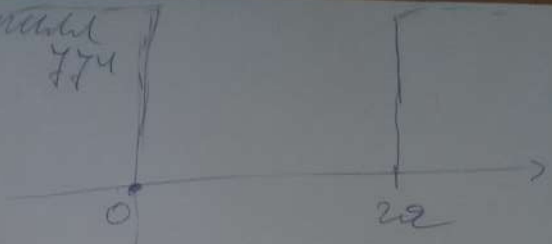
5 вариант Вайсер Кирилл 774

1) $U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2a \\ \infty, & x \le 0, x \ge 2a \end{cases}$



$\psi(0) = \psi(2a) = 0$

Ур-е Шредингера: $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi$, $\psi'' + k^2\psi = 0$

$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$

$\psi(0) = B = 0$, $\psi(2a) = A\sin 2ak = 0 \rightarrow \sin 2ak = 0$

$2ak = \pi n$

$k = \frac{\pi n}{2a}$

$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8a^2 m}$

в первом возб состоянии $n = 2$.

$\boxed{E_{возб} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2 m}}$

2) $\psi_{1возб} = \begin{cases} A\sin\sqrt{\frac{2m \cdot \hbar^2\pi^2}{2a^2 m \cdot \hbar^2}}\, x, & x \in [0, 2a] \\ 0, & иначе \end{cases}$

$= \begin{cases} A\sin\frac{\pi}{a}x, & x \in [0, 2a] \\ 0 \end{cases}$

A найдём из условия нормировки

$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^2\,dx = \int_0^{2a} A^2\sin^2\frac{\pi}{a}x = A^2 \cdot a = 1 \rightarrow$

$\rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

$\psi_{1возб} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi}{a}x\,dx, & x \in [0, 2a] \\ 0, & x \notin [0, 2a] \end{cases}$

3. $\langle \hat{x} \rangle$ и $\langle \hat{p}^2 \rangle$ 5 вариант Вайсер Кирилл 774

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle n | \hat{x} | n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \psi_1^2(x) \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} = \left(- \frac{a \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{8\pi^2} - \frac{x \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{4\pi} + \frac{x}{4a} \right) \Bigg|_0^{a} =$$

$$= \underline{a}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle := \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi}{a} x \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi}{a} x \, dx =$$

$$= \int_0^{2a} \frac{1}{a} \left(\sin \frac{\pi}{a} x \right) \cdot \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \hbar^2 dx =$$

$$= \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^3} \int_0^{2a} \left(\sin \frac{\pi}{a} x \right)^2 dx = \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \underline{\frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2}}$$

№4.

5 вариант
Вайсер
Ширин
774

$$\psi(x) = \begin{cases} Bx(x-2a), & 0 < x < 2a \\ 0, \ x < 0, & x > 2a \end{cases}$$

в с ямой стенки дискретный

$$\psi_n = C_n \sin\sqrt{\frac{2m\, \hbar^2\pi^2 n^2}{\hbar^2 8a^2 m}}\, x = C_n \sin\frac{\pi n}{2a}x$$

$$\int_0^{2a} C_n^2 \sin^2\frac{\pi n}{2a}x\, dx = 1 \to C_n = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

тогда $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \psi_n(x)$.

найдём это разложение:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \psi_n(x)$$

$$B_n = \frac{\int_0^{2a} \psi(x)\psi_n(x)\,dx}{\int_0^{2a}\psi_n^2(x)\,dx} =$$

$$= \frac{\int_0^{2a} \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi n}{2a}x \cdot Bx(x-2a)\,dx}{\int_0^{2a} \cancel{B^2x^2(x-2a)^2} \frac{1}{a}\sin^2\frac{\pi n}{2a}x\,dx} =$$

$$= \frac{\frac{16a^{\frac{5}{2}}B\cdot((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3}}{1}$$

B из условия нормировки:

$$\int_0^{2a} B^2x^2(x-2a)^2\,dx = \frac{16a^5B^2}{15} = 1 \to \boxed{B = \sqrt{\frac{15}{16a^5}}}$$

значит $B_n = \dfrac{16a^{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{15}{16}}\cdot a^{-\frac{5}{2}}((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3} =$

$$= \frac{4\sqrt{15}((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3}$$

для первого состояния $n = 2$.

$$B_2 = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}^3 \cdot 8} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{\pi}} A \cdot \left((-1)^2 - 1\right) = 0$$

вероятность обнаружить частицу:

$$P = |B_2|^2 = \frac{15}{4\pi} A = 0$$

5 вариант
Вайсер
Ирина
774