Haute Ecole de Namur - Liège - Luxembourg

Département technique

Implantation IESN

Bachelier en Informatique de Gestion

UE IG226

Modélisation de l'événementiel

Module 1 : Programmation linéaire

Lamia Baghdadi

Corinne Derwa

Année académique 2022-2023

Introduction

Dans ce cours, nous allons apprendre à modéliser des problèmes de programmation linéaire. Nous voyons comment utiliser l'algorithme du Simplex pour résoudre des problèmes simples de programmation linéaire, puis nous utiliserons le tableur Excel pour la résolution de problèmes de programmation linéaire à l'aide de l'algorithme du Simplex.

Table des matières

1. Introduction, rappels et définition

1.1. Exemple

À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner de gros œufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste **18** kg de cacao, **8** kg de noisettes et **14** l de lait.
Il a deux spécialités : l'œuf *Extra* et l'œuf *Sublime*.
Un œuf *Extra* nécessite **1** kg de cacao, **1** kg de noisettes et **2** l de lait.
Un œuf *Sublime* nécessite **3** kg de cacao, **1** kg de noisettes et **1** l de lait.
Il fera un profit de **50** € en vendant un œuf *Extra*, et de **75** € en vendant un œuf *Sublime*.
Combien d'œufs *Extra* et *Sublime* doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?

Remarque : le chocolat est composé de beaucoup plus d'ingrédients mais, pour la clarté de l'exemple, nous nous sommes ici limités à trois.

Choix des inconnues :

x_1 : nombre d'œufs *Extra* fabriqués
x_2 : nombre d'œufs *Sublime* fabriqués

Contraintes :

C_I : $x_i \geq 0 \ \forall i$
C_{II} :

- Il reste 18 kg de cacao : $x_1 + 3x_2 \leq 18$
- Il reste 8 kg de noisettes : $x_1 + x_2 \leq 8$
- Il reste 14 litres de lait : $2x_1 + x_2 \leq 14$

Fonction économique :

Il faut maximiser le profit du chocolatier.
$\max(FE(x)) = max(50x_1 + 75x_2)$

1.2. Définition

La **programmation linéaire** est une technique mathématique d'optimisation, branche de la recherche opérationnelle (ou aide à la décision). Elle a pour but la **recherche de l'optimum** d'une fonction linéaire (la *fonction économique*) comportant plusieurs *inconnues* liées entre elles par des relations linéaires formant un système d'équations et d'inéquations appelées *contraintes*.

2. Ecriture générale d'un problème de programmation linéaire

<u>Inconnues</u> : x_i

<u>Contraintes</u> :

C_I : contraintes de signes

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

C_{II} : contraintes du problème, inégalités

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \lesseqgtr b_1$$
$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \lesseqgtr b_2$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \lesseqgtr b_m$$

<u>Fonction économique</u> (FE) :

min (ou *max*) $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

Nous pouvons aisément remplacer les inégalités des contraintes par des égalités en ajoutant de nouvelles inconnues appelées *variables d'écart*.

$x_1 + 3x_2 \leq 18$ devient $x_1 + 3x_2 + \mathbf{t_1} = 18$

$7x_1 - x_2 \geq 4$ devient $7x_1 - x_2 - \mathbf{t_2} = 4$ avec t_1 et $t_2 \geq 0$

Ces variables peuvent être considérées et traitées comme des variables du problème.

Nous obtenons ainsi, une **représentation matricielle** du problème :

C_I : $X \geq 0$

C_{II} : $A\,X = B$

min (ou *max*) $C^T X$

Où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, C^T = (c_1 \quad \cdots \quad c_n)$

Nous supposerons que les équations redondantes ont été éliminées et que le rang de la matrice A vaut m.

Pour l'exemple du chocolatier, on obtient :

$$x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + t_1 = 18 \\ x_1 + x_2 \quad + t_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + t_3 = 14 \end{cases}$$

$$max(\ 50x_1 + 75x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad C^T = (50 \quad 75 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Nombre d'inconnues = n = 5
Nombre de contraintes = m = 3 et le rang de A vaut 3.

3. Bases et solutions - Définitions

Solution : ensemble de valeurs vérifiant $\mathbf{C_{II}}$.

Ex. : $x_1 = 0, x_2 = 7, t_1 = -3, t_2 = 1, t_3 = 7$ est une solution du PL du chocolatier.

Solution admissible : solution vérifiant aussi $\mathbf{C_I}$.

Ex. : $x_1 = 0, x_2 = 6, t_1 = 0, t_2 = 2, t_3 = 8$ (en effet, toutes les valeurs sont positives ici contrairement au cas précédent)

Base : ensemble de m variables telles que le déterminant de leurs coefficients dans C_{II} est non nul.

Ex. : (x_1, x_2, t_1) forment une base car $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Solution de base : solution obtenue en annulant les n-m variables hors base et en résolvant le système restant.

Ex. : Pour la base ci-dessus, on annulera t_2 et t_3.

Il reste $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + t_1 = 18 \\ x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 14 \end{cases}$

En soustrayant la deuxième équation de la troisième et en poursuivant par substitutions successives, on obtient :
$x_1 = 6, x_2 = 2, t_1 = 6, t_2 = 0, t_3 = 0$, solution de base.

Solution de base admissible (SBA) : solution de base vérifiant $\mathbf{C_I}$.

La solution ci-dessus est une solution de base admissible (SBA).

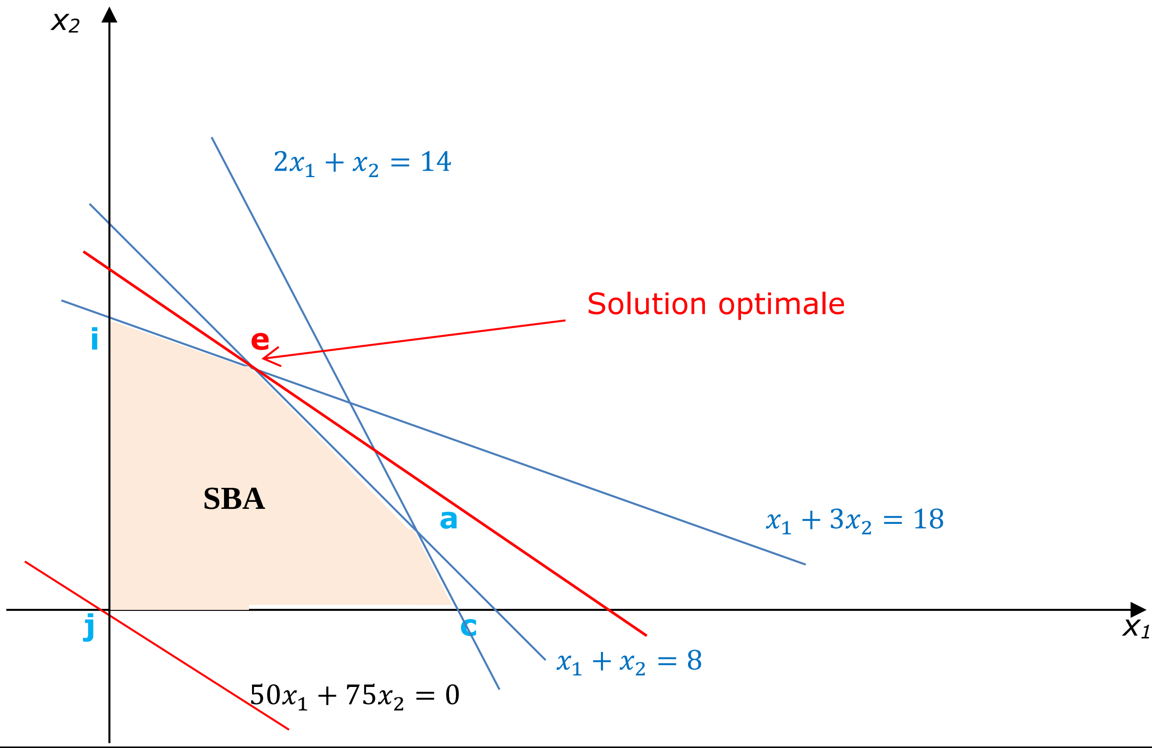
Recherchons toutes les SBA du PL du chocolatier.

	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	**Remarques**
a	6	2	6	0	0	SBA, FE = 450
b	24/5	22/5	0	-6/5	0	SB pas admissible
c	7	0	11	1	0	SBA, FE = 350
d	0	14	-24	-6	0	SB pas admissible
e	3	5	0	0	3	SBA, FE =525
f	8	0	10	0	-2	SB pas admissible
g	0	8	-6	0	3	SB pas admissible
h	18	0	0	-10	-22	SB pas admissible
i	0	6	0	2	8	SBA, FE = 450
j	0	0	18	8	14	SBA, FE = 0

La solution « **e** » parait être la SBA qui donne une valeur maximale pour la FE.

Serait-ce la **solution optimale** du PL ?

Résolvons-le graphiquement. Cela est possible puisqu'au départ nous n'avions que 2 inconnues.



Si le polyèdre convexe *AX = B, X ≥ 0 est* non vide et borné, la solution optimale est atteinte en un sommet et éventuellement en une *combinaison linéaire convexe généralisée* de sommets.

Tous les points situés sur le segment de droite qui relie les 2 sommets

4. L'algorithme du simplexe (Georges Dantzig)

Algorithme du simplexe par G. Dantzig en 1947 pour l'U.S. Air Force

4.1. Conditions préalables

1) La matrice A doit contenir les vecteurs unités, pas forcément dans l'ordre.
Ces vecteurs détermineront la première base (déterminant non nul).
Ceux-ci seront souvent présents grâce aux variables d'écart.
2) B doit être ≥ 0

Si ces conditions ne sont pas remplies, il est inutile de débuter l'algorithme !

4.2. Changement de notations

Notons P_k les vecteurs colonnes de la matrice A.
A_{ij} = coefficient du vecteur unité P_j pour la i^e contrainte
B_i = coefficient du vecteur de B pour la i^e contrainte

Exemple :

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{matrix} \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(PL du chocolatier)

Les vecteurs unités sont P_3, P_4 et P_5 qui forment une base c'est-à-dire que tous les vecteurs peuvent s'exprimer en fonction de ces 3 vecteurs de base.

En effet, on a :
$P_1 = 1 * P_3 + 1 * P_4 + 2 * P_5$

…

$B = 18 * P_3 + 8 * P_4 + 14 * P_5$

4.3. Philosophie de Dantzig

Partir d'une SBA et aller vers une autre SBA pour laquelle la valeur de la fonction économique est **meilleure**.
En base, il y a *m* variables. On modifiera la base en entrant une seule variable et en en sortant une seule.

1) <u>Matrice de Dantzig</u> :

Regroupons les vecteurs unités afin de simplifier les notations, ce qui ne change rien à la généralité du problème. Le vecteur B pouvant se trouver devant ou derrière la matrice A (C'est cette dernière façon de faire que nous appliquerons par la suite).

$$\begin{array}{ccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & \dots & \boldsymbol{x_r} & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_j & \dots & \boldsymbol{x_k} & \dots & x_n & B \end{array}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{cccccccccc|c|cc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & A_{1,m+1} & \dots & A_{1,j} & \dots & A_{1,k} & \dots & A_{1,n} & B_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & A_{2,m+1} & \dots & A_{2,j} & \dots & A_{2,k} & \dots & A_{2,n} & B_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & A_{r,m+1} & \dots & A_{r,j} & \dots & \boldsymbol{A_{r,k}} & \dots & A_{r,n} & B_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & A_{m,m+1} & \dots & A_{m,j} & \dots & A_{m,k} & \dots & A_{m,n} & B_m \end{array}\right)$$

2) <u>Changement de base (ou pivotage)</u>

Le choix du pivot (voir plus loin) , ici $\boldsymbol{A_{r,k}}$ **,** détermine la variable qui sort de la base et celle qui entre en base.

Ici la variable $\boldsymbol{x_r}$ sort de base et la variable $\boldsymbol{x_k}$ y entre.

$$\begin{array}{ccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & \dots & \boldsymbol{x_r} & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_j & \dots & \boldsymbol{x_k} & \dots & x_n & B \end{array}$$

$$A'|B' = \left(\begin{array}{ccccccccccccc|c} 1 & 0 & \dots & A'_{1,r} & \dots & 0 & A'_{1,m+1} & \dots & A'_{1,j} & \dots & 0 & \dots & A'_{1,n} & B'_1 \\ 0 & 1 & \dots & A'_{2,r} & \dots & 0 & A'_{2,m+1} & \dots & A'_{2,j} & \dots & 0 & \dots & A'_{2,n} & B'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A'_{k,r} & \dots & 0 & A'_{k,m+1} & \dots & A'_{k,j} & \dots & 1 & \dots & A'_{k,n} & B'_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A'_{m,r} & \dots & 1 & A'_{m,m+1} & \dots & A'_{m,j} & \dots & 0 & \dots & A'_{m,n} & B'_m \end{array}\right)$$

Cette transformation se fait par des <u>opérations sur les lignes</u> en poursuivant le but d'obtenir un vecteur unité à la k^e colonne.

=> On divise la ligne du pivot par le pivot afin d'amener 1 à la place du pivot.

$$A'_{k,j} = \frac{A_{r,j}}{A_{r,k}} \qquad \text{et} \qquad B'_k = \frac{B_r}{A_{r,k}}$$

=> On amène des zéros dans la k^e colonne afin de compléter le vecteur unité.

Pour chaque ligne *i*, on a : $A'_{i,j} = A_{i,j} - \frac{A_{r,j}}{A_{r,k}} A_{i,k}$ et $B'_i = B_i - \frac{B_r}{A_{r,k}} A_{i,k}$

Pour l'exemple du chocolatier

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

V_B = variables en base

V_B	B	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	18	1	3	1	0	0
t_2	8	1	1	0	1	0
t_3	14	2	1	0	0	1

Choisissons (pas tout à fait au hasard – voir ci-dessous) la valeur 3 comme pivot. On a donc x_2 comme variable entrant en base et t_1 comme variable sortante.

=> On divise la ligne du pivot par le pivot afin d'amener 1 à la place du pivot.
=> On amène des zéros dans la 2^e colonne afin de compléter le vecteur unité.

V_B	B	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	
x_2	6	1/3	1	1/3	0	0	$L'_1 = L_1/3$
t_2	2	2/3	0	-1/3	1	0	$L'_2 = L_2 - L'_1$
t_3	8	5/3	0	-1/3	0	1	$L'_3 = L_3 - L'_1$

Remarque : on n'aurait pas pu faire l'opération $L'_2 = L_2 - L_3$ sous peine de perdre le vecteur unité correspondant à t_3.

3) <u>Comment varie la fonction économique à optimiser et comment choisir le pivot ?</u>

a. Afin d'effectuer toujours le même raisonnement, nous rechercherons un minimum.
Si le PL demande de maximiser la FE, nous changerons donc le signe de FE en la multipliant par -1.

Exemple du chocolatier :
$max(50x_1 + 75x_2)$ devient $min(- 50x_1 - 75x_2)$

La matrice C^T devient donc (-50 -75 0 0 0)

b. Introduisons une nouvelle quantité, appelée **coût** :

$$\boxed{Z_j - C_j = \sum_{i \in I(B)} A_{ij}\, C_i - C_j}$$

où j = 1, …,*n* et I(B) représente l'ensemble des indices des variables en base.

Complétons le tableau initial en ajoutant *C* et une ligne composée de la FE et des coûts ($Z_j - C_j$).

			-50	-75	0	0	0	← C
V_B	C_B	B	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	
t_1	0	18	1	3	1	0	0	
t_2	0	8	1	1	0	1	0	
t_3	0	14	2	1	0	0	1	
		FE=0	50	75	0	0	0	← $Z_j - C_j$

C_B = C_j correspondant aux variables en base (ici t_1, t_2 et t_3)

Pour obtenir une SBA, on annule les variables hors base et on résout le système restant ce qui donne comme SBA : la matrice B.
$x_1 = x_2 = 0, t_1 = 18, t_2 = 8\ et\ t_3 = 14$

=> FE = -50 * 0 -75 * 0 + 0 * 18 + 0 * 8 + 0 * 14 = 0

Après le changement de base, si l'on recalcule FE et les $Z_j - C_j$, on obtient :

			-50	-75	0	0	0	
V_B	C_B	B	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	
x_2	-75	6	1/3	1	1/3	0	0	$L'_1 = L_1/3$
t_2	0	2	2/3	0	-1/3	1	0	$L'_2 = L_2 - L'_1$
t_3	0	8	5/3	0	-1/3	0	1	$L'_3 = L_3 - L'_1$
		FE'=-450	25	0	-25	0	0	← $Z'_j - C_j$

c. <u>Comment choisir le pivot ?</u>

- Comme la matrice B donne la 1ère SBA, **tous les B_i doivent être ≥ 0**. Sinon, il faudra multiplier la contrainte correspondante par (-1).

- **Le pivot $A_{r,k}$ doit être > 0.**
  Un pivot nul empêcherait la division de la ligne du pivot par celui-ci.
  Un pivot négatif amènerait un B'_k négatif.

Donc $\frac{B_r}{A_{r,k}} \geq 0$.

3 cas sont à envisager :

➢ 1er cas : tous les coûts sont <0. $\boxed{\forall k, (Z_k - C_k) \leq 0}$

Il n'est plus possible de diminuer la valeur de la FE et donc l'optimum est atteint. La dernière SBA est la meilleure.

➢ 2e cas : $\boxed{\text{Il y a au moins un } (Z_k - C_k) > 0 \text{ et un pivot possible > 0)}}$

Il faut diminuer la valeur de FE le plus possible tout en s'assurant que les B_i restent ≥ 0.

⇨ Choisir la colonne k dont le coût est le plus grand

$$\boxed{Z_k - C_k = \max_{Z_j - C_j > 0} (Z_j - C_j)}$$

⇨ Choisir la ligne r pour que

$$\boxed{\frac{B_r}{A_{r,k}} \leq \min_{A_{i,k} > 0} \frac{B_i}{A_{i,k}}}$$

- 3e cas : $\boxed{\text{Il y a au moins un } (Z_k - C_k) > 0 \text{ et pas de pivot possible}}$

  On pourrait démontrer que, dans ce cas, le convexe des contraintes est non borné et que la valeur optimale de la FE vaut -∞ pour un minimum ou +∞ pour un maximum (voir exercices).

5. L'exemple du chocolatier : résolution complète

$x_1, x_2 \geq 0$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases}$$

$max(\ 50x_1 + 75x_2)$

=> $x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + t_1 = 18 \\ x_1 + x_2 + t_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + t_3 = 14 \end{cases}$$

$min(-50x_1 - 75x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3)$

			-50	-75	0	0	0	
V_B	C_B	B	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	
t_1	0	18	1	3	1	0	0	$L'_1 = L_1/3$
t_2	0	8	1	1	0	1	0	$L'_2 = L_2 - L'_1$
t_3	0	14	2	1	0	0	1	$L'_3 = L_3 - L'_1$
		FE=0	50	75	0	0	0	

75 est le plus grand coût > 0.
3 est le pivot car 18/3 < 8/1 et < 14/1

Après pivotage, nous obtenons le tableau suivant :

x_2	-75	6	1/3	1	1/3	0	0	
t_2	0	2	2/3	0	-1/3	1	0	
t_3	0	8	5/3	0	-1/3	0	1	
	FE'=	-450	25	0	-25	0	0	
x_2	-75	5	0	1	1/2	-1/2	0	$L'_1 = L_1 - ½ L_2$
x_1	-50	3	1	0	-1/2	3/2	0	$L'_2 = L_2 * 3/2$
t_3	0	3	0	0	1/2	-5/2	1	$L'_3 = L_3 - 5/2 L_2$
	FE'=	-525	0	0	-12.5	-37.5	0	

STOP, tous les coûts sont ≤ 0.

<u>Solution</u> : max = 525, x_1 = 3, x_2 = 5 avec t_3 = 3 et $t_1 = t_2 = 0$.

Interprétation de la solution : L'artisan chocolatier doit fabriquer 3 œufs *Extra* et 5 œufs *Sublime***.** Il utilisera tout le cacao et toutes les noisettes et il lui restera 3 l de lait. Son bénéfice sera de 525 euros.

6. Méthode du grand M

Expliquons cette méthode à partir d'un exemple :

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq -3 \end{cases} \qquad \min(x_1 - 4x_2)$$

$$x_1, x_2, t_1, t_2 \geq 0 \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - t_1 = 1 \\ x_1 - x_2 + t_2 = 3 \end{cases} \qquad \min(x_1 - 4x_2 + 0t_1 + 0t_2) \qquad \text{(PL1)}$$

Les vecteurs unités ne sont pas présents dans la matrice *A* de départ.
En cause, le « - t_1 » de la 1ère équation.
La multiplication de l'équation par (-1) ne peut se faire car le b_i deviendrait négatif et dès lors les SB ne seraient plus admissibles.
⇨ Utilisation de la méthode dite « du grand *M* ».

$$x_1, x_2, t_1, t_2, v_1 \geq 0 \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - t_1 + v_1 = 1 \\ x_1 - x_2 + t_2 = 3 \end{cases} \qquad \min(x_1 - 4x_2 + 0t_1 + 0t_2 + Mv_1) \qquad \text{(PL2)}$$

Les variables *v* sont appelées **variables artificielles.**
Elles doivent obligatoirement être nulles à la fin de la résolution si l'on veut l'équivalence des systèmes 1 et 2 (contrairement aux variables d'écart qui peuvent prendre n'importe quelle valeur ≥ 0).

Pour ce faire, on les introduit dans la fonction à optimiser, multipliées par un coefficient *M* démesurément grand (plus grand que toute variable, paramètre, coefficient intervenant dans le système).
Ensuite on résout le système PL2 avec la méthode du simplex vue supra.

Si (PL1) a des solutions admissibles, (PL2) a des solutions admissibles telles que v_1 = 0 parmi lesquelles se trouveront les solutions optimales de (PL2) et par conséquent de (PL1).
Si (PL1) n'a pas de solution admissible, les solutions optimales de (PL2) ne peuvent vérifier v_1 = 0.

7. Programmation linéaire en nombres entiers - PLE

Il n'est pas rare que les variables du PL (donc les solutions) doivent avoir une valeur entière.
Exemples : x_i = nombre de produits P_i fabriqués,
x_{ij} = nombre de bouteilles du liquide *i* dans le mélange *j*,
x_{ij} = nombre d'élèves de la commune i dans l'école j

<u>Conditions préalables</u> :
Les coefficients des matrices A, B et C sont en général des rationnels. Dans ce cas, des multiplications judicieuses permettront de les rendre entiers. Les variables d'écart à ajouter seront, dès lors, forcément entières.

Exemple :

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq \frac{7}{4} \\ x_1 + \frac{3}{10}x_2 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$
$$\max\left(\frac{1}{4}x_1 + x_2\right)$$

Nous multiplierons la 1ère contrainte et la FE par 4 tandis que la seconde contrainte sera multipliée par 10.

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$
$$\max\,(x_1 + 4x_2)$$

Les deux méthodes essentielles de résolution des PLE sont :
- L'énumération intelligente ou méthode de séparation BRANCH AND BOUND.
- L'optimisation par coupes de GOMORY.

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons à la première méthode et utiliserons le solveur Excel.

Méthode du BRANCH AND BOUND.
Séparer le PL en deux en ajoutant une contrainte, en fonction de la solution optimale obtenue.
On obtient 2 PL séparés à résoudre.

Exemple :

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$

$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 4x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases}$

$\max\,(11x_1 + 4x_2)$

Le dernier tableau du PL associé au PLE est :

			-11	-4	0	0
V_B	C_B	B	x_1	x_2	t_1	t_2
x_2	-4	18/5	0	1	4/5	1/5
x_1	-11	13/5	1	0	-1/5	1/5
	FE =	-43	0	0	-1	-3

Solution : maximum = 43, x_1 = 2.6 et x_2 = 3.6, solution non entière.
Séparons sur x_1 en ajoutant d'une part la contrainte $x_1 \leq 2$ et d'autre part, la contrainte $x_1 \geq 3$.

1[er] cas

Ajoutons la contrainte $x_1 \leq 2$.

Solution du PLE donnée par le solveur Excel : maximum = 34, x_1 = 2, x_2 = 3, solutions entières.

2[e] cas

Ajoutons la contrainte $x_1 \geq 3$.

Le solveur Excel nous donne la solution du PLE : maximum = 41, x_1 = 3, x_2 = 2, solutions entières.

Conclusion

Maximum = 41, x_1 = 3, x_2 = 2, est la solution optimale entière.