FernUniversität in Hagen

Fakultät für Mathematik und Informatik
Bachelor of Science Informatik

Bachelorarbeit

# Ein Computeralgebrasystem in Rust


| | |
|---|---|
| Verfasser | Bernd Haßfurther <nerglom@posteo.de> |
| Matrikel-Nr. | 4372280 |
| Betreuerin | Prof. Dr. Lena Oden |
| Datum | 24. April 2022 |

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Computeralgebrasysteme - im folgender Arbeit abgekürzt CAS - nehmen in verschiedenen Bereichen der Wissenschaft eine wichtige Rolle ein. Sie ermöglichen es einerseits mathematische Ausdrücke mit Variablen darzustellen, diese Terme zu verändern und mit diesen zu arbeiten. Andererseits lassen sich wesentlich genauere Berechnung durchführen, indem z.B. nicht alle Ausdrücke in einem Term ausgewertet werden, wenn es hierdurch zu Ungenauigkeiten kommen kann. Diese Ungenauigkeiten kommen durch die begrenzte Kapazität im Speicher zustande, Stichwort IEEE float.

In der vorliegenden Arbeit soll ein solches CAS in Ansätzen mit der Programmiersprache Rust entwickelt werden. Es soll untersucht werden, inwieweit das Ownership- und Borrowing-System von Rust bei einem solchen komplexen System bei der Entwicklung unterstützt und wie die Performance zur Laufzeit ausfällt. Das Projekt wird als Library erstellt, welche einfach durch dritte Erweiterbar sein soll umd weitere Funktionen zu implementieren oder gar auszutauschen.

Es gibt bereits eine Vielzahl an Software, die diese Art der Berechnung ermöglicht. Hierbei existieren sowohl Lösungen für Taschenrechner wie Giac, Programmbibliotheken wie SymPy oder auch eigenständige Programme wie Maple. In dieser Arbeit werden wir einen besonderen Blick auf SymPy werfen, da dieses System einerseits als Open-Source-Projekt verfügbar ist, als auch der Code in Python geschrieben ist und leicht verständlich ist. Der Code soll dabei natürlich nicht 1-zu-1 in Rust neu geschrieben werden, sondern mit den Möglichkeiten von Rust erweitert werden, auch wenn natürlich nur ein Teil des Umfangs von SymPy in dieser Arbeit möglich sein wird.

# 2 Vorstellung der Programmiersprache Rust

## 2.1 Was ist Rust und warum verwenden?

Rust ist eine statisch typisierte Programmiersprache, welche vor allem mit den Eigenschaften Performance, Verlässlichkeit und Produktivität eine Alternative zu anderen Sprachen anbieten kann. Version 1.0 wurde 2015 veröffentlich, seitdem gibt es mit der "Rust 2018 Edition" und "Rust 2021 Edition" eine stetige Weiterentwicklung.

Die Performance begründet sich durch zwei wesentliche Aspekte. So werden alle Regeln die das Ownership und das Borrowing betreffen bereits zur Compilezeit durchgeführt. Ein zusätlicher Overhead zur Laufzeit des Programms wird so vermieden. Der andere Aspkekt ist die Implementierung von Featurs in Rust. So wird beispielsweise Monomorphisierung zur Compilezeit von Generics eingesetzt. Für jeden implementierten Typen des Generics gibt es somit eine eigene Implementierung im Compilat. Hierdurch entfallen Typechecks wie sie z.B. in Java möglich sein können.

Die Verlässlichkeit beruht ebenfalls auf dem Ownership- und Borrowing-System. Hierdurch ist zu jeder Zeit klar, welche Variablen welche Daten enthalten. Ein unbeabsichtigtes Verändern der Daten oder Dangling References werden ebenfalls bereits zur Compilezeit ausgeschlossen, dieses Prinzip funktioniert ebenfalls in Multithreading-Anwendungen. Zudem stellt Rust sicher, dass man nicht außerhalb eines Buffers lesen oder schreiben kann, dies kann aber zu Umständen zu einem Programmabbruch führen. Das spezielle `Option enum` bietet eine fehlerunanfällige Variante des `NULL`-Werts, das in Rust nicht existiert.

Um die Produktivität zu unterstützen bieten die beiden Tools `rustup` und `cargo` alles notwendige um den kompletten Entwicklungsprozess eines Rust-Programms zu erfüllen. Dies betrifft z.B. konkret eine Abhängigkeitsverwaltung, die Erstellung von Dokumentation und das ausführen von Tests und Benchmarks.

Wo nötig setzt Rust auf etablierte Lösungen, so wird LLVM genutzt um ausführbare Programme zu erzeugen. Rust wird mittlerweile in Verschiedenen Projekten genutzt (z.B. Android OS, Linux Kernel, Windows-API). Alles zusammen rechtfertigt zumindest die Überlegung ein komplexes System - wie eben ein CAS - in Rust zu implementieren.

## 2.2 Grundlegendes

**Expression und Statements** Rust unterscheided bei Code-Anweisungen zwischen Statements und Expressions. Statements führen lediglich einen Codeblock aus, während Expressions stets einen Rückgabewert besitzen. Nahezu alle Sprachelemente in Rust sind als Expression implementiert.

Codebeispiel 1: Expression Einführendes Beispiel

```
let test_var = if bedingung_1 { false } else { true };
```

**struct** Um eigene Datentypen zu definieren, werden `structs` verwendet. Die Deklaration eines `struct` gibt nur Felder und Feldtypen an. Methoden und Funktionen werden erst nach der Deklaration hinzugefügt, dabei sind mehrere Implementierungsblöcke möglich. Die Implementierungen können Methoden inkl. einer Referenz auf die aktuelle Instanz oder Funktionen ohne entsprechende Referenz enthalten.

Dabei sollen `structs` den Vorteil der Übersichtlichkeit und dieselbe Syntax wie `enums` bieten (vgl. [1, S. 91]). Klassen gibt es in Rust nicht.

Codebeispiel 2: struct

```
struct MyStruct {
    myField: i32,
}

impl MyStruct {
    fn new() -> MyStruct {
        MyStruct {
            myField: 5,
        }
    }

    fn doSmth(&self) {}
}
```

**trait** In Rust gibt es weder Vererbung durch `struct`s, noch klassiche Interfaces. Mit `trait`s kann aber ein ähnliches Verhalten nachgebildet werden. Dabei findet bei der Definition des `trait` die Deklarierung von Methoden und Funktionen statt. Anschließend können `struct`s und `enum`s ein oder mehrere `trait`s implementieren. Der Traitname wird schlussendlich z.B. in der Parameterdeklaration von Funktionen verwendet.

Codebeispiel 3: trait

```
trait MyTrait {
    fn traitMethod(&mut self) -> bool;
}

impl MyTrait for MyStruct {
    fn traitMethod(&mut self) -> bool {
        true
    }
}
```

**match** Als Alternative zur `switch`-Anweisung bietet Rust `match`. Im Gegensatz zu anderen Sprachen muss bei `match` jeder mögliche Wert einer Variablen geprüft werden. Durch einen Variablennamen als letzter zu prüfender Wert wird dieser verallgemeinert. Alternativ kann der Wert unberücksichtigt gelassen werden.

Bei der Auswertung der Variablen ist es zudem erlaubt mehrere Werte gleichzeitig anzugeben.

Da `match` ebenfalls als Expression umgesetzt ist, kann ein Rückgabewert wieder einer Variablen zugeordnet werden.

Codebeispiel 4: match

```
let mut var_1 = 19;

let match_1 = match var_1 {
    1 => {
        var_1 = 5;
        String::from("klein")
    }
```

```
        2..=10 => String::from("bis 10"),
        11 | 13 | 17 => String::from("Primzahl"),
        i => i.to_string(),
        // _ => String::from("Nichts"),
    };
```

## 2.3 Enums

Der Aufzählungstyp `enum` spielt in Rust eine wichtige Rolle. So wird z.B. mit dem `enum` `Result` das Error-Handling in Rust ermöglicht. Weiterhin gibt es mit dem `Option` `enum` wie bereits erwähnt eine Alternative um fehlende `NULL`-Werte in Rust zu darzustellen.

Jede Ausprägung eines `enum` kann verschiedene Werte enthalten. Wie bereits `structs` können Implementierungsblöcke definiert und Traits implementiert werden. Mit dem bereits vorgestellten `match` kann geprüft werden, welche Ausprägung das `enum` hat. Alternativ geht dies auch mit der `if let`-Anweisung, die es erlaubt nur auf eine Ausprägung zu überprüfen.

Codebeispiel 5: enum

```
enum MyEnum {
    Entry1 { c: i32, m: i32, y: i32, k: i32 }, // Anonymes struct
    Entry2(i32, i32, i32), // 3 unbenannte Werte
    Entry3, // ohne Daten
}

impl MyEnum { ... }
impl TraitName for MyEnum { ... }

let x = MyEnum::Entry2(42, 42, 42);
match x {
    MyEnum::Entry2(v1, v2, v3) => { ... },
    _ => { ... }
};
```

## 2.4 Generics

Rust bietet ebenfalls generische Typparameter an. Diese können bei `struct`, `enum`, `trait` und Funktionen verwendet werden. Um eine hohe Performance zu gewährleisten, wird Monomorphisierung zur Compilezeit eingesetzt (vgl. [7, S. 196 ff.]). Dies bedeutet, dass z.B. eine entsprechende Funktion speziell für die verwendeten Typen implementiert wird.

Codebeispiel 6: Monomorphisierung Veranschaulichung [2]

```
// enum im Quellcode
enum Option<T> {
    Some(T),
    None,
}

let integer = Some(5);
let float = Some(5.0);
```

```rust
// enum nach Monomorphisierung
enum Option_i32 {
    Some(i32), None,
}
enum Option_f64 {
    Some(f64), None,
}
fn main() {
    let integer = Option_i32::Some(5);
    let float = Option_f64::Some(5.0);
}
```

Im Zusammenspiel mit Traits kann ein entsprechender Typparameter begrenzt werden. Ein Nachteil der Monomorphie ist, dass ein Typparameter immer nur von einem konkreten Typ ersetzt werden kann. Eine Lösung hierfür bieten `trait objects`.

Codebeispiel 7: Trait Boundaries [4]

```rust
trait Draw {}

struct ScreenTraitObject {
    components: Vec<Box<dyn Draw>>,
}
// Bevorzugt, wenn nur wenige Typparemeter und/oder Einschränkungen
struct ScreenGeneric<T: Draw> {
    components: Vec<T>,
}
// Oder falls mehrere Typparemeter und/oder Einschränkungen
struct ScreenGeneric2<T, U>
where
    T: Draw + Trait2 + Trait3,
    U: Trait4
{}

struct Button {}
struct SelectBox {}

impl Draw for Button {}
impl Draw for SelectBox {}

ScreenTraitObject {
    components: vec![
        Box::new(Button {}),
        Box::new(SelectBox {}),
    ],
};

ScreenGeneric {
    components: vec![
        Button {},
        SelectBox {}, // Fehler, da SelectBox != Button
    ],
```

```
};
```

## 2.5 Operatorenüberladung

In Rust können Operatoren überladen werden und somit für eigene als auch bestehende Typen implementiert und erweitert werden. Diese Funktionlität kann in unserem System dazu genutzt werden, um z.B. einen bestehenden Term ohne Funktionsaufruf zu verändern. Stattdessen können gewohnte Sprachmittel verwendet werden. Auch ist es möglich die Prüfung auf Gleichheit mit einem anderen Datentyp zu implementieren.

Codebeispiel 8: Operatorenüberladung

```
enum Number {
    Int(i32),
    Float(f64),
}

impl std::ops::Add<Number> for Number {
    type Output = Number;

    fn add(self, rhs: Number) -> Number {
        match (self, rhs) {
            (Number::Int(v1), Number::Int(v2)) => Number::Int(v1 + v2),
            // Weitere Implementierung
        }
    }
}

let n1 = Number::Int(1);
let n2 = Number::Int(2);
let n3 = n1 + n2;

impl PartialEq<i32> for Number {
    fn eq(&self, other: &i32) -> bool {
        match self {
            Number::Int(v) => v == other,
            _ => false,
        }
    }
}

if n3 == 3 { ... }
```

## 2.6 Ownership, Borrowing und Lifetimes

Im folgenden sollen die Konzepte Ownership, Borrowing und Lifetimes kurz vorgestellt werden, diese tragen wesentlich zur erwähnten Speichersicherheit bei. Der Compiler beachtet dabei die folgenden Regeln.

- Jeder Wert ist einer Variablen zugewiesen, dem `Owner`

- Jeder Wert kann nur einen `Owner` besitzen
- Verlässt der `Owner` den Gültigkeitsbereich, wird die Variable ungültig und im Normalfall der Speicherplatz freigegeben
- Zu jeder Zeit kann es eine beliebige Anzahl an nicht veränderbaren Referenzen geben oder exakt eine veränderbare Referenz
- Referenzen müssen immer gültig (d.h. deklariert sein und der Owner muss mindestens denselben Gültigkeitsbereich wie die Referenz haben) sein

Das Ownership-Prinzip deckt dabei bereits die ersten drei Regeln ab. Zu jedem Zeitpunkt kann jeder Wert nur durch eine Variable angesprochen werden. Liegt der Wert auf dem Stack oder wird das `Copy`-Trait implementiert wird bei einer Zuweisung der Wert kopiert. Liegt der Wert hingegen auf dem Heap, wie z.B. bei einem `Vector` oder einem `String` wird das Ownership an die neue Variable übergeben.

Codebeispiel 9: ownership

```
let mut a = 2;
let b = a;
a = 4;
println!("{}{}", a, b); // Ausgabe: 42

let s1 = String::from("hello");
let s2 = s1;
println!("{}", s2); // Ok
println!("{}", s1); // Fehler, Ownership wurde s2 übertragen
```

Um nun nicht ständig den Owner von Daten ändern zu müssen z.B. bei einem Funktionsaufruf werden mit dem Borrowing Referenzen erstellt. Hierauf beziehen sich die beiden letzten Regeln. Dabei gilt außerdem, dass es nur veränderbare Referenzen geben kann, wenn der Owner veränderbar ist und falls es eine veränderbare Referenz gibt, kann der Wert auch nur exklusiv durch diese verändert werden. Zur Referenzierung und Dereferenzierung kommen die `&`- und `*`-Operatoren zum Einsatz.

Codebeispiel 10: borrowing

```
// Nicht zulässig, da zwei mutable Referenzen
let mut a = 5;
let b = &mut a;
let c = &mut a;
*b = 1;

// Nicht zulässig, da mutable und nicht mutable gemischt
let mut a = 5;
let b = &mut a;
let c = &a;
let d = &a;
*b = 1;

// Zulässig, da nur lesende Referenzen
let a = 5;
let b = &a;
```

```
    let c = &a;

    fn append_string(string1: &mut String, string2: &String) {
        string1.push_str(string2);
    } // Nur Referenzen verlassen den Gültigkeitsbereich, nicht die Owner!

    let mut s1 = String::from("Fern");
    let s2 = String::from("Uni");
    append_string(&mut s1, &s2);
    println!("{}", s1); // Ausgabe: FernUni
```

Schlussendlich verhindern lifetimes, dass die Referenzen für das Borrowing ungültig werden, und die Variable - und somit der Wert - vor den Referenzen freigegeben wird.

Codebeispiel 11: lifetime Veranschaulichung [3]

```
{
    let r;                // ---------+-- 'a
                          //          |
    {                     //          |
        let x = 5;        // -+-- 'b  |
        r = &x;           //  |       |
    }                     // -+       |
                          //          |
    println!("r: {}", r); //          |
}                         // ---------+

{
    let x = 5;            // ----------+-- 'b
                          //           |
    let r = &x;           // --+-- 'a  |
                          //   |       |
    println!("r: {}", r); //   |       |
                          // --+       |
}                         // ----------+
```

In den meisten Fällen kann der Compiler die lifetimes von Variablen und Referenzen selbst bestimmen. Eine explizite Deklarierung der lifetimes ist nötig, wenn beispielsweise eine Funktion mehr als eine Referenz entgegennimmt und auch wieder zurückgibt. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Codebeispiel 12: lifetime Beispiele [5]

```
fn main() {
    // Funktioniert, da Werte dieselbe lifetime wie Rückgabewert haben
    let mult1 = 1;
    let mult2 = 2;
    let multiplikator = {
        let zaehler: i32 = 3;
        multiplikator_waehlen(&mult1, &mult2, &zaehler)
    };

    // Funktioniert nicht, da mult2 vor multiplikator freigegeben wird
```

```
        let mult1 = 1;
        let multiplikator = {
            let mult2 = 2;
            let zaehler: i32 = 3;
            multiplikator_waehlen(&mult1, &mult2, &zaehler)
        };
    }

    fn multiplikator_waehlen<'a, 'b>(
        mult1: &'a i32,
        mult2: &'a i32,
        decision_maker: &'b i32,
    ) -> &'a i32 {
        if *decision_maker < 5 {
            mult1
        } else {
            mult2
        }
    }
```

# 3 Theoretischer Aufbau des CAS

## 3.1 Überlauf und Ungenauigkeit

Ein bereits zu Beginn prominentes Problem für ein CAS ist das Handling von Integer-Overflows und die Ungenaugikeiten von Rechnung mit floats (siehe IEEE754). So gibt das folgende Programm in Rust einen falschen Wert für die float-Operation aus und bricht anschließend ab.

Codebeispiel 13: Überlauf und Ungenauigkeit

```
let f1 = 0.1;
let f2 = 0.2;
println!("{}", f1 + f2);

let mut x = i32::MAX;
x += 1;
println!("{}", x);

// Ausgabe
0.30000000000000004
thread main panicked...
```

Sympy kann hierbei einerseits auf die Implementierung von Integers in Python zurückgreifen. Diese besitzen bereits eine unbegrenzte Präzision ([6]). Für Fliesskommazahlen ist eine die Klasse `Float` implementiert, die eine ungebrenzte Genauigkeit erlaubt. Dabei kann mit dem zweiten Parameter die eigentliche Präzision bestimmt werden. Es wird darüberhinaus angeraten den eigentlichen Wert als String zu übergeben, da der native float-Typ in Python bereits eine Ungenauigkeit hervorrufen kann. (siehe src code class Float(Number):)

Codebeispiel 14: SymPy Precision

```
x = fakultaet(100) // 158 Stellen
print(type(x))
// <class int>

print(sympy.Float('0.1', 100) + sympy.Float('0.2', 100))
// 0.300000000000000000000000000000000000000000000000...

print(float(0.1) + float(0.2))
// 0.30000000000000004
```

In Buch und Buch (Quelle) ist eine allgemeine Implementierung für solche Werte angegeben. Hiervon könnten wir in dieser Arbeit natürlich gebrauch machen und diese Typen selbst implementieren, da Rust diese Typen leider nicht selbst anbietet. Allerdings existieren bereits die beiden Crates (Abhängigkeiten) num (link) und bigdecimal (link, baut auf num auf), die Typen mit ungebrenzter Präszision anbieten.

Folgend wird die Performance zwischen den primitiven Typen auf dem Stack, den primitiven Typen auf dem Heap und den Crates verglichen. Wie zu erwarten ist die Speicherung auf dem Stack am effizientesten, der Zugriff auf dem Heap kostet Zeit. Der zusätliche Zeitverlust bei den Crates lässt sich zum einen dadurch erklären, dass immer ein Überlauf geprüft werden muss um den Wert richtig zu speichern, andererseits arbeit der Typ `BigInt` mit einem Vektor. Wie schon erwähnt wird hier bei einem Zugriff zusätlich geprüft, ob der Index gültig ist, was ebenfalls Zeit kostet.

```
running 6 tests
test loop_decimal    ... bench:   7,447,000 ns/iter (+/- 474,681)
test loop_float      ... bench:      36,975 ns/iter (+/- 809)
test loop_float_heap ... bench:      74,324 ns/iter (+/- 920)
test loop_int        ... bench:      18,505 ns/iter (+/- 396)
test loop_int_heap   ... bench:      50,293 ns/iter (+/- 1,683)
test loop_num        ... bench:     548,640 ns/iter (+/- 42,989)
```

Leider ist es mit Rust-Benchmarks noch nicht möglich den Speicherverbrauch zu messen. Allerdings können wir diesen für unsere Beispiele auch selbst gut bestimmen. Hierbei geht es nur um die eigentlichen Werte, mit denen Berechnungen durchgeführt werden.

**Primitive Typen Stack** Der Datentyp `i64` und `f64` verbrauchen 8 Bytes. Es werden also nie mehr als 8*4=32 Bytes für die eigentlichen Daten benötigt. Die Variable x, die das Ergebnis enthält beansprucht davon 8 Bytes. Der Schleifenparameter i wird ebenfalls als `i64` (bzw. `i32` im falle von Float) behandelt durch die Addition mit x (bzw. dem TypeCasting) und verbraucht ebenfalls 8 Bytes. Bei der Addition x+i wird nun wie bereits erwähnt bei einem Funktionsaufruf eine Kopie der Werte erstellt, die den Copy-Trait implementiert haben. Der Typ `i64` und `f64` haben diesen implementiert (link src i64 impl copy) und somit wird sowohl von x als auch von i zur Addition eine Kopie erzeugt.

**Primitivee Typen Heap** Der Speicherverbrauch der eigentlich Werte ist wie bei den primitiven Typen auf dem Stack. Davon entfallen aber 8 Bytes auf dem Heap statt auf dem Stack. Zusätzlich befindet sich ein Zeiger auf dem Stack durch `Box`. Die Größe hiervon hängt von der verwendeten Architektur ab.

**num und bigdecimal** Bei dem Datentyp BigInt wird einerseits ein Vorzeichen (enum) verwendet, welches 1 Byte verbraucht (https://fasterthanli.me/articles/peeking-inside-a-rust-enum) als auch der Datentyp BigUint der wiederum einen Vektor mit BigDigit erhält. Schaut man sich diese Definition an, kann dieser Type zwischen 4 Bytes (u32) und 16 Bytes(i128) verbrauchen. Während des Debuggens auf verschiedenen Systemen wird in diesem Beispiel der Typ u64 angenommen und somit ein Speicherplatz von 8 Bytes benötigt. Mit größer werdenden Zahlen steigt allerdings dieser Verbrauch, da sich der Vektor vergrößert. Auch liegen nicht mehr alle Daten auf dem Stack, sondern alle BigDigits auf dem Heap, was die Zugriffsgeschwindigkeit wie bereits gezeigt erhöht.

Der Typ bigdecimal verwendet laut Beschreibung den Typ BigInt und zusätzlich einen 64-Bit-Integer um die Position der Dezimalstelle zu bestimmen. Hier erhöht sich der Speicherverbrauch also nur unwesentlich.

**Entscheidung der verwendeten Typen** Im Rahmen dieser Arbeit ist zumindest eine eigene Implementierung der Typen für unbegrenzete Präzision nicht das Ziel. Genausogut können auch die bereits bestehenden Crates verwendet werden. Da dadurch aber die Performance leidet, wenn auch wahrscheinlich nicht relevant für spätere Beispiele und Tests, ist wiederrum die Implemeniterung mit primitiven Typen von Vorteil.

Da Rust Generics untersützt wurde die Entscheidung getroffen, das CAS in Teilen mit Generics umzusetzen, sodass beide Kombinationen verwendet werden können. Dabei sollen alle Funktionen des Systems mit den primitiven Typen funktionieren und einige Beispielimplementierungen mit den Crate-Typen gemacht werden. Dies erlaubt einerseits eine spätere Erweiterung der Crate-Typen als auch die Entwicklung der eigenen Typen. Darüberhinaus werden auch weiterführende Konzepte von Rust veranschaulicht. Auf Besonderheiten in der Implementierung wird an entsprechender Stelle näher eingegangen.

## 3.2 Grundregeln und Annahmen

Bevor überlegt wird, wie die Daten des CAS im Speicher abgelegt werden, müssen noch ein paar Vorüberlegungen gemacht werden, welche Grundregeln und Annahmen im System gelten sollen. Wir betrachten die Zahlenräume:

- $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit 0, $\{0, 1, 2, 3...\}$
- $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen, $\{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$
- $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen, $\{... - \frac{2}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}...\}$
- $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, z.B. $\sqrt{2}$ oder $\pi$

Der komplexe Zahlenbereich $\mathbb{C}$ wird im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet.

Um insgesamt weniger Bedingungen für mathematische Operationen zu haben, ist geplant folgende Vereinfachungen und Bedingungen anzunehmen. so müssen alle Implementierungen nur die Operationen Addieren und Multiplizieren berücksichtigen.

- Jede Substraktion ist im Grunde eine Addition. Für Zahlen bedeudet dies $5 - 3 = 5+(-3)$ und für Symbole bzw. Terme anderer Art $a-b = a+(-1*b)$. Eine Besonderheit sollen Terme der Art $1-(a+b+1)$ darstellen, diese sollen zu $1+(-1*a)+(-1*b)+(-1)$ umgeformt werden und nicht zu $1 + (-1 * (a + b + 1))$
- Bei Divisionen werden Zahlen zu rationalen Zahlen, also $2/3 = \frac{2}{3}$ und $-(2/3) = \frac{-2}{3}$. Symbole und Terme werden zu einer Multiplikation vereinfacht, also $a/b = b^{(-1)} * a$ und $(a * b * c)/(d + 1) = (d + 1)^{-1} * (a * b * c)$
- Das Kommutativgesetz soll beachtet werden: $x + y = y + x$ also auch $2 * (x + y) + 2 * (y + x) = 4 * (x + y)$
- Das Assoziativgesetz soll beachtet werden: $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
- Das Distributivgesetz soll beacht werden: $a * (x + y) = a * x + a * y$

Insgesamt sollen folgende Implementationen im System vorhanden sein:

- Addition von Zahlen (Ganzzahlen, Fließkommazahlen, rationalen Zahlen), z.B. $1+2.1 = 3.1$
- Addition von Symbolen und Termen, z.B. $x+y = x+y$ oder $x+(2*y)+2+(2*y)+x = 2 * x + 4 * y + 2$
- Multiplikation von Zahlen (Ganzzahlen, Fließkommazahlen, rationalen Zahlen), z.B. $1 * 2.1 = 2.1$
- Multiplikation von Symbolen und Termen, z.B. $x * y * x = x^2 * y$
- Auswertung von Potenzen von Zahlen, Symbolen und Terme inkl. Potenzregeln in Hinblick auf Genauigkeit des Ergebnis, z.B. $x^a * x^b = x^(a + b)$ oder $x^a * y^a = (x * y)^a$
- Auswertung von Funktionen, die dynamisch hinzugefügt werden können sollen. Funktionen die dem CAS nicht bekannt sind, tauchen weiterhin in Termen auf, werden aber nicht ausgewertet, z.B. $sin(x)$ oder $sqrt(x)$
- Auswertung von Konstanten falls bekannt und gewollt
- Die Ausführungsreihenfolge in den Termen soll Konstanten -> Funktion -> Potenz -> Multiplikation -> Addition entsprechen

## 3.3 Grundtypen des CAS

In diesem Kapitel soll definiert werden, welche `structs`, `traits` oder `enums` benötigt werden, um das CAS zu erstellen. Darüberhinaus soll grob umrissen werden, welche Implemeniterungen im weiteren Verlauf sinnvoll sein können und welchen Zweck diese erfüllen. Es ist noch zu erwähnen, dass hier nicht definiert werden sollen, mit welchen `Derive macros` diese Typen erweitert werden sollen. In Rust ist es üblich `structs` und `enums` mit diesen Makros zu erweitern, um z.B. anzugeben, dass der Typ kopiert oder sortiert werden kann. Die Implementierung dieser Funktionalität wird dann zur Compilezeit vom Makro übernommen.

**enum PrimNum und enum PrecisionNum** Diese beiden `enums` sollen als Implementierung für unsere Generic-Parameter im CAS dienen. Ebenso bieten diese den Vorteil, dass später ein allgemeiner Nummern-Typ existiert mit dem gerechnet werden kann, und nicht ständig manuell Type Castings durchgeführt werden müssen. So ist in Rust nicht möglich eine Addition oder Multiplikation von i32 und f64 durchzuführen. Hierzu muss einer der beiden Werte erst in den anderen manuell überführt werden.

Ein weiterer Vorteil ist, dass wir hier direkt eine rationale Ausprägung des `enum` implementieren können. Auch hier kann der Typ direkt die Rechnung übernehmen. Hierzu werden die Operatoren `std::ops::Add` und `std::ops::Mul` für den Enum selbst überladen. Im Hinblick auf die Bedingung, dass eine Subtraktion eine Addition ist, wird ebenso `std::ops::Mul` für einen Integerwert mit den Enums überladen. Ebenso kann es von Interesse sein, ob es sich um das neutrale Element der Addition oder Multiplikation handelt um einen Term zu vereinfachen. Für diesen Fall wird der Trait `PartialEq` für Integers überladen, um hier nach Bedarf auch andere Werte zu überprüfen. Eine Alternative wären Methoden, die einen `bool`-Wert zurückgeben, ob es sich um einen solchen Wert handelt.

In unserer Implementierung wird `PrimNum` solange wie möglich mit Integer und Rationalen Werten arbeiten. Sobald ein Float-Wert addiert wird, werden die beiden anderen Werte zu einem Float umgewandelt. Dies geht zulasten der Genauigkeit und könnte bei Bedarf so angepasst werden, dass ein Rationaler Typ erzeugt wird.

**trait NumberType** Dieser Trait soll hauptsächlich als Typparameter oder als Einschränkung für Generics zum Einsatz kommen. Wie bereits erwähnt soll ein Teil des CAS mit verschiedenen Typen durchführbar sein und alle Typen, die diesen Trait implementieren können dann für das CAS genutzt werden. In unserem Fall werden dies die beiden `enums` sein, die gerade erwähnt worden sind. Zudem werden wir hier Funktionen als Bedingungen definieren um die neutralen Elemente der Addition und Multiplikation zurückzugeben als auch eine Möglichkeit um einen Bruch zu kürzen. Diese müssen dann von den `enums` implementiert werden.

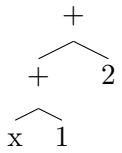
Außerdem kann dieser Trait bereits weitere Bedingungen aufnehmen wie z.B. dass der implementierende Enum gewisse Operatorenüberladungen haben muss oder auch, dass die Werte vergleichbar und sortierbar sind.

**trait ConstType** Soll vom Parser genutzt werden, um zu bestimmen ob es sich bei einem Symbolnamen um eine Variable oder eine Konstante handelt, sodass diese zuverlässig unterschieden werden können. Außerdem soll eine Methode implementiert werden, die es ermöglicht die Konstante numerisch auszugeben.

**struct Parser** Auch wenn angedacht ist, eine bestehende Bibliothek zur lexikalischen Analyse von Strings einzusetzen, benötigen wir einen Parser, der die generierten Tokens oder die entstehende Datenstruktur in die Struktur des Systems überführt.

### 3.4 Grundlegende Datenstruktur im Speicher

Eine erste Idee, wie die Datenstruktur aussehen könnte, war ein einfacher binärer Baum, dessen Knoten die Operanden und die Blätter Einzelne Werte sind. Dies entspricht dem abstrakten Syntaxbaum nach dem Parsen. Dies könnte beispielsweise für den Term $x+1+2$ folgendermaßen aussehen.




In Rust sähe die Implementierung folgendermaßen aus. Die Ausprägung Add benötigt für die Werte immer den Wrapper `Box` der die Daten auf den Heap speichert, da sich zur Compilezeit nicht die Größe auf dem Stack bestimmen lässt. Der Compiler kann nicht bestimmen wie viele Ebenen Add beinhaltet, z.B. kann dies ja durch User-Input verändert werden.

Codebeispiel 15: BTree Ast

```
enum BTree {
    Number(i64),
    Symbol(String),
    Add(Box<BTree>, Box<BTree>),
}

let tree = BTree::Add(
    Box::new(BTree::Add(    // <- Baum 1
        Box::new(BTree::Symbol("x".to_owned())),
        Box::new(BTree::Number(1)),
    )),
    Box::new(BTree::Number(2)),
);
```

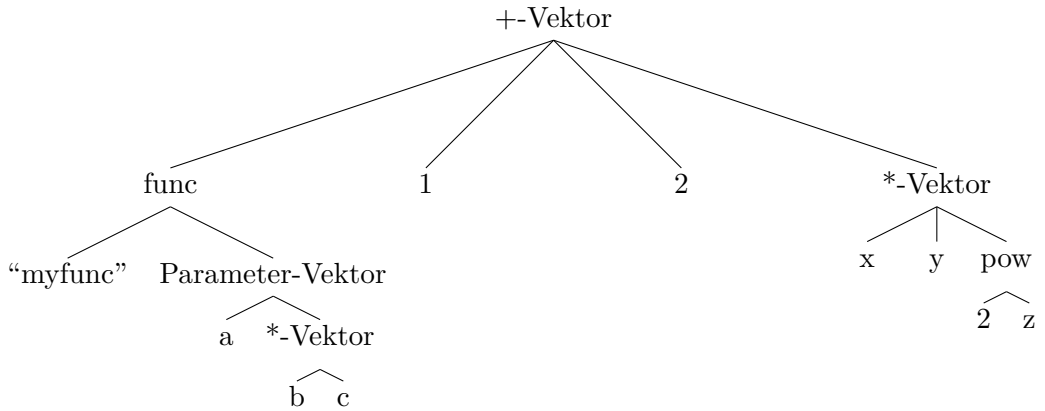
Problem in-place Änderung wie werden die einzelnen Blätter zusammengefasst? Man bräuchte auf jeden Knoten eine Referenz und müsste dann von unten nach oben immer prüfen, was sich zusammenfügen lässt und die Referenzen updaten. Ist in Rust wegen Ownership/Borrowing nur mit Aufwand möglich (Stichwort Rc und RefCell). Möchte man z.B. die Referenzen in einem Vektor speichern, so ist das nicht möglich, da wenn eine mutable Referenz auf Baum 1 existiert, nicht zusätzlich eine Referenz auf das Symbol x oder die Nummer 1 erzeugen kann (Regeln zum Borrowing und Ownership). Lösung z.B. Nutzung von raw-Pointern bzw. unsafe? (Reicht das so als Begründung, wenn man die noch etwas unterfüttert oder mehr Punkte, warum dagegen entschieden, zb resultierende Baumhöhe?)

Codebeispiel 16: get refs

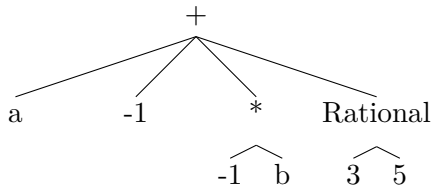
```
let tree_ref = &mut tree;

let mut tree_ref1: &mut BTree = &mut BTree::Number(0);
let mut tree_ref2: &mut BTree = &mut BTree::Number(0);
let mut tree_ref3: &mut BTree = &mut BTree::Number(0);
let mut tree_ref4: &mut BTree = &mut BTree::Number(0);

let mut refs: Vec<&mut BTree> = vec![];

match tree_ref {
```

```
        BTree::Add(left, right) => {
            // tree_ref1 = left.as_mut();
            // tree_ref2 = right.as_mut();
            refs.push(left.as_mut());
            refs.push(right.as_mut());
        }
        _ => {}
    };

    match refs.index_mut(0) {
        BTree::Add(left, right) => {
            // tree_ref3 = left.as_mut();
            // tree_ref4 = right.as_mut();
            refs.push(left.as_mut());
            refs.push(right.as_mut());
        }
        _ => {}
    };

    // Logik um zu prüfen, ob tree_ref3 oder tree_ref4 mit tree_ref2 vereinbar sind. tree_
    if let (BTree::Number(n1), BTree::Number(n2)) = (tree_ref2, tree_ref4) {
        *n1 = *n1 + *n2;
    }
    if let BTree::Symbol(s) = tree_ref3 {
        *tree_ref1 = BTree::Symbol(s.to_owned());
    }
    println!("{:?}", tree);
```

Eine Alternative wäre nur lesende Referenzen zu erzeugen, über diese zu iterieren und dann einen neuen Baum zu erstellen. Wenn man aber sowieso alle Werte auf einer Ebene benötigt um diese zusammenfassen zu können, ist es eine bessere Idee, Werte, die Assoziativ sind, gleich in einem Vektor zu speichern um alle Werte einfach abrufen zu können. Für Addition und Multiplikation würde dann der Baum für den Term $myfunc(a, b * c) + 1 + 2 + x * y * 2^z$ beispielsweise so aussehen:




Werden die Bedingungen und Vereinfachungen noch angewendet, so ergibt sich für den Term $a - (1 + b) + 3/5$ der Baum:




Diese Struktur findet sich ebenfalls in Quelle Rotes Buch. SymPy verwendet eine ähnliche Struktur (link zu Quelle). Somit ist die Datenstruktur in Rust festgelegt, auf der alle weiteren Operationen aufbauen, wie z.B. das Zusammenfassen des Terms oder Substitution.

## 3.5 Datenstruktur in Rust

Mit dem Wissen über Generics und und den theoretischen Überlegungen zur Datenstruktur, kann diese in Rust folgendermaßen umgesetzt werden:

Codebeispiel 17: Datenstruktur in Rust

```
pub enum Ast<N> {
    Add(Vec<Ast<N>>),
    Mul(Vec<Ast<N>>),
    Symbol(String),
    Const(String),
    Pow(Box<Ast<N>>, Box<Ast<N>>),
    Func(String, Vec<Ast<N>>),
    Num(N),
}
```

**Add und Mul** Diese beiden Ausprägungen besitzen als Wert einen Vektor, der weitere Elemente enthält. So sind diese einfach abrufbar und der Vektor kann gezielt geändert, z.B. zum sortieren der Werte oder das Entfernen von unnötigen Elementen (neutrale Elemente Addition/Multiplikation).

**Symbol** Ein einfacher String, der einen Variablennamen enthält. Diese sollen später einfach substituiert werden.

**Const** Ein einfacher String, der einen Konstantennamen enthält, auch in UTF-8 möglich, z.B. $\pi$. Eigens hinzugefügte Funktionen können somit prüfen, um welche Konstante es sich handelt und entsprechend eine Vereinfachung implementieren. Es besteht darüberhinaus die Möglichkeit Konstanten als Wert zurückzugeben.

**Pow** Besitzt zwei Parameter, Basis und Exponent, die jeweils wieder beliebige Ausdrücke sein können.

**Func** Besitzt ebenfalls zwei Parameter, Name der Funktion und Parameter als Vektor. Der Name kann somit einfach ausgewertet, die Parameter einfach übergeben werden. Beide Werte werden an die dynamisch hinzugefügten Auswertungsfunktionen übergeben.

**Num** Enthält als Wert unseren eigenen Nummerntyp.

**Allgemeine Anmerkungen** Der Generic-Typparameter `N` soll den gewählten Nummerntyp darstellen. Dieser wird aber noch nicht eingeschränkt, da sonst diese Einschränkungen später für alle implementieren Blöcke gelten muss. Dies kann z.B. nicht gewünscht sein, wenn eine Grundlegend andere Art implementiert werden soll um Terme zu verarbeiten, bei der der Trait `NumberType` keine Verwendung finden soll. Die Ausführungsreihenfolge kann so ebenfalls gewährleistet werden. Bevor also `Ast::Add` ausgewertet wird, werden zuerst alle Elemente des Vektors ausgewertet. Evtl. vereinfachungen sind dann bereits vorgenommen. Die Auswertung kann dabei rekursiv oder iterativ implementiert werden.

**Datenstruktur auf dem Speicher** Mit dieser Implementierung wird ein Großteil der Daten auf dem Heap abgelegt. Einzig die Variante `Ast::Num<PrimNum>` kann komplett auf dem Stack abgelegt werden, da diese eine definierte Größe hat. String und Vec speichern die Daten auf dem Heap und halten nur einen Zeiger auf dem Stack falls es das oberste Element ist. Box legt die Daten wie bereits besprochen aus Grunden der ungewissen Speicheranforderung auch auf dem Heap an, lediglich der Zeiger kann sich auf dem Stack befinden.

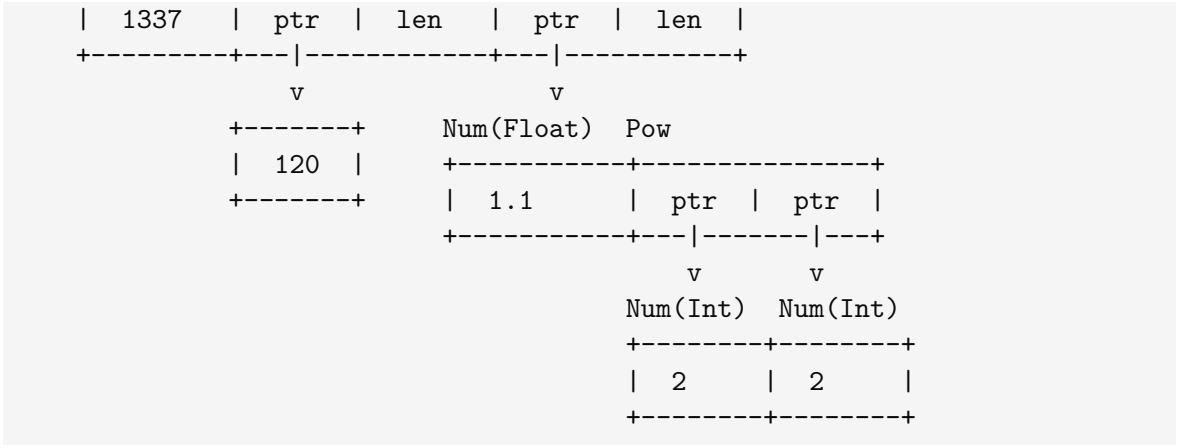
Hierzu zwei Beispiele. Der String bei `Symbol(x)` wird intern als Vektor mit dem Typ `u8` repräsentiert. (link quelle)

Codebeispiel 18: Term 1 Stack und Heap

```
let term = Ast::Num(PrimNum::Int(42));
Stack:
Ast::Num
+---------------+
|  PrimNum::Int |
|  +------+     |
|  |  42  |     |
|  +------+     |
+---------------+
```

Codebeispiel 19: Term 2 Stack und Heap

```
let term = Ast::Add(vec![
    Ast::Num(PrimNum::Int(1337)),
    Ast::Symbol("x".to_owned()),
    Ast::Mul(vec![
        Ast::Num(PrimNum::Float(1.1)),
        Ast::Pow(
            Box::new(Ast::Num(PrimNum::Int(2))),
            Box::new(Ast::Num(PrimNum::Int(2))),
        ),
    ]),
]);
Stack:
Add(Vec) (Beispielhaft, hier fehlt z.B. noch die capacity)
+-------+-------+
|  ptr  |  len  |
+---|---+-------+
    v
Heap:
Num(Int)  Symbol(Vec<u8>)  Mul(Vec)
+-------- +----------------+---------------+
```


| 1337 | ptr | len | ptr | len |
v v
| 120 | Num(Float) Pow
| 1.1 | ptr | ptr |
v v
Num(Int) Num(Int)
| 2 | 2 |

# 4 Parser für mathematische Ausdrücke

Ziel dieses Kapitels ist die Nutzung bzw. Implementierung der lexikalischen Analyse bzw. eines Parsers um Terme in das Enum `Ast` zu überführen. Erst hier sollen Vereinfachungen und Zusammenfassungen gemacht werden.

## 4.1 Prüfung von bestehenden Bibliotheken zum Parsen

**mexprp Rust** (quellen) Diese Bibliothek wurde gewählt, da einerseits beim Parsen eine beliebige Genauigkeit möglich ist. Andererseits schien nach einem kurzen Blick in den Code es auch möglich den Term einfach in unsere gewünschte Form zu bringen, da das Enum `Term` anscheinend einen Abstract Syntax Tree implementiert wie am Anfang angedacht. Über diesen müsste nur einmal iteriert werden um zu unserer modifizierten Version zu gelangen.

Die Abhängigkeit "rug" soll die beliebige Genauigkeit ermöglichen. Dabei handelt sich um ein Interface zu den GNU-Bibliotheken GMP, MPFR, MPC. Für diese müssen aber unter GNU/Linux, macOs und Windows jeweils andere Abhängigkeiten installiert werden. Ein schnelles testen auf anderen Rechnern ist somit ausgeschlossen. Aus diesem Grund wird diese Bibliothek nicht verwendet. Ebenso wird deshalb "rug" nicht als Bibliothek für die beliebige Genaugikeit verwendet, sondern num und bigdecimal.

**meval Rust** Diese Bibliothek erscheint recht unkompliziert und einfach zu nutzen. Die geparsten Tokens werden als UPN (umgekehrte polnische Notation) ausgewertet. Dies könnte man prinzipiell dazu nutzen unseren modifizierten Ast zu erzeugen. Ein kleiner Nachteil ist, dass nur Fließkommazahlen ausgewertet werden. Sollte man den Lexer irgendwann erweitern wollen, sodass eine beliebige Genauigkeit erreicht werden soll, müsste man diesen Part neu schreiben. Zudem habe ich diese Bibliothek leider nicht bei meiner initialen Recherche in Betracht gezogen und nicht weiter überprüft. Erst während der Entwicklung habe ich Interessehalber weiter reingesehen und die Enums `Operation` und `Token` größtenteils übernommen. Hätte ich den Lexer nicht bereits zu einem großen Teil implementiert, hätte ich die Möglichkeit genutzt, die Tokens aus dieser Bibliothek zu erzeugen.

**evalexpr Rust** Diese Bibliothek erscheint sehr Featurereich. Allerdings lässt sich eigentlich nur die `eval`-Funktion nutzen, da fast alle anderen Strukturen nicht publich sind. Es war mir daher nicht möglich, den Tokenizer bzw. den Tree direkt zu nutzen, in dem sich ein bereits geparster String befindet. Daher schied diese Bibliothek ebenfalls aus.

**tinyexpr C** Da es in Rust auch möglich ist, bereits bestehenden C-Code zu nutzen, wurde ebenfalls geprüft eine einfache C-Bibliothek zu nutzen, sodass auch das die notwendige Schnittstelle des Parsers nicht allzu kompliziert wird. Hier habe ich mich für tinyexpr entschieden. Leider mussten Variablen bereits vor der lexikalischen Analyse zumindest bekannt sein (siehe Readme https://github.com/codeplea/tinyexpr te compile). Da ich mich generell gegen diesen Schritt entschieden habe, wurde auch diese Bibliothek nicht verwendet.

**Fazit** Eine geeignete Bibliothek zu finden, die den Anwendungszweck erfüllt und dabei nicht allzu weit weg vom eigentlich Ziel ist, ist leider in meinen Augen nicht möglich gewesen. Daher wurde sowohl die lexikalische Analyse als auch das Parsing selbst implementiert. Die wichtigsten Eigenschaften hierzu habe ich aus dem Kurs 01810 Übersetzerbau herausgearbeitet, den ich im Semester xx belegt habe.

## 4.2 Implementierung der lexikalischen Analyse bzw. Tokenizer

In diesem Schritt soll nur aus einer übergebenen Zeichenkette ein Vektor mit Tokens erstellt werden. Hierbei wird Zeichenweise gearbeitet und nicht über reguläre Ausdrücke. Eine besonderheit in Rust, dass ein Char in einem String nicht über einen Index angesprochen werden kann. Da Strings als UTF-8 gespeichert werden, ist mit dem Index nicht eindeutig, ob man das entsprechende Byte haben möchte oder das entsprechende Zeichen. Daher muss der String hier erst in einen Vektor des Typ `Char` umgewandelt werden.

Die Tokens werden dabei wieder als Enum implementiert. In diesem Abschnitt verzichten wir auf Generics und implementieren den den struct nur für den Typ `PrimNum`.

Im Enum benötigen wir folgende Werte:

Codebeispiel 20: Enum Token

```
pub enum Token {
    LParen,
    RParen,
    Comma,
    Var(String),
    Func(String),
    Op(Operator),
    Num(PrimNum),
}
```

**LParen und RParen - linke und rechte Klammer** Diese dienen dazu um Terme zu gruppieren und die eigentliche Operatorenreihenfolge zu verändern, wie es üblich ist in der Mathematik. Es werden die Zeichen "(" und ")" erkannt.

**Comma** Dient als Seperator von Funktionswerten. Fließkommazahlen werden nur im englischen Format mit Punkt akzeptiert.

**Var und Func** Eine alphanumerische Zeichenkette, die zwingend mit einem Buchstaben beginnt. Klein- und Großschreibung sind gleichermaßen erlaubt, die Namen sind case-sensitive. Eine Funktion wird daran erkannt, dass nach der Zeichenkette eine "(" anschließt, die zwingend wieder geschlossen werden muss.

**Op** Mögliche Operatoren, es wird Beschränkt auf "+, -, *, /, ^". Der Typ Operator ist dabei wieder ein Enum, der diese Einträge enthält. Im Lexer werden noch keine Anpassungen des Terms vorgenommen.

**Num** Eine Zahl, eine Fließkommazahl wird daran erkannt, dass das erste Zeichen ein "." ist oder die gesamte geparste Zeichenkette einen "." enthält. Es sind nur Zahlen erlaubt.

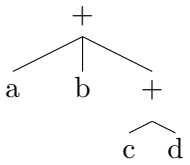
## 4.3 Implementierung Parser

Als Parser kommt eine einfache Implementierung der Operator-Vorranganalyse in Frage, wie Sie in Kurs 1810 ke3 3.3.2 beschrieben ist. Es handelt sich also um eine Bottom-Up-Analyse. Der zu implementierende Parser orientiert sich an der beschriebenen "Precedence climbing method" aus dem Buch "BCPL, the language and its compiler". Dabei wird der Algorithmus so verändert, sodass der momentan gültige Operator in einer `while`-Schleife läuft, um einen Vektor befüllen zu können. Die "linke" Seite des Operators wird dabei jeweils vor der Schleife

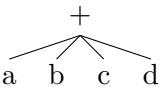
geparst, die “rechten” Seiten dann in der Schleife. Dazu werden auch gleich Operatorenüberladungen des `Ast`-Enum verwendet.

Zudem werden zusätlich noch Funktionsaufrufe beim Parsen hinzugefügt. Die jeweiligen Parameter fangen dabei wieder mit der Funktion zum Parsen von “+” und “-” an. Auch werden bereits Variablen und Konstanten unterschieden.

Darüberhinaus werden entsprechende Prüfungen eingebaut, sodass der Term $a+b+(c+d)$ nicht wie der folgende Baum geparst wird:




Es entsteht vielmehr gleich der Baum:




Weitere Anmerkungen zu dem Kurs 01810: Es handelt sich um einen LR(1)-Parser, da der Parser ein Zeichen vorrauschen kann um die nächste Aktion zu bestimmen. Der Stack ist im weitesten Sinne bereits ein gültiges `Ast`-Element, das befüllt wird. Die `shift`-Funktion kann als Voranschreiten im Iterator angesehen werden, was immer dann passiert, wenn ein Operator oder ein Terminal gelesen wird (vgl. Grammatik). Die `reduce`-Funktion entpricht dem Anwenden der Operatorenüberladen auf dem gültigen `Ast`-Element.

Mögliche Verbesserungen dann im Fazit (z.B. erlauben von 3x statt 3*x und Parser so umbauen, dass dynamisch Operationen hinzugefügt werden können, z.B. Fakultät anstelle der Nutzung von Funktionen, auch wenn wahrscheinlich umgeschrieben in Funktion um dann wieder evaluieren zu können.)

Die Grammatik dazu sieht folgendermaßen aus: (siehe kurs 1810 ke2 Seite 6)

Hier dann noch ordentlich die Grammatik in Latex übertragen! Da probiere ich verschiedenes aus mit dem Mathemodus, da ich latex nicht oft benutze.

# 5 Grundfunktionlitäten

In diesem Abschnitt sollen Grundlegende Funktionalitäten des CAS implementiert werden. Dies betrifft sowohl den Aufbau des Codes in Rust, um das CAS einfach erweiterbar zu machen, als auch das grundsätzliche Rechnen des Systems. So wird es beispielsweise keine Standardfunktionalität sein, dass $cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$ erkannt wird. Dies soll über eine Erweiterung erkannt und verarbeitet werden. Das Zusammenfassen von $x + x = 2 * x$ ist hingegen aber eine Grundfunktionlität.

Ähnlich wie in SymPy soll der auszuwertende Ausdruck nicht verändert werden, sondern ein neuer zurückgegeben werden. Dies vereinfacht die Implementierung enorm, hat aber natürlicherweise den Nachteil zusätzlichen Speicherplatz zu belegen.

## 5.1 Änderung des Terms mihilfe Operatorenüberladung

Der Trait `NumberType` soll bereits die meisten nötigen Operatorenüberladungen von den zu implementierenden Typen verlangen. Die wichtigsten Operationen werden "Add" und "Mul" sein, da diese vom CAS benutzt werden. Operatoren die ebenfalls interessant im weiteren Verlauf sein können sind der Modulo-Operator (Auswertung der sin- oder cos- Funktion), aber auch die Möglichkeit Werte vergleichen zu können. Deshalb soll noch `PartialEq` und `PartialOrd` implementiert werden um die Funktionen "NumberType == 1" und "NumberType > 1" zu ermöglichen. Daraus ergibt sich die Definition und die Implementierungen für `PrimNum`:

Codebeispiel 21: trait NumberType 1. Iteration

```
pub trait NumberType:
    + PartialEq<i128>
    + PartialOrd<i128>
    + ops::Add<Self, Output = Self>
    + ops::Mul<Self, Output = Self>
    + ops::Rem<i128, Output = Self>
{}

impl PartialEq<i128> for PrimNum { ,,, }
impl PartialOrd<i128> for PrimNum { ... }
impl ops::Add<PrimNum> for PrimNum { ... }
impl ops::Mul<PrimNum> for PrimNum { ... }
impl ops::Rem<i128> for PrimNum { ... }
```

Ebenso soll für das Enum `Ast` ebenfalls Operatoren überladen werden. Hier beschränken wir uns auf die Operatoren "Add" und "Mul". Mit dem zusätlichen Generic-Typ ergibt sich die Defintion:

Codebeispiel 22: Ast Operatorenüberladung

```
impl<N> ops::Add<Ast<N>> for Ast<N>
where
    N: NumberType,
{ ... }

impl<N> ops::Mul<Ast<N>> for Ast<N>
where
    N: NumberType,
```

```
{ ... }
```

Die Überladungen für `Ast` sollen dabei gleich Zusammenfassungen übernehmen falls möglich. Das bedeutet konkret für Addition (und entsprechend für Multiplikation):

Codebeispiel 23: smarte Operatenüberladung

```
Ast::Num(1) + Ast::Num(2) = Ast::Num(3)

Ast::Add(vec![Ast::Symbol("a"), Ast::Symbol("b")]) +
Ast::Add(vec![Ast::Symbol("c"), Ast::Symbol("d")]) =
    Ast::Add(
        vec![Ast::Symbol("a"), Ast::Symbol("b"),
             Ast::Symbol("c"), Ast::Symbol("d")
            ]
    )

Ast::Add(vec![Ast::Symbol("a"), Ast::Symbol("b")]) +
Ast::Num(1) =
    Ast::Add(
        vec![Ast::Symbol("a"), Ast::Symbol("b"),
             Ast::Num(1)
            ]
    )

Ast::Add(vec![Ast::Symbol("a"), Ast::Num(2)]) +
Ast::Num(1) =
    Ast::Add(
        vec![Ast::Symbol("a"), Ast::Num(3)]
    )

Ast::Add(vec![Ast::Symbol("a")]) +
Ast::Anderes =
    Ast::Add(
        vec![Ast::Symbol("a"), Ast::Anderes]
    )

Ast::Anderes) +
Ast::Anderes =
    Ast::Add(
        vec![Ast::Anderes, Ast::Anderes]
    )
```

## 5.2 Addieren und Multiplizieren (Standardauswertung von Termen)

Die prinzipielle Vorgehensweise um Additionen und Multiplikationen auszuführen orientiert sich an dem Vorgehen aus SymPy. (entsprechender Codeabschnitt aus den Überladungen). Beide Verfahren sind im Grunde identisch, nur ändert sich der entsprechende Operator und das Ergebnis. So wird aus $x + x$ eine Multiplikation der Form $2 * x$. Aus $x * x$ wird die Potenz $x^2$.

Das Verfahren wird exemplarisch für die Addition beschrieben, die Multiplikation wird aber ebenfalls im System implementiert. Kernstück ist eine HashMap der Form
`HashMap<Ast<N>, Ast<N»`. Key und Wert sind hierbei eigenständige Terme. Der Key ist hierbei der eigentliche Term, der in der Addition auftritt. Der Wert ist sozusagen der Multiplikator wie häufig der Term auftritt. Zudem gibt es einige Sonderfälle. Als Beispiel dient der Term $2*x*y+x*y+3+a-a$. Um diesen Zusammenzufassen wird über alle Elemente des Vektors iteriert. Die HashMap ist zu Anfang leer, ein gesondertes "Zahlenergebnis" wird auf 0 gesetzt.

- 1. Wert: Die Multiplikation ist gleich ein Sonderfall. Hier wird versucht eine Zahl aus dem Subterm zu extrahieren, dies ist hier möglich mit der 2. Die HashMap erhält den Eintrag "[x*y] = 2"
- 2. Wert: Wie davor wird wieder versucht eine Zahl zu extrahieren, was hier nicht gelingt. Bei der Multiplikation können wir also somit das neutrale Element 1 für diesen Subterm hinzufügen. Die HashMap erhält nun den aktualisierten Wert "[x*y] = 3"
- 3. Wert: Alle Zahlen, also unser definierter Nummerntyp, und falls es sich bei dem Subterm um eine Addition handelt, können einfach zu dem Zahlenergebnis addiert werden. Hierzu wird einfach die bereits vorhandene Operatorenüberladung genutzt
- 4. Wert: Alle anderen Ausprägungen des `Ast`-Enum (in diesem Fall Symbol) werden ähnlich der Multiplikation behandelt, nur wird hierbei immer der Wert 1 addiert. Die HashMap erhält hier nun den Wert "[a] = 1"
- 5. Wert: Augenscheinlich wieder ein Symbol. Allerdings wurde bereits erwähnt, dass diese Form intern als $+(-1 * a)$ gespeichert wird. Also wird zur HashMap wieder eine Multiplikation hinzugefügt, die den Multiplikator "-1" hat. Somit wird die HashMap aktualisiert mit "[a] = 0"

Nachdem diese Vereinfachungen in der HashMap gespeichert sind, besteht die Möglichkeit auf dieser HashMap durch externe Funktionen noch weitere Vereinfachungen vorzunehmen. Dieses Vorgehen wird noch genauer im Kapitel "Erweitbarkeit in Rust und Beispiele" näher erläutert.

Zum Schluss können die Ergebnisse wieder in die Ausprägung `Ast::Add` überführt werden. Das Zahlergebnis kann hierbei einfach hinzugefügt werden. Bei der HashMap hängt dies vom Wert zum Key ab.

- Wert == 0: Key wird dem Vektor nicht hinzugefügt
- Wert == 1: Key wird dem Vektor hinzugefügt
- Alles andere: Es wird dem Vektor "Ast::Mul(vec![Wert, Key])" hinzugefügt

Um dieses Verfahren zu implementieren, muss für das `Ast`-Enum noch die Tratis `Eq`, `PartialEq` und `Hash` implementiert werden. Erst dann kann der Typ `Ast` als Key in der Map verwendet werden. Im einfachsten Fall, kann dies per Makro geschehen. In unserem geht dies aber nur für `PartialEq`. Da z.B. Vektoren die Traits `Eq` und `Hash` nicht implementieren, müssen wir dies selbst erledigen. Der `Eq` ist dabei aber nur deklarativ, es muss keine Funktion ausgefüllt werden, dies übernimmt der Compiler (https://doc.rust-lang.org/std/cmp/trait.Eq.html). Der `Hash`-Trait kann ebenfalls recht einfach implementiert werden, hier können wir alle vorhandenen Werte als Hash zusammenfassen.

**Ideen zur Verbesserung** Es ist zu überlegen, den Nummerntyp nicht zusammenzufassen, sodass Rationale Zahlen und Floats nebeneinander existieren. In der momentanen Implementierung wird diese Addition zu einem Float vereinfacht. Vorteil: Immer nur sicher ein Zahlenwert vorhanden, Nachteil: kann evtl. ungenauer werden.

Bei der Zusammenfassung in der HashMap kann es natürlich zu Konflikten kommen. Eine andere Idee wäre hier als Key den Term als String zu verwenden. Hierzu müsste aber der Term auf jeden Fall vorher sortiert sein. Permutationen eines Terms ($x * y$ und $y * x$) können sonst nicht abgefangen werden. Hier hat das Hashing den Vorteil, das die Reihenfolge egal ist, da beide Symbole zusammen denselben Hashwert errechnen.

## 5.3 Umgang mit Brüchen, Potenzen und Wurzeln

Um auch genauere Werte zu erlauben, sollen rationale Zahlen in Form von Brüchen implementiert werden. So können mithilfe der Operatorenüberladungen diese dann zusammengefasst und gekürzt werden. Für rationale Zahlen sind im Enum `PrimNum` für Zähler und Nenner nur ganze Zahlen erlaubt, auch negative. Der Term $1/3+1/3$ wird also zu `Num(Rational(2, 3))` ausgewertet. Der Term $1/3+1/3+1/3$ soll selbstverändlich zu `Num(Int(1))` ausgewertet werden.

Terme wie $1/x$ werden durch das CAS in die Form `Pow(Symbol("x"), Num(Int(-1)))` umgeformt. Dabei ist "x" entsprechend die Basis und "-1" der Exponent. In der Standardimplementierung soll es außerdem bereits möglich sein die Potenzregel $a^{b^c} = a^{(b*c)}$ anzuwenden. Durch die bisherige Implementierung der Multiplikation wird außerdem bereits die Potenzregel $x^a * y^a = x^{(a+b)}$ angewendet. Die letzte Regel $x^a * y^a = (x * y)^a$ soll wiederum als erweitere Funktionalität implementiert werden, da hier eine andere Vorgehensweise im Hinblick auf unsere bisherige Datenstruktur notwendig ist.

Glücklicherweise können Wurzeln ebenfalls als Potenzen dargestellt werden, so ist z.B. $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ oder $\sqrt[3]{8} = 8^{1/3}$. So können alle bisherigen Regeln hierrauf einfach angewendet werden. Zudem sollen die Funktionen `sqrt` und `nthroot` im Term verwendet werden können, die dann entsprechende `Ast`-Elemente erzeugen.

Darüberhinaus wird derselbe Algorithmus (Newton's Method) wie in SymPy implementiert um zu prüfen, ob eine Wurzel eine perfektes Ergebnis liefert. In diesem Fall kann das entsprechende Element vereinfacht werden.

## 5.4 Erweitbarkeit in Rust und Beispiele

Um die Erweiterbarkeit des Systems zu gewährleisten wird das Struct `EvalFn` eingeführt. Ein Objekt des Struct soll zur Evaluierung eines Terms mit angegeben werden. Die hinzugefügten Funktionen des entsprechenden Objekts können dann nach allen Standardoperationen den Term weiter vereinfachen, wie z.B. den angesprochenen Sonderfall $cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$, und Konstanten falls gewünscht auswerten. Außerdem wird ein Standard-Objekt vom System bereitgestellt, dass bereits die gängigsten Vereinfachungen vornehmen kann.

Codebeispiel 24: Defintion EvalFn

```
pub struct EvalFn<N> {
    pub adders: Vec<fn(&mut HashMap<Ast<N>, Ast<N>>, &bool)>,
    pub muls: Vec<fn(&mut HashMap<Ast<N>, Ast<N>>, &bool)>,
    pub pows: Vec<fn(&Ast<N>, &Ast<N>, &bool) -> Option<Ast<N>>>,
    pub funcs: Vec<fn(&str, &Vec<Ast<N>>, &bool) -> Option<Ast<N>>>,
    pub consts: Vec<Box<dyn ConstType<N>>>,
}
```

**Allgemeines** Da das Enum `Ast` bereits einen Generic-Parameter enthält, muss dieser ebenfalls im struct angegeben werden. Die Felder sind allesamt Vektoren, die entsprechende Elemente zur vereinfachung Enthalten. Der Parameter mit dem Typ `&mut HashMap<Ast<N>` wurde bereits genauer vorgestellt. Durch die Übergabe der Map anstelle des ausgewerteten `Ast`-Typs erhoffe ich mir eine einfachere Berechnung. So kann direkt über die Keys geprüft werden, ob ein Term enthalten ist, der ansonsten evtl. verschachtelt in einer Multiplikation liegt.

**adders** Funktionen, die den Typ `Ast::Add` weiter vereinfachen können. So können entsprechend die Einträge der HashMap geprüft und verändert werden. Der zweite Parameter vom Typ `bool` gibt an, ob es sich um eine explizite Berechnung handeln soll. Dies soll noch Relevant werden, wenn auch Ungenaue Werte berechnet werden sollen. Ein Beispiel ist die bereits mehrfach angesprochene Vereinfachung $cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$.

**muls** Funktionen, die den Typ `Ast::Mul` weiter vereinfachen können. Die Parameter sind identisch wie schon bei `adders`. Dieses Feld ist der Vollständigkeithalber implementiert, da ich kein Beispielterm finden konnte, bei dem das relevant ist.

**pows** Funktionen, die die Basis und den Exponenten erhalten und Auswerten können. So kann z.B. der Term $(x*4)^(1/2)$ zu $x^(1/2)*2$ vereinfacht werden. Auch hier gibt es wieder die Möglichkeit eine Explizite Berechnung zu erwzwingen. Diese Funktion besitzt darüberhinaus einen Rückgabewert. Da der entsprechende `Ast` nicht direkt bearbeitet wird, da sich dieser auch in der Ausprägung verändern kann.

**funcs** Funktionen, die angegebene Funktionen im Term umschreiben bzw. auswerten sollen. So kann z.B. der Term $sin(0)+2$ direkt vereinfacht werden in $0+2 = 2$. Der Term $sqrt(4)$ kann zu 2 vereinfacht werden. Dabei bleiben Funktionen, die `EvalFn` nicht bekannt sind natürlich im Term unverändert erhalten. Falls eine Auswertung nicht möglich ist, ist dies ebenfalls der Fall. Ansonsten steht der Funktion natürlich immer offen den Term entsprechend in ein anderes `Ast`-Objekt umzuwandeln.

**consts** Structs, die den Trait `ConstType` implementieren. Diese werden ausgewertet, sobald bei der Berechnung Ungenauigkeiten erlaubt werden.

## 5.5 Implementierung von Substitution

## 5.6 Implementierung von expand

## 5.7 Implementierung von simplify

# 6 Erweiterte Funktionalitäten (Beispiele)

## 6.1 Terme mit floats berechnen (Ungenauigkeit in Kauf nehmen)

## 6.2 Implementierung der limit-Funktion

## 6.3 Implementierung einer to string-Methode

# 7 Vergleich zu SymPy

## 7.1 Korrektheit und Unterschiede gegenüber SymPy

## 7.2 Performancevergleich

# 8 Fazit

## Literatur

[1] Jim Blandy und Jason Orendorff: *Programming Rust: Fast, Safe Systems Development*. O'Reilly Media, Inc, 1. Auflage, 2018, ISBN 978-1-491-92728-1.

[2] Rust Book: *Performance of Code Using Generics*. `https://doc.rust-lang.org/book/ch10-01-syntax.html#performance-of-code-using-generics`. [abgerufen am 13.06.2021].

[3] Rust Book: *The Borrow Checker*. `https://doc.rust-lang.org/book/ch10-03-lifetime-syntax.html#the-borrow-checker`. [abgerufen am 13.06.2021].

[4] Rust Book: *Using Trait Objects That Allow for Values of Different Types*. `https://doc.rust-lang.org/book/ch17-02-trait-objects.html`. [abgerufen am 13.06.2021].

[5] Rust Book: *Validating References with Lifetimes*. `https://doc.rust-lang.org/book/ch10-03-lifetime-syntax.html`, 2021. [abgerufen am 24.07.2021].

[6] Python docs: *Numeric Types - int, float, complex*. `https://docs.python.org/3.8/library/stdtypes.html#numeric-types-int-float-complex`. [abgerufen am 09.04.2022].

[7] Rahul Sharma und Vesa Kaihlavirta: *Mastering RUST*. Packt Publishing Ltd., second edition Auflage, 2019, ISBN 978-1-78934-657-2.