

Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania P2.01

Mikołaj Ślupski

Wrocław, dnia 1 grudnia 2016 r.

1 Wstęp

Jedną z najpopularniejszych metod rozwiązywania równań jest metoda Newtona. Jest ona prosta w implementacji i stosunkowo efektywna. Co ciekawe na jej podstawie można budować wiele innych metod iteracyjnych. Dwie z nich, metoda Halleya oraz jej wariant - metoda quasi-Halleya są szczególnie ciekawe ze względu na wyższy od metody Newtona wskaźnik zbieżności. W kolejnych sekcjach postaram się dokładnie przeanalizować działanie obu metod.

2 Matematyczne podstawy metody Halleya

Aby zgłębić temat metody Halleya, która jest pewnym wariantem metody Newtona, przeanalizujemy najpierw zasadę działania jej pierwowzoru. Kolejne przybliżenia pierwiastka równania nieliniowego w metodzie Newtona otrzymujemy, posługując się wzorem:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (1)$$

Niech

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}}.$$

wtedy

$$g'(x) = \frac{2[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{2f'(x) \cdot \sqrt{|f'(x)|}},$$

$$\frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}} \cdot \frac{2f'(x) \cdot \sqrt{|f'(x)|}}{2(f'(x))^2 - f(x)f''(x)} = \frac{2f(x)f'(x)}{2(f'(x))^2 - f(x)f''(x)} = \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{f(x)f''(x)}{2f'(x)}}.$$

Korzystając ze wzoru (1), otrzymujemy:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2f'(x_k)}}. \quad (2)$$

Równanie (2) pokazuje nam jak znajdować kolejne przybliżenia rozwiązań równań nieliniowych za pomocą metody Halleya.

W metodzie siecznych przybliżamy korzystamy z faktu, że

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Zauważmy, że druga pochodna funkcji $f(x)$ jest tym samym, co pochodna funkcji $f'(x)$, zatem

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2f'(x_k)}} \approx \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{2(x_k - x_{k-1})} f(x_k)}. \quad (3)$$

Korzystając z wzorów (2) i (3) otrzymujemy metodę iteracyjną quasi-Halleya:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{2(x_k - x_{k-1})} f(x_k)}.$$

3 Przykłady obliczania pierwiastków równań metodami Halleya oraz quasi-Halleya

Spróbujmy teraz zastosować metody Halleya oraz quasi-Halleya do rozwiązania kilku równań nieliniowych. We wszystkich poniższych przykładach obliczenia wykonano programem `program.jl` z dokładnością $\varepsilon = 10^{-10}$.

Zacznijmy od prostego równania nieliniowego

$$e^x - 1 = 0.$$

Niech $f(x)$ będzie funkcją zadaną przez to równanie. Wtedy

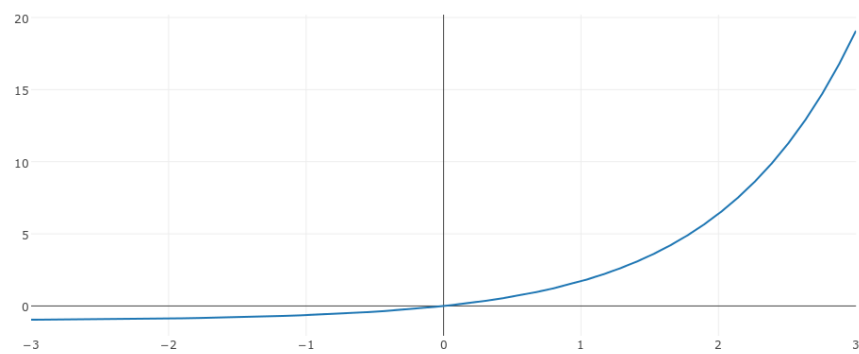
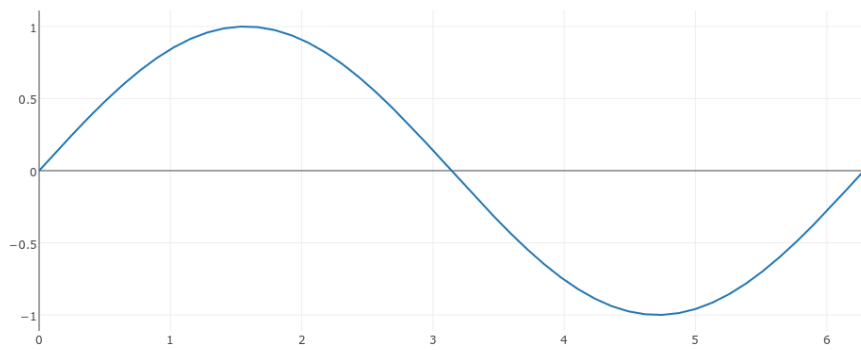
$$\begin{cases} f(x) &= e^x - 1 \\ f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \end{cases}.$$

Jak łatwo zauważyć, równanie ma tylko jedno rozwiązanie $x = 0$.

W tabeli nr 1 zestawiono kolejne przybliżenia miejsca zerowego funkcji $f(x)$, przedstawionej na wykresie nr 1.

Przyjrzyjmy się teraz mniej trywialnemu przypadkowi. Niech

$$\begin{cases} g(x) &= \sin x \\ g'(x) &= \cos x \\ g''(x) &= -\sin x \end{cases},$$

Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x)$ Rysunek 2: Wykres funkcji $g(x)$

Tablica 1: Wartości kolejnych przybliżeń funkcji $f(x)$

(a) Metoda Halleya

n	x_n	$f(x_n)$	e_n
0	6.0	402.4287934927	6.0
1	4.0098904926	54.1408319052	4.0098904926
2	2.0811398821	7.0135982677	2.0811398821
3	0.5249138203	0.6903131714	0.5249138203
4	0.0117295719	0.0117986331	0.0117295719
5	$1.3448048416 \cdot 10^{-7}$	$1.3448049319 \cdot 10^{-7}$	$1.3448048416 \cdot 10^{-7}$
6	$1.3265250638 \cdot 10^{-17}$	0.0	$1.3265250638 \cdot 10^{-17}$

(b) Metoda quasi-Halleya

n	x_n	$f(x_n)$	e_n
0	0.0	0.0	0.0
1	4.0	53.5981500331	4.0
2	2.8838623197	16.8832106418	2.8838623197
3	-4.2833993225	-0.9862043137	-4.2833993225
4	-4.2723343839	-0.9860508176	-4.2723343840
5	-2.3168813814	-0.9014194582	-2.3168813814
6	0.7237809719	1.0622156682	0.7237809719
7	0.1635101788	0.1776373421	0.1635101788
8	-0.0043002699	-0.0042910370	-0.0043002699
9	$-8.2754800592 \cdot 10^{-7}$	$-8.2754766350 \cdot 10^{-7}$	$-8.2754800593 \cdot 10^{-7}$
10	$7.3222207818 \cdot 10^{-16}$	$6.6613381478 \cdot 10^{-16}$	$7.3222207818 \cdot 10^{-16}$

wtedy funkcja $g(x) = 0$ dla $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. W tabeli nr 2 pokazano wyniki kolejnych przybliżeń argumentu funkcji. Jak widać, metoda Halleya z powodzeniem radzi sobie z wyznaczaniem pierwiastków równań o nieskończonej liczbie rozwiązań.

Sprawdźmy teraz jak metoda Halleya radzi sobie z podwójnym miejscem zerowym. Niech

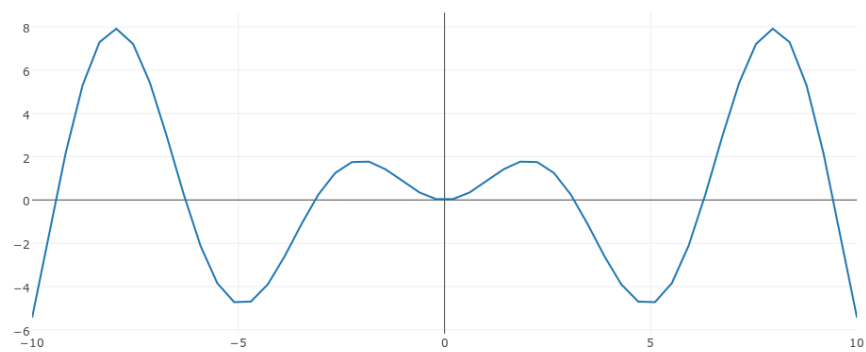
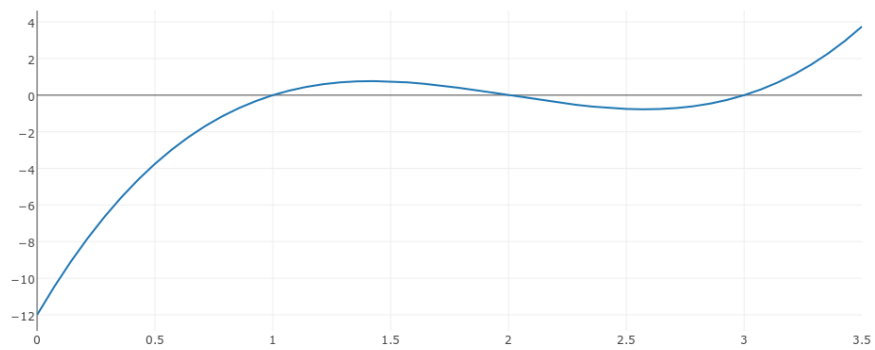
$$\begin{cases} h(x) &= x \sin x \\ h'(x) &= \sin x + x \cos x \\ h''(x) &= 2 \cos x - x \sin x \end{cases},$$

wtedy funkcja ma podwójne zero w punkcie $x = 0$.

Jak widać w tabeli nr 3a, metoda zbiega do pierwiastka zdecydowanie wolniej niż w przypadku poprzednich funkcji.

W tabeli nr 3b pokazano, że dla metody quasi-Halleya uzyskano zbieżność do innego pierwiastka, mianowicie $x = 3\pi$.

Za ostatni przykład posłużą nam wielomian zdefiniowany następująco:

Rysunek 3: Wykres funkcji $h(x)$ Rysunek 4: Wykres funkcji $w(x)$

Tablica 2: Wartości kolejnych przybliżeń funkcji $g(x)$

(a) Metoda Halleya

n	x_n	$g(x_n)$	e_n
0	5.0	-0.9589242747	-1.2831853072
1	5.5035068196	-0.7030508153	-0.7796784876
2	6.1675976661	-0.1153304281	-0.1155876410
3	6.2829255094	-0.0002597978	-0.0002597978
4	6.2831853072	-2.9223519302 $\cdot 10^{-12}$	-2.9221070008 $\cdot 10^{-12}$

(b) Metoda quasi-Halleya

n	x_n	$g(x_n)$	e_n
0	0.0	0.0	-9.4247779608
1	8.0	0.9893582466	-1.4247779608
2	9.5646557320	-0.1394220807	0.1398777712
3	9.4182387156	0.0065391986	-0.0065392452
4	9.4247794775	-1.5167109112 $\cdot 10^{-6}$	1.5167109115 $\cdot 10^{-6}$
5	9.4247779608	3.9201077185 $\cdot 10^{-15}$	-3.5527136788 $\cdot 10^{-15}$

$$\begin{cases} w(x) &= 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 \\ w'(x) &= 6x^2 - 24x + 22 \\ w''(x) &= 12x - 24 \end{cases}.$$

W tabeli nr 4 pokazano wyniki kolejnych przybliżeń.

4 Zbieżność metod Halleya oraz quasi-Halleya

Metoda Halleya jest zbieżna sześciennie, natomiast wykładnik metody quasi-Halleya jest ≥ 2.41 [3]. Możemy eksperymentalnie sprawdzić zbieżność powyższych metod.

Do obliczenia wartości wykładnika zbieżności posłużymy się wzorem

$$p \approx \frac{\log \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} \right|}{\log \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} \right|},$$

gdzie p jest wykładnikiem zbieżności naszego ciągu.

W tabeli nr 5 zamieszczono wartości kolejnych przybliżeń p_n kolejnych przybliżeń wartości funkcji omówionych w sekcji nr 3.

Jak można zaobserwować metoda Halleya w przypadku funkcji $f(x)$, $g(x)$ oraz $w(x)$ osiąga zbieżność sześcienną, jednakże w przypadku funkcji $h(x)$ zbiega liniowo. Jest to spowodowane podwójnym zerem funkcji $h(x)$. Pierwsza pochodna tej funkcji jest zbieżna do zera w okolicy $x = 0$.

Tablica 3: Wartości kolejnych przybliżeń funkcji $h(x)$

(a) Metoda Halleya

n	x_n	$h(x_n)$	e_n
0	1.77	1.7349973168	1.77
1	1.2832128215	1.2305139389	1.2832128215
2	0.5289255934	0.2668990513	0.5289255934
3	0.1770906973	0.0311974520	0.1770906973
4	0.0590332729	0.0034829035	0.0590332729
5	0.0196777700	0.0003871896	0.0196777700
6	0.0065592567	$4.3023540287 \cdot 10^{-5}$	0.0065592567
7	0.0021864189	$4.7804238361 \cdot 10^{-6}$	0.0021864189
8	0.0007288063	$5.3115858018 \cdot 10^{-7}$	0.0007288063
9	0.0002429354	$5.9017624664 \cdot 10^{-8}$	0.0002429354
10	$8.0978478104 \cdot 10^{-5}$	$6.5575139089 \cdot 10^{-9}$	$8.0978478104 \cdot 10^{-5}$
11	$2.6992826035 \cdot 10^{-5}$	$7.2861265726 \cdot 10^{-10}$	$2.6992826035 \cdot 10^{-5}$
12	$8.9976086783 \cdot 10^{-6}$	$8.0956961926 \cdot 10^{-11}$	$8.9976086783 \cdot 10^{-6}$

(b) Metoda quasi-Halleya

n	x_n	$h(x_n)$	e_n
0	-1.77	1.7349973168	-11.1947779608
1	1.77	1.7349973168	-7.6547779608
2	-10.6362159070	-9.9568026953	-20.0609938677
3	-8.3363896665	7.3850439865	-17.7611676273
4	-10.2327502307	-7.3971279446	-19.6575281915
5	-9.1101289928	2.8194272464	-18.5349069536
6	-9.4510842677	-0.2485944492	-18.8758622285
7	-9.4247249590	0.0004995271	-18.8495029198
8	-9.4247779608	$-1.7486431241 \cdot 10^{-10}$	-18.8495559216
9	-9.4247779608	$3.4626072487 \cdot 10^{-15}$	-18.8495559215

Można zaobserwować duże wahania wartości wykładnika zbieżności metody quasi-Halleya, jednakże jego końcowe wartości w przypadku funkcji $f(x)$, $g(x)$ oraz $h(x)$ znajdują się w okolicach 2.41, czyli są zgodne z oczekiwaniami.

5 Wnioski

Metoda Halleya charakteryzuje się sześcienną zbieżnością, co czyni ją niezwykle wydajną metodą iteracyjną rozwiązywania równań. Jednakże nie jest ona pozbawiona wad. Aby ją zastosować musimy znać pierwszą oraz drugą pochodną funkcji. Pomijając trudności z obliczeniem pochodnej, funkcja może nie posiadać drugiej pochodnej lub w ogóle nie być różniczkowalna. Nawet ciągłość funkcji może nie być warunkiem wystarczającym, do jej rozwiązalności, za przykład może nam posłużyć piła Weierstrassa, która jest ciągła, ale nie jest

Tablica 4: Wartości kolejnych przybliżeń funkcji $w(x)$

(a) Metoda Halleya

n	x_n	$w(x_n)$	e_n
0	-10.0	-3432.0	-11.0
1	-4.0347945316	-427.4896977498	-5.0347945316
2	-1.0870091171	-52.6620620671	-2.0870091171
3	0.3173064284	-6.1635640490	-0.6826935716
4	0.8860543540	-0.5366430974	-0.1139456460
5	0.9981690031	-0.0073441153	-0.0018309969
6	0.9999999893	$-4.2717621440 \cdot 10^{-8}$	$-1.0679405360 \cdot 10^{-8}$
7	0.9999999999	0.0	$-2.2204460493 \cdot 10^{-16}$

(b) Metoda quasi-Halleya

n	x_n	$w(x_n)$	e_n
0	-10.0	-3432.0	-11.0
1	-8.0	-1980.0	-9.0
2	-2.7822178350	-209.1704533163	-3.7822178350
3	0.3576754160	-5.5748052356	-0.6423245840
4	1.2013402584	0.5784574581	0.2013402584
5	1.0618024663	0.2247647107	0.0618024663
6	1.0000234762	$9.3901343634 \cdot 10^{-5}$	$2.3476162597 \cdot 10^{-5}$
7	0.9999999999	$-1.020623586 \cdot 10^{-10}$	$-2.5515700663 \cdot 10^{-11}$
8	0.9999999999	0.0	$-1.1102230246 \cdot 10^{-16}$

różniczkowalna w żadnym punkcie.

Natomiast metoda quasi-Halleya okazuje się sensowną alternatywą dla standardowej metody Newtona. Jej zbieżność jest znacząco lepsza od kwadratowej zbieżności metody Newtona i podobnie jak ona wymaga znania jedynie pierwszej pochodnej.

Literatura

- [1] David Kincaid, Ward Cheney, *Analiza Numeryczna*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2006.
- [2] Ake Bjorck, Germund Dahlquist, *Metody numeryczne*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1987.
- [3] A. Ben-Israel: LU factorization, *Newton's Method with Modified Functions*, Contemporary Mathematics 204 (1997), 39–50.

Tablica 5: Wartości wykładników zbieżności dla poszczególnych funkcji

Halley					quasi-Halley			
n	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$w(x)$	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$w(x)$
0	6.8527	-6.3241	-1.7413	1.0519	-1.4569	1.4518	-1.3439	-0.5296
1	5.1693	3.4819	1.4319	1.2190	-3.4810	1.3121	0.1145	2.5876
2	3.4060		1.0059	1.7966	-0.7994	2.6925	2.7179	1.3692
3	3.0107		1.0000	2.5338	0.0853		2.2730	0.4528
4			1.0000	2.9290	-3.8315		2.1482	9.6658
5			1.0000		0.7128		2.4256	1.7437
6			1.0000		3.0395		2.3940	
7			1.0000		2.3348			
8			1.0000					
9			1.0000					