	2.67
	P_0	111.89		

$\boxed{\text{б}}$ От денежной переходим к Маколею, надо убрать $(1+r)$ и приделать цену:

$$D_{mac} = \frac{1+r}{P_0} D_{mon} = 2.78 \tag{10.3.2}$$

$\boxed{\text{в}}$ Если же только разделить на цену, то получим модифицированную:

$$D_{mod} = \frac{D_{mon}}{P_0} = 2.67 \tag{10.3.3}$$

10.4 Задача 4

Только что выпущенная купонная облигация будет погашена через пять лет. Номинал облигации равен 100 рублей, а купонная ставка равна 7%. Купоны выплачиваются по полугодиям. В настоящее время облигация торгуется по номиналу.

$\boxed{\text{а}}$ Определим модифицированную дюрацию и выпуклость этой облигации.
Тут паритетная облигация, значит, $c = YTM = 7\%$.
Как у нас это выглядит ($P = N$):

$$P = \frac{P\frac{c}{2}}{1 + \frac{YTM}{2}} + \cdots + \frac{P + P\frac{c}{2}}{\left(1 + \frac{YTM}{2}\right)^{2n}} \tag{10.4.1}$$

t	CF_t	DCF_t	t	CF_t	DCF_t	t(t+1)
1	3.5	3.38	1	3.5	3.37	2
2	3.5	3.27	2	3.5	3.24	6
3	3.5	3.16	3	3.5	3.11	12
4	3.5	3.05	4	3.5	2.99	20
5	3.5	2.95	5	3.5	2.88	30
6	3.5	2.85	6	3.5	2.77	42
7	3.5	2.75	7	3.5	2.66	56
8	3.5	2.66	8	3.5	2.56	72
9	3.5	2.57	9	3.5	2.46	90
10	103.5	73.37	10	103.5	69.92	110
		100.01			95.96	

Полугодовая	
Δ	-4.05
Δ_d	-4.16
Δ_c	-4.05
	Полугодовые
D_{mac}	8.607
D_{mod}	8.316
C	83.830

$\boxed{\text{б}}$ Найдем изменение через дюрацию:

$$dP = -8.316 \cdot 0.005 \cdot 100 = -4.16 \tag{10.4.2}$$

Значит, новая цена по дюрации будет 95.84.

$\boxed{\text{в}}$ Теперь посчитаем через выпуклость:

$$dP = 100(-8.316 \cdot 0.005 + 0.5 \cdot 0.005^2 + 83.83) = -4.26 \tag{10.4.3}$$

Тогда здесь уже 95.74.

10.5 Задача 7

Тут иммунизация. Обычно есть какие-то активы или хочется их купить. Есть какие-то обязательства, которые она хочет покрыть. Хочется, чтобы при разных раскладах все было хорошо.

Дюрация портфеля активов должна быть примерно равна дюрации портфеля пассивов. Есть еще иммунизация с использованием выпуклости.

Итак.

Ищем текущую стоимость пассивов:

$$P_0^{liab} = \frac{500000}{1.1^2} \tag{10.5.1}$$

Это должно равняться стоимости портфеля:

$$P_0^p = P_0^A q^a + P_0^B q^B \tag{10.5.2}$$

Важно, чтобы дюрация была правильной и была равна дюрации обязательств (там 2 года, нет платежей). Берем Маколея, чтобы было проще:

$$D_{mac}^p \equiv w^A D_{mac}^A + w^B D_{mac}^B = D^{liab} = 2 \tag{10.5.3}$$

Веса будут по слагаемым стоимости портфеля:

$$w^A = \frac{P_0^A q^A}{P_0^p} \tag{10.5.4}$$

Из всего этого:

$$w^A D_{mac}^A + (1 - w^A) D_{mac}^B = D^{liab} \tag{10.5.5}$$

Значит:

$$w^A = \frac{D^{liab} - D^B}{D^A - D^B} \tag{10.5.6}$$

Тут дюрация одного должна быть меньше, дюрация другого должна быть больше (чтобы осмыслено было решено).

Дюрация по B равна единице, так как только один платеж. $D_{mac}^B = 2.77$. Отсюда $w = 0.562633$. Это значит, что надо теперь искать, сколько каких облигаций купить, а потом проверить. Важно помнить целочисленность.

У нас выходит выбор, 244 или 245 облигаций A купить и где-то около 186 облигаций B.

Тогда пусть у нас 244 облигации A.

Потом смотрим сценарий, что ставки опустили до 9%

Q	244	186		
t	CF_a	CF_b	CF_T	FV
1	80	1070	218540	238208.6
2	1070.825688		261281.4679	261281.4679
3				499490.0679

Видим, что не хватает. Можно либо докинуть, либо вложить побольше.

А если ставка растет? Аналогично.

10.6 Задача 8

Есть студент, которому надо 100 000 в Liability. У него n_e=3. Он хочет иммунизировать портфель из облигаций A и B.

Облигация A: $n = 5$, $c = 5\%$, $p = 1$, $YTM = 8\%$, $MV = 1000$.

Облигация B: $n = 2$, $c = 10\%$, $p = 1$, $YTM = 8\%$, $MV = 1000$.

А вложить мы хотим[6]:

$$P_0^L = \frac{100000}{1.08^3} \tag{10.6.1}$$

Значит:

$$Q_0^A + Q_0^B = P_0^e \tag{10.6.2}$$

Здесь $Q_0^A = q^A P_0^A$. Значит, $w_0^i = \frac{Q_0^i}{P_0^e}$. Иммунизируем по дюрации: дюрация портфеля должна быть равна дюрации обязательств.

Давайте Маколея:

$$w_0^A D_{mac,0}^A + w_0^B D_{mac,0}^B = D^{Liab} = 3 \tag{10.6.3}$$

Быстро выходит, что $D^A = 4.51$, $D_B = 1.91$.

Тогда вес для A:

$$w = \frac{D^{liab} - D^B}{D^A - D^B} = 0.4188 \tag{10.6.4}$$

Значит, просто умножаем цену обязательств на веса. Округляем кривые числа и получаем 38 облигаций A и 44 облигаций B.

t	CF_A	DCF_A	CF_B	DCF_B
1	50	46.30	100	92.59
2	50	42.87	1100	943.07
3	50	39.69		1,035.67
4	50	36.75		
5	1050	714.61		
		880.22		

[6]Если надо несколько платежей, то создаем портфели под каждый платеж, а потом объединяем.

P_L	79,383.22
P_A	880.22
P_B	1,035.67
D_A	4.51
D_B	1.91
Q_A	33,249.17
Q_B	46,134.05
q_A	37.77
q_B	44.55
w	0.42
Депозит	365.64

Дальше показываем, что при понижении и повышении ставки мы не помрем. Пусть ставка снизится до 7%.

t	CF_A	$FVCF_A$	CF_B	$FVCF_B$	FV Депозит
1	50	57.25	100	114.49	447.93
2	50	53.50	1100	1,177.00	
3	1013.839637	1,013.84			
		1,124.58		1,291.49	
Итого		100,007.70			

Для 9%:

t	CF_A	$FVCF_A$	CF_B	$FVCF_B$	FV Депозит
1	50	59.41	100	118.81	473.52
2	50	54.50	1100	1,199.00	
3	979.6355526	979.64			
		1,093.54		1,317.81	
Итого		100,011.70			

11 Семинар 12. Оценка стоимости акций (DCF)

11.1 Задача 1

Компания AAB только что выплатила дивиденды в размере 2 доллара на акцию. От капиталовложений подобного рода инвесторы ожидают доходность в размере 16%. Если ожидается равномерный рост дивидендов на 8% в год после трех лет интенсивного роста на 20%, то чему равна «внутренняя» стоимость этих акций?

Считаем первый три члена, а остальные по формуле Гордона, не забывая, что нужно подставлять дивиденд на год вперед туда, а потом дисконтируем все к началу:

$$V = \frac{2.4}{1.16} + \frac{2.88}{1.16^2} + \frac{3.46}{1.16^3} + \frac{3.46 \cdot 1.08}{0.16 - 0.08} = 36.35 \tag{11.1.1}$$

11.2 Задача 2

Компания CAA только что выплатила дивиденды в размере 2 доллара на акцию. От капиталовложений подобного рода инвесторы Старого Света ожидают доходность в размере 16%. Если ожидается равномерный рост дивидендов на 8% в год, то равна «внутренняя» стоимость акций для инвесторов равна:

$$P_0 = \frac{2 \cdot 1.08}{0.16 - 0.08} = 27 \tag{11.2.1}$$

Видимо, что у нас тут идеальный случай Гордона.

Через пять лет эта стоимость:

$$P_5 = \frac{D_6}{0.16 - 0.08} = P_0 \cdot 1.08^5 \tag{11.2.2}$$

11.3 Задача 3

Компания XYZ только что выплатила один доллар в качестве дивиденда по своим обыкновенным акциям. Аналитики рынка ожидают, что темп прироста дивидендов в долгосрочном периоде для отрасли компании составит 8% в год при ожидаемой ставке дисконтирования в 14% годовых. Также аналитики рассчитали, что темпы прироста дивидендов компании линейно снизятся до уровня среднеотраслевых показателей в течение 10 следующих лет.

Превышение темпов прироста дивидендов компании сейчас составило четыре процентных пункта. Надо бы поискать внутреннюю стоимость.

Если равномерно снижается к долгосрочному уровню g_n, то мы говорим, что у нас H-модель, конец периода снижения $2H$.

$$P_0 = \frac{D_0(1 + g_n + H(g_a - g_n))}{r_n} \tag{11.3.1}$$

Проблема может быть в четности/нечетности.

$$P_0 = \frac{1(1 + 0.08 + 5 \cdot 0.04)}{0.14 - 0.08} = 21.33 \tag{11.3.2}$$

11.4 Задача 4

Компания только что выплатила дивиденды в размере $8 на обыкновенную акцию. Компания увеличит свои дивиденды на 25% в следующем году, а затем будет снижать рост дивидендов на 5 п.п. в год до тех пор, пока он не станет равным среднеотраслевому – 5%, после чего компания будет постоянно поддерживать такой рост дивидендов. Требуемая норма доходности по акциям этой компании равна 14%.

Очень тупо, сначала 25%, потом 20% и так далее до 5%. Потоки 8, 10, 12 и ты.ды.

$$P_0 = \frac{10}{1.14} + \frac{12}{1.14^2} + \cdots + \frac{1}{1.14^4}\frac{12 \cdot 1.15 \cdot 1.1 \cdot 1.05}{0.14 - 0.05} = 141.17 \tag{11.4.1}$$

11.5 Задача 5

Акции фирмы «Малинка» в настоящее время продаются по цене 92 рубля за одну обыкновенную акцию. Рынок требует доходность в размере 13% по акциям данной фирмы. Фирма поддерживает постоянный рост дивидендов на 1 0% в год.

Найдем последние выплаченные фирмой дивиденды на одну обыкновенную акцию.

Есть $P_0 = 92$, $r_e = 13\%$, $g = 10\%$. Ищем из модели Гордона:

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{r_e - g} \tag{11.5.1}$$

$$D_0 = \frac{P_0(r_e - g)}{1+g} \tag{11.5.2}$$

$$D_0 = \frac{92 \cdot 0.03}{1.03} = 2.51 \tag{11.5.3}$$

11.6 Задача 6

Корпорация Serge's имеет необычную политику выплаты дивидендов. Корпорация только что выплатила дивиденд в размере 6 евро на акцию и объявила, что она будет ежегодно увеличивать дивиденд на 1 евро на акцию в течение последующих 4 лет, а потом навсегда прекратит платить дивиденды. Требуемая доходность равна 8%.

Найдем цену сегодня этих акций:

$$P_0 = \frac{7}{1.08} + \frac{8}{1.08^2} + \frac{9}{1.08^3} + \frac{10}{1.08^4} = 27.83 \tag{11.6.1}$$

11.7 Задача 7

Компания AllTunes только что выплатила дивиденд в размере 2,5 рубля на акцию. Аналитики ожидают, что дальнейшие дивиденды компании будут расти на 6.5% каждый год. Инвесторы требуют доходность 20% годовых в течение первых трех лет, затем 15% годовых в течение следующих трех лет и 10% годовых далее постоянно.

Найдем цену сегодня, помня, что Гордона можно только с седьмого года применить:

$$P_0 = \frac{2.5 \cdot 1.065}{1.2} + \cdots + \frac{2.5 \cdot 1.065^2}{1.2^3} + \cdots + \frac{2.5 \cdot 1.065^5}{1.2^3 \cdot 1.15^2} + \cdots + \frac{2.5 \cdot 1.065^7}{0.1 - 0.065} \quad (11.7.1)$$

11.8 Задача 8

Ожидаемая прибыль компании в расчете на одну акцию равна в текущем году 20 тыс. руб. Ожидается ее ежегодный прирост на 4%. Ставка капитализации чистой прибыли, обычная для стабильно растущей компании этой сферы деятельности в данном регионе составляет 15%. Ставка банковского процента 16%, премия за риск к процентной ставке 4%.

Поищем цену. $EPS = 20000$, она растет на 4%. Ставка капитализации чистой прибыли – 15% (это она типа реинвестирует). Ставка в банке $r_d = 16\%$, а еще есть спред между акциями и облигациями – риск-премия $rp = 4\%$.

Находим для нашей компании:

$$r_e = r_d + rp = 16\% + 4\% = 20\% \quad (11.8.1)$$

Чтобы применять Гордона, надо бы найти D_1:

$$D_1 = EPS_1 \cdot PR = EPS_0(1+g)(1-RR) \quad (11.8.2)$$

PR – payout ratio

Значит:

$$P_0 = \frac{EPS_0(1+g)(1-RR)}{r_d + rp - g} = 110.5 \tag{11.8.3}$$

11.9 Задача 9

Вы рассматриваете решение о приобретении акций молодой авиакомпании. Размер дивидендов сильно изменялся из года в год. Однако компания четко выдерживает долю выплаты дивидендов на уровне 40%. Финансовая отчетность показывает, что за прошлый год чистая прибыль компании составила $2 млрд. Аналитики говорят, что темп роста чистой прибыли за первый год составит 7%, за второй – 10%, а за третий – 8%.

После этого все ожидают наступления стабилизации и прогнозируют рост всех финансовых показателей на уровне 3%. Все ожидают, что после вступления в стабильную фазу, менеджмент авиакомпании примет решение уменьшить долю чистой прибыли, направляемой на инвестиции, до 30%. Требуемая доходность инвестиций в акции этой компании составляет 10%. Количество акций, обращающихся на рынке, составляет 250 млн. штук.

Будем долго и мучительно искать цену одной акции.

Наша прибыль $NI_0 = 2 \cdot 10^9$, Потому в первый года темп прироста 7%, потом 10%, потом 8%, дальше 3% навсегда.

До 3 года у нас $RR = 60\%$, после оно падает до $RR = 30\%$. При этом все время $r = 10\%$.

Находим EPS:

$$EPS_0 = \frac{2 \cdot 10^9}{0.25 \cdot 10^9} = 8 \tag{11.9.1}$$

Из этого находим дивиденды по акции:

$$D_0 = EPS_0 \cdot PR = 8 \cdot 0.4 = 3.2 \tag{11.9.2}$$

$$D_1 = D_0 \cdot 1.07 = 3.2 \cdot 1.07 \tag{11.9.3}$$

$$D_2 = D_1 \cdot 1.1 = 3.2 \cdot 1.07 \cdot 1.1 \tag{11.9.4}$$

$$D_3 = D_2 \cdot 1.08 = 3.2 \cdot 1.07 \cdot 1.1 \cdot 1.08 \tag{11.9.5}$$

Дальше история меняется, поэтому надо заменить один PR на другой PR:

$$D_4 = D_3 \cdot 1.03 \cdot \frac{0.7}{0.4} = 3.2 \cdot 1.07 \cdot 1.1 \cdot 1.08 \cdot 1.03 \cdot \frac{0.7}{0.4} \tag{11.9.6}$$

По Гордону:

$$P_3 = \frac{D_4}{0.1 - 0.03} \tag{11.9.7}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{1.1} + \frac{D_2}{1.1^2} + \frac{D_3 + P_3}{1.1^3} = 87.98 \tag{11.9.8}$$

11.10 Задача 10

В настоящее время обыкновенные акции «Finley Corporation» продаются на рынке по цене 50 долл. за акцию. В конце года руководство компании планирует выплату очередного дивиденда, равного 2 долл.

Найдем ожидаемый темп роста дивиденда компании, если требуемая норма доходности составляет 10%.

Из Гордона ясно, что:

$$50 = \frac{2}{0.1 - g} \tag{11.10.1}$$

Выражаем:

$$g = 0.1 - \frac{2}{50} = 0.06 \tag{11.10.2}$$

$$g = r - \frac{D_1}{P_0} \tag{11.10.3}$$

Стоит заметить еще, что:

$$r = g + \frac{D_1}{P_0} \tag{11.10.4}$$

11.11 Задача 11

Найдем дивидендную доходность за год, которая будет отражена в финансовом пресс-релизе компании, которая в настоящий момент выплатила один рубль на обыкновенную акцию в качестве дивиденда (дивиденды выплачиваются компанией ежеквартально), а последняя известная цена акций компании на бирже составила 40 рублей за акцию.

Надо предполагать, что дивиденд сохранится[7]. 4 рубля годовой дивиденд.

$$CY = \frac{1 \cdot 4}{40} = 10\$ \tag{11.11.1}$$

10% наш ответ.

11.12 Задача 12

По акции выплачивается ежегодный дивиденд в размере пять рублей, а сама акция продается по цене 80 рублей за штуку, и ее ожидаемая доходность составляет 14%.

Найдем цену акции через год. Тут можно искать через HPR:

$$HPR = \frac{\sum D_i + (P_n - P_i)}{nP_0} \tag{11.12.1}$$

В нашем однолетнем случае это все вырождается быстро в:

$$r = \frac{D_1}{P_0} + \frac{\Delta P}{P_0} = 0.14 \tag{11.12.2}$$

$$\frac{5}{80} + \frac{P_1 - 80}{80} = 0.14 \tag{11.12.3}$$

Можно искать проще через:

$$80 = \frac{5 + P_1}{1 + r} \tag{11.12.4}$$

[7] Вообще, мы смотрим с точки зрения компании, а не инвестора, поэтому мы должны отражать уже выплаченное.

$$P_1 = 86.2 \tag{11.12.5}$$

11.13 Задача 13

Инвестор получил 15% доходности, приобретя акцию за 40 рублей и продав ее через год на 10% дороже.

Найдем размер дивиденда за год. Снова возьмем HPR для одного года, получая доходность, из которой будем искать дивиденды в этот раз.

$$0.15 = \frac{1.1P_0 - P_0}{P_0} + \frac{D_1}{P_1} \tag{11.13.1}$$

$$\frac{D_1}{P_0} = 0.05 \tag{11.13.2}$$

$$D_1 = 40 \cdot 0.05 = 2 \tag{11.13.3}$$

12 Семинар 14. Оценка стоимости акций

12.1 Задача 1

Компания XXZ – развитая производственная компания. Компания только что выплатила дивиденды в размере четыре евро на одну обыкновенную акцию, но руководство ожидает постоянного снижения дивидендов на 6% в год. Требуемая ставка доходности равна 15%.

Найдем цену акции. Так как отрицательный рост, мы не можем сказать, что это формула Гордона, но формула для поиска совершенно та же:

$$P_0 = \frac{4(1-0.06)}{0.15-(-0.06)} = 17.9 \tag{12.1.1}$$

12.2 Задача 2

Акции компании «Атлантик» продаются по цене \$10 за акцию. Аналитики ожидают, что в следующем году доход на одну акцию компании составит \$2. Компания регулярно выплачивает 60% доходов в виде дивидендов. Свой нераспределенный доход компания инвестирует в проекты с доходностью 20%.

$\boxed{\text{а}}$ Будем искать рычноную ставку процента. Возьмем формулку:

$$10 = \frac{EPS_1 \cdot PR}{r - RR \cdot ROE} = \frac{2 \cdot 0.2}{r - 0.4 \cdot 20\%} \tag{12.2.1}$$

Выручим и геройски найдем:

$$r = \frac{1.2}{10} + 0.4 \cdot 0.2 = 20\% \tag{12.2.2}$$

Заметим совпадение r и ROE: в этом случае стоимости акций не меняется в зависимости от PR.

$\boxed{\text{б}}$ Если выплачивать весь доход, то $RR = 0$:

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{0.2} = 10 \tag{12.2.3}$$

$\boxed{\text{в}}$ Если вдруг сократится до 25%, то то же самое увидим.

$\boxed{\text{г}}$ А вот без дивидендов уже становится $PR = 0$. При этом мы не можем использовать модель Гордона, которая берет предпосылку выплачиваемости дивидендов. Будет 0/0.

12.3 Задача 3

Компания «Рудник» – типичный представитель своей отрасли – осуществляет полный цикл производства, начиная с геологических изысканий, проведения горных работ и заканчивая металлургической обработкой концентрата, полученного в результате обогащения, с выпуском конечного продукта – цинка и свинца. Топ-менеджмент компании прогнозирует, что доход на акцию в следующем году составит четыре рубля на одну обыкновенную акцию, при этом коэффициент реинвестирования прибыли составит 60%. Требуемая ставка доходности для отрасли компании «Рудник» составляет 16% годовых. Рентабельность собственного капитала компании равна 16%.

$\boxed{\text{а}}$ Будем искать внутреннюю стоимость одной акции:

$$P_0 = \frac{EPS_1(1 - RR)}{r - RR \cdot ROE} = \frac{4 \cdot 0.4}{0.16 - 0.6 \cdot 16\%} = 25 \tag{12.3.1}$$

$\boxed{\text{б}}$ Найдем (форвардный) коэффициент P/E для этих страшил:

$$P/E = \frac{P_0}{EPS_1} = \frac{25}{4} = 6.25 \tag{12.3.2}$$

$\boxed{\text{в}}$ Теперь искать $PVGO$ – приведенную стоимость перспектив роста: есть компания с каким-то темпом роста, который мы хотим отделить от ситуации без роста.

Мы помним, что:

$$V_0 = V_{zero} + PVGO \tag{12.3.3}$$

Откуда:

$$PVGO = V_0 - \frac{EPS_1}{r} \tag{12.3.4}$$

Так как у нас нормальный эффективный рынок, подставляем:

$$PVGO = 25 - \frac{4}{0.16} = 0 \tag{12.3.5}$$

Это все потому, что $ROE = r$, фирме некуда особо вкладываться дико прибыльно.

12.4 Задача 4

Про обыкновенные акции стабильно растущей компании «H-CRV» известно, что коэффициент P/E сейчас для них равен 20, и 20% своей нераспределенной прибыли компания выплачивает в виде дивидендов. Требуемая норма доходности для этих акций составляет 7% годовых.

От нас хотят PR такой, чтобы у фирмы было P/E 30.

$$P/E = \frac{P_0}{EPS_1} = 20 \tag{12.4.1}$$

Пока в нашем мире $PR = 20\%$, $r = 7\%$. Надо понять, при каком PR $\frac{P}{E}$ будет равен 30. Для этого берем цену:

$$P_0 = \frac{EPS_1 \cdot PR}{r - (1 - RP)ROE} \tag{12.4.2}$$

Из P/E подставляем $P = 20EPS$:

$$20EPS_1 = \frac{EPS_1 \cdot 0.2}{0.07 - 0.8ROE} \tag{12.4.3}$$

Убираем EPS и находим ROE для фирмы:

$$ROE = \frac{0.07 - \frac{0.2}{20}}{0.8} = 7.5\% \tag{12.4.4}$$

Берем желанное условие:

$$30EPS_1 = \frac{EPS_1 \cdot PR}{0.07 - (1 - PR)0.075} \tag{12.4.5}$$

$$PR = 30(0.07 - (1 - PR)0.075) \tag{12.4.6}$$

Находим, что:

$$PR = 12\% \tag{12.4.7}$$

12.5 Задача 5

На рынке школьных красок существуют две крупнейшие компании с давней историей: «Акварель» и «Гуашь». По данным их отчетности была получена следующая таблица:

	Компания «Акварель»	Компания «Гуашь»
P/E	47,5	30
Ожидаемые темпы прироста, % годовых	15	10
Дивидендная доходность, % годовых	2	4

По оценкам аналитического агентства «Двойка-Монолог» компания «Акварель» сохранит свое конкурентное преимущество еще минимум десять лет, так что соотношение темпов прироста компаний существенно не изменится в течение этого срока. По оценкам другого аналитического агентства «Н-Консалт» компании «Акварель» удастся поддерживать темпы прироста выше темпов прироста компании «Гуашь» примерно в таком соотношении в два раза дольше – почти двадцать лет.

Нам предлагается найти, при каком значении коэффициента P/E компании «Акварель» рекомендации обоих аналитических агентств («продавать», «покупать», «держать») относительно обыкновенных акций этой компании будут одинаковыми.

Помним главную формулу на этот случай:

$$T = \frac{\ln\left(\dfrac{(P/E)_0^A}{(P/E)_0^B}\right)}{\ln\left(\dfrac{1+g_A+CY_A}{1+g_B+CY_B}\right)} \tag{12.5.1}$$

Очевидно, что компания A здесь – Акварель, а компания B – Гуашь. При этом Гуашь здесь как бы за отрасль.

Подставляем в формулу с (историческими) P/E:

$$T = \frac{\ln\dfrac{47\cdot 1.15}{30\cdot 1.1}}{\ln\dfrac{1.17}{1.14}} = 19.4 \tag{12.5.2}$$

Это получается по оценке фирмы, сколько ей еще хорошо. Пока первое агенство считает, что надо продавать из-за завышенности цены, а второе предлагает покупать.

Если бы из оценок фирмы следовало, что $T < 10$, то оба агентства бы рекомендовали покупать, потому что тогда акция будет недооцененной, а у нее будет больше проспектов роста. Это в случае:

$$T = \frac{\ln\dfrac{x\cdot 1.15}{30\cdot 1.1}}{\ln\dfrac{1.17}{1.14}} = 10 \tag{12.5.3}$$

Тогда $x = 37.21$.

Если же $T > 20$, то обе компании скажут продавать переоцененную акцию. Решаем:

$$T = \frac{\ln\dfrac{x\cdot 1.15}{30\cdot 1.1}}{\ln\dfrac{1.17}{1.14}} = 20 \tag{12.5.4}$$

Выходит 48.24.

Значит, при $P/E < 37.21$ одинаковые предложения покупать, а при $P/E > 48.24$ они скажут продавать.

12.6 Задача 6

Если для акций некой компании коэффициент P/E равен 13.5, в то время как доход текущего года на акцию по прогнозам аналитических агентств составит 3 рубля на акцию, то чему должна быть равна цена этой акции?

$$P/E = \frac{P_0}{EPS_1} \tag{12.6.1}$$

$$P_0 = 13.5 \cdot 6 = 40.5 \tag{12.6.2}$$

12.7 Задача С3

Вы рассматриваете решение о приобретении обыкновенных акций молодой компании Omron, функционирующей в сфере производства индивидуальных высокоточных медицинских кардиологических приборов.

В настоящий момент все еще продолжается период макроэкономической нестабильности, вызванной сложной геополитической обстановкой, вследствие чего процентная ставка прогнозируется на уровне 15% в течение трех ближайших лет, а затем после стабилизации ситуации ставка опустится на 3 процентных пункта и будет оставаться такой неопределенно долго. Компания только что выплатила дивиденд в размере 20 рублей на одну обыкновенную акцию, но заявила, что в течение следующих пяти лет не будет выплачивать дивиденды. На этот период аналитики прогнозируют прирост чистой прибыли компании на 12% ежегодно, что вызвано выигрышем компанией крупного государственного заказа. После выполнения заказа темпы прироста не будут превышать среднеотраслевых, которые аналитики оценивают на уровне 5%.

Кроме того, аналитики крупнейших инвестиционных банков и само руководство компании не исключают, что к моменту начала выплат дивидендов компания осуществит сплит акций 1:2 (вместо 1 старой акции станет 2 новых акций). Сейчас выпущено 10 млн обыкновенных акций компании, и все прогнозы аналитиков сбудутся, а их ожидания оправдаются.

Все это занудство к тому, что надо оценить P_0.

Через пять лет эти товарищи снова заплатят дивиденды. В этом история и есть:

$$P_0 = \frac{1}{1.15^3 \cdot 1.12^3}\left(D_6 + \frac{D_7}{0.12 - 0.05}\right) \tag{12.7.1}$$

Осталось понять эти невероятные D_7. Сплит мы полностью игнорируем.

$$D_7 = 20 \cdot 1.12^5 \cdot 1.05^2 = 38.86 \tag{12.7.2}$$

Тогда $P_0 = 17.32 + 259.8 = 277.12$

12.8 Задача S4

Компания «ТТ-90» за текущий год выплатит 10 рублей в виде дивиденда. Благодаря новой технологии, используемой в процессе производства, темпы прироста прибыли компании на следующий год составят 25%, потом на 15%, а затем, после активизации конкурентов, темпы роста начнут равномерно в течение десяти лет снижаться к среднеотраслевому уровню роста в 5%. Ставка дисконтирования равна 9%.

Тут от нас хотят цену акции. Здесь есть целый гибрид из H-модели и прочей чепухи. Считаем:

$$P_0 = \frac{D_0(1 + g_n + H(g_a - g_n))}{r_n} \tag{12.8.1}$$

$$P_0 = \frac{12.5}{1.09} + \frac{14.38}{1.09^2} + \frac{1}{1.09^3}\frac{14.38(1 + 0.05 + 5 \cdot 0.1)}{0.09 - 0.05} = \tag{12.8.2}$$

13 Семинар 15. Риск и доходность портфеля

13.1 Задача 1

Доходность ценной бумаги А на фондовом рынке страны за последние 6 лет была $\{7\%, -2\%, 2\%, 5\%, 11\%, 8\%\}$, а у бумаги М $\{1\%, -1\%, 0\%, 2\%, 7\%, 2\%\}$.

Мы можем считать смещенные или исправленные оценки, но корреляция не изменится. Очевидно, что корреляция здесь будет положительной.

Помним, что:

$$\rho = \frac{Cov(r_A,r_M)}{\sigma_A \sigma_M} \tag{13.1.1}$$

Считаем теперь дисперсию каждой из бумаг. Среднее для A $\bar{r}_A = 5.17\%$, для M $\bar{r}_M = 1.83\%$. Тогда $\sigma_A = 0.042$ или 4.22%. Для M получается около 2.54%.

Осталось только посчитать ковариацию:

$$Cov(r_A,r_M) = \overline{r_A r_M} - \bar{r_A}\bar{r_M} = 9.205 \cdot 10^{-4} \tag{13.1.2}$$

В итоге $\rho = 0.8692$.

13.2 Задача 2

Считается, что распределение доходности обыкновенных акций компании «Нетугаза» является нормальным со средним значением 12% годовых и стандартным отклонением 17%.

$\boxed{\text{а}}$ Найдем вероятность, что доходность акций не опустится ниже среднего значения.

Так как у нас очень хорошее распределение, где медиана совпадает со средним, то вероятность просто 50%, ясно же.

$\boxed{\text{б}}$ Найдем вероятность, что доходность акций не опустится ниже 5% годовых.

Чтобы считать ручками, надо нормировать, приводя к стандартному нормальному распределению.

$$P(r \geqslant 5\%) = P(r - 12\% \geqslant -7\%) = P\left(\frac{p - 12\%}{17\%} \geqslant \frac{5\% - 12\%}{17\%}\right) \tag{13.2.1}$$

Значит, мы смотрим:

$$P\left(x \geqslant \frac{5\% - 12\%}{17\%}\right) = 1 - P\left(x \geqslant \frac{7}{17}\right) = 1 - P(x \geqslant -0.411) \tag{13.2.2}$$

А мы уже получили нормальное стандартное распределение. Помним про ехидство таблиц, дающих только правый хвост. Значит:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \tag{13.2.3}$$

Нам нужно, чтобы стандартная величина была не меньше -0.4118. Выходит, что вероятность около 0.6597.

$\boxed{\text{в}}$ Найдем вероятность того, что доходность акций будет лежать в пределах от 15% до 25% годовых.

Смотрим:

$$P(15\% \leqslant r \leqslant 25\%) = P\left(0.1764 \leqslant x \leqslant 0.7647\right) = 0.2027 \tag{13.2.4}$$

13.3 Задача 3

Портфель разбит пополам на два рисковых актива. Пусть известны вектор-столбец ожидаемой доходности и матрица ковариации трех ценных бумаг.

$$k = \begin{pmatrix} 10.1 \\ 7.8 \\ 5.0 \end{pmatrix} \tag{13.3.1}$$

$$G = \begin{pmatrix} 210 & 60 & 0 \\ 60 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.3.2}$$

$\boxed{\text{а}}$ Очевидно, что третий актив безрисковый, так как он ни с кем не меняется.

$\boxed{\text{б}}$ Найдем теперь ожидаемую доходность и стандартное отклонение для изначального портфеля:

$$\mathrm{E}\, r = 0.5 \cdot 10.1 + 0.5 \cdot 7.8 = 8.95\% \tag{13.3.3}$$

$$\mathrm{E}\, \sigma = \sqrt{0.5^2 \cdot 210 + 0.5^2 \cdot 90 + 2 \cdot 0.5^2 \cdot 60} = 10.25\% \tag{13.3.4}$$

$\boxed{\text{в}}$ Теперь пусть безрискового актива у нас четверть. Найдем все то же:

$$\mathrm{E}\, r = 0.75 \cdot 8.95\% + 0.25 \cdot 5\% = 7.96\% \tag{13.3.5}$$

Воспользуемся хитрейшим трюком с дисперсией:

$$\mathrm{E}\, \sigma = 0.75 \cdot 10.25\% = 7.68\% \tag{13.3.6}$$

13.4 Задача 4

Портфель мистера Игрек составлен из инвестиций в рискованный портфель (ожидаемая доходность 12% и стандартное отклонение доходности 25%) и в безрисковый актив (с доходностью 7%). Весь портфель имеет стандартное отклонение 20%.

Найдем теперь ожидаемую доходность этого портфеля:

$$r_p = w \cdot 12\% + (1 - w) \cdot 7\% \tag{13.4.1}$$

Осталось понять вес. Мы знаем, что:

$$\sigma_p = w \cdot 25\% = 20\% \tag{13.4.2}$$

Значит, $w = 0.8$. В итоге $r_p = 11\%$.

13.5 Задача 5

Ваш фонд управляет портфелем акций с ожидаемой доходностью 17% и стандартным отклонением 27%. Ставка доходности казначейских векселей равна 7%. Ваш клиент принял решение инвестировать 70% своих средств в Ваш портфель и 30% – в фонд денежного рынка (векселя). Допустим Ваш портфель состоит из трех акций в следующих пропорциях: акции А 27%, акции В – 33%, акции С – 40%.

$\boxed{\text{а}}$ Поищем пропорции клиента по акция в его портфеле. Очевидно, что $d_A = 0.7 \cdot 27\% = 18.9\%$, $d_B = 0.7 \cdot 33\% = 23.1\%$, $d_C = 0.7 \cdot 40\% = 28\%$. Остальные 30% состоят из векселей.

$\boxed{\text{б}}$ Найдем коэффициенты вариации для всех. Помним, что коэффициент вариации отражает, сколько риска приходится на единицу доходности:

$$CV = \frac{\sigma}{r} \tag{13.5.1}$$

Для фонда:

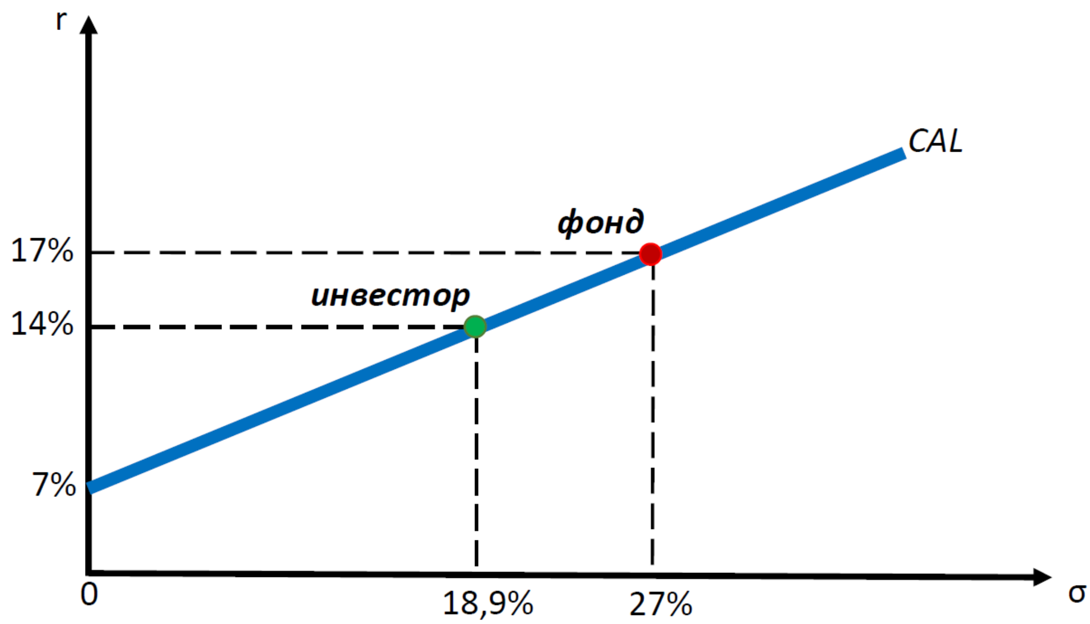
$$CV_f = \frac{27\%}{17\%} = 1.5882 \tag{13.5.2}$$

Для инвестора:

$$CV_i = \frac{18.9}{14} = 1.3500 \tag{13.5.3}$$

У этого товарища риска поменьше.

$\boxed{\text{в}}$ А картинка такая:



13.6 Задача 6

Требуется проанализировать стандартное отклонение доходности портфеля, составленного из следующих активов:

	Ожидаемый доход (%)	Стандартное отклонение (%)
Sony Corporation (SC)	11	23
Tesoro Petroleum (TP)	9	27
Storage Technology (StT)	16	50

При этом мы одарены следующей корреляционной матрицей:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & -0.15 & 0.2 \\ -0.15 & 1 & -0.25 \\ 0.2 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} \tag{13.6.1}$$

От нас хотят дисперсию доходности портфеля, состоящего из трех активов в равной пропорции.

Помним, что в общем случае просто:

$$\sigma_p^2 = \sum \sum w_i w_j Cov(r_i, r_j) \tag{13.6.2}$$

Получаем быстро невероятную ковариационную матрицу:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 529 & -93.15 & 230 \\ -93.15 & 729 & -337.5 \\ 230 & -337.5 & 2500 \end{pmatrix} \tag{13.6.3}$$

Просто очень долго и скучно суммируем:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{9}(529 + 729 + 2500) + 2 \cdot \frac{1}{9}(-93.15 + 230 - 337.5) = 372.96 \tag{13.6.4}$$

Получается отклонение в духе 19.31%.

13.7 Задача 7

Доходность ценной бумаги A на фондовом рынке страны за последние 6 лет была $\{5\%, -1\%, 12\%, 2\%, 0\%, 7\%\}$, а у бумаги M $\{4\%, 1\%, 4\%, 2\%, 3\%, 3\%\}$.

Найдем наименьшее стандартное отклонение доходности портфеля, составленного из данных акций, с доходностью равной 3.69%.

Находим быстро, что средние доходности – $r_A = 4.17\%$, $r_M = 2.83\%$. Тогда доходность портфеля:

$$r_p = w_A \cdot 4.17\% + (1 - w_A) \cdot 2.83\% = 3.69\% \tag{13.7.1}$$

Отсюда немедленно находится, что $w_A = 0.3575\%$.

Значит, можно просто считать отклонение для портфеля, раз дан вес. Понимаем, что:

$$\sigma_p^2 = 0.3575^2 \sigma_A^2 + (1 - 0.3575)^2 \sigma_M^2 + 2 \cdot 0.3575(1 - 0.3575) Cov(r_A, r_M) \tag{13.7.2}$$

Сразу находим в итоге, что $\sigma_p = 3.15\%$.

13.8 Задача 8

Предположим, на рынке есть n ценных бумаг с одинаковой доходностью, что средняя дисперсия доходности отдельной ценной бумаги равна 50, а средняя ковариация между доходностями любых двух бумаг равна 10.

Будем искать среднюю дисперсии доходности портфеля для кучи разных случаев:

- Для пяти бумаг:

$$\sigma_p^2 = 5 \cdot 0.2^2 \cdot 50 + 2 \cdot 0.2^2 \cdot 10 \cdot 10 = 18 \tag{13.8.1}$$

- Для 50 бумаг:

$$\sigma_p^2 = 50 \cdot 0.02^2 \cdot 50 + 2 \cdot 0.02^2 \cdot 1225 \cdot 10 = 10.8 \tag{13.8.2}$$

Может возникнуть вопрос, сколько надо бумаг в портфель, чтобы риск был в среднем не выше, чем на 10% минимального уровня.

Для этого надо искать теоретический минимум на бесконечности.

$$\sigma_p^2 = N \cdot \frac{1}{N^2} \cdot 50 + 2 \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N^2 - N}{2} \cdot 10 \tag{13.8.3}$$

Ясно, что от первой части на бесконечности ничего не остается, а вот предел второй части равен десяти. Значит, минимум риска – десять.

Ищем число бумаг, для которых дисперсия равна 11.

$$N \cdot \frac{1}{N^2} \cdot 50 + 2 \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N^2 - N}{2} \cdot 10 = 11 \tag{13.8.4}$$

Получается, что сорок бумаг.

13.9 Задача 9

В двухпериодной экономике (в которой нет возможностей для коротких продаж) обращаются два актива со следующими характеристиками: ожидаемые доходности $r_1 = 10\%$, $r_2 = 25\%$, стандартные отклонения доходностей $\sigma_1 = 10\%$, $\sigma_2 = 20\%$, коэффициент корреляции между доходностями активов 1 и 2 равен нулю. Безрисковая ставка равна 5%.

Найдем портфель для чувака с полезностью:

$$u = r_p - \frac{1}{2}\sigma_p^2 \tag{13.9.1}$$

Запишем доходность портфеля:

$$r_p = 0.1w_1 + 0.25w_2 + (1 - w_1 - w_2)0.05 \tag{13.9.2}$$

И дисперсию, где пользуемся магией некоррелированности:

$$\sigma_p^2 = 0.01w_1^2 + 0.04w_2^2 \tag{13.9.3}$$

Записываем все в одну функцию:

$$u = 0.1w_1 + 0.25w_2 + (1 - w_1 - w_2)0.05 - 0.5(0.01w_1^2 - 0.04w_2^2) \to \max \tag{13.9.4}$$

Берем производные:

$$\begin{cases} u'_{w_1} = 0.1 - 0.05 - 0.01w_1 = 0 \\ u'_{w_2} = 0.25 - 0.05 - 0.04w_2 = 0 \end{cases} \tag{13.9.5}$$

Выходит, что $w_1 = w_2 = 0.05$.

13.10 Задача 10

В двухпериодной экономике (в которой нет возможностей для коротких продаж) обращаются два актива со следующими характеристиками: ожидаемые доходности $r_A = 10\%$, $r_B = 25\%$, стандартные отклонения $\sigma_A = 10\%$, $\sigma_B = 20\%$, коэффициент корреляции между доходностями активов A и B равен нулю.

Безрисковая ставка равна 5%. Известно, что инвестор имеет функцию полезности, которую можно выразить зависимостью:

$$U = r_p - \frac{1}{2}\sigma_p^2 \tag{13.10.1}$$

$\boxed{\text{а}}$ Ищем GMV портфель из рисковых активов:

$$\sigma_p^2 = 100w_1^2 + 400(1-w_1)^2 \to \min \tag{13.10.2}$$

$$100w_1^2 + 400(1-2w_1+w_1^2) \to \min \tag{13.10.3}$$

$$\sigma^{2'} = 200w_1 + 800w_1 - 800 = 0 \tag{13.10.4}$$

$$w_1 = \frac{800}{1000} = 0.8 \tag{13.10.5}$$

$\boxed{\text{б}}$ Ищем оптимум инвестора по только рисковым портфелям:

$$r_p = 10w_1 + 25(1-w_1) \tag{13.10.6}$$

Тогда:

$$u = 10w_1 + 25(1-w_1) - \frac{1}{2}\left(100w_1^2 + 400(1-w_1)^2\right) \to \max \tag{13.10.7}$$

Пишем:

$$u' = 10 - 25 - 100w_1 + 400 - 400w_1 = 0 \tag{13.10.8}$$

$$500w_1 = 385 \tag{13.10.9}$$

$$w_1 = 0.77 \tag{13.10.10}$$

$\boxed{\text{в}}$ А теперь ищем tangency portfolio. Такой портфель максимизирует коэффициент Шарпа:

$$SR = \frac{r_p - r_f}{\sigma} \tag{13.10.11}$$

Значит:

$$SR = \frac{10w_1 + 25(1 - w_1) - 5}{\sqrt{100w_1^2 + 400(1 - w_1)^2}} \tag{13.10.12}$$

Путем сложнейших вычислений мы находим, что $w_1^T = w_2^T = 0.5$. Для T $\sigma_T = 11.81$.

$\boxed{\text{б}}$ Ищем теперь оптимум инвестора вообще. Знаем, что смысл есть искать только на эффективном множестве, включающем прямую, T и что-то еще в зависимости от возможности брать займы.

Множество начинается от GMV-портфеля, но его все время доминирует кусок прямой.

Для упрощения найдем сначала CAL с T:

$$r = 5 + 1.1181\sigma \tag{13.10.13}$$

Пишем:

$$u = 5 + 1.1181\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{13.10.14}$$

Это можно просто максимизировать по σ.

$$u' = 1.1181 - \sigma = 0 \tag{13.10.15}$$

При это мы знаем, что это результирующее стандартное отклонение нашего портфеля. Пусть доля T в портфеле w_T. Тогда:

$$1.1181 = w_T 11.81 \tag{13.10.16}$$

Значит, мы берем 90% безрискового актива и по 5% каждого рискового. Ответ совпадает с предыдущей задачей, потому что мы делали ровно то же, но просто занудно разрубили на два этапа.

13.11 Задача G1

Джордан Белфорт инвестирует свои накопления в акции и не имеет возможности осуществлять «короткие продажи» или занимать деньги. Свободные средства он может размещать в безрисковый актив с доходностью 4%. Задача инвестора максимизировать целевую функцию:

$$u = r - 5\sigma^2 \tag{13.11.1}$$

У него сейчас есть некий неполный портфель $r = 0.13$ и $\sigma = 0.11$. Ему хочется на основе этого портфеля, безрискового актива и одной из двух акций замутить себе оптимальный портфель.

$\boxed{\text{а}}$ Проблема в том, что мы можем включать только одну акцию. А так бы мы могли все рыночное. Придется смотреть по случаям. Тут хорошо, что X не коррелирована с портфелем.

Вариант 1 с акцией X. Тогда доходность портфеля:

$$r_p = w_1 \cdot 0.04 + w_2 \cdot 0.13 + (1 - w_1 - w_2) \cdot 0.11 \tag{13.11.2}$$

Надо взять дисперсию, но все некоррелировано. Поэтому все сокращается:

$$\sigma_p^2 = w_2^2 \cdot 0.0121 + (1 - w_1 - w_2)^2 \cdot 0.0676 \tag{13.11.3}$$

А теперь надо максимизировать:

$$U = 0.04w_1 + 0.13w_2 + 0.11(1 - w_1 - w_2) - 5 \cdot [w_2^2 \cdot 0.0121 + (1 - w_1 - w_2)^2] \to \max \tag{13.11.4}$$

Записисываем FOC:

$$u'_{w_1} = 0.04 - 0.11 + 2 \cdot 5 \cdot 0.0676(1 - w_1 - w_2) = 0 \tag{13.11.5}$$

$$u'_{w_2} = 0.13 - 0.11 - 2 \cdot 5 \cdot 0.0121w_2 + 2 \cdot 5 \cdot 0.0676(1 - w_1 - w_2) = 0 \tag{13.11.6}$$

Понимаем, что $1 - w_1 - w_2 = w_3$. Находим из первого:

$$w_3 = \frac{0.07}{0.676} = 0.1036 \tag{13.11.7}$$

$$w_2 = \frac{0.02 + 0.07}{0.121} = 0.7438 \quad (13.11.8)$$

$$w_1 = 0.1526 \quad (13.11.9)$$

В итоге выходит:

$$U = 0.0771 \quad (13.11.10)$$

А теперь смотрим вариант 2.
Доходность портфеля:

$$r_p = w_1 \cdot 0.04 + w_2 \cdot 0.13 + (1 - w_1 - w_2) \cdot 0.12 \quad (13.11.11)$$

Дисперсия

$$\sigma_p^2 = w_2^2 \cdot 0.0121 + (1 - w_1 - w_2)^2 \cdot 0.01 + 2 \cdot 0.85 \cdot 0.1 \cdot 0.11 \quad (13.11.12)$$

Получаем:

$$U = 0.04w_1 + 0.13w_2 + 0.12(1-w_1-w_2) - 5 \cdot [w_2^2 \cdot 0.0121 + (1-w_1-w_2)^2 \cdot 0.01 + 2 \cdot 0.85 \cdot 0.1 \cdot 0.11] \to \max \quad (13.11.13)$$

Условия первого порядка:

$$u'_{w_1} = 0.04 - 0.12 + 2 \cdot 5 \cdot 0.01(1 - w_1 - w_2) + 5 \cdot 2 \cdot 0.85 \cdot 0.11 \cdot 0.1 \cdot w_1 = 0 \quad (13.11.14)$$

$$u'_{w_2} = 0.13 - 0.12 - 2 \cdot 5 \cdot 0.0121 w_2 + 2 \cdot 5 \cdot 0.01(1-w_1-w_2) - 5 \cdot 2 \cdot 0.85 \cdot 0.11 \cdot 0.11(1-w_1-2w_2) = 0 \quad (13.11.15)$$

Выходит $U = 0.0754$. Значит, выйдет лучше икс, выбираем его, потому что из-за корреляции в другом случае слишком растет риск.

13.12 Задача B1

Есть какая-то такая информация:

Сценарий	Вероятность	Доходность акции А	Доходность акции Б
1	0,3	0,07	-0,09
2	0,5	0,11	0,14
3	0,2	-0,16	0,26

$\boxed{\text{а}}$ Ожидаемые доходности ищутся элементарно: $r_A = 4.4\%$, $r_B = 9.5\%$.

$\boxed{\text{б}}$ Аналогично не становится интереснее с дисперсиями и отклонениями. Здесь нам просто предлагается считать по формуле:

$$\sigma^2 = \sum p_i (x_i - \bar{x})^2 \tag{13.12.1}$$

Выходит $\sigma^A = 10.35\%$, $\sigma_B = 12.93\%$.

$\boxed{\text{в}}$ Подобным образом находим и ковариацию. Она выходит -66.9.

$\boxed{\text{г}}$ Корреляция остается со своей очевидной формулой и равна -0.5.

$\boxed{\text{д}}$ От нас еще страстно хотят портфель с минимальной дисперсией. Запишем дисперсию:

$$\sigma_p^2 = w_1 10.35^2 + (1 - w_1) 12.93^2 + 2w_1(1 - w_1) \cdot (-66.9) \to \min \tag{13.12.2}$$

$$\sigma^{2'} = 10.35^2 - 12.93^2 - 2 \cdot 66.9 + 4 \cdot 66.9 w_1 = 0 \tag{13.12.3}$$

$$w_1 = \frac{10.35^2 - 12.93^2 - 2 \cdot 66.9}{4 \cdot 0.00669} \tag{13.12.4}$$

13.13 Задача S1

Есть куча всякой информации:

	Фонд А	Фонд Б	Фонд В	Фонд Г
β_i	0,5	0,75	1,75	1,5
r_i	10%	?	22,3%	20,6%
a_i	0%	0%	?	?

$\boxed{\text{а}}$ Что там говорит CAPM?

$$r_i = r_f + \beta(r_m - r_f) \tag{13.13.1}$$

Находим из А r_m:

$$10\% = 5\% + 0.5(r_m - 5\%) \tag{13.13.2}$$

$$r_m = 15\% \tag{13.13.3}$$

Смотрим на фонд Б:

$$r_{\text{Б}} = 5\% + 0.75 \cdot 10\% = 12.5\% \tag{13.13.4}$$

Находим:

$$r_{\text{В}} = 5\% + 1.75 \cdot 10\% = 22.5\% \tag{13.13.5}$$

$$r_{\Gamma} = 5\% + 1.5 \cdot 10\% = 20\% \tag{13.13.6}$$

Альфа для Г равно 0.6%, для В -0.2%.

$\boxed{\text{б}}$ Ясно, что, если в равной пропорции, то перетянет положительная альфа Г, будет положительно.

$\boxed{\text{в}}$ Для максимальной альфы суем максимум фонда G. При этом бета должна быть единицей. Как можно сильнее сокращаем бету портфеля с помощью А.

Тогда:

$$w_{\Gamma} = \frac{1 - 0.5}{1.5 - 0.5} = \frac{1}{2} \tag{13.13.7}$$

$\boxed{\text{г}}$ Короткие продажи: можно пошортить фонд В с отрицательной альфой.

$$w_\Gamma \cdot 1.5 + (1 - w_\Gamma) \cdot 1.75 = 1 \tag{13.13.8}$$

$$w_\Gamma = \frac{1 - 1.75}{1.5 - 1.75} = 3 \tag{13.13.9}$$

Значит, $w_B = -2$. Так еще пафоснее:

$$\alpha = -2 \cdot (-0.2)\$ + 3 \cdot 0.6 = 2.2\% \tag{13.13.10}$$

14 Семинар 16. CAPM

Единственное интересное – систематический риск. Значит, доходность определяется через:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f) \tag{14.0.1}$$

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i,r_m)}{\sigma_m^2} \tag{14.0.2}$$

Ясно, что все это в равновесии. А вот может отклоняться:

$$r_{i,t} = r_{f,t} + \beta_i(r_{m,t} - r_{f,t}) + \varepsilon_{i,t} \tag{14.0.3}$$

Если переобозвать:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t \tag{14.0.4}$$

Важно, чтобы ε были i.i.d. с нулевым матожиданиями, а $Cov(\varepsilon,r_m) = 0$.

$$\beta = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} \tag{14.0.5}$$

А еще можно записать через α:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f) + \alpha_i \tag{14.0.6}$$

Если запишем, что:

$$r_t = \frac{P_{t+1}^e - P_t}{P_t} \tag{14.0.7}$$

Тогда $\alpha > 0$ ведет к недооценке.
Риск тогда:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{14.0.8}$$

14.1 Задача 1

Компания United Airlines имеет коэффициент бета равный 1.5. Стандартное отклонение рыночного портфеля составляет 22%, а стандартное отклонение доходности обыкновенных акций United Airlines равно 66%.

$\boxed{\text{а}}$ Найдем корреляцию между нашими акциями и рыночным портфелем, раз у нас $\beta = 1.5$, $\sigma_m = 0.22$, $\sigma_i = 0.66$.

Мы помним, что:

$$\beta = \frac{Cov(r_i,r_m)}{\sigma_m^2} \tag{14.1.1}$$

Значит, тут можно повертеть до корреляции:

Мы помним, что:

$$\beta = \frac{\rho\sigma_i}{\sigma_m} \tag{14.1.2}$$

Тогда:

$$\rho = \beta\frac{\sigma_m}{\sigma_i} \tag{14.1.3}$$

$$\rho = 1.5\frac{0.22}{0.66} = 0.5 \tag{14.1.4}$$

$\boxed{\text{б}}$ Найдем долю рыночного риска во всем риске. Помним:

$$\sigma_i^2 = \beta^2\sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{14.1.5}$$

$$d = \frac{\beta^2\sigma_m^2}{\sigma_i^2} = 0.25 \tag{14.1.6}$$

14.2 Задача 2

Известно, что в данный момент времени на финансовых рынках сложилась следующая ситуация: доходность государственных облигаций составляет 6%, а средняя рыночная доходность равна 9%.

Пусть мы хотим сформировать самый доходный портфель из трех видом.

Считаем через CAPM доходности каждой акции:

$$r_a = 6\% + 1 \cdot (9\% - 6\%) = 9\% \tag{14.2.1}$$

$$r_b = 6\% + 0.5 \cdot (9\% - 6\%) = 7.5\% \tag{14.2.2}$$

$$r_c = 6\% + 2 \cdot (9\% - 6\%) = 12\% \tag{14.2.3}$$

Раз мы хотим как можно больше доходности при условии, что каждой не меньше 0.2, берем по максимуму бумаги C.

$$r_p = 0.2 \cdot 9 + 0.2 \cdot 7.5 + 0.6 \cdot 12 = 9.15\% \tag{14.2.4}$$

14.3 Задача 3

На фондовом рынке представлены только три равные по капитализации компании A, B и C. Годовые доходности обыкновенных акций компаний A, B и C равны 15%, 5.5% и 9% соответственно. Про компании A и B известно, что $\beta_A = 2$, $\beta_B = 0.3$. Дополнительно известно, что акции компании A оценены верно, а у компании B $\alpha_B = -1\%$.

Определим состояние акций C. Для начала найдем рыночную и безрисковую доходность:

$$15\% = r_f + 2(r_m - r_f) \tag{14.3.1}$$

$$5.5\% = r_f + 0.3(r_m - r_f) - 1\% \tag{14.3.2}$$

Быстро находим, что $r_f = 5\%$, $r_m - r_f = 5\%$

А вот чтобы найти β_C, помним, что бета рынка равна единице. При этом акции равны по капитализаии, поэтому равные доли:

$$\beta_m = \frac{1}{3}(2 + 0.3 + \beta_c) = 1 \tag{14.3.3}$$

$$\beta_C = 0.7 \tag{14.3.4}$$

По CAPM доходность $C = 8.5\%$. А в реальности 9%. Это значит, что она недооценена, цена ниже равновесной. Значит, альфа больше нуля.

14.4 Задача 4

Эксперты оценили поведение двух ценных бумаг и одного фондового индекса в зависимости от результатов выборов президента:

Победитель	Вероятность исходов выборов	Доходность акции A, % годовых	Доходность акции B, % годовых	Доходность фондового индекса, % годовых
Претендент 1	0,2	0	4	2
Претендент 2	0,5	3	5	8
Претендент 3	0,1	1	3	8
Претендент 4	0,2	4	1	4

Доходность государственных долгосрочных облигаций, независимо от результатов выборов, составляет 1% годовых.

$\boxed{\text{а}}$ Оценим дисперсии обеих акций и рынка. Средние доходности: $r_A = 2.40\%$, $r_B = 3.80$, $r_M = 6\%$.

Стандартные отклонения выходят в духе: $\sigma_A = 1.43\%$, $\sigma_B = 1.54$, $\sigma_M = 2.53\%$.

$\boxed{\text{б}}$ Найдем теперь обе беты.

$$\beta_A = \frac{Cov(r_A, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{1.6}{6.4} = 0.25 \tag{14.4.1}$$

$$\beta_B = \frac{Cov(r_B,r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{2}{6.4} = 0.3125 \tag{14.4.2}$$

$\boxed{\text{в}}$ Теперь надо поискать альфы. Для A:

$$r_A = 1\% + 0.25(6-1) = 1 + \frac{5}{4} = 2.25\% \tag{14.4.3}$$

$$\alpha_A = 2.4 - 2.25\% = 0.15\% \tag{14.4.4}$$

Недооцененность акции очевидна.
Для B:

$$r_B = 1\% + 0.3125 \cdot 5\% = 2.56\% \tag{14.4.5}$$

$$\alpha_B = 3.8\% - 2.56\% = 1.24\% \tag{14.4.6}$$

Здесь тоже как-то недооцененность есть.

$\boxed{\text{г}}$ Странному инвестору надо дать теперь советов.

- Если он хочет поменьше риска вообще, то его ждет актив A с более низким общим риском и меньшим систематическим риском (т.к. β меньше)
- Альтернативно можно посчитать коэффициент вариации:

$$CV_A = \frac{\sigma^A}{r} = 0.5951 \tag{14.4.7}$$

$$CV_B = 0.4043 \tag{14.4.8}$$

С этой точки зрения лучше выглядит актив B, конечно.

14.5 Задача 5

Приведенные данные отражают фактические ставки доходно сти акций различных эмитентов A, B, C, D и их коэффициенты β. По мнению финансового аналитика, ставка доходности безрисковых вложений для данных условий – 6%, а доходность наиболее репрезентативного индекса, рассчитанного по доходности акций крупных компаний, равен 13%.

Эмитенты	Доходность (%)	β
A	10,7	0,52
B	14,5	0,97
C	13,2	1,23
D	11,4	0,86

$\boxed{\text{а}}$ Для всех акций надо найти их альфы. Ищем для A

$$r_A = 6 + 0.52(13 - 6) = 9.64\% \tag{14.5.1}$$

$$\alpha_A = 10.7 - 9.64 = 1.06\% \tag{14.5.2}$$

Недооцененная акция, ждем роста цена.

$\boxed{\text{б}}$ А теперь для B

$$r_B = 6 + 0.97(13 - 6) = 12.79\% \tag{14.5.3}$$

$$\alpha_B = 14.5\% - 12.79\% = 1.71\% \tag{14.5.4}$$

И эта тоже.

$\boxed{\text{в}}$ И для C:

$$r_C = 6 + 1.23(13 - 6) = 14.61\% \tag{14.5.5}$$

$$\alpha_C = 13.2 - 14.61 = -1.41\% \tag{14.5.6}$$

А эта переоцененная, ей надо ждать падения цены.

$\boxed{\text{г}}$ Ну и для D:

$$r_D = 6 + 0.86(13 - 6) = 12.02\% \tag{14.5.7}$$

$$\alpha = 11.4 - 12.02 = -0.62\% \tag{14.5.8}$$

Это такая же.

14.6 Задача 6

Пусть уравнение SML задано следующим равенством:

$$r_i = 0.04 + 0.08\beta_i \tag{14.6.1}$$

Аналитик подсчитал, что коэффициент бета для компании X равен 0.5, а для компании A равен двум.

SML – очень пафосный способ обозвать CAMP. У нас есть:

$$r_x^{CAPM} = 0.04 + 0.5 \cdot 0.08 = 0.08 \tag{14.6.2}$$

$$r_y^{CAPM} = 0.04 + 2 \cdot 0.08 = 0.2 \tag{14.6.3}$$

Значит, выгодно инвестировать, если доходности выше.

14.7 Задача 7

Про актив A известно, что его фактическая доходность 6%, а коэффициент бета равен 0.5. Фактическая доходность актива B составила 13% при коэффициенте бета в три раза большем, чем у актива A. Альфа коэффициенты этих активов равны 0 и -1 соответственно.

Нам предлагается найти, во сколько раз рыночная доходность выше безрисковой.

Запишем для этого CAPM:

$$6 = r_f + 0.5(r_m - r_f) \tag{14.7.1}$$

$$14 = r_f + 1.5(r_m - r_f) \tag{14.7.2}$$

Находим, что $r_m - r_f = 8$. Значит, $r_f = 2\%$, а $r_m = 10\%$. В пять раз.

14.8 Задача 8

Чему равняется β портфеля, состоящего из трёх акций, причем на четверть он состоит из акций А с бетой равной 0.9, на 40% состоит из акций Б с бетой равной 1.05, а всю остальную часть портфеля составляют акции С с бетой равной 1.73?

Да просто берем среднюю:

$$\beta_p = 0.9 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot 1.05 + 0.35 \cdot 1.73 = 1.2505 \tag{14.8.1}$$

14.9 Задача 9

Каждый инвестор в модели CAPM обладает комбинацией рыночного портфеля и безрискового актива. Предположим, стандартное отклонение доходности рыночного портфеля равно 30%, а сама ожидаемая доходность рыночного портфеля равна 15%.

$\boxed{\text{а}}$ Если чувак хочет иметь вообще без стандартного отклонения портфель, то ему придется пойти за безрисковым активом.

$\boxed{\text{б}}$ Если чувак хочет иметь стандартное отклонение 15%, то посмотрим:

$$\sigma_p = w30\% = 15\% \tag{14.9.1}$$

Половину.

$\boxed{\text{в}}$ Есть желатель держать портфель с отклонение 30%. Пусть просто берет рыночный портфель.

$\boxed{\text{г}}$ Желателю иметь отклонение 45% придется шортить безрисковый актив, набрав 150% рыночного портфеля и −50% безрискового актива.

$\boxed{\text{д}}$ Этому вдруг захотелось выбиться из тренда и иметь доходность 12%.

$$r = 15w + 5(1 - w) = 10w + 5 = 12 \tag{14.9.2}$$

$$w = 0.7 \tag{14.9.3}$$

70%, как очевидно.

14.10 Задача 10

Предположим, что мы готовимся сформировать портфель из существующих активов. В таблице ниже представлена ежемесячная доходность двух акций и индекса S&P500:

Месяц	Акция A (%)	Акция B (%)	Доходность индекса S&P500 (%)
1	12,0	-2,5	13,0
2	1,5	71,4	10,5
3	-8,6	13,4	0,6
4	-5,0	12,6	-5,5
5	6,0	14,2	2,5

$\boxed{\text{а}}$ Найдем беты для A и B. $\beta_A = 0.8112$, $\beta_B = 1.0175$.

$\boxed{\text{б}}$ Советы в целом совершенно аналогичные для инвестора – либо склониться к A за меньший систематический рынок, либо посмотреть на коэффициенты вариации. $A : 6.27 > B : 1.17$, так что коэффициенты вариации бодро отправляют нас в B (правда, это из-за 71.4%, поэтому там надо быть осторожнее, а то вдруг они были при смерти и не очень далеко от могилы уползли).

14.11 Задача С4

$\boxed{\text{Ситуация 1}}$ Предположим, что у нас есть 100 000, инвестированные к настоящему моменту в фонд, копирующий индекс ММВБ (исходный портфель). Теперь мы планируем заменить 10% своих инвестированных в фонд средств в акции, имеющие коэффициент бета, равный 2 и рассчитанный относительно индекса ММВБ (новый портфель).

Мы должны рассмотреть систематический и специфический риск.

- Систематический риск. Бета была единицей, а теперь она станет 1.1 (потому что там 10% портфель).
- У рынка не было специфического риска, а тут может быть.

$\boxed{\text{б}}$ Два актива имеют коэффициенты бета 1.5 и 1.2 соответственно. Остаточные стандартные отклонения каждого актива согласно рыночной модели равны 2 и 4 соответственно. Стандартное отклонение рыночной доходности равно 8.

Хочется знать, можно ли найти коэффициент корреляции:

$$\rho_{A,B} = \frac{Cov(r_A,r_B)}{\sigma_A\sigma_B} \tag{14.11.1}$$

У нас есть $\beta_A = 1.5$, $\beta_B = 1.2$, $\sigma_{\varepsilon_A} = 0.02$, $\sigma_{\varepsilon_B} = 0.04$, $\sigma_m = 0.08$. Можем найти:

$$\sigma_A = \sqrt{1.5^2 0.08^2 + 0.02^2} = 0.1217 \tag{14.11.2}$$

$$\sigma_B = \sqrt{1.2^2 0.08^2 + 0.04^2} = 0.1040 \tag{14.11.3}$$

Ковариацию искать хуже:

$$Cov(r_a,r_b) = Cov(r_f + \beta_A(r_m - r_f) + \varepsilon_A, r_f + \beta_B(r_m - r_f) + \varepsilon_B) = \tag{14.11.4}$$

$$= Cov(\beta_A r_m + \varepsilon_A, \beta_B r_m + \varepsilon_B) = \tag{14.11.5}$$

$$= Cov(\beta_A r_m, \beta_b r_m) + Cov(\varepsilon_A, \beta_B r_m) + Cov(\varepsilon_B, \beta_A r_m) + Cov(\varepsilon_A, \varepsilon_B) \tag{14.11.6}$$

Две ковариацию умирают, остается:

$$= \beta_A\beta_B\sigma_m^2 + Cov(\varepsilon_A, \varepsilon_B) \tag{14.11.7}$$

Вот вторая ковариация какая-то неведомая и мутная. Вот если предположим, что это ноль, то тогда уже получаем ковариацию между доходностями:

$$Cov(r_a, r_b) = \beta_a \beta_b \sigma_m^2 \tag{14.11.8}$$

$$\rho_{A,B} = \frac{1.5 \cdot 1.2 \cdot 0.08^2}{\sqrt{1.5^2 0.08^2 + 0.02^2}\sqrt{1.2^2 0.08^2 + 0.04^2}} = 0.9102 \tag{14.11.9}$$

14.12 Задача S2

Весь рынок рисковых активов представлен акциями двух компаний. Известно, что коэффициент бета первой акции составляет 3/4, а ее доходность равна 6% . Коэффициент бета второй акции равен 5/4, а ее доходность составляет 10%. Кроме того, известно, что стандартное отклонение рыночной доходности составляет 12%, а дисперсия доходности второй акции в два раза больше дисперсии доходности первой акции.

Из всего этого от нас хотят доходность портфеля из этих двух бумаг с минимальной дисперсией.

$\beta_A = 0.75$, $r_a = 6\%$, $\beta_B = 1.25$, $r_b = 10\%$, $\sigma = 0.12$, $2\sigma_a^2 = \sigma_B^2$.

Запишем дисперсию портфеля:

$$w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)Cov(r_a, r_B) \to \min_w \tag{14.12.1}$$

Запишем беты:

$$\beta_A = \frac{Cov(r_A, r_m)}{\sigma_m^2} \tag{14.12.2}$$

А еще помним условие на единичность рыночной беты:

$$1 = \frac{3}{4}f + (1-f)\frac{5}{4} \tag{14.12.3}$$

$$f = 0.5 \tag{14.12.4}$$

Это дает нам возможность переписать рыночный портфель: $r_M = 0.5r_A + 0.5r_B$.

В итоге развинчиваем беты:

$$Cov(r_A, r_M) = Cov(r_A, 0.5r_A + 0.5r_B) = \beta_A \sigma_m^2 \tag{14.12.5}$$

$$Cov(r_B, r_M) = Cov(r_B, 0.5r_A + 0.5r_B) = \beta_B \sigma_m^2 \tag{14.12.6}$$

Из первого и второго:

$$0.5\sigma_A^2 + 0.5Cov(r_A, r_B) = \beta_A \sigma_m^2 \tag{14.12.7}$$

$$0.5\sigma_B^2 + 0.5Cov(r_A, r_B) = \beta_B \sigma_m^2 \tag{14.12.8}$$

Используем условие связи дисперсий:

$$\sigma_A^2 = 2(\beta_B - \beta_A)\sigma_m^2 \tag{14.12.9}$$

$$\sigma_A^2 = \sigma_m^2 = 0.12^2 = 0.0144 \tag{14.12.10}$$

$$\sigma_B^2 = 0.0288 \tag{14.12.11}$$

$$Cov(r_A, r_B) = 0.0072 \tag{14.12.12}$$

Условие первого порядка:

$$2w\sigma_A^2 - 2(1-w)\sigma_B^2 + 2Cov(r_a, r_B)(1-2w) = 0 \tag{14.12.13}$$

$$w = \frac{2\sigma_A^2 - 0.5\sigma_A^2}{3\sigma_A^2 - \sigma_A^2} = \frac{1.5}{2} = \frac{3}{4} \tag{14.12.14}$$

15 Семинар 17. Опционы I

Чем выше цена актива, тем выше цена опциона колл и ниже цена пут-опциона.

15.1 Задача 1

Это задача про греки опционов.

$\boxed{\text{а}}$ Найти актив с более низкой ценой:

Пут	T	X	σ	Цена опциона
А	0,5	50	20%	10
Б	0,5	50	25%	10

Реакцию на цену актива для опциона отражает Δ – производная по цене актива. Для колла она положительная, для пута отрицательная.

Реакцию на волатильность отражает v – производная по волатильности. Она для всех положительная.

При прочих равных должен был быть дороже опцион Б, но у опционов равные цены. Значит, что-то толкает его вниз. Так как дельта путов отрицательная, значит, что актив в Б дороже, ему дальше до страйка. Дешевле актив А.

$\boxed{\text{б}}$ Найти актив с более низкой ценой:

Пут	T	X	σ	Цена опциона
А	0,5	50	20%	10
Б	0,5	50	20%	12

Все видимые характеристики равны. Раз это путы, у них отрицательные дельты – чем ниже цена актива, тем дороже опцион. Значит, актив А более дорогой. Ответ Б.

Маленькое замечание – ρ отражает чувствительно по процентной ставке, путы обычно имеют $\rho < 0$, а коллы $\rho > 0$.

$\boxed{\text{в}}$ Найти более короткий срок до исполнения.

Колл	S0	X	σ	Цена опциона
А	50	50	20%	12
Б	55	50	20%	10

Реакцию на время отражает θ. У колл-опциона чем дольше срок, тем дороже (производная стоимости по времени $\theta > 0$). А вот для пут-опцина все так же, кроме маленькой окрестности нуля (по S), где эта производная отрицательная. Если пут глубоко in-the-money, далеко от страйка.

А так у нас здесь колл, все видимое совпадает, значит, быстрее приходит судьба за Б.

$\boxed{\text{г}}$ Где большая волатильность?

Колл	T	X	S0	Цена опциона
А	0,5	50	55	10
Б	0,5	50	55	12

Вега у всех больше нуля, значит, у Б.

$\boxed{\text{д}}$ А здесь?

Пут	T	X	S0	Цена опциона
А	0,5	50	55	10
Б	0,5	50	55	7

А здесь А.

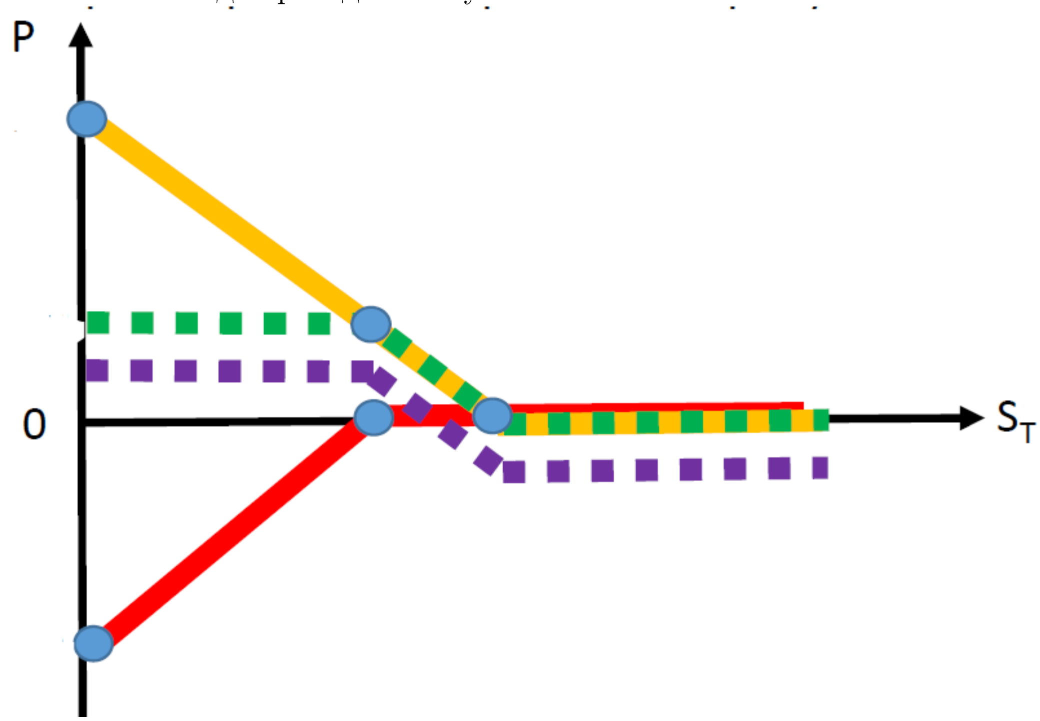
15.2 Задача 2

Рассмотрим следующий портфель. Мы выписали опцион «пут» с ценой исполнения 90 рублей и купили опцион «пут» на тот же базовый актив с такой же датой исполнения, но с ценой исполнения в 95 рублей.

Выписывать опцион – короткая позиция. А так длинная, если выкупить.

Важно: чем выше страйк, тем дороже пут и тем дешевле колл. Отсюда легко понять, что купленный нами пут на 95 рублей будет дороже, чем выписанный пут на 90, поэтому все съезжает вниз.

График стоимости портфеля получается вертикальным суммирование. Опцион со страйком выше 95 выходит дороже, поэтому затраты на формирования портфеля выше. Отсюда приходится спустить вниз.

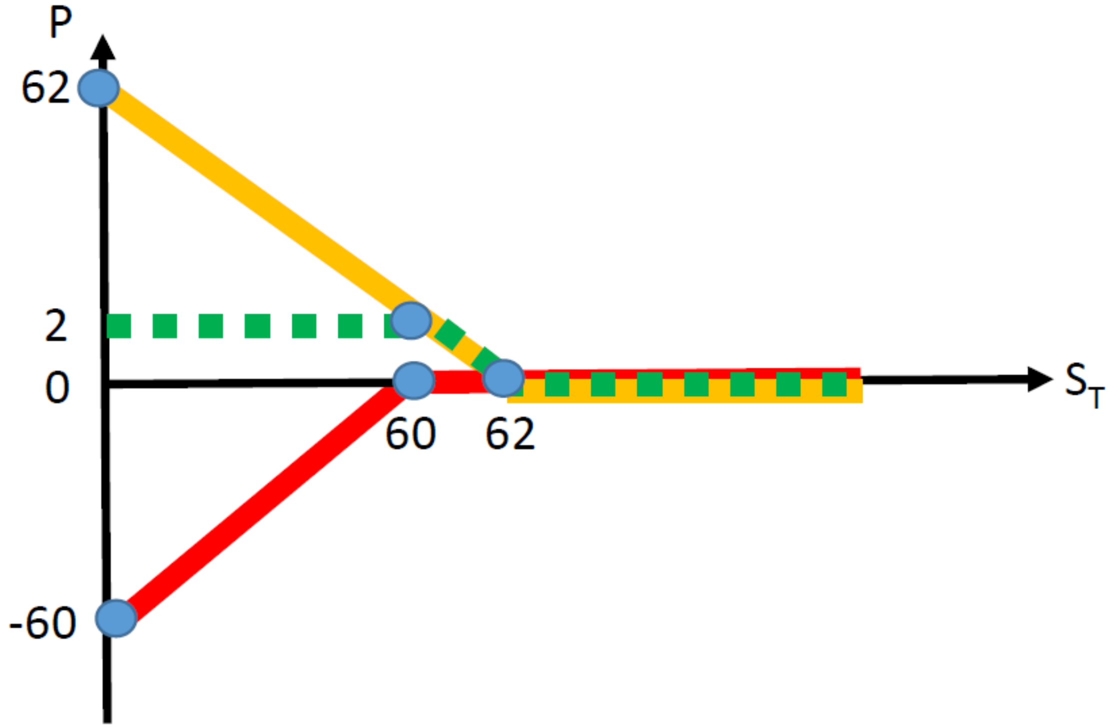


15.3 Задача 3

Европейский опцион «колл» на акции «ОКА-Авто!» с ценой исполнения 60 рублей торгуется на РТС по 2 рубля. К Вашему удивлению, точно такой же опцион, но с ценой исполнения 62 рубля, на ММВБ торгуется также по 2 рубля за опцион.

Ясно, что чем выше страйк, тем дешевле колл. Значит, шортим переоцененный колл по 62, покупаем колл по 60. Всегда не меньше нуля рублей получаем, а так часто и до двух рублей.

А как с путами решить? Ясно, что чем выше страйк, тем дороже пут. Тогда покупаем недооцененный по 62 и шортим по 60. Выходит наоборот к коллу.



15.4 Задача 4

Мы купили одну акцию по цене 5 рублей, по которой не выплачиваются дивиденды, выписали опцион «колл» на год с ценой исполнения 7 рублей и купили опцион «пут» на год с ценой исполнения 7 рублей. Суммарные затраты на составления такого портфеля составили 1.96 рублей.

Надо найти годовую безрисковую ставку. Ясно, что это из условия отсутствия арбитража должно быть.

Строим сначала портфель. Сначала рисуем акцию. Акция должна выходить из нуля, а не из -5, потому что она равна самой себе.($y = x$) – стоимость. Потом выписываем колл со страйком 7 на нее. Выходит прямая стомости портфеля на уровне 7.

Значит, мы в любом случае получаем 7 через год, а сейчас мы потратили 5 на акцию и 1.96 на опционы по ней.

Тогда:

$$5 + 1.96 = \frac{7}{1 + r_f} \tag{15.4.1}$$

$$r_f = 0.57\% \tag{15.4.2}$$

15.5 Задача 5

А вот пусть есть два опциона (пут и колл) с одинаковым страйком. Пусть страйк K. Мы знаем, что в момент исполнения:

$$S_T - C_T + P_T = K \tag{15.5.1}$$

А приводим к настоящему:

$$S_t - C_t + P_t = Ke^{-r(T-t)} \tag{15.5.2}$$

В итоге:

$$P_t + S_t = C_t + Ke^{-r(T-t)} \tag{15.5.3}$$

Это пут-колл паритет.

Запишем его в $t = 0$:

$$C_0 + Ke^{-rT} = P_0 + S_0 \tag{15.5.4}$$

Около денег – в страйке. Значит, $S_0 = K$.

В итоге:

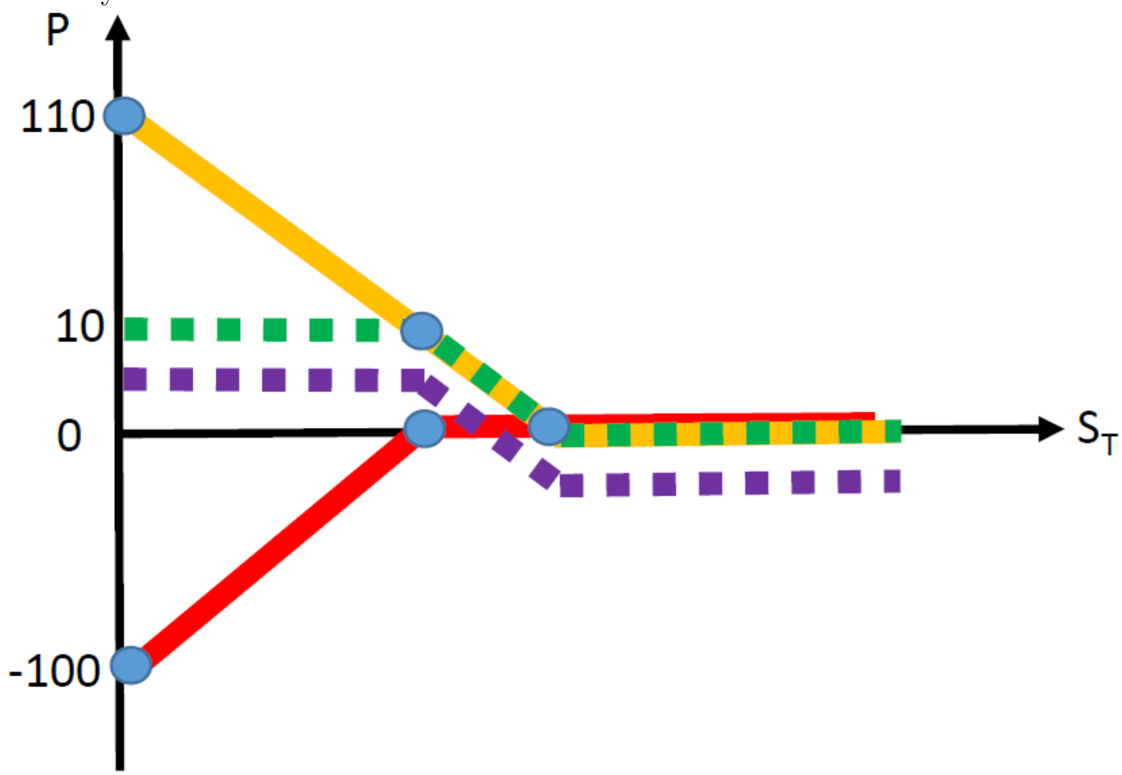
$$P_0 + K = C_0 + Ke^{-rT} \tag{15.5.5}$$

$$P_0 + K(1 - e^{-rT}) = {}_0 \tag{15.5.6}$$

Значит, к путу надо прибавить еще что-то положительное (правда, положительным оно будет, если ставка положительная).

15.6 Задача 6

Все скучно.



15.7 Задача 10

Есть возможность купить трехмесячные опционы «колл» и «пут» на акции Q. И у «коллов». и у «путов» цена исполнения составляет 60 дол., а сами они стоят по 10 дол.

Мыслим в терминах лет. Подставляем в паритет:

$$10 + S_0 = 10 + 60e^{-0.25r} \tag{15.7.1}$$

Это значит, что:

$$S_0 = 60e^{-0.25r} \tag{15.7.2}$$

Это было из первого. А вот что дальше? Подставим это для шести месяцев:

$$P_0 + 60e^{-0.25r} = C_0 + 60e^{-0.5r} \tag{15.7.3}$$

Видим, что колл дороже пута.

$$C_0 - P_0 = 60\left(e^{-0.25r} - e^{-0.5r}\right) \tag{15.7.4}$$

15.8 Задача C1

Неверно. Здесь опять акция должна быть равна самой себе.

Одна выходит из A вверх, другая где-то из $-B$ и приходит в ноль в B.

В общем, нисходящая кривая прибыли от A будет идти в два раза круче и переходить от A.

Вертикально складываем: из точки $2A$ идет под 45 градусов и приходит в точке в точку $-(B-A)$. Вертикальное расстояние будет A. Горизонтальный участок от A до B. Как его понять? Смотрим по краям. В A уже ясно. При этом базовый актив в точке B уже $-2(B-A)$. Сумма $-2(B-A)+(B-A) = -(B-A)$.

Дальше ясно: из-за крутизны двух базовых активов все идет вниз дальше под 45 градусов.

Наш график на $B-A$ ниже данного в картинке. Не очень верно, в общем.

15.9 Задача C2

Известно, что на срочном рынке сложилась такая ситуация, когда годовой опцион пут стоит дешевле на один рубль, чем должен согласно пут- колл паритету.

Выпишем паритет.

$$P_0 + 1 + S_0 = C_0 + Ke^{-rT} \tag{15.9.1}$$

Левая часть относительно недооцененная, справа относительно переоцененная. Берем длинную по $P_0 + S_0$, шортим $C_0 + Ke^{-rT}$.

Выписываем колл и берем в долег в Ke^{-rT}. Покупаем пут и базовый актив. Заработали рубль.

Чтобы доказать, что все так, надо просто нарисовать.

Если $S_T < K$, то предъявлять не придут. Должны отдать K. Портфель из опционов стоит K. Исполняем опцион пут, получаем K, отдаем долг. Остался рубль.

А если $S_T > K$? То должны отдавать k и вынуждены нести обязательства по опциону колл. Получаем K и отдаем акцию. Отдаем долг.

15.10 Задача П1

Как оценивать опцион методом дублирующего портфеля. Это обычно верно для биномиальных схем: акция с ценой P_0 может либо подняться до P_1^U или упать до P_1^L. При это вероятности нам здесь не важны. Пусть есть колл-опцион и безрисковая ставка r. Страйк между низкой и высокой ценой, поэтому в случае высокой цены выигрыш $P_1^U - K$. В противном случае ноль.

Пусть мы дублируем теперь базовым и безрисковым активами. Берем Δ акций и B безрискового. В хорошем состоянии они дают:

$$\Delta P_1^U + B(1+r) = P_1^U - K \tag{15.10.1}$$

На плохой случай тоже должно быть:

$$\Delta P_1^L + B(1+r) = 0 \tag{15.10.2}$$

Решаем систему:

$$\Delta = \frac{P_1^U - K}{P_1^U - P_1^L} \tag{15.10.3}$$

Это дает нам репликацию портфеля. Сделаем на примере: есть акция, которая может стоить либо 200, либо 50 при цене сейчас 100. $r = 10\%$. Посмотрим. В первом случае выигрыш с опционом со страйком 100 будет 100, а во втором случае 0.

Берем:

$$\Delta 200 + B(1+r) = 100 \tag{15.10.4}$$

$$\Delta 50 + B(1+r) = 0 \tag{15.10.5}$$

В штуках получаем состав портфеля:

$$\Delta = \frac{100}{200-50} = \frac{2}{3} \quad (15.10.6)$$

$$B = -\frac{\frac{2}{3}50}{1.1} = -30.3 \quad (15.10.7)$$

Покупаем 2/3 акции и занимаем 30.3 безрискового актива. Стром табличкку для состояний мира для проверить:

Исход	Акция	Безрисковый	$\sum$
U	$\frac{2}{3} \cdot 200$	$-30.3 \cdot 1.1$	100
L	$\frac{2}{3} \cdot 50$	$-30.3 \cdot 1.1$	0

Но суть в том, что опцион и портфель должны давать один выигрыш. Значит, они должны стоить одинаково. Считаем для портфеля:

$$C = \frac{2}{3} \cdot 100 - 30.3 = 36.37 \quad (15.10.8)$$

С американским опционом все плохо, там дробят на каждый день, пытаются считать.

$\boxed{\text{в}}$ А как ответить на вопрос с рисконейтральными миром? Проблема с опционами в том, что платежи нелинейные, а агенты не любят риск. В рискнейтральном мире все должно в ожидании приносить безрисковую доходность. В ожидании для акции доходности (поэтому делим на 100):

$$\alpha \cdot 2 + (1-\alpha)0.5 = 1.1 \quad (15.10.9)$$

$$\alpha = \frac{0.6}{1.5} = 0.4 \quad (15.10.10)$$

Значит, ждут, что с вероятностью 40% пойдет вверх. С этим тоже можно оценить матожидание:

$$C = \frac{0.4 \cdot 100 + 0.6 \cdot 0}{1.1} = \frac{40}{1.1} = 36.37 \quad (15.10.11)$$

Видим, что вышло то же самое в таком способе.

$\boxed{\text{г}}$ Для пут-опциона выйдет ровно обратная ситуация с портфелем. Пусть теперь в таких же условиях у нас пут-опцион.

Если цена вырастет до 200, то выигрыш ноль по опциону. Если цена падает, то выигрыш падает. Пишем систему:

$$\Delta \cdot 200 + 1.1B = 0 \tag{15.10.12}$$

$$50\Delta + 1.1B = 50 \tag{15.10.13}$$

Значит:

$$\Delta = -\frac{50}{150} = -\frac{1}{3} \tag{15.10.14}$$

$$B = \frac{200}{3.3} = 60.61 \tag{15.10.15}$$

Для дублирующего портфеля и опциона, значит:

$$P = -\frac{1}{3}100 + 60.61 = 27.28 \tag{15.10.16}$$

В риск-нейтральном мире быстро находим альфу и подставляем:

$$P = \frac{0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 50}{1.1} = 27.28 \tag{15.10.17}$$

$\boxed{\text{д}}$ Проверим пут-колл паритет.

$$P - C + S = K \tag{15.10.18}$$

Приводим в дискретном мире к настоящему:

$$P_0 + S_0 = C_0 + \frac{K}{1.1} \tag{15.10.19}$$

$$27.28 + 100 = 36.37 + \frac{100}{1.1} \tag{15.10.20}$$

$$127.78 = 127.78 \tag{15.10.21}$$

15.11 Задача EC1

Известно, что на срочном рынке сложилась такая ситуация, когда годовой опцион пут стоит дешевле на один рубль, чем должен согласно пут-колл паритету.

Выписываем паритет:

$$P_0 + S_0 = C_0 + Ke^{-rT} \tag{15.11.1}$$

В нашем мире для балансировки надо:

$$P_0 + S_0 + 1 = C_0 + Ke^{-rT} \tag{15.11.2}$$

Левая часть недооценена, а правая переоценена. По переоцененному активу мы занимаем короткую позицию. По недоцененному мы занимаем длинную позицию.

Значит, арбитражные портфель: покупка пута и покупка базового актива (акции), выписываем колл и берем в долг Ke^{-rT}.

16 Семинар 18. Опционы II

16.1 Задача 1

Цена акции компании «Рогатый скот» составляет 220 рублей и может вдвое снизиться или удвоиться в каждом шестимесячном периоде (что соответствует 98% годовому стандартному отклонению). Цена исполнения однолетнего опциона «колл» на акции «Рогатого скота» равна 165 рублей. Годовая безрисковая процентная ставка равна 21%

$\boxed{\text{а}}$ Оценим стоимость колла. Помним формулу Блэка-Шоулза для колла:

$$C = S_t N(d_1) + e^{-r(T-t)} K N(d_2) \tag{16.1.1}$$

При этом:

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\frac{S_t}{K} + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)\right] \tag{16.1.2}$$

Везде у нас стоит непрерывная r, надо всегда в нее переводить, если пользуемся этой формулой.

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{16.1.3}$$

Для пута:

$$P = Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) - S_t(1 - N(d_1)) \tag{16.1.4}$$

Интерпретация снова в репликации портфеля. Есть веса, вложения, все в нулевой момент.

Ставка дана какая-то эффективная. Переведем в непрерывную:

$$e^{\delta} = 1 + r \tag{16.1.5}$$

$$\delta = \ln(1 + r) \tag{16.1.6}$$

Теперь радуемся. У нас $t = 0$, $T = 1$. В d_1 ставим именно δ:

$$d_1 = \frac{1}{0.98}\left[\ln\frac{220}{165} + \ln(1.21) + 0.5 \cdot 0.98^2\right] = 0.9780 \tag{16.1.7}$$

$$d_2 = -0.00194 \tag{16.1.8}$$

Теперь нужны значения кумулятивной функции для этих чисел. $N(d_1) = 0.8336$, $N(d_2) = 0.499228$. Теперь надо все делать:

$$C = 220 \cdot 0.8336 - \frac{165}{1.21} \cdot 0.4992 \tag{16.1.9}$$

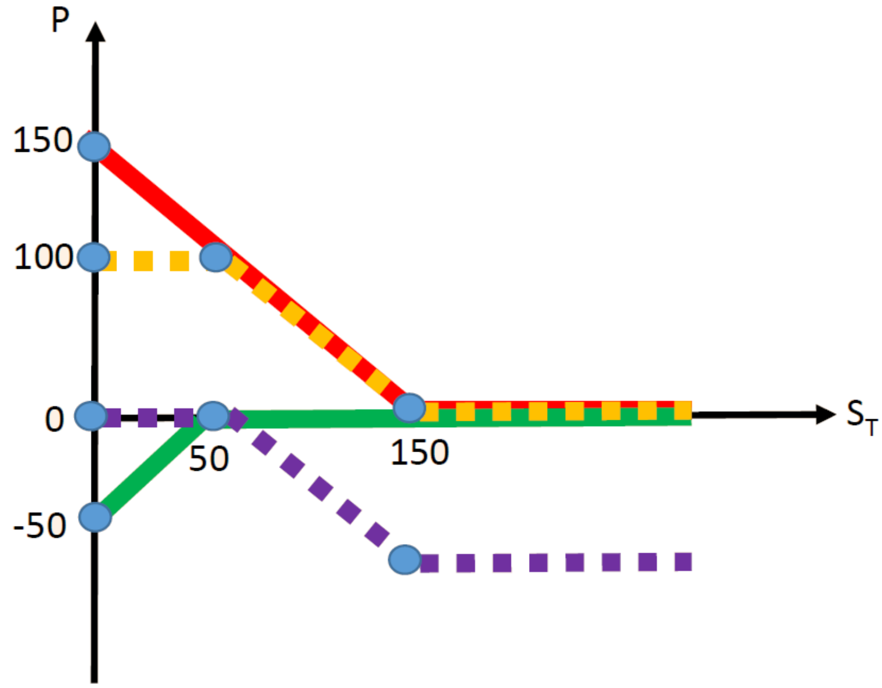
$\boxed{\text{б}}$ А теперь пут с другим страйком. Можно либо сразу в формулу, либо в паритет совать.

$$P = 57.73 \tag{16.1.10}$$

16.2 Задача 2

Предположим, г-н Коллеоне взял заем в размере приведенной стоимости 100 дол., купил шестимесячный опцион «пут» на акции Y с ценой исполнения 150 дол. и продал шестимесячный «пут» на акции Y с ценой исполнения 50 дол.

Чем больше страйк, тем дороже пут.



Другой вариант: выписать колл, купить колл.

16.3 Задача 3

В следующем году цена акций компании «Крестовник» может рухнуть до 50 дол. с нынешнего уровня 100 дол. или подняться до 200 дол. Годовая процентная ставка составляет 10%. Есть колл на 100 долларов.

$\boxed{\text{а}}$ Найдем дельту опциона. Если цена будет 50, то мы ничего не делаем, а если будет 200, то получим 100 по своему коллу.

Все просто здесь:

$$\Delta = \frac{100 - 0}{200 - 50} = \frac{2}{3} \tag{16.3.1}$$

Это та же дельта, что в дублирующем портфеле.

$\boxed{\text{б}}$ Теперь сделаем сам портфель. Δ акций и B безрискового актива. Делаем системку:

$$\begin{cases} 200\Delta + 1.1B = 100 \\ 50\Delta + 1.1B = 0 \end{cases} \tag{16.3.2}$$

Немедленно знаем, что $\Delta = 2/3$. Значит, остается найти B:

$$B = -\frac{100}{3.3} = -30.3 \tag{16.3.3}$$

Покупаем 2/3 акции и занимаем 30.3 денег. Легко проверить:

- Если цена становится 200, то мы продаем акцию за 400/3 и возвращаем 33.3 = 100/3, получая сотню прибыли;
- Если же цена будет только 50, то отдаем акцию за 100/3, что нам и нужно вернуть. Остаемся в нуле.

Значит, портфель оценен верно.

Тогда остается оценить стоимость опциона. Ну, он стоит столько же, сколько стоит портфель:

$$C = 100\frac{2}{3} - 30.3 = 36.37 \tag{16.3.4}$$

$\boxed{\text{в}}$ Оценим теперь для риск-нейтральнеого мира:

$$\alpha 200 + 50(1-\alpha) = 110 \tag{16.3.5}$$

$$\alpha = \frac{60}{150} = 0.4 \tag{16.3.6}$$

Значит:

$$C = \frac{0.4 \cdot 100 + 0}{1.1} = \frac{40}{1.1} = 36.37 \tag{16.3.7}$$

16.4 Задача 4

Цена акции компании «Typhoon» в настоящий момент времени составляет \$64 за акцию. В таблице приведены цены (премии) европейских опционов на эту акцию, их коэффициенты дельта, все опционы истекают через 90 дней.

	Опцион «колл»			Опцион «пут»		
	ITM	ATM	OTM	OTM	ATM	ITM
Цена исполнения	60	65	70	60	65	70
Премия	5,52	2,46	0,84	0,78	2,65	5,97
Дельта	0,79	0,51	0,24	-0,21	-0,49	-0,76

$\boxed{\text{a}}$ Есть некая стратегия: купить один опцион ITM «колл» и выписать (продать) один опцион OTM «пут».

Чтобы найти его цену, смотрим премию: $\Pi = -5.52 + 0.78 = -4.74$.

Дельта портфеля есть средневзвешенная дельт опционов:

$$\Delta = \frac{1}{2}(0.79 - 0.21) = \frac{0.58}{2} = 0.29 \tag{16.4.1}$$

16.5 Задача 5

Предположим, что существуют на рынке опционы «пут» и «колл» на один и тот же базовый актив, имеют одинаковый срок исполнения и одинаковую цену исполнения в 75 долларов. Текущая цена базового актива равна 80 долларов. Текущая стоимость опциона «пут» на 6.5 долларов ниже, чем текущая цена опциона «колл». Безрисковая инвестиция, которая заканчивается в момент исполнения опционов, проносит доход в размере 3%.

Как создать безрисковый портфель? Пут-колл паритет тут.

$$P_0 + S_0 = C_0 + Ke^{-r(T-t)} \tag{16.5.1}$$

Страйки у нас одинаковые, поэтому можем пользоваться. Но тогда надо подставить. У нас есть эффективная ставка 3%. Нам нужно понять, дерржится ли паритет и, если нет, то кого шортить.

$$P_0 + 80 \quad ? \quad P_0 + 6.5 + \frac{75}{1.03} \tag{16.5.2}$$

Все сокращается неизвестное:

$$80 > 79.32 \tag{16.5.3}$$

Значит, паритет не держится, составляем арбитражный портфель. Продаем переоцененную часть из пута и актива. По недооцененному коллу и деньгам занимаем длинную позицию.

Выписываем пут и коротко продаем акцию. Покупаем колл и деньги.

Если $S_T \leqslant K$, то будет исполнен пут. Тогда снимаем K со счета, покупаем за K и отдаем акцию.

Если $S_T \geqslant K$, то снимаем деньги K со счета, исполняем колл. Получаем акцию, отдаем акцию.

16.6 Задача М2

Управляющий зарубежным инвестиционным фондом «Emerging Kremlin» в соответствии с рекомендациями аналитиков собирается в ближайшее время предпринять действия по ограничению рисков, связанных с дальнейшим ослаблением российского фондового рынка. Портфель российских акций очень близок по структуре к индексу РТС, что позволяет в целях хеджирования применять опционы на этот индекс. Принимая решение о наилучшей стратегии хеджирования, управляющий фондом руководствуется существующ ей инвестиционной декларацией, которая вводит следующие ограничения на операции с производными инструментами:

1. Запрещено совершать сделки с опционами, имеющими ненулевую внутреннюю стоимость, так как в этом случае премия опциона содержит лишнюю стоимостную компоненту.

2. Для хеджирования доступны три стратегии:

   - Стратегия 1 – покупка опциона со страйком, ближайшим к текущей стоимости базового актива

- Стратегия 2 – покупка опциона со страйком, ближайшим к текущей стоимости базового актива, и одновременная продажа опциона со следующим доступным страйком
- Стратегия 3 – покупка опциона со следующим доступным страйком (относительно страйка опциона из Стратегии 1).

3. Если стоимость стратегии 1 не превосходит доход по соответствующему облигационному портфелю, то реализуется данная стратегия и другие стратегии не рассматриваются. В противном случае реализуется одна из двух оставшихся стратегий (Стратегия 2 или Стратегия 3), при этом выбирается та стратегия, которая дает максимальную отдачу (с учетом издержек) в случае реализации прогноза.

Есть такая информация:

Доходность портфеля российских облигаций, %	**22,50**	Текущая годовая волатильность индекса РТС, %	**54,38**
Доходность портфеля еврооблигаций, %	**5,70**	Значение индекса РТС на 22 декабря 2014 г., пункты	**797,63**
Безрисковая ставка (рубли), %	**17,00**	Срок действия опционов, дни	**91**
Безрисковая ставка (доллары), %	**0,2750**	Прогноз значения индекса РТС на март 2015 г.	**758,40**

Цена страйк, пункты РТС		**750**	**775**	**800**	**825**	**850**
Стоимость опциона CALL	*% от текущей стоимости актива*	13,76%	*	10,70%	*	8,20%
Стоимость опциона PUT		7,73%	*	10,93%	*	14,69%

Есть инвестор с портфелем акций, похожий на РТС, – типа похоже на рыночный портфель. Если он хочет захеджировать риск изменения риска, то надо понять, чего он ждет, а то надо ведь решить пут или колл. Поэтому смотрим на табличку.

Типа текущее значение около 797, а прогноз оло 758. Значит, он ждет падения стомости его портфеля. Хеджируем против падения – пут (колл – против роста).

Вспомним разложение стоимости опциона на внутренню и временную стоимость. Внутренняя – сколько бы опцион принес, если бы его сейчас можно было исполнить. Временная стоимость отражает вероятность, что опцион зайдет в деньги. Если текущая цена близка к нулю, то и все близко к нулю.

Когда у пута ненулевая стоимость? Когда страйк будет больше текущего значения базового актива (индекса, т.е.). Сейчас у нас значение 796. значит, смотрим только со страйками 750 и 775. Это сократило нам еще больше проблему.

Дальше надо знать, что РТС – долларовый индекс. Надо понять, сколько стоит пут-опцион по стратегии 1. По Блэку-Шоулзу, например ($T = 91/365$):

$$C_0 = N(d_1)S_0 - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{16.6.1}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S_0}{K} - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] \tag{16.6.2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{16.6.3}$$

$T = \frac{91}{365}$, $r = \ln(1 + 0.00275)$, $K = 775$, $S_0 = 797.63$, $\sigma = 0.5438$. Получаем $d_1 = -0.03229$, $d_2 = -0.30381$. Помним, что $N(\alpha) = 1 - N(-\alpha)$. Придетя по табличке:

$$N(d_1) = 0.5 + \frac{0.0323 - 0.00}{0.05 - 0.0}(0.519939 - 0.5) \tag{16.6.4}$$

А теперь нужно оценить наш пут по паритету:

$$P_0 + S_0 = C_0 + Ke^{-rT} \tag{16.6.5}$$

$C_0 = 93.3489$. $P_0 = 70.18845$. Это в единицах индекса. А надо теперь перевести в проценты. Тогда $C = 11.70\%$, $P = 8.80\%$.

Сравниваем с портфелем еврооблигаций. Видимо, что доходность больше, поэтому она не подходит.

Придется идти смотреть стратегии 2 и 3.

Стратегию 1 мы берем: а еще мы должны мерять стоимость

Стратегия 2: покупаем пут-775 (ему нашли 8.80%), продаем со страйком 750 (у него 7.73%). В итоге $8.80\% - 7.73\% = 1.07\%$. Если перевести в пункты индекса, то мы потратим 8.53. Значит, можем нарисовать график.

16.7 Задача УУУУ

Пусть есть цена, которая в первом периоде может уйти либо до 200, либо 50. Во втором периоде она может либо дожить до 100, либо уйти в 400 или в 25. Пусть есть колл с $K = 150$, а $r = 10\%$.

В чем отличие от случая с одним портфелем? А то, что теперь портфель фиг наподбираешь.

Пусть C_1^u отвечает выходу в 200, C_d^d. Решаем из первого периода.
Для C_1^u, то при 400 выигрыш будет 250, при 100 будет 0 – два опции хождения. Тогда:

$$400\Delta + 1.1B = 250 \tag{16.7.1}$$

$$100\Delta + 1.1B = 0 \tag{16.7.2}$$

$$\Delta = \frac{5}{6} \tag{16.7.3}$$

$$B = -75.76 \tag{16.7.4}$$

Значит, из точки с ценой 200 опцион стоит $C_1^u = 90.91$.

Аналогично смотрим в точке C_1^d. Там все по нулям (и 100, и 25). Стоимости опциона здесь ноль.

Переходим теперь в нулевой период. Здесь можно тоже тупо смотреть выигрыши:

$$\begin{cases} 200\Delta + 1.1B = 90.91 \\ 50\Delta + 1.1B = 0 \end{cases} \tag{16.7.5}$$

Значит, $C_0 = 61 - 27.55 = 33.06$.

Из риск-нейтрального:

$$4p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2 \cdot 0.25 = 1.1 \tag{16.7.6}$$

Здесь то же.

16.8 Задача Бета-Опциона

Давайте теперь про бету-опциона. Пусть пока посмотрим мир, где акция стоит 200, а может до 400 или 100. Портфель у нас там стоит 90.91. Пусть $\beta_s = 0.5$. Портфель:

$$C = \frac{5}{6}200 - 75.76 = 90.91 \tag{16.8.1}$$

Первая часть отвечает за рисковый актив, вторая часть безрисковая. Значит,

$$\beta_{coll} = \frac{\frac{5}{6}200}{90.91}\frac{1}{2} \tag{16.8.2}$$

Это все потому, что мы берем деньги в долг, финансовый рычаг появляется. С путом будет обратный знак с бетой актива.

Дельта на стоимость акцию делить на стоимость опциона.