



UE IG226 Modélisation de l'événementiel

Exercices de programmation linéaire

1. Modélisation et résolution

1. Des étudiants sont invités à participer à 2 types de conférences : des conférences scientifiques et des conférences sur le bien-être. Pour chaque conférence scientifique à laquelle ils assistent, on leur retire 2 heures de cours et pour chaque conférence sur le bien-être à laquelle ils assistent, on leur ajoute 1 heure de cours. Chaque conférence scientifique à laquelle ils sont présents leur rapporte 3 points et chaque conférence sur le bien-être leur rapporte 2 points.

A combien de conférences de chaque type doivent-ils assister s'ils veulent acquérir un maximum de points sachant qu'ils ne peuvent avoir qu'une seule heure de cours supplémentaire à leur horaire, qu'ils peuvent participer à 3 conférences maximum et à 2 conférences scientifiques maximum ?

2. Une petite entreprise fabrique des sacs de haute gamme de deux modèles différents (petit et grand). Chaque sac devra passer par deux ateliers. La fabrication d'un petit sac nécessitera 1 heure dans le premier atelier et 1 heure dans le deuxième. La fabrication d'un grand sac nécessitera 2 heures dans le premier atelier et 1 heure dans le deuxième. Le premier atelier ne peut travailler que 4 heures maximum par jour et le deuxième atelier 3 heures maximum. Chaque petit sac rapportera un bénéfice net de 200 euros et chaque grand sac rapportera 400 euros. Quelle quantité de petits sacs et grands sacs cette entreprise doit-elle fabriquer chaque jour pour maximiser son profit ?

3. Trouver deux réels positifs x_1 et x_2 qui vérifient les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq -2 \end{cases} \text{ et qui maximisent l'expression } (2x_1 - x_2)$$

4. Trouver deux réels positifs x_1 et x_2 qui vérifient les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \end{cases} \text{ et qui maximisent l'expression } (x_1 - 2x_2)$$

5. Un fabricant d'automobiles propose deux nouveaux modèles à la vente, un modèle de luxe et un modèle standard. Les voitures de ce fabricant sont tellement « tendance » qu'il est certain de vendre toute sa production, au moins au prix catalogue actuel de 16000 euros pour le modèle de luxe et 10000 euros pour le modèle standard.
- Son problème vient de l'approvisionnement limité en deux matières premières, le caoutchouc et l'acier. La construction d'un modèle standard nécessite l'emploi d'une unité de caoutchouc et d'une unité d'acier, tandis que celle d'un modèle de luxe nécessite une unité de caoutchouc mais deux unités d'acier. Sachant que son stock de caoutchouc est de 400 unités et son stock d'acier de 600 unités, combien doit-il produire de voitures de chaque modèle au moyen de ces stocks afin de maximiser son chiffre d'affaires ?
6. Une entreprise de fabrication de yaourts souhaite produire des yaourts à la fraise. Il lui est possible de fabriquer deux types de yaourts à la fraise : allégé et normal. La fabrication d'un litre de chaque type de yaourt nécessite différentes matières premières : produire un litre de yaourt allégé nécessite 2 kilos de fraises et 1 litre de lait, alors que la production d'un litre de yaourt normal nécessite 1 kilo de fraises, 2 litres de lait et 1 kilo de sucre. Un litre de yaourt allégé peut être vendu 4 euros alors qu'un litre de yaourt normal peut être vendu 5 euros. Étant donné que l'entreprise possède 800 kilos de fraises, 700 litres de lait et 300 kilos de sucre, combien de litres de yaourt allégé et normal doit-elle fabriquer pour maximiser son revenu ?
7. Un industriel possède trois usines adaptées dans la fabrication de deux produits. Chaque lot de produit lui rapporte une certaine somme, et le tableau ci-dessous illustre le nombre d'heures nécessaires pour la fabrication de chaque type de lot dans ses usines.

	Produit 1 (tps de production, h/lot)	Produit 2 (tps de production, h/lot)	Capacité de production (h)
Usine 1	1	0	4
Usine 2	0	2	12
Usine 3	3	2	18
Profit(\$)/lot	3000	5000	

L'industriel voulant maximiser son profit, il faut donc trouver la meilleure production possible.

8. Trouver deux réels positifs x_1 et x_2 qui vérifient les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_2 \geq 2 \end{cases} \quad \text{et qui minimisent l'expression } (x_1 + 3x_2)$$

Définir les variables de décision puis écrire les contraintes et l'expression de la fonction économique pour les problèmes décrits ci-dessous.

9. Basile est étudiant en pharmacie et a la possibilité de travailler comme assistant quelques demi-journées par mois chez un pharmacien qui possède deux officines. Chaque demi-jour presté lui rapportera 60 euros dans la grande officine et 40 euros dans la petite. Combien de demi-jours doit-il prester dans chaque officine s'il veut maximiser son gain sachant qu'il doit prester au moins 2 demi-jours par mois et que la différence de demi-jours prestés dans la grande et celui presté dans la petite ne doit pas excéder 1.

10. Soit une chaîne de fabrication en série :



Les machines permettent de fabriquer 4 produits : P_1 , P_2 , P_3 et P_4 . La matrice des temps de fabrication nécessaires par unité de produit est la suivante :

	P_1	P_2	P_3	P_4	Temps disponible par jour
M_1	5'	4'	5'	-	1000'
M_2	3'	3'	-	3'	800'
M_3	5'	-	-	3'	800'
Bénéfice net par unité	100	50	25	25	

Que produire pour maximiser le bénéfice net ?

11. Pour nourrir un cheptel, on doit donner au minimum, par jour et par bête : 70 g de protéines, 2000 calories, 800 mg de Ca (calcium) et 12 mg de Fe (fer).

Sur le marché, il existe 3 produits composés. Le résultat de l'analyse de 100 g de chacun de ces produits a donné :

	Protéines(g)	Calories	Ca(mg)	Fe(mg)	Prix pour 100 g
P ₁	8	246	17	2	1.5
P ₂	24	423	810	0	8
P ₃	6	93	61	2	2

Comment nourrir les animaux, de la manière la plus économique possible ?

12. Deux chaînes de fabrication d'un type de produit sont organisées comme suit :

Chaîne I : une unité de produit fini exige 500 kg de matière première (MP) et est traitée en 40' par 2 ouvriers.

Chaîne II : une unité de produit fini exige 480 kg de MP et est traitée en 35' par 3 ouvriers.

Une tonne de MP coûte 100€ tandis que le coût horaire d'un ouvrier est de 12€.

L'usine dispose de 175 tonnes de MP.

En fin de semaine, il faut avoir fabriqué 350 unités.

La chaîne I travaille maximum 150 h/semaine et la chaîne II, 160 h/semaine.

Le coût horaire de fonctionnement de la chaîne I est de 17.5€ contre 22.5€ pour la chaîne II, tandis qu'une heure de non-fonctionnement coûte 1.25€ pour la chaîne I et 1.5€ pour la chaîne II.

Organiser la production en minimisant les coûts.

2. Programmation linéaire en nombres entiers

Résolution avec Excel

1. Oscar veut augmenter sa puissance respiratoire. Il a vu une publicité qui proposait des séances de natation et de course à pied. Une séance de natation dure 1 heure et coûte 7 euros et une séance de course à pied dure 2 heures pour un coût de 2 euros. Oscar dispose de 10 heures de temps maximum et veut dépenser 28 euros maximum. Il veut équilibrer le nombre de séances de chaque type avec maximum une séance de plus en course à pied. Combien de séances de chaque type peut-il suivre s'il veut maximiser sa puissance respiratoire, sachant que chaque séance de natation augmente celle-ci de 3 unités et chaque séance de course à pied l'augmente de 2 unités ?

Le dernier tableau du PL associé au PLE est :

V_B	C_B	B	-3	-2	0	0	0
			x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	1/2	0	0	1	-3/4	1/4
x_2	-2	7/2	0	1	0	7/12	-1/12
x_1	-3	3	1	0	0	-1/6	1/6
FE =		-16	0	0	0	-2/3	-1/3

x_2 n'est pas une valeur entière => séparer sur x_2 en ajoutant les contraintes adéquates.

Continuer jusqu'à trouver une solution entière.

2. Vous disposez de 32 pommes, 200 fraises et 18 mangues. Il est possible de vendre des paniers de fruits à 15 euros comportant 8 pommes, 50 fraises et 3 mangues. Mais vous pouvez également réaliser des paniers à 20 euros avec 4 pommes, 40 fraises et 6 mangues. Comment modéliser le problème afin de retirer le plus grand bénéfice possible ?
3. Un atelier de haute couture fabrique deux types de ceinture A et B de luxe. Les approvisionnements ne permettent pas de produire plus de 1000 ceintures par jour quel que soit leur type. La chaîne de montage n'est utilisable que 15 heures par jour et ne peut pas fabriquer les deux types de ceintures en même temps. Les autres données de gestion sont indiquées dans le tableau suivant :

Type de ceinture	Prix de vente en euros	Nombre produit par heure
A	87	121
B	117	50

On note x_1 et x_2 le nombre d'heures consacrées par jour à la fabrication de A et B respectivement et on suppose vendue toute la production.

Quel est le programme optimal de production ?

3. Questions supplémentaires

Question 1

Un assembleur d'ordinateurs portables propose deux modèles sur le marché : le X1 et le X2.

Le X1 est équipé d'une carte wifi dont il ne possède que 600 exemplaires. De plus, il a en réserve 1600 barrettes mémoire dont 2 sont nécessaires pour assembler un X1 et une pour assembler un X2. Les autres composants sont considérés comme étant en quantité illimitée.

Il ne pourra pas stocker plus de 1200 ordinateurs portables une fois l'assemblage fait mais il désire satisfaire la demande du marché qui est d'au moins 800 ordinateurs.

Enfin, l'atelier d'assemblage est disponible 2000 heures. Or un ordinateur X1 demande 2 heures d'assemblage et un X2 demande 3 heures.

L'assembleur table sur un bénéfice de 60 euros par modèle X1 assemblé et 36 euros par modèle X2 assemblé.

Quelle quantité de modèles X1 et X2 doit-il assembler pour obtenir un bénéfice maximal ?

1. Définissez les variables de décision ;
2. Ecrivez les contraintes et l'équation de la fonction économique ;
3. Ecrivez les contraintes et la fonction économique en faisant apparaître les variables d'écart et les éventuelles variables artificielles sans résoudre le problème ;
4. Le solveur Excel donne comme première solution 200 portables X1 et 266.666...portables X2. Expliquez la procédure à suivre pour avoir des solutions entières à ce problème.

Question 2

Une entreprise pharmaceutique fabrique trois types de médicaments : des somnifères, des euphorisants et des analgésiques, dont les bénéfices de production escomptés sont respectivement de 20, 20 et 10 milliers d'euros par kilo. Pour fabriquer chacun de ces médicaments, trois matières premières sont utilisées : de la caféine, de la valériane et de la codéine. Les quantités nécessaires (exprimées en unités) de ces produits pour fabriquer un kilo de médicaments sont résumées dans le tableau suivant :

	Somnifère	Euphorisant	Analgésique
Caféine	0	2	4
Valériane	4	0	0
Codéine	4	1	4

Par ailleurs les quantités de caféine, valériane et codéine sont limitées par leur production à respectivement 2, 4 et 2 unités par jour.

Planifiez les quantités de médicaments à produire afin de maximiser le bénéfice quotidien.

1. Définissez les variables de décision en spécifiant les unités
2. Ecrivez les contraintes et l'équation de la fonction économique

3. Résolvez le problème par la technique du simplexe
4. Interprétez en détail la solution obtenue.

Question 3

Vous suivez trois cours à distance : le cours de langage A, le cours de langage B et le cours de langage C.

D'après les rumeurs, chaque heure de travail dans le cours langage A rapporte un cinquième de point (c'est à dire augmente la cote de langage A de 0.2 point). Pour le cours de langage B, une heure de travail correspond à un demi-point et pour le cours langage C, une heure de travail vaut 0.3 point.

De plus, dans le cours de langage A, un projet auquel vous avez eu 14/20 compte pour 40% de la note finale. Dans le cours de langage C, vous avez obtenu 17/20 à une interro comptant pour 20% de la note finale.

Les conditions de réussite sont les suivantes : il faut au moins 10/20 dans chaque langage et une moyenne arithmétique de 12/20 au total.

Modélisez le problème permettant de déterminer le plus petit nombre d'heures de travail à effectuer c'est-à-dire définissez les variables de décision et écrivez les contraintes et l'équation de la fonction économique.

Question 4

Une entreprise fabrique deux modèles de véhicules individuels. À la suite d'une réunion portant sur la stratégie commerciale de l'entreprise, il a été convenu d'examiner la possibilité de modifier le programme actuel de fabrication horaire de ces véhicules, soit 600 unités de son modèle milieu de gamme (MG) et 200 unités de son modèle haut de gamme (HG).

L'étape d'assemblage se fait essentiellement en deux phases et par la suite une vérification (contrôle exhaustif) est effectuée sur toutes les unités, le tout sur la même ligne de production. Le tableau ci-dessous donne l'information concernant le nombre de minutes exigé pour fabriquer chaque modèle ainsi que les disponibilités totales en minutes pour chaque étape et/ou phase.

	Modèles		
	MG	HG	
Phase/étape	Nombre de minutes requises		Minutes disponibles
Assemblage (Phase 1)	1.5	2	2100
Assemblage (Phase 2)	1	3	2250
Vérification	2	2	2600

Etant donnée la situation du marché, l'entreprise ne veut pas fabriquer plus de 1100 unités du modèle MG.

La contribution au chiffre d'affaires du modèle MG est de 66 milliers d'euros l'unité, alors que celle du HG est de 84 milliers d'euros.

On veut déterminer le programme optimal de fabrication à mettre en œuvre, c'est-à-dire celui qui maximiserait le chiffre d'affaires (CA).

1. Définissez les variables de décision en spécifiant les unités
2. Ecrivez les contraintes et l'équation de la fonction économique
3. Résolvez le problème par la technique du simplexe
4. Interprétez en détail la solution obtenue.