Examen-2020-mates-I.pdf

ATePasasBro

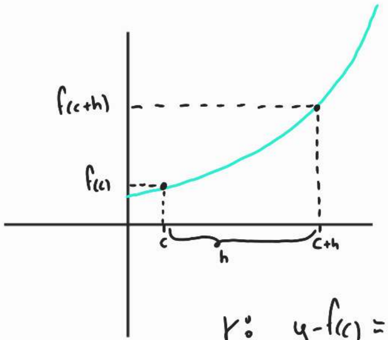
Matemáticas I

1º Grado en Bioquímica y Ciencias Biomédicas

Facultad de Ciencias Biológicas
Universitat de València

Examen 2020

1. (1 pto.) Explica la derivada como pendiente de la gráfica de una función.



Tenemos los ptos:

$(c, f(c))$
$(c+h, f(c+h))$ $\longrightarrow$ $r: \dfrac{x-c}{\cancel{c}+h-\cancel{c}} = \dfrac{y-f(c)}{f(c+h)-f(c)}$

$$r: \quad y - f(c) = \underbrace{\boxed{\frac{f(h+c)-f(c)}{h}}}_{=f'(c)}(h-c) \qquad r: \quad y-f(c) = \frac{f(h+c)-f(c)}{h}(h-c)$$

$y - f(c) = f'(c) \cdot (h-c)$ Recta tangente en $x=c$

2. (1 pto.) Demuestra que si una función f tiene un máximo o mínimo local en c, y si f es derivable en c (es decir, existe $f'(c)$) entonces $f'(c) = 0$.

Si $h>0$ y $f(c)$ es un máximo local:

$f(c) \geq f(c+h)$ $\qquad f(c+h) - f(c) \leq 0$ $\qquad \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

Si $h<0$ y $f(c)$ es un máximo local:

$f(c) \geq f(c+h)$ $\qquad f(c+h) - f(c) \geq 0$ $\qquad \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

por lo que $f'(c)$ solo puede ser 0

$f'(c) = 0$

3. (2 ptos.) Dada la curva de ecuación $(x-y)^2 - 16(x+y) = 0$, se pide:

a) Ecuación de la recta tangente en el punto $A(0,16)$.

b) Ecuación de la recta tangente en el punto $B(16,0)$.

c) Calcula el ángulo que forman las rectas y su punto de corte C.

$(x-y)^2 - 16(x+y) = 0$ $\qquad$ $x^2 - 2xy + y^2 - 16x - 16y = 0$

$2x - 2y - 2xy' + 2y \cdot y' - 16 - 16y' = 0$ $\qquad$ $x - y - xy' + y \cdot y' - 8 - 8y' = 0$

$xy' - yy' + 8y' = x - y - 8$ $\qquad$ $y'(x-y+8) = x-y-8$

$y' = \dfrac{x-y-8}{x-y+8}$

En el pto $(0,16)$

$y' = \dfrac{0-16-8}{0-16+8} = \dfrac{-24}{-8} = 3$

$y - 16 = 3x$ $\qquad$ $y = 3x + 16$

b] En el punto $(16,0)$

$y' = \dfrac{16-0-8}{16+8} = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad$ $y = \frac{1}{3}(x-16)$

$y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{16}{3}$

c] Para calcular los ángulos, sacamos los vectores de cada recta:

Recta A: $\vec{u}(1,3)$ $\qquad$ Recta B:

$\dfrac{v_2}{v_1} = 3$ $\qquad$ $v_2 = 3v_1$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} =$

Pto de corte:

$3x + 16 = \dfrac{x}{3} - \dfrac{16}{3}$ $\qquad$ $3x - \dfrac{x}{3} = -16 - \dfrac{16}{3}$

$\dfrac{9x - x}{3} = \dfrac{-48-16}{3}$ $\qquad$ $8x = -64$ $\qquad$ $x = -8$

$y = 3 \cdot (-8) + 16 \qquad y = -24 + 16 \qquad y = -8$

pto de corte: $(-8, -8)$

5. (2 ptos.) Utilizando el desarrollo de Mc Laurin hasta orden 4 de la función $y = \cos(2x)$, calcula una aproximación del volumen de la superficie de revolución generada cuando la curva gira sobre el eje X en $[0, \pi]$.

Al ser Mc Laurin, tomamos $a = 0$ $\qquad f(x) = \cos(2x)$

$f(a) = \cos 0 = 1$

$$f(x) \approx f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \frac{1}{4!} f''''(a)(x-a)^4$$

$f'(x) = -2 \operatorname{sen} 2x \qquad f''(x) - 4 \cos 2x \qquad f'''(x) = 8 \operatorname{sen} 2x$

$f''''(x) = 16 \cos 2x \qquad f'(0) = 0 \qquad f''(0) = -4 \qquad f'''(0) = 0$

$f''''(0) = 16$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot (16) \cdot x^4 \qquad f(x) = 1 - 2x^2 + \frac{x^4 16}{24}$$

$$f(x) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \pi \left(\frac{2x^4}{3} - 2x^2 + 1 \right)^2 dx$$

$$\int_0^{\pi} \pi \cdot (\cos 2x)^2 \, dx = \pi \int_0^{\pi} (\cos 2x)^2 \, dx$$

$$\int (\cos 2x)^2 \, dx = \int \frac{(\cos(t))^2}{2} dt = \frac{1}{2} \int (\cos t)^2 \, dt$$

$t = 2x$

$dt = 2dx$

$dx = \frac{dt}{2}$

6. (1'5 ptos.) Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$xy' - 2y - 3x^3 = 0$$

sabiendo que $y(1) = 2$.

$xy' - 2y - 3x^3 = 0$ $\qquad y' = \dfrac{3x^3 + 2y}{x}$ $\qquad y' = 3x^2 + \dfrac{2y}{x}$

$y' - \dfrac{2y}{x} = 3x^2$ $\qquad P(x) = -\dfrac{2}{x}$ $\qquad Q(x) = 3x^2$

$\rho(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

$y = \dfrac{1}{\rho}\int \rho\, Q(x)\, dx$ $\qquad y = x^2 \int \dfrac{1}{\cancel{x^2}}\, 3\cancel{x^2}\, dx$

$y = x^2 \int 3\, dx$ $\qquad y = x^2 \cdot (3x + C$ $\qquad y = 3x^3 + x^2 C$

$2 = 3 \cdot 1^3 + 1 \cdot C$ $\qquad C = -1$

$y = 3x^3 - x^2$

7. (1'5 ptos.) Debido a un vertido tóxico, las aguas de un lago que inicialmente (t = 0) estaban limpias, se contaminan. Sea $y(t)$ la cantidad de contaminante (en gramos) por m^3 en el instante t medido en días. Se sabe que $y(t)$ sigue la ley:

$$y' = k(a - y),$$

Siendo el valor de $k = 137gr/m^3$ y $a = 1/2\text{día}^{-1}$. Se pide:

a) Calcular los puntos de equilibrio del sistema.

b) Resuelve la ecuación y comprueba el resultado anterior.

c) ¿Después de cuántos días tendremos un nivel de contaminación de 100?

a] $y' = 137(1/2 - y)$ Para estar en el equilibrio:

$y' = 0$ $\quad 0 = 137(1/2 - y) \quad 0 = 1/2 - y \quad y = 1/2$

---

b] $\frac{dy}{dx} = K(a-y) \quad \int \frac{dy}{a-y} = \int K\,dt \quad -\ln a-y = Kt + C$

$a - y = c \cdot e^{Kt} \quad -y = c \cdot e^{Kt} - a \quad y = a - c \cdot e^{Kt} \quad y(t) = \frac{1}{2} - c \cdot e^{137t}$

$t(0) = 0$

$0 = \frac{1}{2} - c \cdot e^{0} \quad c = 1/2 \quad y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-137t}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-137t} = \frac{1}{2} - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} e^{-137t} = \frac{1}{2} - 0 = 1/2$

c] $y(t) = 100 \rightarrow t?$

$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-137t} = 100 \quad -\frac{1}{2} e^{-137t} = 100 - 1/2 \quad e^{-137t} = -200 + 1$

$-137t = \ln -199$ $\quad t = \nexists$ porque se estabiliza al llegar a $\frac{1}{2}$