Sheet

2. Задание 2:

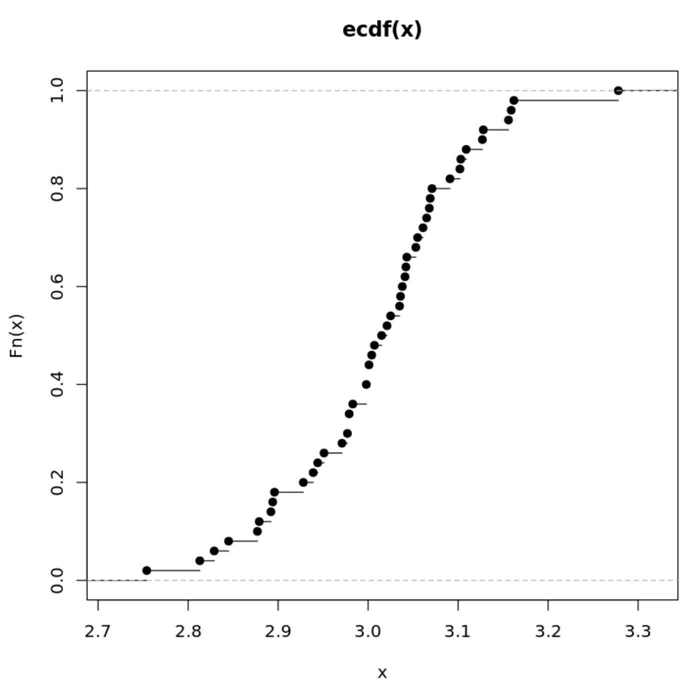
а) Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения, гистограмму и полигон частот с шагом h.

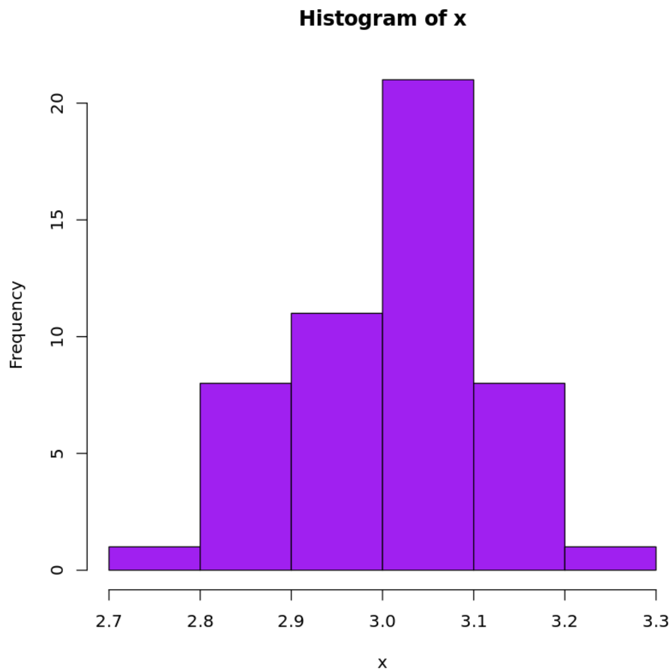
Построение вариационного ряд:

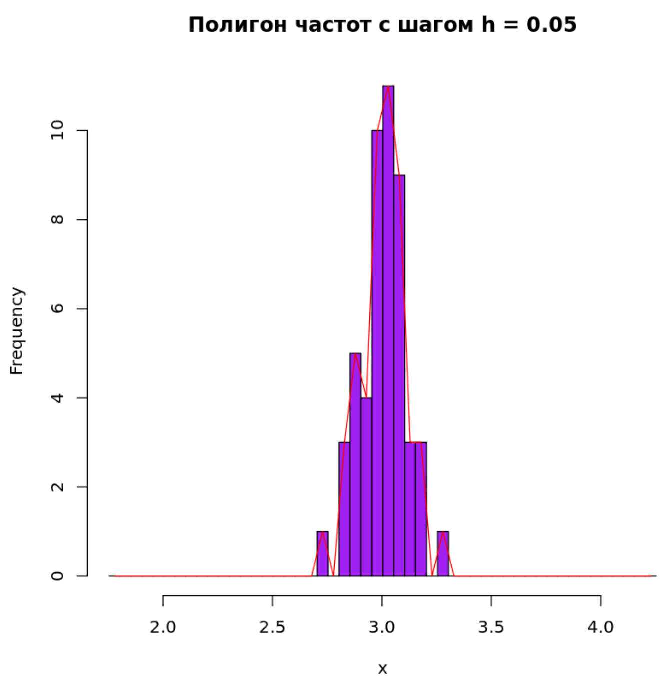
```
x<-c(2.877,3.162,3.071,2.939,3.055,2.928,3.053,2.979,2.845,3.042,3.043,3.109,3.102,3.001,3.021,2.894,
2.998,2.896,3.065,2.829,3.025,2.879,3.036,3.001,2.979,3.007,2.754,3.061,3.015,2.892,3.068,2.998,3.128
3.004,2.813,2.983,2.951,2.944,3.127,3.041,3.278)

VariationalSeries<-sort(x)
cat("Вариационный ряд: ",VariationalSeries)
```

```
Вариационный ряд:  2.754 2.813 2.829 2.845 2.877 2.879 2.892 2.894 2.896 2.928 2.939 2.944 2.951 2.97
```

```
F<- function(x,t){z<-x[x<t]; length(z)/length(x)}
plot(ecdf(x))
h <- hist(x, col="purple")
h2 <- hist(x,breaks=seq(min(x)-1, max(x)+1, by=0.05) ,col="purple", main = "Полигон частот с шагом h
lines(h2$counts~h2$mids, col="red")
```







b) Вычислить выборочные аналоги следующих числовых характеристик:(i) математического ожидания, (ii) дисперсии, (iii) медианы, (iv) асимметрии, (v) эксцесса, (vi) вероятности P(X ∈ [a, b]).

(i) Нахождение математического ожидания:

```
E<-sum(x)/length(x)
cat("E(x) = ",E)
```

```
E(x) =  3.00984
```

(ii) Нахождение дисперсии

```
D<-sum(x^2)/length(x)-E^2
cat("D(x) = ",D)
```

```
D(x) =  0.009800854
```

(iii) Нахождение медианы:

```
cat("M_e = ", median(x))
```

```
M_e =  3.018
```

(iv) Нахождение асимметрии:

```
A_s<-sum((x-E)^3)/(length(x)*D^(3/2));
cat("A_s = ", A_s,"\n")
```

```
A_s =  -0.1795672
```

(v) Нахождение эксцесса:

```
E_k<-(sum((x-E)^4)/(length(x)*D^2))-3;
cat("E_k = ", E_k)
```

```
E_k =  0.3814977
```

(vi) Нахождение вероятности $P(X \in [c,d])$:

```
c <- 2.29
d <- 3.06
p <- F(x,d) - F(x,c)
cat("P(X∈[c,d]) = ", p)
```

```
P(X∈[c,d]) =  0.7
```

d) Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α2 для параметра λ на базе оценки максимального правдоподобия.

Так как x_i имеет распределение Пуассона, то $I_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$. Из этого следует, что $I(\lambda) = n * I_1(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$.

По методу максимального правдоподобия:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\bar{\bar{x}}}$$

$$\sqrt{I(\lambda)}(\bar{\lambda} - \lambda) => N(0,1)$$

Эксперимент регулярен, значит, подстановка ОМП вместо параметра в информацию Фишера не нарушает асимптотической нормальности.

$$\sqrt{n * I_1(\lambda)}(\bar{\lambda} - \lambda) => N(0,1)$$

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}(\frac{1}{\bar{x}} - \lambda) => N(0,1), \alpha_2 = 0.1$$

$$p(T_1(\bar{x}) \leqslant \lambda \leqslant T_2(\bar{x})) = 1 - \alpha_2$$

$$p(-x_\alpha \leq \sqrt{n\bar{x}^2}(\frac{1}{\bar{x}} - \lambda) \leq x_\alpha) = \Phi(x_\alpha) - \Phi(-x_\alpha) = 2 * \Phi(x_\alpha) - 1 = 1 - \alpha_2$$

где $\Phi(x_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - квантиль порядка x_α стандартного нормального закона распределения.

$$x_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha_1}{2})$$

$$p(\frac{1}{\bar{x}} - x_\alpha\sqrt{\frac{1}{n\bar{x}^2}} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{\bar{x}} + x_\alpha\sqrt{\frac{1}{n\bar{x}^2}}) = 1 - \alpha_2$$

```
a_2 <- 0.1 #вероятность того что не попадет в интервал
x_a <- qnorm(1-a_2/2)

T[1]<-1/E-x_a/sqrt(E*E*length(x))

T[2]<-1/E+x_a/sqrt(E*E*length(x))
cat("Левая граница = ", T[1],"\n")
cat("Правая граница = ", T[2])
```

```
Левая граница =  0.2549579
Правая граница =  0.4095292
```

f) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ2 проверки простой гипотезы согласия с показательным распределением с параметром λ0. Проверить гипотезу на уровне α2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

```
table(x)
```

```
x
2.754 2.813 2.829 2.845 2.877 2.879 2.892 2.894 2.896 2.928 2.939 2.944 2.951 
    1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1 
```

```
2.971 2.977 2.979 2.983 2.998 3.001 3.004 3.007 3.015 3.021 3.025 3.035 3.036
    1     1     2     1     2     2     1     1     1     1     1     1     1
3.038 3.041 3.042 3.043 3.053 3.055 3.061 3.065 3.068 3.069 3.071 3.091 3.102
    1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1
3.103 3.109 3.127 3.128 3.156 3.159 3.162 3.278
    1     1     1     1     1     1     1     1
```

```
alpha.0 <- 3.00
sigma.0 <- 0.1
nu <- h$counts
brk <- 1:length(h$breaks)-1

lw <- c(-Inf, brk)
up <- c(brk, Inf)
p.0 <-pnorm(up, alpha.0, sigma.0) - pnorm(lw, alpha.0, sigma.0)


X <- sum((nu - length(x)*p.0)^2/(length(x)*p.0))

x.alpha <- qchisq(0.98, length(h$breaks)-1)

cat("\nВыборка  = ",X)
cat("\nнаибольшмй уровень значимости = ",1 - pchisq(X, length(h$breaks)-1))
```

```
Выборка  =  Inf
наибольшмй уровень значимости =  0

Warning message in nu - length(x) * p.0:
“longer object length is not a multiple of shorter object length”
```

g) Построить критерий проверки значимости χ2 сложной гипотезы согласия с показательным распределением. Проверить гипотезу на уровне α2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

```
f <-  function(alpha, sigma){
  p.0 <-pnorm(up, alpha, sigma) - pnorm(lw, alpha, sigma)
  X <- sum((nu - length(x)*p.0)^2/(length(x)*p.0))
  return(X)
}
nlm.res <- nlm(f, mean(x), var(x))
x.alpha <- qchisq(0.98, length(h$breaks)-2)

cat("x.alpha - ", x.alpha)
X.bar <- nlm.res$minimum
cat("\nX.bar - ", X.bar)
```

```
x.alpha -  13.38822
X.bar -  1.797693e+308

Warning message in nu - length(x) * p.0:
“longer object length is not a multiple of shorter object length”
Warning message in nu - length(x) * p.0:
“longer object length is not a multiple of shorter object length”
Warning message in nlm(f, mean(x), var(x)):
“NA/Inf replaced by maximum positive value”
```

```
Warning message in nu - length(x) * p.0:
“longer object length is not a multiple of shorter object length”
Warning message in nlm(f, mean(x), var(x)):
“NA/Inf replaced by maximum positive value”
```

i) В пунктах (c)-(h) заменить семейство показательных распределений на семейство гамма-распределений.

```
nu <- h$counts
brk <- 1:length(h$breaks)
lw <- c(-Inf, brk)
up <- c(brk, Inf)
p.0 <-pnorm(up, alpha.0, sigma.0) - pnorm(lw, alpha.0, sigma.0)
X <- sum((nu - length(x)*p.0)^2/(length(x)*p.0))

x.alpha <- qchisq(0.98, length(h$breaks)-1)
cat("\nВыборка  = ",X)
cat("\nнаибольшмй уровень значимости = ",1 - pchisq(X, length(h$breaks)-1))
```

```
Выборка  =  Inf
наибольшмй уровень значимости =  0

Warning message in nu - length(x) * p.0:
“longer object length is not a multiple of shorter object length”
```

```
f <-  function(alpha, sigma){
  p.0 <-pnorm(up, alpha, sigma) - pnorm(lw, alpha, sigma)
  X <- sum((nu - length(x)*p.0)^2/(length(x)*p.0))
  return(X)
}
nlm.res <- nlm(f, mean(x), sd(x))
x.alpha <- qchisq(0.98, 7)

cat("x.alpha - ", x.alpha)
X.bar <- nlm.res$minimum
cat("\nX.bar - ", X.bar)
```

```
x.alpha -  16.62242
X.bar -  1.797693e+308

Warning message in nu - length(x) * p.0:
“longer object length is not a multiple of shorter object length”
Warning message in nu - length(x) * p.0:
“longer object length is not a multiple of shorter object length”
Warning message in nlm(f, mean(x), sd(x)):
“NA/Inf replaced by maximum positive value”
Warning message in nu - length(x) * p.0:
“longer object length is not a multiple of shorter object length”
Warning message in nlm(f, mean(x), sd(x)):
“NA/Inf replaced by maximum positive value”
```