examenes-resueltos-mates-I.pdf

juanjo_cf

Matemáticas I

1º Grado en Bioquímica y Ciencias Biomédicas

Facultad de Ciencias Biológicas
Universitat de València

ENERO 2019

1.- $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. (x_0, y_0) $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$.

a) Recta tangente (x_0, y_0).

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x_0) = x_0^{2/3} + y_0^{2/3} = 1 \Rightarrow x_0^{2/3} + y_0^{2/3} - 1$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

$$f'(x_0) = \frac{2}{\sqrt[3]{x_0}} + \frac{2}{\sqrt[3]{y_0}}$$

$$y = x_0^{2/3} + y_0^{2/3} - 1 + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x_0}} + \frac{2}{\sqrt[3]{y_0}}\right)(x - x_0)$$

$$= x_0^{2/3} + y_0^{2/3} - 1 + \frac{2x}{\sqrt[3]{x_0}} - \frac{2x_0}{\sqrt[3]{x_0}} + \frac{2x}{\sqrt[3]{y_0}} - \frac{2x_0}{\sqrt[3]{y_0}}$$

b) Cortes con ejes.

eje x: $y = 0$ eje y: $x = 0$

$$d(a,b) = \sqrt{(b-a)^2}$$

2.- $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx$

$(\ln x)^2 = u$ $2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = du$ $(\ln x)^2 \cdot x - 2\int \ln x \, dx$

$1 = dv$ $x = v$

$u = \ln x$ $du = \frac{1}{x}$

$dv = 1$ $v = x$

$\ln x \cdot x - x$

$$= (\ln x)^2 \cdot x - 2(x \cdot \ln x - x) \Big]_1^e$$

$= (\ln x)^2 \cdot x - 2\,(x \cdot \ln x - x)\Big]_1^e$

$= e - 2$

3.- $xy' = y + xe^{y/x}$

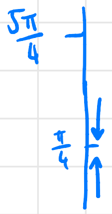
$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

$y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$

4.- $1 - tg\,y = (1 + tg^2 y)\,y'$

a) Equilibrio y estabilidad.

$$y' = \frac{1 - tg\,y}{1 + tg^2 y} \Rightarrow 1 - tg\,y = 0 \qquad 1 = tg\,y \Rightarrow y = 45° = \frac{\pi}{4} + \pi k$$



solución estable

b) Solución general.

$$y' = \frac{1 - tg\,y}{1 + tg^2 y} \Rightarrow \frac{1 + tg\,y^2}{1 - tg\,y}\,dy = dx$$

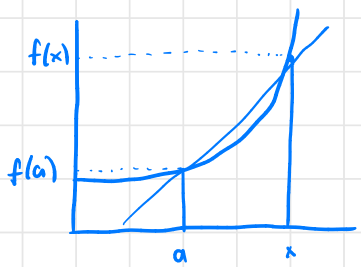
$$\tan y = t \Rightarrow 1 + \tan^2 y\,dy = dt$$

$$\frac{1 + t^2}{(1 - t)(1 + t)}\,dt = dx \Rightarrow \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\,dt = dx$$

ENERO 2020

1.- Derivada como pendiente de la gráfica de una función.

La derivada es la tasa de cambio instantáneo, cómo cambia y respecto de x en el instante t.
Si pensamos que una recta secante muestra cómo cambia y respecto de x en un intervalo:



$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

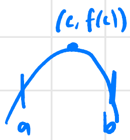
la derivada sería esa secante para un solo punto, es decir, la recta tangente en $x = a$, esto se consigue si la recta toca Gf en un solo punto, a medida que x se aproxima a a.

$$f'(a) = m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2.- Si f tiene un máximo o mínimo en c (y es derivable en c), demuestra $f'(c) = 0$.

asumamos máximo:

si f tiene un máximo en c, significa que para un determinado intervalo $[a, b]$ $f(c) \geq f(x)$, la función pasará de decrece a crecer. si esto ocurre, en algún momento la tg debe ser horizontal



3.- $(x-y)^2 - 16(x+y) = 0$

a) Tangente en $A(0,16)$.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 16x - 16y = 0$$

$$2x - (2y + 2x\cdot y') + 2y\cdot y' - 16 - 16y' = 0$$

$$2x - 2y - 2xy' + 2y\cdot y' - 16 - 16y' = 0$$

$$2x - 2y - 16 = 16y' + 2xy' - 2y\cdot y'$$

$$y' = \frac{2x - 2y - 16}{16 + 2x - 2y} = 0$$

$$f'(0) = \frac{-2\cdot 16 - 16}{16 - 2\cdot 16} = \frac{-48}{-16} = 3$$

$$f(0) = 16$$

$$y - 16 = 3x \Rightarrow y = 3x + 16$$

b) Tangente en $B(16,0)$.

$$f'(16) = \frac{2\cdot 16 - 16}{16 + 2\cdot 16} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}(x - 16)$$

c) Corte y ángulo.

$$3x + 16 = \frac{x}{3} - \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{8}{3}x = -\frac{16}{3} - \frac{48}{3} = \frac{-64}{3} \Rightarrow 8x = -64 \Rightarrow x = -8$$

$$(-8, -8) \qquad tg\,\alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right| = \frac{\frac{1}{3} - 3}{1+1} = \frac{-\frac{8}{3}}{2} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

5. Mc Laurin hasta orden 4 $y = \cos(2x)$ aproximación volumen cuando curva gira sobre eje x $[0, \pi]$.

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4$$

$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin(2x)\cdot 2 \Rightarrow f'(0) = 0$
$f''(x) = -4\cdot\cos(2x) \Rightarrow f''(0) = -4$
$f'''(x) = 8\cdot\sin(2x) \Rightarrow f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = 16\cdot\cos(2x) \Rightarrow f^{IV}(0) = 16$

$$T_n(x) = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3}$$

$$\pi\int_0^{\pi}(f(x))^2$$

$$f(x) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} \Rightarrow f(x)^2 = 1 - 4x^2 + \frac{16}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^6 + \frac{4x^8}{9}$$

$$\pi\left(x - \frac{4x^3}{3} + \frac{16x^5}{15} - \frac{8x^7}{21} + \frac{4x^9}{81}\right)\Big]_0^{\pi}$$

7.- $y' = k(a-y)$ $k = 137\ gr/m^3$, $a = 1/2\ día^{-1}$

a) Equilibrio.

$y' = 0$ $a - y = 0 \Rightarrow$ si $y = \frac{1}{2}$

b) Resolver.

$\frac{dy}{dx} = k(a-y) \Rightarrow \frac{dy}{a-y} = k\,dx \Rightarrow -\ln(a-y) = kt + C_1$

$a - y = e^{-kt} \cdot C_1 \Rightarrow y = a - e^{-kt} \cdot C_1 = \frac{1}{2} - e^{-137t} \cdot C_1$

si $y(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$

$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-137 \cdot t} = \frac{1}{2}$ ✓ coincide

c) Tras cuántos días $y(t) = 100$

$100 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-137 \cdot t} \Rightarrow 99'5 = -\frac{1}{2} e^{-137 \cdot t} \Rightarrow t = \ln(99'5 \cdot -2)$

no se puede alcanzar

Enero 2021

2.- Punto de $y - x^2 - 1 = 0$ más cercano al origen.

$y = -x^2 + 1$ parábola  vértice $(0,1)$

punto $(0,1)$ es el más cercano al origen

5.- $$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

a) $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln(x)} = x$$

$$(\mu \cdot y)' = x \cdot \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$x \cdot y = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + C_1 \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{2} \ln(x^2-1) + C_1}{x}$$

$$\sqrt{2} = \frac{\frac{1}{2} \ln((\sqrt{2})^2 - 1) + C_1}{\sqrt{2}} = 2$$

$$\ln(1) + C_1 = 4 \Rightarrow C_1 = 4$$

$$y = \frac{\frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + 4}{x}$$

b) $\lim_{x \to \infty} y(x)$.

como el logaritmo crece + despacio,

$\lim_{x \to \infty} = 0$.

Junio 2021

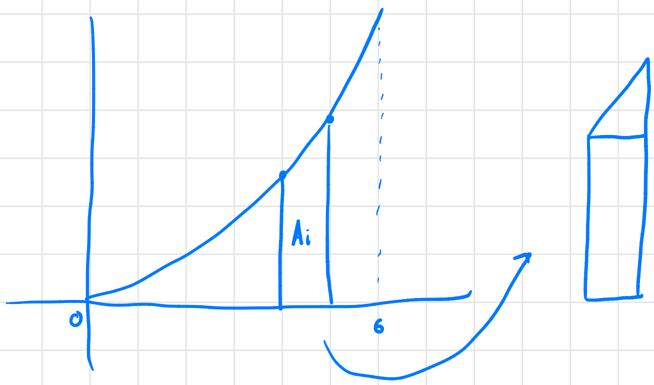
1.- Método trapecios, $y=x^2$, $x \in [0,6]$ con $h=1$.

este método nos sirve para aproximar el valor de una integral definida.

1.- dividimos $[0,6]$ en n partes iguales de longitud

$\frac{b-a}{n}=h \Rightarrow \frac{6-0}{n}=1 \Rightarrow n=6$ $\quad x_0=a,\ x_1=a+h \dots x_k=a+kh$

2.- aproximamos mediante el área de un trapecio en cada subintervalo, sus vértices están sobre la gráfica de f y su base mide h



el área de cada trapecio es la suma de un rectángulo y un triángulo:

$$f(a)\cdot h + \frac{1}{2}h\left(f(x_1)-f(a)\right) = \frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(a)\right)$$

repetimos esto para las áreas de todos los trapecios

$$A_T \simeq \frac{h}{2}\left(f(a)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)\cdots f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

como los extremos no se repiten, los sacamos y dividimos todo por 2

$$A_T \simeq h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right)$$

$A_T \simeq \frac{1}{2}\left(2(1+4+9+16+25)+36\right) = 73u^2$

$A_T \simeq 18 + \sum_{k=1}^{5} f(k) = 18 + (1+4+9+16+25) = 73u^2$

2- Máximos y mínimos $y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + x$.

Dominio: $x \neq 1$

si $x > 1 \Rightarrow x+1 > 0$ siempre

si $x < 1 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x < -1$

Dom $f(x)$: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$$y' = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} + 1$$

4- Valores tg horizontal, recta normal en $(1,0)$. $2y^3 + y^2 - y^5 - (x^4 - 2x^3 + x^2) = 0$

$$6y^2 \cdot y' + 2y \cdot y' - 5y^4 \cdot y' - (4x^3 - 6x^2 + 2x) = 0$$

$$y'(6y^2 + 2y - 5y^4) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$y' = \frac{4x^3 - 6x^2 + 2x}{6y^2 + 2y - 5y^4} = 0 \Rightarrow$$

$4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \qquad x_1 = 0$

$4x^2 - 6x + 2 = 0$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{8} = \frac{6 \pm 2}{8} \qquad x_2 = \frac{1}{2} \qquad x_3 = 1$

$y = f(1) + \frac{1}{f'(1)}(x-1)$ (en $x=1$ la tg es horizontal)

recta vertical pasa por $(1,0) \Rightarrow x = 1$

$y'(1) = \cancel{\exists}$

6.- $y'(t) = y(t)(1 - y(t)) \quad y(0) = 2$

$$\frac{dN}{dt} = N(1-N) \Rightarrow \frac{dN}{N(1-N)} = dt$$

$$\int \frac{dN}{N(1-N)} = t + C_1$$

$$= -\int \frac{dN}{N^2 - N} = t + C_1 \Rightarrow -\left(\frac{dN}{N-1} - \frac{dN}{N}\right) = t + C_1$$

$$\ln(N) - \ln(N-1) = t + C_1$$

$$\ln N = \ln(N-1) + t + C_1$$

$$N = (N-1) \cdot e^t \cdot C_1$$

$$N = Ne^tC_1 - e^tC_1$$

$$N = \frac{e^t C_1}{e^t C_1 - 1}$$

si $N(0) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{C_1}{C_1 - 1} \Rightarrow C_1 = 1$

$$N(t) = \frac{e^t}{e^t - 1}$$

si $\lim_{t \to \infty} \frac{e^t}{e^t - 1} = 1$ (a tiempo infinito solo hay 1 contagiado)

Enero 2022

1: Mc Laurin hasta orden 3, calcula 'a':

$$\lim_{x\to 0} \frac{a e^{ax} \cdot x + x}{\sin ax \cdot \cos x} = 2.$$

Lo que nos causa problemas es $\sin ax$.

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 = ax - \frac{a^3x^3}{3!}$$

$f(0) = 0$

$f'(x) = a \cdot \cos(ax) \Rightarrow f'(0) = a$

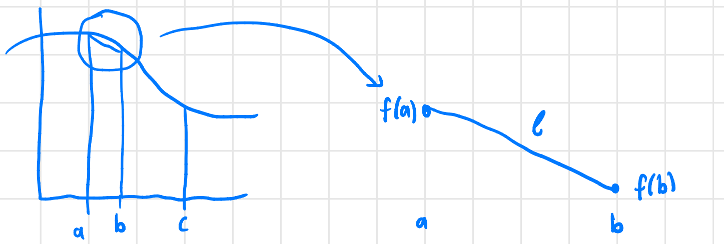
$f''(x) = a^2 \cdot -\sin(ax) \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = a^3 \cdot -\cos(ax) \Rightarrow f'''(0) = -a^3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a e^{ax} x + x}{\left(ax - \frac{a^3x^3}{3!}\right)\cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{a e^{ax} + 1}{\left(a - \frac{a^3x^2}{3!}\right)\cos x} = \frac{a+1}{a} = 2 \Rightarrow a = 1$$

2: Longitud curva $y = x^{3/2}$. $[0, 1]$.

Con una curva no podemos calcular su longitud directamente, debemos dividir en subintervalos y sumar las rectas



aplicando pitágoras: $l^2 = (b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2$

reorganizamos para poder aplicar el T.V.M.

$$l^2 = (b-a)^2 \left[1 + \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)^2 \right]$$ como tiendo a tener ∞ subintervalos, $b \to a$

$f'(\alpha)$

$$l = (b-a)\sqrt{1 + f'(\alpha)^2}$$

$= ||k|| =$ longitud del subintervalo

si aplicamos la suma de Riemann ya que buscamos sumar todos los subintervalos:

$$L = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\alpha)^2} \cdot ||k||$$

como $n \to \infty$ (mayor nº intervalos posible)

$$L = \int_a^c \sqrt{1 + f'(\alpha)^2}$$ (la suma infinita de longitudes de los subintervalos es una integral)

$$f'(x) = \tfrac{3}{2} x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)^2 = \tfrac{9}{4}x$$

$$L = \int_0^1 \left(1 + \tfrac{9}{4}x\right)^{1/2} = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{9} \left(1 + \tfrac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big]_0^1 = \tfrac{8}{27} \cdot \left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2} - \tfrac{8}{27}$$

para tener la derivada

$$\int_0^1 \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{9}{4} \left(1 + \tfrac{9}{4}x\right)^{1/2}$$

potencia original

3- $2ay + by^2 + 3x^2 + 6x = 0$

a) $y(0) = -2$, $y(-1) = 1$

si $y(0) = 2 \Rightarrow -4a + 4b = 0 \Rightarrow a = b$

si $y(-1) = 1 \Rightarrow 2a + b + 3 - 6 = 0 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = b = 1$

b) Tangente horizontal.

$2y + y^2 + 3x^2 + 6x = 0 \longrightarrow 2 \cdot y' + 2y \cdot y' + 6x + 6 = 0$

$y' = \frac{-6x - 6}{2 + 2y}$ $\quad -6x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

si $x = -1 \Rightarrow 2y + y^2 - 3 = 0$ $\quad y_1 = 3 \quad y_2 = 1$

$(-1, 3)$ y $(-1, 1)$

c) Tangente vertical.

$2 + 2y = 0 \Rightarrow y = -1$

si $y = -1$: $3x^2 + 6x - 1 = 0$ $\quad x = \frac{1}{3}(3 \pm \sqrt{12})$

$(\frac{1}{3}(3 \pm \sqrt{12}, -1)$

5(2ptos.) Se sabe que cierta especie animal en peligro de extinción está desapareciendo a razón del 10 % anual debido a los depredadores de la zona. No obstante, los guardas forestales introducen anualmente 100 animales de la misma especie traídos de otro lugar para evitar su extinción en la región. Si denotamos por $P(t)$ a la población en el instante t, se pide:

a) Plantea la ecuación diferencial y estudia la estabilidad del sistema y los puntos de equilibrio.

b) Si en 1992, cuando se declaró especie en extinción, habían 300 animales, calcula la cantidad de población en cualquier instante.

c) ¿Llegará la población a desaparecer?

d) Calcula la cantidad de animales que hay actualmente en la reserva.

a) $\frac{dP}{dt} = -0'1P + 100$

$-0'1P + 100 = 0 \Rightarrow 0'1P = 100 \Rightarrow P = 1000$

1000 $\downarrow\uparrow$ es una solución estable

b) $P(0) = 300$. $P(t)$.

$\frac{dP}{-0'1P + 100} = dt \Rightarrow -10 \ln|-0'1P + 100| = t + C_1$

$\ln(-0'1P + 100) = -\frac{t}{10} + C_1 \Rightarrow -0'1P + 100 = e^{-\frac{t}{10}} \cdot C_1$

$-0'1P = C_1 e^{-\frac{t}{10}} - 100 \Rightarrow P = C_1 e^{-\frac{t}{10}} + 1000$

$P(0) = C_1 + 1000 = 300 \Rightarrow C_1 = -700$

$P(t) = 1000 - 700 e^{-0'1t}$

c) $P(t) = 0$

$1000 = 700 e^{-0'1t} \Rightarrow \frac{10}{7} = e^{-0'1t} \Rightarrow \frac{\ln(\frac{10}{7})}{-0'1} = t$

tiempo no puede ser negativo, no desaparece

6(2ptos.) Un tanque con una capacidad para 10 litros de agua contiene inicialmente 1 kilo de sal disuelta en V litros de agua. Supongamos que 3 litros de agua salada que contiene 2 kilos de sal disuelta por litro fluyen hacia el tanque cada minuto y que la mezcla (que se mantiene uniforme al agitarla) sale del tanque al ritmo de 2 litros por minuto. Sabiendo que al cabo de 1 minuto tenemos en el tanque 14/3 kilos de sal, se pide:

a) Plantea la ecuación diferencial y calcula el volumen incial de agua (ayuda: $\sqrt{324} = 18$.)

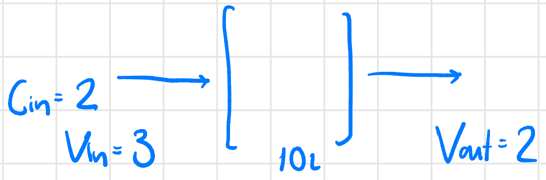
b) ¿Qué cantidad de sal tendremos al cabo de 10 minutos?

c) ¿En qué instante se llenará el tanque?

d) ¿Cuál será la concentración de agua en sal cuando el tanque se llene?

a) $Q(t) =$ cantidad de sal en instante t

$Q(0) = 1$
$Q(1) = \frac{14}{3}$
(vol. aumenta 1L/min)



$$Q(t) = 6 - \frac{Q(t) \cdot V_{out}}{V_0 + V_{in}t - V_{out}t} = 6 - \frac{2Q}{V+t}$$

$$Q' + \frac{2Q}{V+t} = 6 \quad \text{EDO lineal}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{v+t} dt} = e^{2 \cdot \ln(v+t)} = (v+t)^2$$

$$(\mu \cdot Q)' = 6(v+t)^2$$

$$\downarrow$$

$$(v+t)^2 \cdot Q = 2(v+t)^3 + C_1 \Rightarrow Q = \frac{2(v+t)^3 + C_1}{(v+t)^2} = 2(v+t) + \frac{C_1}{(v+t)^2}$$

si $Q(0) = 1 \Rightarrow 1 = 2v + \frac{C_1}{v^2} \Rightarrow C_1 = (1-2v) \cdot v^2$

si $Q(1) = \frac{14}{3} \Rightarrow \frac{14}{3} = 2(v+1) + \frac{v^2(1-2v)}{(v+1)^2}$

$$\frac{14}{3} = 2(v+1) + \frac{v^2(1-2v)}{(v+1)^2} \Rightarrow \frac{14}{3} = 2v + 2 + \frac{v^2(1-2v)}{(v+1)^2} \Rightarrow \frac{8}{3} = 2v + \frac{v^2(1-2v)}{(v+1)^2}$$

$$\frac{8}{3}(v+1)^2 = 2v(v+1)^2 + v^2(1-2v)$$

$$\frac{8}{3}(v^2+2v+1) = 2v^3 + 4v^2 + 2v + v^2 - 2v^3 = 5v^2+2v$$

$$\frac{8}{3}v^2 + \frac{16}{3}v + \frac{8}{3} = 5v^2 + 2v \Rightarrow 8v^2 + 16v + 8 = 15v^2 + 6v$$

$$7v^2 - 10v - 8 = 0$$

$$v = \frac{10 \pm \sqrt{100+224}}{14} = \frac{10 \pm \sqrt{324}}{14}$$

debe ser >0, luego, $v_0 = \frac{28}{14} = 2$ $\qquad G = v^2(1-2v) = -12$

b) $Q(10)$.

$$2(2+10) - \frac{12}{144} = 24 - \frac{1}{12}$$

c) $Q(t) = 10$.

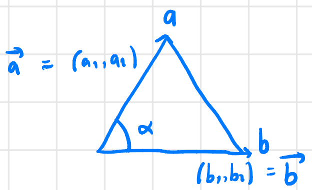
$$V_0 + t = 10 \Rightarrow t = 8$$

d) Cuando se llene.

$$\frac{Q(8)}{10}$$

Enero 2016 BT

1.- Ángulo entre (a_1, a_2) y (b_1, b_2).



$$|a-b|^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ba + b^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2ab$$

$$\cancel{|a|^2} + \cancel{|b|^2} - \cancel{2}ab \underset{\uparrow}{=} \cancel{|a|^2} + \cancel{|b|^2} - \cancel{2}|a||b|\cdot\cos\alpha$$

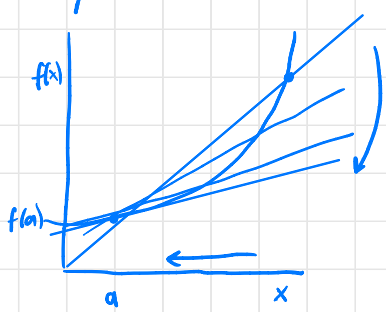
tma. cos

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a|\cdot|b|}$$

2.- Significado derivada $y = f(x)$ en $x = a$.

la derivada es la variación puntual de $f(x)$ respecto de x en el punto a.

pensamos en cómo varía y respecto de x:

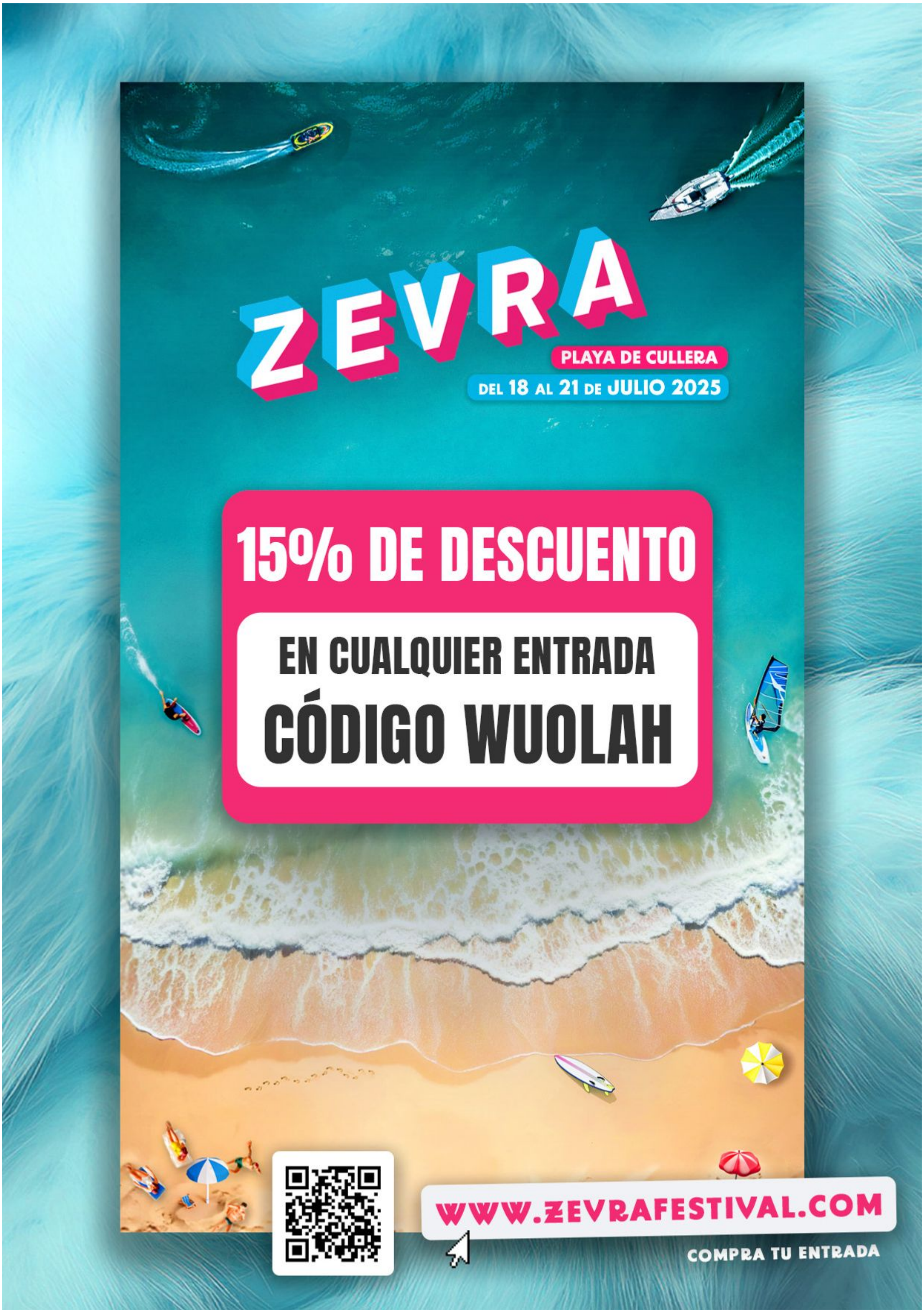


$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

para halla la variación instantánea en 'a' empleamos la pendiente de la recta tangente, que solo toca a f en el punto a.

esta se consigue cuando en la pendiente de la secante la x tiende a a.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ si $x \to a \Rightarrow m_{sec} \to m_T$


ZEVRA
PLAYA DE CULLERA
DEL 18 AL 21 DE JULIO 2025
15% DE DESCUENTO
EN CUALQUIER ENTRADA
CÓDIGO WUOLAH
WWW.ZEVRAFESTIVAL.COM
COMPRA TU ENTRADA

3.- $g'(c) = \frac{g(1) - 2c\,g(c)}{c^2}$

como $f(x) = x^2 g(x)$, f es una multiplicación de funciones continuas y derivables, será continua y derivable.

por T.V.M $\Rightarrow$ $\exists$ $c \in [0,1]$ con $f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1}$

$f(c) = c^2 g(c)$ $\Rightarrow$ $f(1) = g(1)$ $\Rightarrow$ $f(0) = 0$

$f'(c) = g(1)$

$f'(c) = 2c \cdot g'(c)$

$g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ $\Rightarrow$ $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x^2 - f(x) \cdot 2x}{x^4}$

$$g'(c) = \frac{f'(c) \cdot c^2 - f(c) \cdot 2c}{c^4} = \frac{g(1) \cdot c^2 - c^2 \cdot g(c) \cdot 2c}{c^4} = \frac{g(1) - g(c) \cdot 2c}{c^2}$$

4 a) Equilibrio en EDO.

una solución $y(x) = a$ constante para todo $x \in \mathbb{R}$

las soluciones que surgen cuando $y'(x) = 0$.

b) EDOs autónomas.

son un caso particular de EDOs separables, de la forma $y' = f(y)$.

no aparece explícitamente la variable independiente x/t,

se estudian con métodos cualitativos (conociendo el comportamiento de las soluciones sin resolver la EDO

c) Equilibrio, estabilidad.

se buscan los valores de y que hacen que $y' = 0$. (y^*)

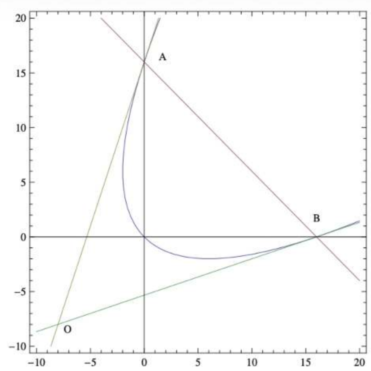
estudiamos el signo de $f(y)$ antes y después de cada y^*

y lo representamos en un diagrama de fase estable → si toda solución con condición inicial cerca de $y=y^*$ se aproxima a y^* conforme $t \to \infty$

inestable → si toda solución con condición inicial cerca de $y=y^*$ se aleja de y^* conforme $t \to \infty$

(inestable → estable a un lado de y^* e inestable al otro)

1.- $(x-y)^2 = 16(x+y)$ $A(0,16)$, $B(16,0)$.



a) Recta pasa por A y B.

$\vec{v} = (0-16, 16-0) = (-16, 16)$

$\begin{cases} x = -16t \\ y = 16 + 16t \end{cases}$ $\qquad \dfrac{x}{-16} = \dfrac{y-16}{16} \Rightarrow 16x + 16y - 16^2 = 0$

$x + y - 16 = 0 \Rightarrow y = -x + 16$

b) Recta tg en $(0,16)$.

$x^2 - 2xy + y^2 = 16x + 16y \Rightarrow 2x - 2y - 2x \cdot y' + 2y \cdot y' = 16 + 16y'$

$2x - 2y - 16 = 16y' + 2xy' - 2yy'$

$y' = \dfrac{2x - 2y - 16}{16 + 2x - 2y} \Rightarrow \quad y' = \dfrac{2 \cdot 0 - 2 \cdot 16 - 16}{16 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 16} = \dfrac{-48}{-16} = 3$

$f(0) = 16$

$y = 3x + 16$

c) Recta tg (16,0).

$$y' = \frac{2x - 2y - 16}{16 + 2x - 2y} \Rightarrow y' = \frac{2\cdot16 - 16}{16 + 2\cdot16} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}(x-16) = \frac{x}{3} - \frac{16}{3}$$

d) Lados ABO.

¿corte ambas rectas?

$$3x + 16 = \frac{x}{3} - \frac{16}{3} \Rightarrow 8x = -16 - 48 \Rightarrow 8x = -64 \Rightarrow x = -8$$

$$(-8,-8) = O$$

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(16-0)^2 + (0-16)^2} = 16\sqrt{2}$$

$$d(A,O) = |\vec{AO}| = \sqrt{(-8)^2 + (-8-16)^2} = 8\sqrt{10}$$

$$d(B,O) = |\vec{BO}| = \sqrt{(-8-16)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{10}$$

e) Área.

(el triángulo es isósceles)

calculamos la altura por pitágoras

$$(8\sqrt{2})^2 + h^2 = (8\sqrt{10})^2 \Rightarrow h = 16\sqrt{2}$$

$$\text{área} = 16\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 256u^2$$

2.- $f(x) = e^x(x-1)$.

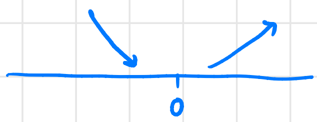
a) Dominio, crecimiento, decrecimiento.

$\text{Dom } f(x): \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x(x-1) + e^x$

$e^x(x-1+1) = 0 \Rightarrow e^x = 0$ $\cancel{\exists}$

$x = 0$



decreciente $(-\infty, 0)$; creciente $(0, \infty)$

b) Área entre eje X, $x=0$ y $x=2$.

cortes con eje x:

$e^x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

$A_T = -\int_0^1 e^x(x-1) + \int_1^2 e^x(x-1)$

$\int e^x(x-1) = e^x(x-1) - \int e^x = e^x(x-1) - e^x$

$u = x-1 \quad du = 1$
$dv = e^x \quad v = e^x$

$A_T = -(e^x(x-1) - e^x)\Big]_0^1 + (e^x(x-1) - e^x)\Big]_1^2$

$= e - 2 + e = 2e - 2 \; u^2$

c) Sólido al girar entre $[1, 2]$.

$$\pi \int_1^2 \left(e^x (x-1)\right)^2 dx = \pi \int_1^2 e^{2x} (x-1)^2 dx$$

$u = (x-1)^2 \quad du = 2(x-1)$
$dv = e^{2x} \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot (x-1)^2 - \int e^{2x} (x-1)$$

$u = (x-1) \quad du = 1$
$dv = e^{2x} \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} (x-1) - \frac{1}{4} e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} x - \frac{3}{4} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{2} e^{2x} x + \frac{3}{4} e^{2x}$$

$$\pi \left(\frac{1}{2} e^{2x} (x-1)^2 - \frac{1}{2} e^{2x} x + \frac{3}{4} e^{2x} \right) \Big]_1^2 =$$

$$\pi \left[\left(\frac{1}{2} e^4 - e^4 + \frac{3}{4} e^4 \right) - \left(-\frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{4} e^2 \right) \right] =$$

$$\pi \left(\frac{1}{4} e^4 - \frac{1}{4} e^2 \right) = \frac{\pi}{4} e^2 (e^2 - 1) \; u^3$$

4.- Polinomio Taylor grado 3 para $f(x)=e^{2x}(2x-1)$ para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}(2x-1)+1-2x^2}{5x^3}$$

$f(0)=-1$

$f'(x)=2e^{2x}(2x-1)+2e^{2x}=4xe^{2x} \Rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=4\cdot e^{2x}+4x\cdot 2e^{2x}=4e^{2x}(1+2x) \Rightarrow f''(0)=4$

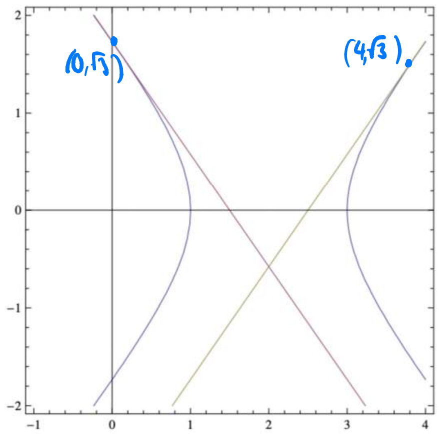
$f'''(x)=8e^{2x}(1+2x)+4e^{2x}\cdot 2=8e^{2x}(2x+2) \Rightarrow f'''(0)=16$

$$T_3(x)=-1+\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^3}{3!}=-1+2x^2+\frac{8}{3}x^3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(-1+2x^2+\frac{8}{3}x^3)+1-2x^2}{5x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{8}{3}x^3}{5x^3}=\frac{\frac{8}{3}}{5}=\frac{8}{15}$$

Junio 2017

1.- $(x-2)^2 = y^2 + 1$, rectas tangentes en $(0,\sqrt{3}), (4,\sqrt{3})$.



a) Ecuación rectas tangentes.

$$2(x-2) = 2y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{x-2}{y}$$

$$(0,\sqrt{3}) \Rightarrow y' = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$y = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}x$$

$$(4,\sqrt{3}) \Rightarrow y' = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x-4)$$

b) Ángulo.

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right| = \left|\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}\right| = \left|\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{4}{3}}\right| = \left|\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{7}{3}}\right| = \frac{12\sqrt{3}}{21}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

4.- Taylor grado 5 $f(x)=\sin(2x)$, $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(2x)-6x+4x^3}{3x^5}$.

$f(0)=0$
$f'(x)=2\cos(2x) \Rightarrow f'(0)=2$
$f''(x)=-4\cdot\sin(2x) \Rightarrow f''(0)=0$
$f'''(x)=-8\cdot\cos(2x) \Rightarrow f'''(0)=-8$
$f^{IV}(x)=16\cdot\sin(2x) \Rightarrow f^{IV}(0)=0$
$f^{V}(x)=32\cdot\cos(2x) \Rightarrow f^{V}(0)=32$

$$T_5(x)=2\cdot x-\frac{8x^3}{3!}+\frac{32x^5}{5!}=2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{4}{15}x^5$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\left(2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^5}{15}\right)-6x+4x^3}{3x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(2-\frac{4x^2}{3}+\frac{4x^4}{15}\right)-6+4x^2}{3x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{6}-\cancel{4x^2}+\frac{12x^4}{15}-\cancel{6}+\cancel{4x^2}}{3x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{12\cancel{x^4}}{15}}{3\cancel{x^4}}=\frac{\frac{12}{15}}{3}=\frac{12}{15\cdot 3}=\frac{12}{45}$$

$$=\frac{4}{15}$$

5.- Mínimos y máximos $f(x)=\sqrt{\frac{9+x}{x}}$ en $[1,4]$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{9+x}{x}}}\cdot\frac{x-(9+x)}{x^2}=\frac{-9}{2x^2\cdot\sqrt{x}\sqrt{9+x}}$$

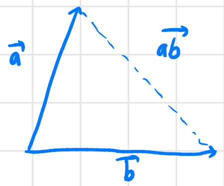
no tiene puntos críticos en el intervalo.

$f(1)=\sqrt{10}$ máx. $f(4)=\frac{\sqrt{13}}{2}$ mín.

f' es $<0 \rightarrow f$ decreciente

ENERO 2018

1.- Ángulo entre (a_1, a_2) y (b_1, b_2). $(1,3)$, $(4,-1)$.



$$|ab|^2 = (b-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = |a|^2 - 2ab + |b|^2$$

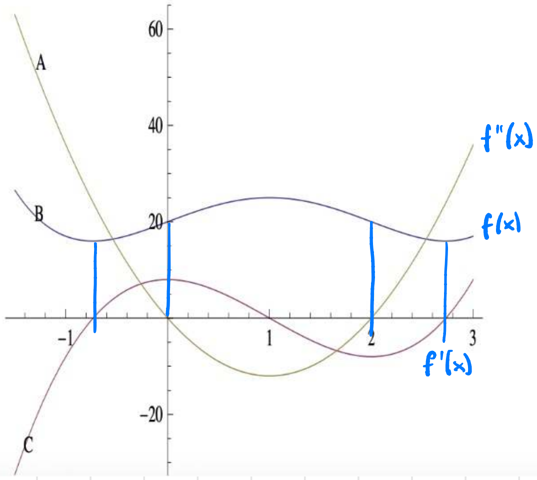
por el tma. Coseno ⇒ $|a|^2 + |b|^2 - 2ab = |a|^2 + |b|^2 - 2|a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$$

$$|a| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \qquad |b| = \sqrt{4^2+1} = \sqrt{17}$$

$$\cos\alpha = \frac{4-3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}}\right)$$

2. (6 puntos) En la figura se ve la gráfica de una función $f(x)$, definida en $[-1'5, 3]$, también están dibujadas las gráficas de la primera y la segunda derivada, identifícalas justificadamente (no contará puntuación alguna la respuesta que no dé una argumentación correcta) e indica de manera aproximada los máximos mínimos y puntos de inflexión de la función f.



observamos que $f''(x)$ es una parábola, grado 2

f tiene un mínimo en $(-0'7, 17)$, $(2'75, 17)$

f tiene puntos de inflexión en $(0, 20)$ y $(2, 20)$.

1.- Recta $(-1, 3)$ y $(2, 9)$, menor distancia al $(3, 8)$.

$\vec{v} = (3, 6)$

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 9 + 6t \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-9}{6}$$

$$6x - 12 = 3y - 27 \Rightarrow$$

$$y = 2x + 5$$

$$(2 + 3t, \ 9 + 6t) = P$$

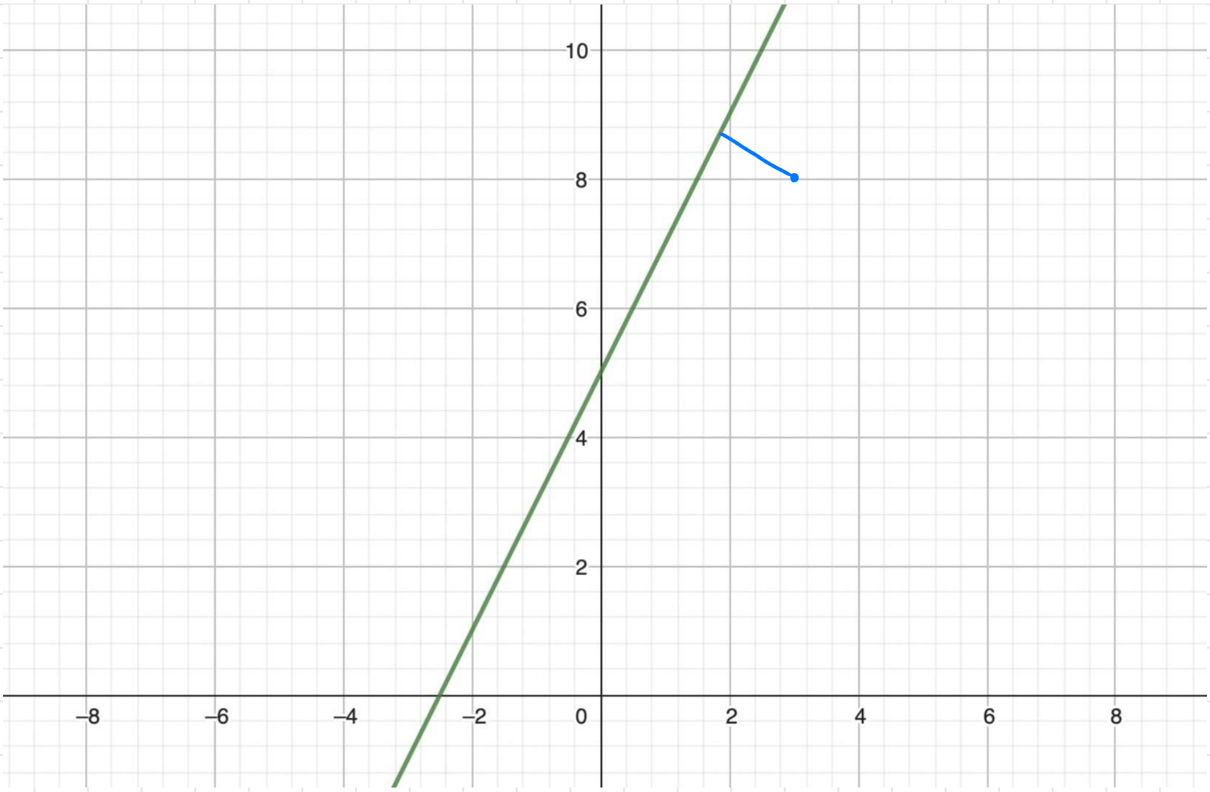
$$(3 - (2+3t), \ 8 - (9+6t)) = (1-3t, -1-6t)$$

$(1-3t, -1-6t) \cdot (3, 6) = 0 \Rightarrow$ (vectores serán perpendiculares)

$3(1-3t) + 6(-1-6t) = 3-9t-6-36t = 0$

$3 = 45t \Rightarrow t = \frac{1}{15}$

$P = \left(2+\frac{1}{5}, 9+\frac{6}{15}\right)$



6.- Taylor grado 4 $f(x) = \ln(1+x)$ en $a=0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{60\ln(1+x) - 60x + 30x^2 - 20x^3}{x^4}$$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} \Rightarrow f'''(0) = 2$

$f^{IV}(x) = \frac{2(1+x)^4 - 2(1+x)\cdot 4(x+1)^3}{(1+x)^8} = -6$

$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

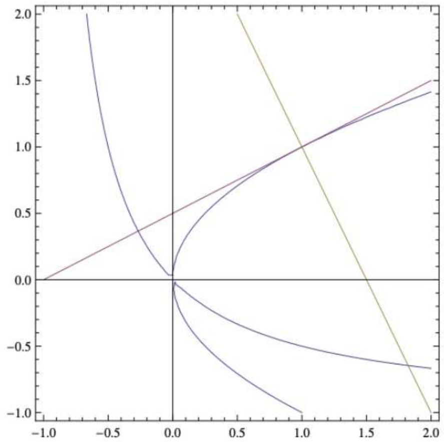
$$\lim_{x\to 0} \frac{60\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - 60x + 30x^2 - 20x^3}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{60} - \cancel{30}x + \cancel{20}x^2 - 15x^3 - \cancel{60} + \cancel{30}x - \cancel{20}x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-15x^3}{x^3} = -15$$

Junio 2018

2. La figura muestra la gráfica de la curva de ecuación $(x-y^2)(xy+y+x)=0$ y las rectas tangente y normal en el punto $(1,1)$.



Se pide:

a) (7 puntos) Ecuaciones de la recta tangente a la curva punto $(1,1)$. **Indicación**: Usa la derivación implícita.

b) (7 puntos) Ecuación de la recta normal a la curva mostrada en el punto $(1,1)$.

c) (7 puntos) Área del triángulo que forman las dos rectas y el eje OX.

$$x^2y + xy + x^2 - xy^3 - y^3 - xy^2 = 0$$

$$2xy + x^2y' + y + xy' + 2x - y^3 - 3xy^2 \cdot y' - 3y^2 \cdot y' - y^2 - 2xy \cdot y' = 0$$

$$x^2y' + xy' - 3xy^2 \cdot y' - 3y^2 \cdot y' - 2xy \cdot y' = y^2 + y^3 - 2x - y - 2xy$$

$$y' = \frac{y^3 + y^2 - y - 2xy - 2x}{x^2 + x - 3xy^2 - 3y^2 - 2xy}$$

en $(1,1) \Rightarrow \dfrac{1+1-1-2-2}{1+1-3-3-2} = \dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2}$

$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ tangente

$y = 1 - 2(x-1) = 3 - 2x$ normal

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -1 \quad (-1, 0)$

$3 - 2x = 0 \rightarrow x = 1'5 \quad (1'5, 0)$

$\sqrt{(1 - -1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$

$\sqrt{(1-1'5)^2 + (1-0)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{5}{4} u^2$

4: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy} \qquad y(2) = 0$

$\frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{A}{x} - \frac{B}{y} = \frac{-y}{x} + \frac{x}{y}$

$\frac{Ay - Bx}{xy} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$

$Ay - Bx = x^2 - y^2$

si $x = 0 \rightarrow$

$Ay = -y^2 \Rightarrow A = -y$

si $y = 0 \Rightarrow$

$-Bx = x^2 \Rightarrow B = -x$

$y' = \frac{-y}{x} + \frac{x}{y} \qquad v = \frac{1}{y^2} \rightarrow v' = \frac{-2y}{y^4} \cdot y' = \frac{-2}{y^3} y'$

$\downarrow \; /y$

$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}$

Enero 2022

2 a) $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}\,(x-3)$ en $1\leq x\leq 9$.

$$L=\int_1^9\sqrt{1+f'(x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3)+\sqrt{x}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{x-3}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{x-3+2x}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)^2=\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2=\frac{x^2-2x+1}{4x}$$

$$\sqrt{1+\frac{x^2-2x+1}{4x}}=\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{4x}}=\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt{4x}}=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_1^9\frac{x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\int_1^9\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\left(\frac{2x^{3/2}}{3}+2x^{1/2}\right)\Big]_1^9=\frac{32}{3}$$

b) $y=x^2/4$ y $y=8/x^2+4$.

$$\frac{x^2}{4}=\frac{8}{x^2+4}\Rightarrow x^2(x^2+4)=32$$

$$x^4+4x^2-32=0$$

$$x^2=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot-32}}{2}=\frac{-4\pm 12}{2}\begin{cases}x^2=4 & x=\pm 2\\ x^2=-8 & \cancel{\exists}\end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2}\frac{8}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\,dx=2\pi-\frac{4}{3}u^2$$

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{4}=\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{2}=\frac{8}{12}+\frac{8}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

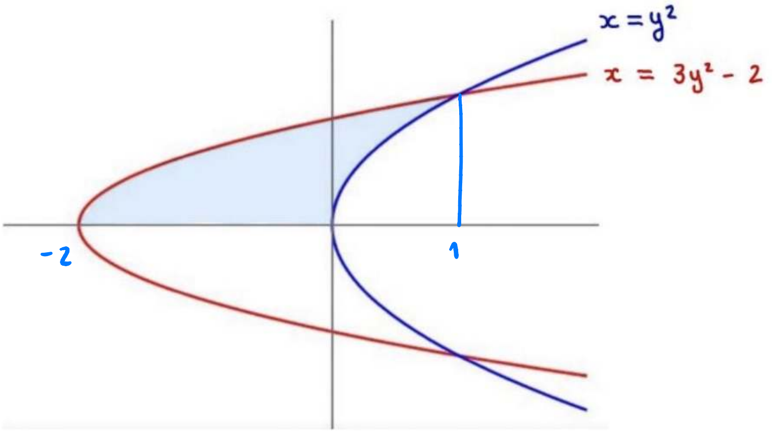
$$\int_{-2}^{2}\frac{8}{x^2+4}\,dx=8\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2+4}dx=8\int_{-2}^{2}\frac{1}{4(\frac{x^2}{4}+1)}=2\left(\int\frac{1}{\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x}{2})^2+1}\right)=4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_{-2}^{2}=4\,\mathrm{arctg}(1)-4\,\mathrm{arctg}(-1)=4\cdot\frac{\pi}{4}-4\cdot\frac{-\pi}{4}=2\pi$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=1\Rightarrow\alpha=45°=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

(c) Encuentra el volumen del cuerpo de revolución generado al girar alrededor del eje x la región sombreada, la cual está acotada por

$$x = 3y^2 - 2, \qquad x = y^2 \qquad y = 0.$$



$$x = 3y^2 - 2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x+2}{3}} \Rightarrow \sqrt{\frac{x+2}{3}} = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{x+2}{3}} \Rightarrow 3x = x+2 \Rightarrow x = 1$$

$$V_T = \pi \int_{-2}^{1} \left(\sqrt{\frac{x+2}{3}}\right)^2 - \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 = \frac{\pi}{3} \int_{-2}^{1} x+2 - \pi \int_0^1 x$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} - \frac{\pi x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi \ u^3$$

$$\frac{\pi}{3}\left(\frac{5}{2} - (2-4)\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{5}{2} + 2\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

3a) $T_3(x)$ en $a=0$ $f(x)=e^x\sin x$, error en $[0,\frac{1}{2}]$ $< \frac{\sqrt{e}}{96}$.

$f(0)=0$

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x) \Rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x) \Rightarrow f''(0)=2$

$f'''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)+e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$

$f'''(0)=2$ $\qquad =e^x(-2\sin x+2\cos x)$

$T_3(x)=x+x^2+\frac{x^3}{3}$

$\text{error}=\left|\frac{f^{n+1}(t)\cdot(x-a)^{n+1}}{n+1!}\right|=\left|\frac{f^{IV}(t)\,x^4}{4!}\right|$ con $t\in a$ y $[0,\frac{1}{2}] \Rightarrow [0,\frac{1}{2}]$

$f^{IV}(x)=2e^x(\cancel{\cos x}-\sin x)+2e^x(-\sin x-\cancel{\cos x})$

$f^{IV}(t)=-4e^t\sin t$

$\text{error}\le\left|\frac{-4e^{1/2}\sin t\cdot x^4}{4!}\right| \underset{\text{valor máx si } t=\frac{1}{2}}{=} \frac{4e^{1/2}\sin\frac{1}{2}\,x^4}{4!} \underset{\text{valor máx si } x=\frac{1}{2}}{=} \frac{4e^{1/2}\sin\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2})^4}{4!}$

acotado entre 1 y -1

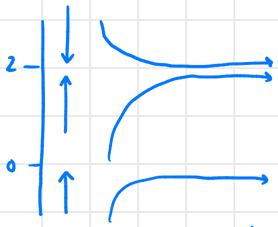
como $\sin\frac{1}{2}<1$

$=4\sqrt{e}\,\sin\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{4!}=\frac{\sqrt{e}\,\sin\frac{1}{2}}{2^4\cdot 3!}=\frac{\sqrt{e}\,\sin\frac{1}{2}}{96} \Rightarrow \text{error}\le\frac{\sqrt{e}}{96}$

b) $y' = (2-y)\log(1+y^2)$. $\lim_{t\to\infty} y(t)$ cuando $y(0)=1$.

$y'=0 \Rightarrow \quad 2-y=0 \Rightarrow \quad y=2$

$1+y^2=1 \Rightarrow \quad y\ 0$



estable

semiestable

si $y(0)=1 \Rightarrow y=1 \rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t)=2$

JUNIO 2022

1a) $ax^2y - be^{3x-3} = 1 + \sin(y^2-1)$. $(1,1)$, valores a y b para tangente horizontal.

$$2axy + ax^2y' - 3be^{3x-3} = \cos(y^2-1)\cdot 2y\cdot y'$$

$$2axy - 3be^{3x-3} = \cos(y^2-1)\cdot 2y\cdot y' - ax^2y'$$

$$y' = \frac{2axy - 3be^{3x-3}}{\cos(y^2-1)2y - ax^2}$$

$\downarrow (1,1)$

$$\frac{2a-3b}{2-a} = 0$$

$$2a - 3b = 0 \Rightarrow 2a = 3b$$

punto $(1,1) \Rightarrow \quad a - b = 1 \Rightarrow \quad a = 1 + b$

$$2(1+b) = 3b \Rightarrow \quad b = 2,\ a = 3$$

b) $e^{\sin(\cos(\log x))}$ en $x = 1$.

$$e^{\sin(\cos(\log x))}\cdot\cos(\cos(\log x))\cdot -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$

como $\ln 1 = 0 \Rightarrow \sin(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

2a) Longitud $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{3}$ en $[0,2]$.

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x^{1/2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{2 - 2x}{4\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{(2-2x)^2}{16x} = \frac{4x^2 - 8x + 4}{16x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{4x}$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2 - 2x + 1}{4x}}$$

$$\frac{4x + x^2 - 2x + 1}{4x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{4x}$$

$$\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 1}{4x}} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$L = \int_0^2 \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{x}{2\sqrt{x}} + \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \left.\frac{x^{3/2}}{3} + \sqrt{x}\,\right]_0^2 = \frac{\sqrt{2^3}}{3} + \sqrt{2} =$$

$$\frac{\sqrt{8}}{3} + \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

3a) $T_3(x) \quad a=0 \quad f(x) = x \cdot \log(1+x), \quad e \quad [0, \frac{1}{2}]$.

$f(0) = 0$

$f'(x) = \log(1+x) + \frac{x}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 + 1+x}{(1+x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2$

$= \frac{1+x+1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2}$

$f'''(x) = \frac{(x+1)^2 + (x+2) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow f'''(0) = \frac{5}{1} = 5$

$T_3(x) = x^2 + \frac{5x^3}{3}$

$\frac{(x+1) + 2(x+2)}{(x+1)} = \frac{3x+5}{x+1}$

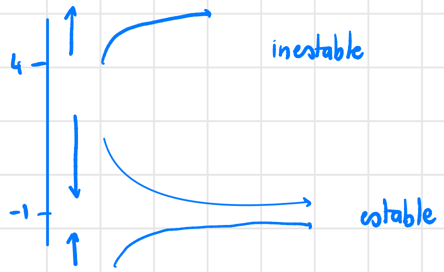
$f^{IV}(x) = \frac{3(x+1) + 3x+5}{x+1} \Rightarrow f^{IV}(t) = \frac{6t+8}{t+1}$

$e = \left| \frac{f^{IV}(t) \cdot x^4}{4!} \right| \stackrel{?}{=}$ máx error si $t=0$ y $x = 1/2$ $\quad \frac{8}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} \Rightarrow$ error $\leq \frac{1}{3} \frac{1}{2^4} \Rightarrow \frac{1}{48}$

t entre 0 y $[0, 1/2]$

b) $y' = y^2 - 3y - 4$. $\lim_{t\to\infty} y(t)$ $\quad y(0)=1$.

$y'=0 \Rightarrow y^2-3y-4=0 \Rightarrow (y+1)(y-4)=0 \qquad y_1=-1 \ , \ y_2=4$



para $y(0)=1 \rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = -1$

4a) $x^2 y' = xy - y^2$

divido por x^2

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

divido por y^2

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{x^2}$$

$$v = \frac{1}{y} \rightarrow v' = -\frac{y'}{y^2}$$

$$-v' = \frac{v}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$v' + \frac{v}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{(EDO lineal)}$$

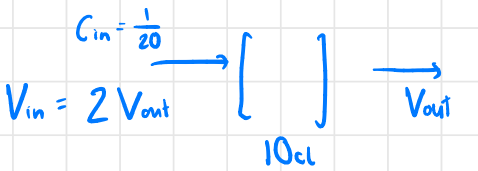
$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$(\mu \cdot v)' = x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$x \cdot v = \ln(x) + C_1 \Rightarrow v = \frac{\ln(x) + C_1}{x}$$

$$y = \frac{1}{v} \Rightarrow y = \frac{x}{\ln(x) + C_1}$$

(b) Acaba de ingresar un paciente en urgencias y le colocamos un gotero con una concentración de $\frac{1}{20}$ mg/cl de cierto medicamento. Lo regulamos para que el medicamento entre a velocidad constante (en mg/min) en un órgano con un volumen líquido de 10 cl. Suponemos que dentro del órgano se el medicamento se mezcla de forma perfectamente homogénea. Sabemos que el órgano absorbe el medicamento el doble de rápido que lo elimina. ¿A qué velocidad debemos programar el gotero si queremos que a los 20 min el paciente tenga 1 mg de medicamento en dicho órgano?



$M(20) = 1$

$$\frac{dM}{dt} = 2V \cdot \frac{1}{20} - \frac{V \cdot M}{10 + 2Vt - Vt} = \frac{V}{10} - \frac{VM}{10 + Vt}$$

$$\frac{dM}{dt} + \frac{VM}{10+Vt} = \frac{V}{10}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{V}{10+Vt} dt} = e^{\ln(10+Vt)} = 10 + Vt$$

$$(\mu \cdot M)' = (10 + Vt) \cdot \frac{V}{10}$$

$$\mu \cdot M = \frac{V}{10} \int 10 + Vt \, dt = \frac{V}{10} \frac{1}{V} \frac{(10+Vt)^2}{2} = \frac{(10+Vt)^2}{20} + C_1$$

$$M = \frac{(10+Vt)}{20} + \frac{C_1}{10+Vt}$$

si $M(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{C_1}{10} = 0 \Rightarrow C_1 = -5$ $\qquad V_{in} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

si $M(20) = 1 \Rightarrow \frac{(10 + 20v)}{20} - \frac{5}{10+20v} = 1$

$$\frac{1}{2} + v = 1 + \frac{5}{10+20v}$$

$$v - \frac{5}{10+20v} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(10+20v)v - 5}{10+20v} = \frac{1}{2} \to 20v^2 + 10v - 5 = 5 + 10v$$

$$20v^2 = 10 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{2}}$$