Lista 3

Mikołaj Słupiński

9 kwietnia 2018

Zadanie 1

a)

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^\infty x(\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda})'dx = \lambda\left(\left[x\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right)$$
$$= \lambda(0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \left[-\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

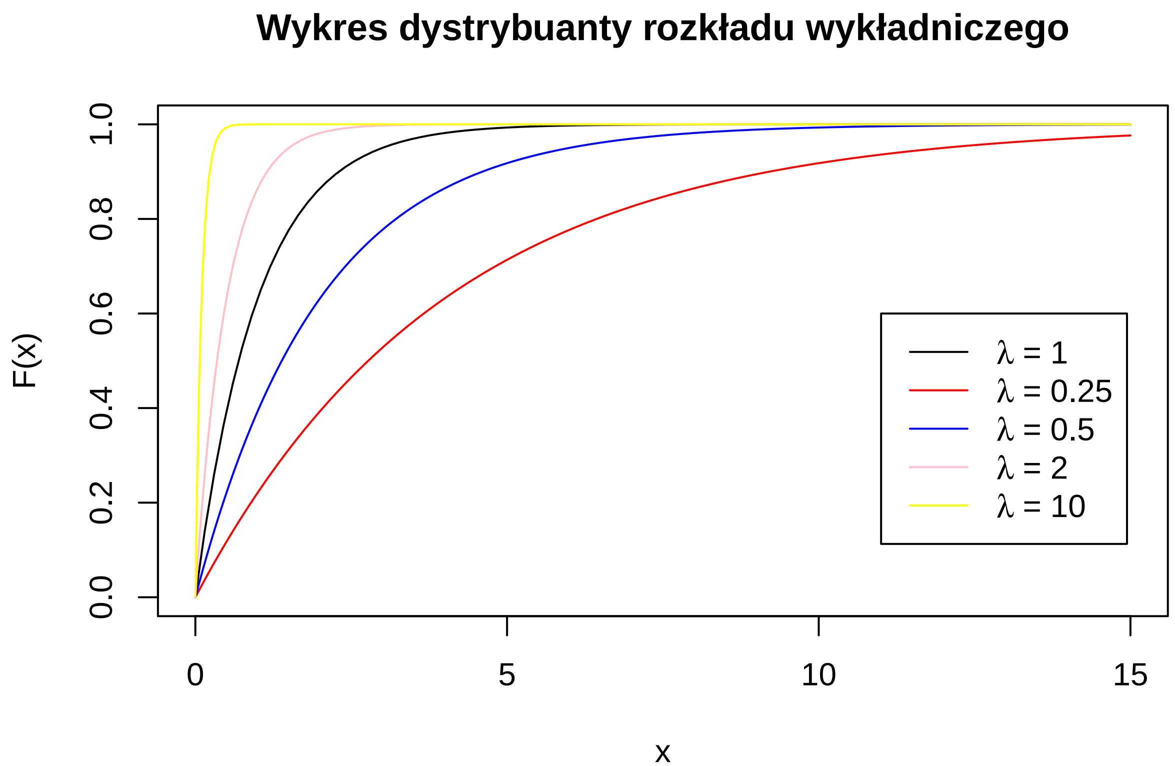
Przy liczeniu wariancji pominięto przejścia analogiczne do liczenia wartości oczekiwanej.

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx = \lambda\left(\left[x^2\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2x\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right) = 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

b)

```r
set.seed(457)
plot(function(x) pexp(x,1), 0, 15, ylab="F(x)",
     main = "Wykres dystrybuanty rozkładu wykładniczego")
x = seq(0, 15, 0.01)
lines(x, pexp(x, 0.25), col = "red")
lines(x, pexp(x, 0.5), col = "blue")
lines(x, pexp(x, 2), col = "pink")
lines(x, pexp(x, 10), col = "yellow")
legend(11,y=0.6, legend = c(expression(paste(lambda, " = 1")),
                            expression(paste(lambda, " = 0.25")),
                            expression(paste(lambda, " = 0.5")),
                            expression(paste(lambda, " = 2")),
                            expression(paste(lambda, " = 10"))),
       col = c("black","red", "blue", "pink", "yellow"), lty = 1)
```



c)

Chcemy policzyć prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X osiągnie wartość w przedziale $[E(X) - 2\sqrt{Var(X)}, E(X) + 2\sqrt{Var(X)}]$.

$$P(-0.5 \leq X \leq 1.5) = F(1.5) - F(-0.5) = 1 - e^{-2 \cdot 1.5} - 0 = 1 - e^{-3} \approx 0.95$$

d)

Policzymy procent próbek znajdujących się w przedziale $[E(X) - 2\sqrt{Var(X)}, E(X) + 2\sqrt{Var(X)}]$.

```r
v = rexp(1000, rate = 2)
m = 0.5
round(mean(v >= -m & v <= 3*m) * 100)
```

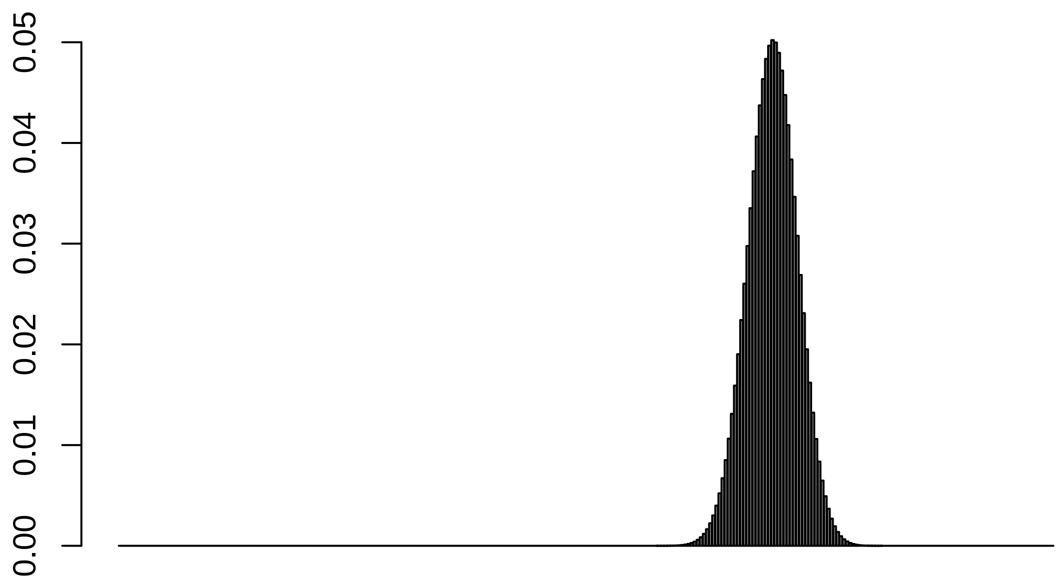
```
## [1] 95
```

Wartość eksperymentalna pokrywa się z wartością teoretyczną.

Zadanie 2

a)

```
k = 0:300
prob = dbinom(k, 300, 0.7)
barplot(prob,0.4)
```



$E(X) = n \cdot p = 210, Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 63$

b)

Ponownie porównamy procent próbek uzyskanych w przedziale $[E(X) - 2\sqrt{Var(X)}, E(X) + 2\sqrt{Var(X)}]$ z teoretycznym prawdopodobieństwem uzyskania takiej próbki

```
v = rbinom(1000, 300, 0.7)
m = 300 * 0.7
s2 = m * (1 - 0.7)
s = sqrt(s2)
left = ceiling(m - 2*s)
right = floor(m + 2*s)
print(paste("Procent próbek w zadanym przedziale: ", round(mean(v >= left & v <= right) * 100)))
print(paste("Prawdopodobieństwo uzyskania wartości X w zadanym przedziale: ",
              sum(dbinom(left:right, 300, 0.7))))
```

```
## [1] "Procent próbek w zadanym przedziale:  95"
```

```
## [1] "Prawdopodobieństwo uzyskania wartości X w zadanym przedziale:  0.949415280300448"
```

Ponownie uzyskujemy frakcję zbliżoną do teoretycznego prawdopodobieństwa oraz ponownie wynosi ono około 0.95.