线代基础

① 方阵与向量运算时，可以将

1> 马氏距离，设

$$\Delta^2 = (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)$$

2> 协方差矩阵的性质

设 $\Sigma u_i = \lambda_i u_i$ 设 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d)$

$u \in R^{d \times d}$

则 u 为正交矩阵，理由是

Σ 是实对称矩阵，其特征向量互相正交。

3> 将 Snm 转为矩阵乘积形式

Snm 是指：$\sum_i^d \Sigma u_i = \sum_i^d \lambda_i u_i$

$$\Downarrow$$

$$\Sigma u = \Lambda u$$

其中，$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix}$

4> 转换

$$\Sigma = \Lambda u u^T = \sum_i^d \lambda_i u_i u_i^T$$

$$\Sigma^{-1} = (\Lambda u u^T)^{-1} = (u^T)^{-1} u^{-1} \Lambda^{-1} = \underline{u u^T \Lambda^{-1} = u \Lambda^{-1} u^T}$$

因为 Λ 是对角矩阵

$$= \sum_i^d \frac{1}{\lambda_i} u_i u_i^T$$

5> 马氏距离转换

$$\Delta^2 = (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)$$

$$= \sum_i^d \frac{1}{\lambda_i} (x-\mu)^T u_i u_i^T (x-\mu)$$

$$= \sum_i^d \frac{1}{\lambda_i} [u_i^T (x-\mu)]^2$$

设 $y_i = u_i^T (x-\mu) \Rightarrow \Delta^2 = \sum_i^d \frac{y_i}{\lambda_i}$

当为2元时 $\Delta^2 = \frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} \Rightarrow$ 椭圆形式