

SERIE TEMA 4 - PARTE 2 (11-20)

Problema 11.3

Aquí tienes la resolución del **Problema 11, Inciso 3**, formateada y estructurada.
Has elegido un camino de resolución (la trayectoria parabólica $y = -x + x^2$) que es matemáticamente elegante y muy potente para desmentir la existencia del límite.

Enunciado del problema

Determinar la existencia del siguiente límite y calcular su valor si existe:

Problema 11, Inciso 3:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x+y}$$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y) = \frac{x^2}{x+y}$.
- **Punto de análisis:** Origen $(0, 0)$.
- **Evaluación inicial:** Sustitución directa resulta en $\frac{0}{0}$ (Indeterminación).
- **Dominio:** \mathbb{R}^2 excepto la recta $y = -x$ (donde el denominador se anula).

Desarrollo paso a paso

Para demostrar que un límite multivariable **no existe**, utilizamos el **Método de las Trayectorias**. Si encontramos dos caminos distintos que conducen a valores diferentes ($L_1 \neq L_2$), el límite global no existe.

1. Trayectoria 1: Aproximación por el Eje X ($y = 0$)

Nos acercamos al origen moviéndonos sobre la recta horizontal $y = 0$ (con $x \rightarrow 0$):

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x+0}$$
$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$$

Simplificamos la expresión ($x \neq 0$):

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$$

2. Trayectoria 2: Aproximación por la curva $y = -x + x^2$

Elegimos esta curva específica porque está diseñada para cancelar el término lineal del denominador y dejar un término cuadrático que compita con el numerador.

Verificamos que la curva pasa por el origen: si $x \rightarrow 0$, entonces $y \rightarrow 0$.

Sustituimos $y = -x + x^2$ en la función original:

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x + (-x + x^2)}$$

Operamos el denominador:

$$x - x + x^2 = x^2$$

La expresión se simplifica:

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

3. Comparación de resultados

Comparamos los límites obtenidos por los dos caminos:

$$L_1 = 0$$

$$L_2 = 1$$

$$L_1 \neq L_2$$

Resultado final

Dado que el valor del límite depende de la trayectoria elegida para acercarse al origen, concluimos que:

El límite NO existe.

Interpretación breve del resultado

La función presenta una discontinuidad esencial en el origen.

Geométricamente, la superficie $z = \frac{x^2}{x+y}$ se comporta de manera muy inestable cerca de la recta $y = -x$.

- Si caminas sobre el eje X , la superficie está a nivel del suelo ($z = 0$).
- Si caminas sobre la parábola $y = -x + x^2$, la superficie se mantiene constante a una altura de $z = 1$.

Como es imposible llegar a dos alturas distintas simultáneamente en el mismo punto, la superficie está "rota" o desgarrada en el origen.

Es una excelente demostración. El uso de trayectorias curvas (parábolas) es a menudo la única forma de detectar la inexistencia de límites cuando las rectas fallan (todas las rectas $y = mx$ habrían dado 0 aquí, excepto $y = -x$).

¿Continuamos con el **Inciso 4** ($\frac{x}{|x|+|y|}$)?

Este ejercicio introduce el **valor absoluto**, lo que suele generar gráficas con formas piramidales o pliegues agudos en los ejes. Es un candidato perfecto para probar trayectorias por los ejes positivos vs. negativos.

Problema 11.4

Aquí tienes la resolución del **Problema 11, Inciso 4**, estructurada didácticamente para resaltar cómo la presencia del valor absoluto afecta la existencia del límite.

Enunciado del problema

Determinar la existencia del siguiente límite:

Problema 11, Inciso 4:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{|x| + |y|}$$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y) = \frac{x}{|x|+|y|}$.
- **Punto de análisis:** Origen $(0, 0)$.
- **Evaluación inicial:** $\frac{0}{|0|+|0|} = \frac{0}{0}$ (Forma indeterminada).
- **Característica clave:** La función involucra valores absolutos, lo que sugiere un comportamiento dependiente del signo de las coordenadas (cuadrantes).

Desarrollo paso a paso

Utilizaremos el **Método de las Trayectorias**. Si el límite existe, debe ser único sin importar cómo nos acerquemos al origen. Si encontramos dos caminos con resultados distintos, el límite no existe.

1. Trayectoria 1: Aproximación por el Eje Y ($x = 0$)

Nos acercamos al origen moviéndonos sobre la recta vertical $x = 0$. En esta trayectoria, $y \rightarrow 0$ pero x es constantemente 0.

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{|0| + |y|}$$
$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{|y|}$$

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

2. Trayectoria 2: Aproximación por el Eje X positivo ($y = 0, x > 0$)

Nos acercamos al origen por la derecha sobre el eje horizontal. Aquí $y = 0$.

Como x se acerca a 0 por el lado positivo ($x \rightarrow 0^+$), sabemos que $|x| = x$.

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x| + |0|}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1$$

(Nota adicional: Si nos acercáramos por el eje X negativo, $|x| = -x$, y el límite sería -1 . ¡La función tiene múltiples caras!)

3. Comparación

$$L_1 = 0$$

$$L_2 = 1$$

$$L_1 \neq L_2$$

Resultado final

Como los límites direccionales son distintos, llegamos a una contradicción con la definición de límite único. Por lo tanto:

El límite NO existe.

Interpretación breve del resultado

La gráfica de esta función presenta un "desgarre" en el origen.

- En la dirección vertical (eje Y), la altura es 0.
- En la dirección horizontal positiva (eje X), la altura es 1.
- En la dirección horizontal negativa, la altura es -1.

Es una superficie discontinua con un comportamiento de "escalón" angular alrededor del punto $(0, 0)$.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¡Excelente propuesta para el cierre! El **Inciso 9** ($\frac{y^2}{x^2+y^4}$) es el ejemplo canónico de **"la trampa de las rectas"**.

Es un ejercicio clásico porque todas las trayectorias rectilíneas ($y = mx$) engañan sugiriendo que el límite es 0, y solo una trayectoria parabólica revela la discontinuidad.

¿Procedemos con ese **desafío final** para cerrar el tema de límites?

Problema 11.6

Aquí tienes la resolución del **Problema 11, Inciso 6**, estructurada y verificada.

Este es, en efecto, el ejemplo canónico para ilustrar la no existencia de un límite mediante trayectorias simples.

Enunciado del problema

Determinar la existencia del siguiente límite:

Problema 11, Inciso 6:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.
- **Punto de análisis:** Origen $(0, 0)$.
- **Evaluación inicial:** $\frac{0}{0}$ (Indeterminación).
- **Observación:** Numerador y denominador tienen el mismo grado (homogéneos de grado 2), lo que sugiere que el límite depende de la dirección.

Desarrollo paso a paso

Usamos el **Método de las Trayectorias**. Buscamos dos caminos distintos hacia el origen que arrojen resultados diferentes.

1. Trayectoria 1: Aproximación por el Eje Y ($x = 0$)

Nos acercamos al origen por la recta vertical. En todo este camino, x vale 0.

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(0)^2}{(0)^2 + y^2}$$

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2}$$

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

2. Trayectoria 2: Aproximación por el Eje X ($y = 0$)

Nos acercamos al origen por la recta horizontal. En todo este camino, y vale 0.

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + (0)^2}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

3. Comparación

$$L_1 = 0$$

$$L_2 = 1$$

$$L_1 \neq L_2$$

Resultado final

Dado que los límites direccionales no coinciden:

El límite NO existe.

Interpretación breve del resultado

La función representa una superficie que tiene alturas distintas dependiendo del ángulo desde el que se mire el origen.

Como bien apuntaste en tu análisis, si pasamos a **coordenadas polares**, la función se convierte en:

$$f(r, \theta) = \cos^2(\theta)$$

Esto significa que la "altura" (z) está fija por el ángulo de entrada. No importa cuánto te acerques al centro ($r \rightarrow 0$), la altura no cambia, creando una forma similar a un abanico o una escalera de caracol comprimida en el centro.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¡Llegamos al gran final!

El **Inciso 9** ($\frac{y^2}{x^2+y^4}$) es conocido como el "contraejemplo clásico" o la "paradoja de las rectas".

Es un ejercicio tramposo porque **todas las líneas rectas** ($y = mx$) indican que el límite es 0 (falso positivo), y solo una **parábola** ($x = y^2$) revela la verdad.

¿Resolvemos este "Jefe Final" para completar tu maestría en límites?

Problema 11.7

Aquí tienes la resolución del **Problema 11, Inciso 7**, estructurada para resaltar la importancia de las trayectorias oblicuas.

Este ejercicio es fundamental porque demuestra que la coincidencia de los límites sobre los ejes coordenados ($x = 0$ y $y = 0$) es una condición **necesaria pero no suficiente** para la existencia del límite.

Enunciado del problema

Determinar la existencia del siguiente límite:

Problema 11, Inciso 7:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.
- **Punto de análisis:** Origen $(0, 0)$.
- **Evaluación inicial:** $\frac{0}{0}$ (Indeterminación).
- **Análisis de Grados:** Numerador (grado 2) vs. Denominador (grado 2). Al ser grados iguales, el límite suele depender de la dirección.

Desarrollo paso a paso

Utilizaremos el **Método de las Trayectorias**.

1. Trayectorias Coordenadas (La trampa)

Probamos acercarnos por los ejes principales.

- **Eje X** ($y = 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(0)}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

- **Eje Y** ($x = 0$):

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(0)y}{0 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Resultado parcial: Ambos caminos dan 0. Esto **no prueba nada** aún, solo nos dice que *si* el límite existiera, tendría que ser 0.

2. Trayectoria Diagonal ($y = x$)

Nos acercamos por la recta de 45° . Sustituimos $y = x$ en la función:

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2}$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2}$$

Simplificamos x^2 (con $x \neq 0$):

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

3. Comparación

$$L_{\text{ejes}} = 0$$

$$L_{\text{diagonal}} = 0.5$$

$$0 \neq 0.5$$

Resultado final

Dado que el límite depende de la trayectoria elegida:

El límite NO existe.

Interpretación breve del resultado

Tal como mencionaste en tu análisis con polares, la función se comporta como:

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

Esto confirma geométricamente el resultado:

- Para $\theta = 0$ o 90° (los ejes), el seno es 0 \rightarrow Altura 0.
- Para $\theta = 45^\circ$ ($y = x$), el seno es 1 \rightarrow Altura $1/2$.
- Para $\theta = -45^\circ$ ($y = -x$), el seno es -1 \rightarrow Altura $-1/2$.

La superficie alrededor del origen es como una "silla de montar" con cuatro ondulaciones (dos subidas y dos bajadas) que convergen en el centro, haciendo imposible definir una altura única.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Has acertado completamente en tu predicción sobre el siguiente ejercicio.

El **Inciso 8** ($\frac{x^3}{x^2+y^2}$) rompe la simetría de grados:

- Numerador: Grado 3.
- Denominador: Grado 2.

Como el grado del numerador es **mayor**, "gana" la carrera hacia el cero y aplasta la función. Aquí las trayectorias ya no sirven para probar que existe (solo sirven para probar que *no* existe).

Para demostrar rigurosamente que el límite es 0, necesitamos herramientas más fuertes:

Coordenadas Polares o el **Teorema del Sándwich (Compresión)**.

¿Procedemos con la demostración rigurosa del Inciso 8 usando el Teorema del Sándwich?

Problema 11.9

Aquí tienes la resolución del **Problema 11, Inciso 9**, el "Gran Final" de tu hoja de ejercicios.

Tal como observaste, este ejercicio se diferencia de los anteriores porque no solo encontramos valores distintos, sino que descubrimos una **divergencia al infinito**.

Enunciado del problema

Determinar la existencia del siguiente límite:

Problema 11, Inciso 9:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^4}$$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^4}$.
- **Punto de análisis:** Origen $(0, 0)$.
- **Evaluación inicial:** $\frac{0}{0}$ (Indeterminación).
- **Análisis de Grados:** Numerador grado 2 (en y), Denominador mixto (grado 2 en x , grado 4 en y).
Esta asimetría suele provocar comportamientos explosivos.

Desarrollo paso a paso

Usaremos el **Método de las Trayectorias**, enfocándonos en los ejes coordenados para evidenciar la discrepancia extrema.

1. Trayectoria 1: Aproximación por el Eje X ($y = 0$)

Nos acercamos al origen horizontalmente. Aquí, el numerador se anula completamente.

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(0)^2}{x^2 + (0)^4}$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

2. Trayectoria 2: Aproximación por el Eje Y ($x = 0$)

Nos acercamos al origen verticalmente. Aquí eliminamos el término x^2 del denominador.

$$L_2 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{(0)^2 + y^4}$$

$$L_2 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^4}$$

Simplificamos la expresión algebraicamente ($y \neq 0$):

$$L_2 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^2}$$

Análisis del límite: A medida que el denominador y^2 se hace infinitamente pequeño y positivo, el cociente crece sin cota.

$$L_2 \rightarrow +\infty$$

Resultado final

Hemos encontrado una contradicción insalvable:

- Por un camino, la función vale **0**.
- Por otro camino, la función tiende a **infinito** ($+\infty$).

Por lo tanto:

El límite NO existe.

Interpretación breve del resultado

La gráfica de esta función es extremadamente abrupta en el origen.

- Sobre el eje X, hay un "valle" plano a nivel 0.
- Sobre el eje Y, hay una "pared" o pico que se dispara hacia arriba infinitamente.
- *(Nota curiosa: Si te acercaras por la recta $y = x$, el límite sería 1. ¡Esta función toma valores de 0, 1 e ∞ en el mismo punto!)*

✓ Cálculos verificados: correctos.

🎓 ¡Misión Cumplida! Resumen de la Sesión

Has completado con éxito una extensa y variada serie de problemas de cálculo multivariable. Hemos cubierto:

1. **Superficies Cuádricas:** Identificación visual y algebraica de esferas, elipsoides y cilindros (Problemas 4, 5, 6).
2. **Modelado Físico:** Aplicación de curvas de nivel a mapas de temperatura, potencial eléctrico y la ley de los gases ideales (Problemas 7, 8, 9).

3. Límites y Continuidad:

- Cálculo directo en funciones continuas.
- Detección de **no existencia** usando trayectorias rectas, parabólicas y análisis de divergencia al infinito (Problemas 10 y 11).

Ha sido un placer servir como tu revisor matemático y formateador didáctico. ¡Estás listo para enfrentar derivadas parciales y gradientes!

¿Hay algo más en lo que pueda ayudarte hoy, o damos por finalizada la sesión?

Problema 12.1

Aquí tienes la resolución del **Problema 12, Inciso 1**, formateada y revisada.
El análisis de la continuidad en funciones compuestas es vital para determinar la "seguridad" de una función en todo su dominio.

Enunciado del problema

Determinar el conjunto de puntos donde la siguiente función es continua:

Problema 12, Inciso 1:

$$f(x, y) = \tan(xy)$$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y) = \tan(u)$, con $u = xy$.
- **Objetivo:** Hallar el dominio de continuidad D_c .
- **Propiedad de la Tangente:** La función $\tan(\theta)$ es continua en todo su dominio, pero **no está definida** (tiene asíntotas verticales) cuando θ es un múltiplo impar de $\pi/2$.

Desarrollo paso a paso

1. Análisis de la composición

La función se compone de:

- Una función interna polinómica $g(x, y) = xy$, que es continua en todo \mathbb{R}^2 .
- Una función externa trigonométrica $h(u) = \tan(u)$.

Por el teorema de continuidad de funciones compuestas, $f(x, y)$ será continua en todos los puntos donde la función externa esté definida.

2. Identificación de puntos de discontinuidad

Sabemos que $\tan(u)$ es discontinua cuando el coseno es cero:

$$\cos(u) = 0$$

Esto ocurre cuando el ángulo u toma los valores:

$$u = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

(Donde n es un número entero: $0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

3. Planteamiento de la restricción en \mathbb{R}^2

Sustituimos u por el argumento original xy :

$$xy = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

Podemos reescribir el lado derecho para mayor claridad como múltiplos impares de $\pi/2$:

$$xy = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

Por lo tanto, la función es continua en todos los puntos donde **no** se cumpla esta igualdad.

Resultado final

El conjunto donde la función $f(x, y) = \tan(xy)$ es continua es:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Interpretación breve del resultado

Geométricamente, las discontinuidades no son puntos aislados, sino **curvas**.

La ecuación $xy = C$ describe una familia de **hipérbolas equiláteras**.

Esto significa que el plano cartesiano está lleno de "grietas" en forma de hipérbolas asintóticas. Si un punto (x, y) cae exactamente sobre cualquiera de estas curvas, la función se dispara al infinito y se rompe la continuidad.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Pasamos al **Inciso 2**?

$$F(x, y, z) = \frac{2xyz}{x - y}$$

Como mencionaste, aquí pasamos a 3 variables. Al ser una función racional, la discontinuidad ocurrirá donde el denominador sea cero. Esto definirá una superficie (un plano) que corta el espacio en dos.

Problema 12.4

Aquí tienes la resolución del **Problema 12, Inciso 4**, formateada y estructurada como el cierre perfecto para esta serie de ejercicios.

Este problema conecta el cálculo con la geometría analítica clásica: encontrar el dominio de una función se convierte en un ejercicio de identificar una figura geométrica.

Enunciado del problema

Determinar el conjunto de puntos donde la función es continua:

Problema 12, Inciso 4:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2 - 10x}$$

Datos dados

- **Función:** Racional (cociente de polinomios).
- **Numerador:** $x^2 + y$ (Continuo en todo \mathbb{R}^2).
- **Denominador:** $x^2 + y^2 - 10x$.
- **Criterio de Continuidad:** Una función racional es continua en todo su dominio, excepto en los puntos donde el **denominador es cero**.

Desarrollo paso a paso

1. Planteamiento de la restricción

Buscamos los puntos "prohibidos" igualando el denominador a cero:

$$x^2 + y^2 - 10x = 0$$

2. Identificación de la curva (Completar el cuadrado)

Para reconocer la figura geométrica, agrupamos los términos en x y completamos el Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP).

La forma general que buscamos es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

Reordenamos:

$$(x^2 - 10x) + y^2 = 0$$

Tomamos el coeficiente lineal de x (que es -10), lo dividimos entre 2 y lo elevamos al cuadrado:

$$(-10/2)^2 = (-5)^2 = 25$$

Sumamos 25 a ambos lados de la ecuación para mantener la igualdad:

$$(x^2 - 10x + 25) + y^2 = 0 + 25$$

3. Factorización

El término entre paréntesis es ahora un cuadrado perfecto $(x - 5)^2$:

$$(x - 5)^2 + y^2 = 25$$

4. Análisis Geométrico

Esta es la ecuación canónica de una **circunferencia**.

- **Centro** (h, k) : $(5, 0)$
- **Radio al cuadrado** (r^2) : $25 \implies r = 5$

Resultado final

El conjunto C donde la función es continua es todo el plano real, **excepto** los puntos que forman la circunferencia descrita:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 5)^2 + y^2 \neq 25\}$$

Interpretación breve del resultado

La "zona prohibida" es un anillo perfecto de radio 5 desplazado hacia la derecha sobre el eje X.

[Image of circle equation graph]

- **Sobre la línea de la circunferencia:** La función no existe (asíntota vertical).
- **Dentro y fuera del círculo:** La función es continua y se comporta suavemente.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

🌟 ¡Sesión Completada con Éxito!

Has recorrido un camino impresionante a través del cálculo multivariable aplicado:

1. **Superficies y Mapas:** Has visualizado desde esferas y elipsoides hasta cilindros hiperbólicos, entendiendo cómo leer un mapa de contorno.
2. **Física Aplicada:** Has resuelto problemas reales de temperatura, voltaje, gases ideales y energía eólica.
3. **Análisis Riguroso:** Has dominado el cálculo de límites, detectado inexistencias mediante trayectorias y definido dominios de continuidad basados en geometría.

Ha sido un placer acompañarte en esta revisión. ¡Tienes una base sólida para enfrentar derivadas parciales, gradientes y optimización! **¡Mucho éxito en tus estudios!**

Problema 13.1

Aquí tienes la resolución del **Problema 13, Inciso 1**, formateada para distinguir claramente el proceso de derivación respecto a cada variable.

Este es el punto de partida ideal: una función polinómica donde aplicamos las reglas básicas de derivación término a término.

Enunciado del problema

Calcular las derivadas parciales de la función:

Problema 13, Inciso 1:

$$f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 3y^2$$

Datos dados

- **Función:** Polinómica de dos variables x e y .
- **Objetivo:** Hallar el vector gradiente componente por componente:
 1. $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$
 2. $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

Desarrollo paso a paso

Regla General: Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, derivamos respecto a x considerando a y como una constante. Para $\frac{\partial f}{\partial y}$, hacemos lo inverso.

A. Derivada Parcial respecto a x (f_x)

Consideramos y constante. Analizamos término a término:

1. $2x^2$: La derivada de x^2 es $2x$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x^2) = 2(2x) = 4x$$

2. $-6xy$: Aquí $-6y$ actúa como coeficiente constante de x .

$$\frac{\partial}{\partial x}(-6yx) = -6y(1) = -6y$$

3. $3y^2$: No contiene x , por lo tanto, es una constante pura.

$$\frac{\partial}{\partial x}(3y^2) = 0$$

Sumando los resultados:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 6y \quad (1)$$

B. Derivada Parcial respecto a y (f_y)

Consideramos x constante. Analizamos término a término:

1. $2x^2$: No contiene y , es constante.

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^2) = 0$$

2. $-6xy$: Aquí $-6x$ actúa como coeficiente constante de y .

$$\frac{\partial}{\partial y}(-6xy) = -6x(1) = -6x$$

3. $3y^2$: La derivada de y^2 es $2y$.

$$\frac{\partial}{\partial y}(3y^2) = 3(2y) = 6y$$

Sumando los resultados:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y \quad (2)$$

Resultado final

Las derivadas parciales de $f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 3y^2$ son:

$$f_x(x, y) = 4x - 6y$$

$$f_y(x, y) = -6x + 6y$$

Interpretación breve del resultado

Geométricamente, estas derivadas representan las **pendientes** de la superficie en dos direcciones ortogonales.

- f_x es la pendiente si nos movemos estrictamente paralelos al eje X.
- f_y es la pendiente si nos movemos estrictamente paralelos al eje Y.

El conjunto de ambas forma el gradiente ∇f , que nos indicaría la dirección de máximo crecimiento de la función.

¿Pasamos al **Inciso 2** ($h(x, y) = e^{x^2+y^2}$)?

Como bien indicaste, aquí entra en juego la **Regla de la Cadena**. Es fundamental para derivar funciones compuestas (una exponencial que tiene un polinomio "adentro" en el exponente).

Problema 13.4

Aquí tienes la resolución del **Problema 13, Inciso 4**, estructurada para facilitar la visualización de las constantes en cada paso.

Al trabajar con tres variables, la clave es la organización: identificar qué bloque de la ecuación permanece "congelado" mientras operamos sobre la variable de interés.

Enunciado del problema

Calcular las derivadas parciales de la función escalar de tres variables:

Problema 13, Inciso 4:

$$G(x, y, z) = x^2 y (z - 3)$$

Datos dados

- **Función:** $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por un producto de términos.
- **Variables independientes:** x, y, z .
- **Objetivo:** Obtener el gradiente $\nabla G = (\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z})$.

Desarrollo paso a paso

Para derivar parcialmente, aplicamos la regla de derivación ordinaria a una variable mientras tratamos a las otras dos como constantes numéricas.

A. Derivada Parcial respecto a x (G_x)

Consideramos a y y z como constantes. Agrupamos los términos constantes como si fueran un coeficiente:

$$G(x, y, z) = \underbrace{[y(z - 3)]}_{\text{Coeficiente}} \cdot x^2$$

Derivamos x^2 (que es $2x$) y mantenemos el coeficiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x} &= [y(z - 3)] \cdot (2x) \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= 2xy(z - 3)\end{aligned}$$

B. Derivada Parcial respecto a y (G_y)

Consideramos a x y z como constantes. Agrupamos:

$$G(x, y, z) = \underbrace{[x^2(z - 3)]}_{\text{Coeficiente}} \cdot y$$

La derivada de y es 1. Multiplicamos por el coeficiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y} &= [x^2(z - 3)] \cdot (1) \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= x^2(z - 3)\end{aligned}$$

C. Derivada Parcial respecto a z (G_z)

Consideramos a x e y como constantes. Agrupamos:

$$G(x, y, z) = \underbrace{[x^2y]}_{\text{Coeficiente}} \cdot (z - 3)$$

La derivada de $(z - 3)$ respecto a z es 1 (la derivada de z es 1 y la de -3 es 0):

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial z} &= [x^2y] \cdot (1) \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= x^2y\end{aligned}$$

Resultado final

Las derivadas parciales de $G(x, y, z)$ son:

$$\begin{aligned}G_x &= 2xy(z - 3) \\ G_y &= x^2(z - 3) \\ G_z &= x^2y\end{aligned}$$

Interpretación breve del resultado

El vector formado por estas tres componentes es el **Gradiente** en 3D:

$$\nabla G = \langle 2xy(z - 3), x^2(z - 3), x^2y \rangle$$

Aplicación Física: Si G representara, por ejemplo, la temperatura en una habitación, este vector ∇G indicaría en cada punto la dirección exacta hacia la cual la temperatura aumenta más rápidamente.

Definitivamente, vamos a cerrar el tema con el **Inciso 2** ($h(x, y) = e^{x^2+y^2}$).

Ese ejercicio es fundamental porque combina derivadas parciales con la **Regla de la Cadena**, una técnica indispensable cuando tratamos con funciones exponenciales, senoidales o logarítmicas compuestas. ¿Procedemos?

Problema 14.2

Aquí tienes la resolución del **Problema 14, Inciso 2**, formateada y verificada.

Este ejercicio es un clásico porque ilustra perfectamente la diferencia entre una relación lineal (derivada constante) y una relación inversa (derivada cuadrática negativa).

Enunciado del problema

Calcular las derivadas parciales de la función:

Problema 14, Inciso 2:

$$i(x, y) = \frac{x}{y}$$

Datos dados

- **Función:** Racional simple $i(x, y)$.
- **Variables:** x (numerador), y (denominador).
- **Objetivo:** Hallar el gradiente $(\frac{\partial i}{\partial x}, \frac{\partial i}{\partial y})$.

Desarrollo paso a paso

Para facilitar la derivación, es útil reescribir la función expresando el denominador como una potencia negativa:

$$i(x, y) = x \cdot y^{-1}$$

A. Derivada Parcial respecto a x (i_x)

Consideramos a y como una constante.

La función tiene la forma $C \cdot x$ (donde $C = 1/y$).

La derivada de x es 1.

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot 1 = \frac{1}{y}$$

B. Derivada Parcial respecto a y (i_y)

Consideramos a x como una constante.

La función tiene la forma $x \cdot y^{-1}$. Aplicamos la regla de la potencia $\frac{d}{du}(u^n) = nu^{n-1}$.

$$\frac{\partial i}{\partial y} = x \cdot \frac{d}{dy}(y^{-1})$$

$$\frac{\partial i}{\partial y} = x \cdot (-1 \cdot y^{-2})$$

Reescribimos el exponente negativo como denominador positivo:

$$\frac{\partial i}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

Resultado final

Las derivadas parciales son:

$$i_x(x, y) = \frac{1}{y}$$

$$i_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}$$

Interpretación breve del resultado

Tal como señalaste, este modelo es matemáticamente idéntico a la **Ley de Ohm** ($I = V/R$), donde x es el Voltaje y y es la Resistencia.

[Image of Ohm's Law formula triangle]

- $\frac{\partial I}{\partial V} = \frac{1}{R}$: La corriente crece linealmente con el voltaje (conductancia).
- $\frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{V}{R^2}$: La corriente decrece si aumenta la resistencia. El término cuadrático (R^2) indica que el sistema es mucho más sensible a cambios en la resistencia cuando esta es pequeña que cuando es grande.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Pasamos al **Inciso 3** ($f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$)?

Este es el ejercicio perfecto para practicar la **Regla del Cociente** en derivadas parciales, ya que a diferencia del anterior, aquí la variable activa aparece tanto en el numerador como en el denominador.

Problema 14.4

Aquí tienes la resolución del **Problema 14, Inciso 4**, formateada y revisada.

Este ejercicio es ideal para dominar la **Regla de la Cadena**, esencial cuando la variable no está "suelta", sino contenida dentro de otra función (en este caso, una potencia).

Enunciado del problema

Calcular las derivadas parciales de la función:

Problema 14, Inciso 4:

$$f(x, y) = (x - y)^{14}$$

Datos dados

- **Función:** Potencia de un binomio.
- **Estructura:** Función compuesta $u(x, y)^n$.
- **Herramienta:** Regla de la Cadena (Regla de la Potencia Generalizada):

$$\frac{\partial}{\partial v}[u^n] = n \cdot u^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial v}$$

Desarrollo paso a paso

A. Derivada Parcial respecto a x (f_x)

Aplicamos la regla de la potencia. Bajamos el exponente (14) y multiplicamos por la derivada de la base interna $(x - y)$ respecto a x .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 14(x - y)^{13} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x - y)$$

Analizamos la derivada interna:

- Derivada de x es 1.
- Derivada de $-y$ es 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 14(x - y)^{13} \cdot (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 14(x - y)^{13}$$

B. Derivada Parcial respecto a y (f_y)

Aplicamos la misma regla para la estructura externa, pero derivamos la base interna respecto a y .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 14(x - y)^{13} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x - y)$$

Analizamos la derivada interna:

- Derivada de x es 0.
- Derivada de $-y$ es -1 . (El signo es crucial aquí).

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 14(x - y)^{13} \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -14(x - y)^{13}$$

Resultado final

Las derivadas parciales son:

$$f_x(x, y) = 14(x - y)^{13}$$

$$f_y(x, y) = -14(x - y)^{13}$$

Interpretación breve del resultado

- **Simetría Antisimétrica:** Observamos que $f_x = -f_y$. Esto ocurre porque las variables x e y aparecen en la función original con signos opuestos dentro de una estructura simétrica (una diferencia).
- **Aplicación (Señales Diferenciales):** En electrónica, esto modela la sensibilidad de un sistema diferencial. Un incremento en la entrada positiva (x) tiene exactamente el efecto opuesto a un incremento en la entrada negativa (y).

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¡Excelente! Vamos directo al **Inciso 10**:

$$F(x, y, z) = ze^{xyz}$$

Este es un desafío mayor ("Jefe de Nivel") porque combina:

1. **Tres variables** (x, y, z).
2. **Regla del Producto:** Porque z aparece multiplicando afuera y también adentro del exponente.
3. **Regla de la Cadena:** Para derivar la exponencial e^{xyz} .

¿Procedemos con la resolución detallada?

Problema 14.6

Aquí tienes la resolución del **Problema 14, Inciso 6**, formateada y verificada.

Este ejercicio ilustra perfectamente la propiedad de las **funciones separables**: al estar formadas por factores independientes multiplicados, la derivación parcial se simplifica al derivar solo un factor y "copiar" los otros.

Enunciado del problema

Calcular las derivadas parciales de la función:

Problema 14, Inciso 6:

$$F(x, y, z) = x^2 e^y \ln z$$

Datos dados

- **Función:** Producto de tres funciones de una sola variable.
- **Estructura:** $f(x) \cdot g(y) \cdot h(z)$.
- **Dominio implícito:** $z > 0$ (por el logaritmo natural).
- **Objetivo:** Obtener el gradiente ∇F .

Desarrollo paso a paso

A. Derivada Parcial respecto a x (F_x)

Consideramos y y z constantes. El bloque $(e^y \ln z)$ actúa como coeficiente. Derivamos x^2 :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = [e^y \ln z] \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = [e^y \ln z] \cdot (2x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x e^y \ln z$$

B. Derivada Parcial respecto a y (F_y)

Consideramos x y z constantes. El bloque $(x^2 \ln z)$ actúa como coeficiente. Derivamos e^y (cuya derivada es ella misma):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = [x^2 \ln z] \cdot \frac{d}{dy}(e^y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = [x^2 \ln z] \cdot (e^y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 e^y \ln z$$

C. Derivada Parcial respecto a z (F_z)

Consideramos x e y constantes. El bloque $(x^2 e^y)$ actúa como coeficiente. Derivamos $\ln z$:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = [x^2 e^y] \cdot \frac{d}{dz}(\ln z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = [x^2 e^y] \cdot \left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{x^2 e^y}{z}$$

Resultado final

Las derivadas parciales son:

$$F_x = 2xe^y \ln z$$

$$F_y = x^2 e^y \ln z$$

$$F_z = \frac{x^2 e^y}{z}$$

Interpretación breve del resultado

Este sistema muestra tres tipos fundamentales de sensibilidad (tasas de cambio):

1. **Respecto a x :** Crecimiento **lineal** (proporcional a $2x$).
2. **Respecto a y :** Crecimiento **exponencial**. Es la variable más sensible; un pequeño cambio en y altera masivamente el valor de la función.
3. **Respecto a z :** Crecimiento **inverso** ($1/z$). Es una sensibilidad decreciente; a medida que z aumenta, la función cambia cada vez menos (rendimientos decrecientes).

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Es el momento perfecto para abordar el **Inciso 10** ($F(x, y, z) = ze^{xyz}$).

A diferencia de este ejercicio donde las variables estaban "separadas", en el inciso 10 están "mezcladas" dentro del exponente. Eso nos obligará a usar la **Regla del Producto** (porque hay una z afuera y otra adentro) y la **Regla de la Cadena** con mucho cuidado. ¿Listo para ese desafío?

Problema 14.10

¡Has elegido el desafío más interesante de la lista!

El **inciso 10** es especial porque rompe la simetría que vimos en ejercicios anteriores. Aquí la variable z aparece **dos veces**: una vez multiplicando afuera y otra vez "atrapada" en el exponente, mientras que x e y solo están en el exponente.

Esto significa que para derivar respecto a z necesitaremos una herramienta extra: la **Regla del Producto**.

Aquí tienes la resolución detallada.

1. Cuestionario Inicial

1. Enunciado:

Calcular las derivadas parciales de:

$$F(x, y, z) = ze^{xyz}$$

2. Variables:

x, y, z .

3. Objetivo:

Hallar el gradiente ($\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$).

4. Estrategia Diferenciada:

- Para x e y : La función es de la forma $C \cdot e^u$. (Simple Regla de la Cadena).
- Para z : La función es de la forma $z \cdot e^{u(z)}$. (**Regla del Producto** + Cadena).

2. Ejecución Paso a Paso

Paso A: Derivada Parcial respecto a x ($\frac{\partial F}{\partial x}$)

Consideramos y y z como constantes.

La z que está al principio actúa solo como un coeficiente (como si fuera un 5).

$$F = \underbrace{z}_{\text{Constante}} \cdot e^{xyz}$$

Derivamos la exponencial:

- La derivada de e^u es $e^u \cdot u'$.
- Aquí $u = xyz$. La derivada de xyz respecto a x es yz .

$$\frac{\partial F}{\partial x} = z \cdot (e^{xyz} \cdot yz)$$

Simplificamos agrupando los términos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz^2 e^{xyz}$$

Paso B: Derivada Parcial respecto a y ($\frac{\partial F}{\partial y}$)

Consideramos x y z como constantes.

La estructura es idéntica al caso anterior.

$$F = \underbrace{z}_{\text{Constante}} \cdot e^{xyz}$$

- Derivada del exponente xyz respecto a y es xz .

$$\frac{\partial F}{\partial y} = z \cdot (e^{xyz} \cdot xz)$$

Simplificamos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz^2 e^{xyz}$$

Paso C: Derivada Parcial respecto a z ($\frac{\partial F}{\partial z}$)

¡Atención aquí! Ahora z es la variable. Tenemos z multiplicando a una función que contiene z .

Usamos la **Regla del Producto**: $(uv)' = u'v + uv'$.

- $u = z \implies u' = 1$
- $v = e^{xyz} \implies v' = e^{xyz} \cdot (xy)$
(La derivada interna del exponente respecto a z es xy).

Armamos la derivada:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = (1) \cdot e^{xyz} + z \cdot (xye^{xyz})$$

Ordenamos y factorizamos para que se vea elegante:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = e^{xyz} + xyz e^{xyz}$$

Factor Común e^{xyz} :

$$\frac{\partial F}{\partial z} = e^{xyz}(1 + xyz)$$

3. Resumen de Resultados

Para la función $F(x, y, z) = ze^{xyz}$, las derivadas parciales son:

1. **Respecto a x :**

$$F_x = yz^2 e^{xyz}$$

2. **Respecto a y :**

$$F_y = xz^2 e^{xyz}$$

3. **Respecto a z :**

$$F_z = e^{xyz}(1 + xyz)$$

Conclusión de la serie

Con este ejercicio has cubierto las técnicas principales de derivación parcial:

1. Derivada de polinomios (Inciso 1).
2. Derivada de cocientes y exponentes negativos (Inciso 2).
3. Regla de la cadena simple (Inciso 4).
4. Funciones separables (Inciso 6).
5. Regla del producto mixta (Inciso 10).

¡Has completado con éxito el análisis de todos los problemas seleccionados! Si tienes más dudas sobre cálculo vectorial, gradientes o sus aplicaciones físicas, no dudes en preguntar.

Problema 14.12

Aquí tienes la resolución del **Problema 14, Inciso 12**, formateada y verificada.

Este es un excelente ejercicio final ("Grand Finale") porque sintetiza las reglas de derivación en fracciones: el comportamiento es opuesto dependiendo de si la variable vive en el "piso de arriba" o en el "sótano".

Enunciado del problema

Calcular las derivadas parciales de la función escalar de cuatro variables:

Problema 14, Inciso 12:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta t^2}$$

Datos dados

- **Variables:** x, y, z, t .
- **Constantes:** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
- **Estructura:** Racional N/D .
 - N (Numerador) depende de x, y .
 - D (Denominador) depende de z, t .

Desarrollo paso a paso

A. Derivadas respecto al Numerador (x, y)

Cuando derivamos respecto a una variable del numerador, el denominador $D = \gamma z + \delta t^2$ actúa como una constante multiplicativa ($1/D$).

1. **Respecto a x (ϕ_x):**

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x + \beta y^2)$$

Derivada de $\alpha x \rightarrow \alpha$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\alpha}{\gamma z + \delta t^2}$$

2. **Respecto a y (ϕ_y):**

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\alpha x + \beta y^2)$$

Derivada de $\beta y^2 \rightarrow 2\beta y$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2\beta y}{\gamma z + \delta t^2}$$

B. Derivadas respecto al Denominador (z, t)

Cuando la variable está abajo, tratamos al numerador $N = \alpha x + \beta y^2$ como constante y usamos la regla de la potencia inversa: $\frac{d}{du}(u^{-1}) = -u^{-2} \cdot u'$.

3. **Respecto a z (ϕ_z):**

$$\phi = N \cdot (\gamma z + \delta t^2)^{-1}$$

Derivamos usando la Regla de la Cadena (interna: γ):

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = N \cdot [-1(\gamma z + \delta t^2)^{-2}] \cdot (\gamma)$$

Reordenamos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\gamma(\alpha x + \beta y^2)}{(\gamma z + \delta t^2)^2}$$

4. **Respecto a t (ϕ_t):**

$$\phi = N \cdot (\gamma z + \delta t^2)^{-1}$$

Derivamos usando la Regla de la Cadena (interna: $2\delta t$):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = N \cdot [-1(\gamma z + \delta t^2)^{-2}] \cdot (2\delta t)$$

Reordenamos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{2\delta t(\alpha x + \beta y^2)}{(\gamma z + \delta t^2)^2}$$

Resultado final

El gradiente en 4 dimensiones tiene estas componentes:

$$\begin{aligned}\phi_x &= \frac{\alpha}{\gamma z + \delta t^2} \\ \phi_y &= \frac{2\beta y}{\gamma z + \delta t^2} \\ \phi_z &= -\frac{\gamma(\alpha x + \beta y^2)}{(\gamma z + \delta t^2)^2} \\ \phi_t &= -\frac{2\delta t(\alpha x + \beta y^2)}{(\gamma z + \delta t^2)^2}\end{aligned}$$

Interpretación breve del resultado

- **Signos:** Las derivadas del numerador son positivas (relación directa), mientras que las del denominador son negativas (relación inversa).
- **Sensibilidad:** Las derivadas del denominador decaen mucho más rápido (debido al cuadrado en el divisor) que las del numerador.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

🏁 ¡Fin de la Maratón de Cálculo!

Ha sido un recorrido extraordinario. Hemos cubierto:

1. **Geometría:** Superficies cuádricas y mapas de nivel.
2. **Límites:** Existencia, continuidad y la "trampa" de las trayectorias.
3. **Derivadas:** Desde polinomios básicos hasta sistemas complejos de 4 variables con reglas mixtas.

Como tu revisor matemático, confirmo que has completado satisfactoriamente todos los bloques.

¡Estás listo para el examen o para aplicar esto en ingeniería!

Problema 15.1

Aquí tienes la resolución del **Problema 15, Inciso 1**, formateada y revisada.

Este ejercicio es una demostración práctica del **Teorema de Clairaut** (o de Schwarz), el cual garantiza la simetría de las segundas derivadas cruzadas para funciones "suaves" (con segundas derivadas continuas).

Enunciado del problema

Verificar la igualdad de las derivadas parciales mixtas para la función:

Problema 15, Inciso 1:

$$z = x^2 - 4xy + 3y^2$$

Datos dados

- **Función:** Polinomio de dos variables $z(x, y)$.
- **Objetivo:** Demostrar que el orden de derivación no altera el resultado, es decir:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

(Notación abreviada: $z_{xy} = z_{yx}$).

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo de las Primeras Derivadas (z_x y z_y)

Primero obtenemos las pendientes en las direcciones principales.

- **Respecto a x :** (Consideramos y constante).

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 4xy + 3y^2) = 2x - 4y$$

- **Respecto a y :** (Consideramos x constante).

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 4xy + 3y^2) = -4x + 6y$$

2. Cálculo de las Derivadas Mixtas (Segundas Derivadas)

Ahora derivamos cruzado para verificar la igualdad.

- **Camino 1: z_{xy} (Derivar z_x respecto a y)**

Tomamos $z_x = 2x - 4y$ y derivamos respecto a y :

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 4y)$$

$$z_{xy} = -4$$

- **Camino 2: z_{yx} (Derivar z_y respecto a x)**

Tomamos $z_y = -4x + 6y$ y derivamos respecto a x :

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(-4x + 6y)$$

$$z_{yx} = -4$$

Resultado final

Al comparar los resultados de ambos caminos:

$$z_{xy} = -4$$

$$z_{yx} = -4$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

La igualdad queda **verificada**.

Interpretación breve del resultado

El valor -4 indica una tasa de cambio constante en la torsión de la superficie. El hecho de que las derivadas mixtas sean iguales confirma que la superficie z es continua y suave en sus curvaturas, cumpliendo las condiciones del Teorema de Clairaut en todo el plano \mathbb{R}^2 .

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Continuamos con el **Inciso 2** ($z = x^2 e^{-y^2}$)?

Como bien adelantaste, este ejercicio requerirá mayor atención al detalle porque involucra la **Regla del Producto** y la **Regla de la Cadena** al derivar la exponencial, lo que hace que la verificación de la igualdad sea algebraicamente más satisfactoria.

Problema 15.4

Aquí tienes la resolución del **Problema 15, Inciso 4**, revisada y estructurada.

Has manejado perfectamente la complejidad algebraica. Este ejercicio es una excelente prueba de resistencia por la combinación de reglas (Cadena + Producto + Cociente).

Enunciado del problema

Verificar la igualdad de las derivadas parciales mixtas (Teorema de Clairaut) para la función:

Problema 15, Inciso 4:

$$z = \sin(xy) + \arctan(xy)$$

Datos dados

- **Función:** Suma de funciones trascendentes compuestas.
- **Objetivo:** Demostrar que $z_{xy} = z_{yx}$.
- **Herramientas de derivación:**
 - $\frac{d}{du}(\sin u) = \cos u \cdot u'$
 - $\frac{d}{du}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
 - Reglas del Producto y del Cociente.

Desarrollo paso a paso

1. Primera Derivada respecto a x (z_x)

Consideramos y constante. La derivada interna de xy es y .

$$\begin{aligned}z_x &= \frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy)] + \frac{\partial}{\partial x}[\arctan(xy)] \\z_x &= \cos(xy) \cdot y + \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot y \\z_x &= y \cos(xy) + \frac{y}{1 + x^2 y^2}\end{aligned}\tag{1}$$

2. Derivada Mixta z_{xy} (Derivar z_x respecto a y)

Ahora derivamos la ecuación (1) respecto a y .

- Para el primer término ($y \cos(xy)$): Usamos **Regla del Producto**.
- Para el segundo término ($\frac{y}{1+x^2 y^2}$): Usamos **Regla del Cociente**.

Cálculo:

$$z_{xy} = \underbrace{[1 \cdot \cos(xy) + y(-\sin(xy) \cdot x)]}_{\text{Producto}} + \underbrace{\left[\frac{1(1 + x^2 y^2) - y(2x^2 y)}{(1 + x^2 y^2)^2} \right]}_{\text{Cociente}}$$

Simplificando el cociente:

$$\frac{1 + x^2 y^2 - 2x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2} = \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2}$$

Resultado parcial:

$$z_{xy} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2}$$

3. Primera Derivada respecto a y (z_y)

Por la simetría de la función (donde x e y son intercambiables), el resultado es análogo al paso 1:

$$z_y = x \cos(xy) + \frac{x}{1 + x^2 y^2}\tag{2}$$

4. Derivada Mixta z_{yx} (Derivar z_y respecto a x)

Derivamos la ecuación (2) respecto a x , aplicando nuevamente producto y cociente.

$$z_{yx} = \underbrace{[1 \cdot \cos(xy) + x(-\sin(xy) \cdot y)]}_{\text{Producto}} + \underbrace{\left[\frac{1(1 + x^2 y^2) - x(2y^2 x)}{(1 + x^2 y^2)^2} \right]}_{\text{Cociente}}$$

Simplificando:

$$z_{yx} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2}$$

Resultado final

Al comparar los resultados de las derivadas cruzadas:

$$z_{xy} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2}$$

$$z_{yx} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2}$$

Queda demostrado que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Interpretación breve del resultado

Este ejercicio confirma que, incluso con funciones complejas que involucran trigonometría inversa y reglas de derivación anidadas, el **Teorema de Clairaut** se sostiene.

Como bien observaste, la **simetría del argumento** (xy) es una pista poderosa: si la función original es simétrica respecto a x e y ($f(x, y) = f(y, x)$), entonces sus derivadas parciales mixtas siempre tendrán formas algebraicas idénticas (espejadas).

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Siguiente Paso

Has completado la serie de derivadas parciales y el Teorema de Clairaut. El camino natural del cálculo multivariable suele continuar con:

1. **Regla de la Cadena Multivariable** (Derivada Total).
2. **Derivación Implícita.**
3. **Planos Tangentes y Aproximaciones Lineales.**

¿Tienes más ejercicios sobre estos temas, o te gustaría ver un ejemplo de aplicación de la **Regla de la Cadena** para cerrar la sesión?

Problema 16.1

Aquí tienes la resolución del **Problema 16, Inciso 1**, formateada y estructurada.

Esta demostración es clásica en física matemática: confirma que el logaritmo de la distancia radial es el "potencial natural" en dos dimensiones.

Enunciado del problema

Determinar si la siguiente función es armónica, es decir, si satisface la ecuación de Laplace ($\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$):

Problema 16, Inciso 1:

$$u(x, y) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

Datos dados

- **Función:** Logarítmica radial.
- **Objetivo:** Calcular el Laplaciano $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ y verificar si es cero.
- **Simplificación previa:** Usamos propiedades de logaritmos para facilitar la derivación:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

Desarrollo paso a paso

1. Derivadas Parciales respecto a x

- **Primera Derivada (u_x):**

Aplicamos la regla de la cadena ($\frac{d}{dx} \ln v = \frac{v'}{v}$):

$$u_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2x)$$
$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

- **Segunda Derivada (u_{xx}):**

Aplicamos la regla del cociente sobre u_x :

$$u_{xx} = \frac{(1)(x^2 + y^2) - (x)(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$u_{xx} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$u_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \tag{1}$$

2. Derivadas Parciales respecto a y

Debido a la simetría de la función (x e y juegan el mismo rol), el proceso es análogo:

- **Primera Derivada (u_y):**

$$u_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

- **Segunda Derivada (u_{yy}):**

$$\begin{aligned} u_{yy} &= \frac{(1)(x^2 + y^2) - (y)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ u_{yy} &= \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ u_{yy} &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

3. Verificación del Laplaciano

Sumamos las ecuaciones (1) y (2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Como los denominadores son iguales, sumamos los numeradores:

$$\begin{aligned} &= \frac{(y^2 - x^2) + (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{0}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Resultado final

Dado que la suma de las segundas derivadas parciales es idénticamente cero:

La función $SÍ$ es armónica.

(Válido para todo $(x, y) \neq (0, 0)$).

Interpretación breve del resultado

En física, las funciones armónicas representan estados de equilibrio.

Esta función en particular es el **Potencial Electrostático** generado por una línea infinita de carga (como un cable recto muy largo).

Las superficies equipotenciales son cilindros concéntricos alrededor de la línea de carga, y el potencial decae logarítmicamente con la distancia.

¿Quieres que probemos con el **Inciso 2**?

A veces, funciones que parecen muy similares (como cambiar un signo o elevar al cuadrado) dejan de ser armónicas, lo cual indica que no pueden representar un campo físico en el vacío.

Problema 16.2

Aquí tienes la resolución del **Problema 16, Inciso 2**, formateada y verificada.

Este es el broche de oro perfecto para la sesión: una función que combina las dos dinámicas más importantes de la física clásica (oscilación y decaimiento) y demuestra ser una solución válida para campos potenciales.

Enunciado del problema

Verificar si la siguiente función es armónica (es decir, si satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$):

Problema 16, Inciso 2:

$$u(x, y) = e^{-x} \sin y$$

Datos dados

- **Función:** Producto de una exponencial (en x) por una trigonométrica (en y).
- **Condición de Armonicidad:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- **Objetivo:** Calcular las segundas derivadas parciales y verificar si su suma se anula.

Desarrollo paso a paso

1. Derivadas Parciales respecto a x

Consideramos y constante (el término $\sin y$ actúa como coeficiente).

Derivamos la exponencial e^{-x} (regla de la cadena: baja un signo menos).

- **Primera Derivada (u_x):**

$$u_x = (\sin y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^{-x})$$

$$u_x = -e^{-x} \sin y$$

- **Segunda Derivada (u_{xx}):**

$$u_{xx} = (\sin y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(-e^{-x})$$

$$u_{xx} = (\sin y) \cdot [-(-e^{-x})]$$

$$u_{xx} = e^{-x} \sin y \quad (1)$$

2. Derivadas Parciales respecto a y

Consideramos x constante (el término e^{-x} actúa como coeficiente).
Derivamos el seno ($\sin \rightarrow \cos \rightarrow -\sin$).

- **Primera Derivada (u_y):**

$$u_y = (e^{-x}) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\sin y)$$

$$u_y = e^{-x} \cos y$$

- **Segunda Derivada (u_{yy}):**

$$u_{yy} = (e^{-x}) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\cos y)$$

$$u_{yy} = e^{-x}(-\sin y)$$

$$u_{yy} = -e^{-x} \sin y \quad (2)$$

3. Verificación del Laplaciano

Sumamos los resultados (1) y (2):

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2 u = (e^{-x} \sin y) + (-e^{-x} \sin y)$$

$$\nabla^2 u = 0$$

Resultado final

Dado que la suma de las segundas derivadas es idénticamente cero:

La función SÍ es armónica.

Interpretación breve del resultado

Matemática y físicamente, esta función describe un equilibrio dinámico:

- **Curvatura en X:** Es positiva (convexa, forma de "U").
- **Curvatura en Y:** Es negativa (cóncava, forma de "n").
- Ambas curvaturas se cancelan perfectamente en cada punto del espacio, que es la condición necesaria para que no haya acumulación de calor o carga en un punto (Ecuación de Laplace).

Aplicación Física (Transferencia de Calor):

Esta función modela la temperatura en una placa metálica muy larga.

- El borde izquierdo ($x = 0$) se calienta siguiendo un patrón senoidal ($\sin y$).
- A medida que avanzamos hacia la derecha ($x \rightarrow \infty$), la temperatura decae exponencialmente (e^{-x}) hasta llegar a cero.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

🎓 ¡Sesión Finalizada!

¡Enhorabuena! Has completado una serie exhaustiva de problemas que abarcan los pilares del cálculo multivariable:

1. **Geometría Analítica:** Superficies de nivel y mapas de contorno.
2. **Límites:** Continuidad y análisis de trayectorias.
3. **Derivadas:** Parciales, mixtas (Clairaut) y operadores diferenciales (Laplaciano).

Ha sido un gusto acompañarte en este análisis. Tienes un dominio sólido de los conceptos teóricos y sus aplicaciones físicas. **¡Mucho éxito en tus futuros retos académicos o profesionales!**

Problema 17

Aquí tienes la resolución del **Problema 17**, formateada y revisada.

Este es el cierre perfecto para tu hoja de ejercicios, ya que pasamos del cálculo de derivadas aisladas a la **verificación de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)**, que es el lenguaje fundamental de la física moderna.

Enunciado del problema

Verificar que la función $w(x, y)$ satisface la ecuación de onda unidimensional:

Problema 17:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Para la función:

$$w(x, y) = \cos(x - y) + \ln(x + y)$$

Datos dados

- **Función propuesta:** $w(x, y) = \cos(x - y) + \ln(x + y)$.
- **Ecuación a verificar:** La segunda derivada respecto a x menos la segunda derivada respecto a y debe ser cero.
- **Contexto:** Ecuación de Onda con velocidad de propagación $c = 1$.

Desarrollo paso a paso

1. Derivadas Parciales respecto a x

Consideramos y constante.

- Derivada interna de $(x - y)$ respecto a x es 1.
- Derivada interna de $(x + y)$ respecto a x es 1.

Primera Derivada (w_x):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\sin(x - y) \cdot (1) + \frac{1}{x + y} \cdot (1)$$

$$w_x = -\sin(x - y) + (x + y)^{-1}$$

Segunda Derivada (w_{xx}):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\cos(x - y) \cdot (1) - (x + y)^{-2} \cdot (1)$$

$$w_{xx} = -\cos(x - y) - \frac{1}{(x + y)^2} \quad (1)$$

2. Derivadas Parciales respecto a y

Consideramos x constante. Aquí es crucial la **Regla de la Cadena**.

- Derivada interna de $(x - y)$ respecto a y es -1 .
- Derivada interna de $(x + y)$ respecto a y es 1.

Primera Derivada (w_y):

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\sin(x - y) \cdot (-1) + \frac{1}{x + y} \cdot (1)$$

$$w_y = \sin(x - y) + (x + y)^{-1}$$

Segunda Derivada (w_{yy}):

Derivamos w_y . La derivada del seno es coseno, pero volvemos a multiplicar por la derivada interna (-1).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \cos(x - y) \cdot (-1) - (x + y)^{-2} \cdot (1)$$

$$w_{yy} = -\cos(x - y) - \frac{1}{(x + y)^2} \quad (2)$$

3. Verificación de la Ecuación

Sustituimos los resultados (1) y (2) en la ecuación diferencial original:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\left[-\cos(x - y) - \frac{1}{(x + y)^2} \right] - \left[-\cos(x - y) - \frac{1}{(x + y)^2} \right]$$

Como los términos en ambos corchetes son idénticos, su resta es cero:

$$0 = 0$$

Resultado final

La función $w(x, y) = \cos(x - y) + \ln(x + y)$ **SÍ satisface** la ecuación diferencial dada.

Interpretación breve del resultado

Matemáticamente, esto confirma la **Solución de D'Alembert** para la ecuación de onda.

Esta teoría establece que cualquier función de la forma $f(x - ct) + g(x + ct)$ es solución de la ecuación de onda.

[Image of wave propagation graph]

- El término $\cos(x - y)$ representa una **onda viajera** que se mueve en una dirección.
- El término $\ln(x + y)$ representa otra perturbación que viaja en la dirección opuesta.
- La linealidad de la ecuación permite que ambas coexistan (principio de superposición) sin destruirse mutuamente.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

🎉 ¡Misión Cumplida!

¡Felicidades! Hemos revisado y formateado exitosamente **toda la serie de problemas**. Has demostrado un dominio sólido en:

1. **Geometría Analítica 3D** (Cuádricas).
2. **Cálculo Diferencial** (Límites y Continuidad).
3. **Derivadas Parciales** (Reglas básicas, cadena y producto).
4. **Aplicaciones Físicas** (Potenciales, Termodinámica y Ondas).

Ha sido un placer ser tu asistente en este proceso de revisión matemática. **¿Hay alguna otra consulta final o damos por cerrada la sesión?**

Problema 18

Aquí tienes la resolución del **Problema 18** (implícito), estructurada y revisada.

¡Tu "ojo clínico" es acertadísimo! Detectar errores de escritura en libros de cálculo es una habilidad de nivel experto. La expresión original planteada en la imagen (e^{-ct^2}) rompe la dimensionalidad física y la estructura matemática de la ecuación de difusión. Has aplicado la corrección estándar para la **Ecuación del Calor**.

Enunciado del problema

Verificar que la función $w(x, t)$ satisface la **Ecuación del Calor** (o Difusión) unidimensional con constante de difusividad $k = 1$:

$$w_{xx} = w_t$$

Función corregida:

$$w(x, t) = e^{-c^2 t} \sin(cx)$$

(Nota: Se asume la corrección del exponente temporal de $-ct^2$ a $-c^2 t$ para que la función sea una solución válida).

Datos dados

- **Función:** $w(x, t) = e^{-c^2 t} \sin(cx)$.
- **Objetivo:** Demostrar que $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$.
- **Variables:** x (espacio), t (tiempo).
- **Constante:** c (número real, relacionado con la frecuencia espacial).

Desarrollo paso a paso

1. Lado Izquierdo: Derivadas Espaciales (w_{xx})

Consideramos el tiempo t como constante. El término exponencial actúa como coeficiente.

- **Primera derivada (w_x):**

Derivamos $\sin(cx)$. Regla de la cadena: interna es c .

$$w_x = e^{-c^2 t} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\sin(cx))$$

$$w_x = ce^{-c^2 t} \cos(cx)$$

- **Segunda derivada (w_{xx}):**

Derivamos $\cos(cx)$. Regla de la cadena: interna es c , derivada de coseno es menos seno.

$$w_{xx} = ce^{-c^2 t} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\cos(cx))$$

$$w_{xx} = ce^{-c^2 t} \cdot (-c \sin(cx))$$

$$w_{xx} = -c^2 e^{-c^2 t} \sin(cx) \tag{1}$$

2. Lado Derecho: Derivada Temporal (w_t)

Consideramos el espacio x como constante. El término seno actúa como coeficiente.

- **Primera derivada (w_t):**

Derivamos la exponencial $e^{u(t)}$ donde $u(t) = -c^2t$.

$$w_t = \sin(cx) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(e^{-c^2t})$$

$$w_t = \sin(cx) \cdot (-c^2 e^{-c^2t})$$

Reordenamos:

$$w_t = -c^2 e^{-c^2t} \sin(cx) \quad (2)$$

3. Comparación

Comparamos las ecuaciones (1) y (2):

$$\text{Lado Izquierdo: } -c^2 e^{-c^2t} \sin(cx)$$

$$\text{Lado Derecho: } -c^2 e^{-c^2t} \sin(cx)$$

$$w_{xx} = w_t$$

Resultado final

La función corregida **SÍ satisface** la ecuación diferencial parcial del calor.

Interpretación breve del resultado

Esta función describe cómo se disipa el calor en una barra unidimensional.

- **Perfil inicial ($t = 0$):** Una distribución senoidal de temperatura ($\sin(cx)$).
- **Evolución ($t > 0$):** La forma senoidal se mantiene, pero su amplitud decae exponencialmente con el tiempo (e^{-c^2t}).

[Image of heat equation decay graph]

Esto modela el "aplanamiento" de las diferencias de temperatura: las zonas calientes se enfrían y las frías se calientan hasta llegar al equilibrio.

Correcciones y justificación

- **Error detectado:** El enunciado original sugería implícitamente $w = e^{-ct^2} \sin(cx)$ (basado en patrones visuales comunes de errores tipográficos).
- **Justificación:**
 - Si derivamos $w = e^{-ct^2} \sin(cx)$ respecto a t , obtenemos un factor $-2ct$.

- Si derivamos respecto a x dos veces, obtenemos un factor $-c^2$.
- La igualdad $-2ct = -c^2$ es imposible para todo t .
- **Corrección aplicada:** Se modificó el exponente a $-c^2t$. Esto es consistente con la teoría de separación de variables para EDPs, donde la constante de separación negativa ($-\lambda^2$) genera un decaimiento exponencial simple en el tiempo y una oscilación en el espacio.

✅ *Cálculos verificados: correctos (bajo la corrección del enunciado).*

¡Has completado brillantemente esta sesión! Tu capacidad para no solo resolver, sino **criticar y corregir** el planteamiento del problema, demuestra un entendimiento profundo de la materia. ¿Damos por finalizada la sesión?

Problema 19

Aquí tienes la resolución del **Problema 19**, formateada y revisada.

Este ejercicio conecta las matemáticas puras con la física ondulatoria, demostrando cómo una **Onda Estacionaria** es una solución válida de la ecuación de onda.

Enunciado del problema

Verificar que la función $v(x, t)$ satisface la **Ecuación de Onda Unidimensional**:

Problema 19:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Para la función propuesta:

$$v(x, t) = \sin(akt) \sin(kx)$$

Datos dados

- **Función:** Producto de dos senos (separación de variables espacio-tiempo).
- **Variables:** t (tiempo), x (posición).
- **Constantes:** a (velocidad de propagación), k (número de onda).
- **Objetivo:** Demostrar la igualdad $v_{tt} = a^2 v_{xx}$.

Desarrollo paso a paso

1. Derivadas Parciales respecto al Tiempo (t)

Consideramos la parte espacial $\sin(kx)$ como una constante.

Aplicamos la regla de la cadena: la derivada interna de akt es ak .

- **Primera derivada (v_t):**

$$v_t = \sin(kx) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\sin(akt))$$

$$v_t = \sin(kx) \cdot [ak \cos(akt)]$$

- **Segunda derivada (v_{tt}):**

$$v_{tt} = ak \sin(kx) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\cos(akt))$$

$$v_{tt} = ak \sin(kx) \cdot [-ak \sin(akt)]$$

$$v_{tt} = -a^2 k^2 \sin(kx) \sin(akt) \quad (1)$$

2. Derivadas Parciales respecto a la Posición (x)

Consideramos la parte temporal $\sin(akt)$ como una constante.

Aplicamos la regla de la cadena: la derivada interna de kx es k .

- **Primera derivada (v_x):**

$$v_x = \sin(akt) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\sin(kx))$$

$$v_x = \sin(akt) \cdot [k \cos(kx)]$$

- **Segunda derivada (v_{xx}):**

$$v_{xx} = k \sin(akt) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\cos(kx))$$

$$v_{xx} = k \sin(akt) \cdot [-k \sin(kx)]$$

$$v_{xx} = -k^2 \sin(akt) \sin(kx) \quad (2)$$

3. Verificación de la Ecuación

Sustituimos los resultados (1) y (2) en la ecuación de onda original:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Sustituyendo:

$$-a^2 k^2 \sin(kx) \sin(akt) = a^2 \cdot [-k^2 \sin(akt) \sin(kx)]$$

Reordenando el lado derecho:

$$-a^2 k^2 \sin(kx) \sin(akt) = -a^2 k^2 \sin(kx) \sin(akt)$$

Resultado final

La función $v(x, t) = \sin(akt) \sin(kx)$ **SÍ satisface** la ecuación de onda.

Interpretación breve del resultado

Esta solución específica representa una **Onda Estacionaria**.

A diferencia de las ondas viajeras (como las del mar que avanzan hacia la orilla), esta onda oscila "en su lugar".

[Image of wave propagation graph]

- **Separación de variables:** La función es de la forma $X(x) \cdot T(t)$. Esto significa que el perfil espacial (la forma de la onda) no se mueve a la izquierda ni a la derecha; solo sube y baja su amplitud con el tiempo.
- **Nodos:** Existen puntos fijos donde $\sin(kx) = 0$. En esos puntos, la vibración es siempre nula (como los extremos fijos de una cuerda de guitarra).

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¡Excelente trabajo! Has completado la revisión del Problema 19.

Este ejercicio es fundamental para entender la **resonancia** en cavidades electromagnéticas o instrumentos musicales.

¿Hay algún otro problema o tema teórico que desees revisar?

Problema 20.1

Aquí tienes la resolución del **Problema 20, Inciso 1**, formateada y verificada.

Este problema conecta el concepto abstracto de derivada parcial con una magnitud física tangible: la rapidez con la que cambia la temperatura al desplazarse.

Enunciado del problema

Dada la función de temperatura de una lámina metálica:

$$T(x, y) = 10(x^2 + y^2)^2$$

Calcular la **tasa de variación** de la temperatura en el punto $P(1, 2)$ en la dirección del **eje x**.
(Unidades: Temperatura en grados, distancia en cm).

Datos dados

- **Función escalar:** $T(x, y)$.
- **Punto de evaluación:** $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

- **Concepto matemático:** La "tasa de variación en la dirección del eje x" es, por definición, la **Derivada Parcial respecto a x** evaluada en el punto.
- **Objetivo:** Calcular $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(1,2)}$.

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo de la Función Derivada ($\frac{\partial T}{\partial x}$)

La función es compuesta: $T = 10(u)^2$, donde $u = x^2 + y^2$.

Aplicamos la **Regla de la Cadena**:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 10 \cdot \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + y^2)^2]$$

Bajamos el exponente y multiplicamos por la derivada interna de la base respecto a x :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 10 \cdot \left[2(x^2 + y^2)^{2-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) \right]$$

La derivada interna de $(x^2 + y^2)$ respecto a x es $2x$ (ya que y^2 es constante):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 20(x^2 + y^2) \cdot (2x)$$

Simplificamos la expresión algebraica:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 40x(x^2 + y^2) \quad (1)$$

2. Evaluación en el punto (1, 2)

Sustituimos $x = 1$ e $y = 2$ en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(1,2)} &= 40(1) \cdot (1^2 + 2^2) \\ &= 40 \cdot (1 + 4) \\ &= 40 \cdot 5 \\ &= 200 \end{aligned}$$

Resultado final

La tasa de variación de la temperatura en el punto (1, 2) en dirección del eje x es:

$$200 \text{ grados/cm}$$

Interpretación breve del resultado

- **Signo Positivo:** Indica que la temperatura **aumenta** si nos movemos hacia la derecha (en sentido positivo de las x).

- **Magnitud (200):** Es un cambio muy brusco. Por cada centímetro que nos movamos (infinitesimalmente), la temperatura sube 200 grados. Esto sugiere que la fuente de calor es intensa y aumenta radialmente.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

Pasemos al **Inciso 2** (dirección del eje y).

Predicción física: Dado que el punto es $(1, 2)$, estamos más lejos del origen en el eje y que en el x . Como la función crece con la distancia, ¿crees que la variación será mayor o menor en el eje y que los 200 grados/cm que acabamos de calcular? ¡Vamos a averiguarlo!

Problema 20.2

Aquí tienes la resolución del **Problema 20, Inciso 2**, formateada y verificada.

Este ejercicio cierra el ciclo comparando las variaciones direccionales y demostrando cómo la posición relativa afecta la intensidad del cambio térmico.

Enunciado del problema

Dada la función de temperatura $T(x, y) = 10(x^2 + y^2)^2$, calcular la **tasa de variación** en el punto $P(1, 2)$ en la dirección del **eje y** .

Datos dados

- **Función:** $T(x, y) = 10(x^2 + y^2)^2$.
- **Punto:** $(1, 2)$.
- **Objetivo:** Calcular $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(1,2)}$.

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo de la Derivada Parcial respecto a y

Consideramos x constante. Aplicamos la Regla de la Cadena a la potencia externa y luego a la base interna.

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 10 \cdot \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + y^2)^2]$$

Bajamos el exponente (2) y multiplicamos por la derivada interna respecto a y (que es $2y$):

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 10 \cdot [2(x^2 + y^2)^{2-1} \cdot (2y)]$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 20(x^2 + y^2) \cdot (2y)$$

Simplificamos:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 40y(x^2 + y^2) \quad (1)$$

2. Evaluación en el punto (1, 2)

Sustituimos $x = 1$ e $y = 2$ en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(1,2)} &= 40(2) \cdot (1^2 + 2^2) \\ &= 80 \cdot (1 + 4) \\ &= 80 \cdot 5 \\ &= 400 \end{aligned}$$

Resultado final

La tasa de variación de la temperatura en el punto (1, 2) en dirección del eje y es:

$$400 \text{ grados/cm}$$

Interpretación breve del resultado

Al comparar los resultados:

- **Variación en X:** 200 grados/cm.
- **Variación en Y:** 400 grados/cm.

[Image of gradient vector field]

Conclusión Física: En este punto específico, la placa se calienta el **doblo de rápido** si nos movemos verticalmente que si nos movemos horizontalmente.

Esto ocurre porque el punto (1, 2) está más alejado del centro en el eje y ($y = 2$) que en el eje x ($x = 1$). Dado que la función crece con el cuadrado de la distancia, la pendiente es mucho más pronunciada en la dirección donde la coordenada es mayor.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

🎓 ¡Misión Cumplida: Serie Finalizada!

¡Felicidades! Has completado la revisión integral de toda la hoja de problemas.

Hemos navegado desde la **geometría de superficies** (esferas, elipsoides), pasando por **límites y continuidad** (y sus trampas), hasta llegar al **cálculo diferencial aplicado** (derivadas parciales, gradientes y ecuaciones de onda).

Ha sido un privilegio acompañarte en este análisis matemático. Tienes todas las herramientas listas para dominar el cálculo multivariable. ¡**Mucho éxito!**