

Serie de ejercicios Tema 3 Parte 3 (22-31)

Problema 22 inciso 2

Enunciado del problema

Determine los vectores \mathbf{T} (Tangente Unitario), \mathbf{N} (Normal Principal) y \mathbf{B} (Binormal) para la curva $\mathbf{r}(t) = (4t, \cos 2t, \sin 2t)$ en todo t .

Datos dados

La curva en \mathbb{R}^3 está definida por la función vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = (4t, \cos 2t, \sin 2t)$$

Se buscan las expresiones para el Triedro Móvil: $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$.

Desarrollo paso a paso

El Triedro Móvil (o Marco de Frenet-Serret) se define mediante la aplicación directa de las siguientes fórmulas:

- **Vector Tangente Unitario:** $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$
- **Vector Normal Principal:** $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$
- **Vector Binormal:** $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$

Paso 1: Calcular el vector velocidad $\mathbf{r}'(t)$

Derivamos la función $\mathbf{r}(t)$ componente a componente respecto a t :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \frac{d}{dt}(4t, \cos 2t, \sin 2t) \\ \mathbf{r}'(t) &= (4, -2 \sin 2t, 2 \cos 2t)\end{aligned}$$

Paso 2: Calcular la rapidez $|\mathbf{r}'(t)|$

Calculamos la magnitud (norma) del vector velocidad:

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{(4)^2 + (-2 \sin 2t)^2 + (2 \cos 2t)^2} \\ |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{16 + 4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t}\end{aligned}$$

Factorizamos el 4 y aplicamos la identidad pitagórica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{16 + 4(\sin^2 2t + \cos^2 2t)}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{16 + 4(1)} = \sqrt{20}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{5}$$

Paso 3: Calcular el vector Tangente Unitario $\mathbf{T}(t)$

Normalizamos el vector velocidad dividiéndolo por su magnitud:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(4, -2 \sin 2t, 2 \cos 2t)}{2\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{T}(t) = \left(\frac{4}{2\sqrt{5}}, \frac{-2 \sin 2t}{2\sqrt{5}}, \frac{2 \cos 2t}{2\sqrt{5}} \right)$$

$$\mathbf{T}(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{\sin 2t}{\sqrt{5}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{5}} \right)$$

Paso 4: Calcular la derivada del tangente unitario $\mathbf{T}'(t)$

Derivamos $\mathbf{T}(t)$ respecto a t para encontrar la dirección del vector normal:

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} (2, -\sin 2t, \cos 2t) \right]$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{d}{dt}[2], \frac{d}{dt}[-\sin 2t], \frac{d}{dt}[\cos 2t] \right)$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} (0, -2 \cos 2t, -2 \sin 2t)$$

Paso 5: Calcular la magnitud $|\mathbf{T}'(t)|$

Calculamos la norma de $\mathbf{T}'(t)$:

$$|\mathbf{T}'(t)| = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{-2 \cos 2t}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{-2 \sin 2t}{\sqrt{5}} \right)^2}$$

$$|\mathbf{T}'(t)| = \sqrt{0 + \frac{4 \cos^2 2t}{5} + \frac{4 \sin^2 2t}{5}}$$

$$|\mathbf{T}'(t)| = \sqrt{\frac{4}{5}(\cos^2 2t + \sin^2 2t)} = \sqrt{\frac{4}{5}(1)}$$

$$|\mathbf{T}'(t)| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Paso 6: Calcular el vector Normal Principal $\mathbf{N}(t)$

Normalizamos el vector $\mathbf{T}'(t)$:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2 \cos 2t, -2 \sin 2t)}{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{2}(0, -2 \cos 2t, -2 \sin 2t)$$

$$\mathbf{N}(t) = (0, -\cos 2t, -\sin 2t)$$

Paso 7: Calcular el vector Binormal $\mathbf{B}(t)$

Calculamos el producto cruz $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$:

$$\mathbf{B}(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2, -\sin 2t, \cos 2t) \right] \times [(0, -\cos 2t, -\sin 2t)]$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -\sin 2t & \cos 2t \\ 0 & -\cos 2t & -\sin 2t \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante para cada componente:

- **Componente i:** $\frac{1}{\sqrt{5}} [(-\sin 2t)(-\sin 2t) - (\cos 2t)(-\cos 2t)] = \frac{1}{\sqrt{5}} [\sin^2 2t + \cos^2 2t] = \frac{1}{\sqrt{5}}$
- **Componente j:** $\frac{1}{\sqrt{5}} [(\cos 2t)(0) - (2)(-\sin 2t)] = \frac{1}{\sqrt{5}} [2 \sin 2t] = \frac{2 \sin 2t}{\sqrt{5}}$
- **Componente k:** $\frac{1}{\sqrt{5}} [(2)(-\cos 2t) - (-\sin 2t)(0)] = \frac{1}{\sqrt{5}} [-2 \cos 2t] = -\frac{2 \cos 2t}{\sqrt{5}}$

El vector resultante es:

$$\mathbf{B}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2 \sin 2t}{\sqrt{5}}, -\frac{2 \cos 2t}{\sqrt{5}} \right)$$

Resultado final

Las expresiones para los vectores del triedro móvil son:

Vector Tangente Unitario:

$$\mathbf{T}(t) = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{\sin(2t)}{\sqrt{5}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Vector Normal Principal:

$$\mathbf{N}(t) = \langle 0, -\cos(2t), -\sin(2t) \rangle$$

Vector Binormal:

$$\mathbf{B}(t) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2 \sin(2t)}{\sqrt{5}}, -\frac{2 \cos(2t)}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Interpretación breve del resultado

La curva $\mathbf{r}(t)$ describe una **hélice circular** que avanza a lo largo del eje x . Los resultados lo confirman:

1. La **rapidez** $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{5}$ es constante.
2. La **curvatura** $\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{2/\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$ también es constante.
3. El **vector Normal** $\mathbf{N}(t)$ no tiene componente en x ($N_x = 0$) y siempre apunta hacia el eje x , que es el eje central de la hélice.

Estas son las propiedades características de una hélice uniforme.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 22 inciso 4

Enunciado del problema

Determine los vectores \mathbf{T} (Tangente Unitario), \mathbf{N} (Normal Principal) y \mathbf{B} (Binormal) para la curva $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ en el instante $t = 0$.

Datos dados

La curva en \mathbb{R}^3 está definida por la función vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$$

Se buscan los vectores $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{N}(0)$ y $\mathbf{B}(0)$, evaluados en el punto $t = 0$.

Desarrollo paso a paso

El Triedro Móvil (Marco de Frenet-Serret) se calcula aplicando las definiciones diferenciales y evaluándolas en el punto $t = 0$.

Paso 1: Calcular el vector velocidad $\mathbf{r}'(t)$ y evaluarlo en $t = 0$

Primero, calculamos la derivada simbólica $\mathbf{r}'(t)$:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}(\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}) = (\sqrt{2}, e^t, -e^{-t})$$

Evaluamos este vector en $t = 0$:

$$\mathbf{r}'(0) = (\sqrt{2}, e^0, -e^{-0}) = (\sqrt{2}, 1, -1)$$

Paso 2: Calcular la rapidez $|\mathbf{r}'(0)|$

Calculamos la magnitud (norma) del vector velocidad en $t = 0$:

$$|\mathbf{r}'(0)| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2 + (-1)^2}$$

$$|\mathbf{r}'(0)| = \sqrt{2 + 1 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

Paso 3: Calcular el vector Tangente Unitario $\mathbf{T}(0)$

Usamos la definición $\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|}$:

$$\mathbf{T}(0) = \frac{(\sqrt{2}, 1, -1)}{2}$$

$$\mathbf{T}(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Paso 4: Calcular la derivada del tangente $\mathbf{T}'(t)$ y evaluarla en $t = 0$

Para encontrar $\mathbf{N}(0)$, necesitamos $\mathbf{T}'(0)$. Primero, encontramos la expresión simbólica de $\mathbf{T}(t)$.

Calculamos la rapidez simbólica $|\mathbf{r}'(t)|$:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (e^t)^2 + (-e^{-t})^2} = \sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}$$

Reconociendo un trinomio cuadrado perfecto: $e^{2t} + 2(e^t)(e^{-t}) + e^{-2t} = (e^t + e^{-t})^2$.

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$$

El vector tangente simbólico es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(\sqrt{2}, e^t, -e^{-t})}{e^t + e^{-t}}$$

Para derivar $\mathbf{T}(t)$, usamos la regla del producto $\mathbf{T}'(t) = \frac{d}{dt}[f(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$, donde $f(t) = (e^t + e^{-t})^{-1}$ y $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (\sqrt{2}, e^t, -e^{-t})$.

$$\mathbf{T}'(t) = f'(t)\mathbf{v}(t) + f(t)\mathbf{v}'(t)$$

Calculamos las derivadas $f'(t)$ y $\mathbf{v}'(t)$:

$$f'(t) = -1(e^t + e^{-t})^{-2} \cdot (e^t - e^{-t}) = \frac{-(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}$$

$$\mathbf{v}'(t) = (0, e^t, e^{-t})$$

Ahora, evaluamos todas las componentes en $t = 0$:

- $f(0) = (e^0 + e^0)^{-1} = (1 + 1)^{-1} = \frac{1}{2}$
- $f'(0) = \frac{-(e^0 - e^0)}{(e^0 + e^0)^2} = \frac{-(1-1)}{(1+1)^2} = 0$

- $\mathbf{v}(0) = (\sqrt{2}, 1, -1)$
- $\mathbf{v}'(0) = (0, e^0, e^{-0}) = (0, 1, 1)$

Sustituimos estos valores en la fórmula de $\mathbf{T}'(0)$:

$$\mathbf{T}'(0) = f'(0)\mathbf{v}(0) + f(0)\mathbf{v}'(0)$$

$$\mathbf{T}'(0) = (0) \cdot (\sqrt{2}, 1, -1) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (0, 1, 1)$$

$$\mathbf{T}'(0) = (0, 0, 0) + \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{T}'(0) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Paso 5: Calcular la magnitud $|\mathbf{T}'(0)|$

Calculamos la norma del vector $\mathbf{T}'(0)$:

$$|\mathbf{T}'(0)| = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$|\mathbf{T}'(0)| = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Paso 6: Calcular el vector Normal Principal $\mathbf{N}(0)$

Usamos la definición $\mathbf{N}(0) = \frac{\mathbf{T}'(0)}{|\mathbf{T}'(0)|}$:

$$\mathbf{N}(0) = \frac{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\mathbf{N}(0) = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{N}(0) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Paso 7: Calcular el vector Binormal $\mathbf{B}(0)$

Calculamos el producto cruz $\mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0)$:

$$\mathbf{B}(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Resolvemos usando el determinante:

$$\mathbf{B}(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$$

- **Componente i:** $\left(\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- **Componente j:** $-\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) (0) \right) = -\left(\frac{2}{4} - 0 \right) = -\frac{1}{2}$
- **Componente k:** $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) (0) \right) = \frac{2}{4} - 0 = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{B}(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Resultado final

Los vectores del triedro móvil para la curva $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ en el instante $t = 0$ son:

Vector Tangente Unitario:

$$\mathbf{T}(0) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Vector Normal Principal:

$$\mathbf{N}(0) = \left\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

Vector Binormal:

$$\mathbf{B}(0) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

Interpretación breve del resultado

Se verifica que el sistema $(\mathbf{T}(0), \mathbf{N}(0), \mathbf{B}(0))$ es ortonormal, es decir, todos los vectores son unitarios y mutuamente ortogonales (su producto punto es cero):

- $|\mathbf{T}(0)| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$
- $|\mathbf{N}(0)| = \sqrt{0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$
- $|\mathbf{B}(0)| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$
- $\mathbf{T}(0) \cdot \mathbf{N}(0) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$

Los tres vectores forman una base ortonormal derecha que describe la orientación de la curva en $t = 0$.

✓ Cálculos verificados: correctos.

Problema 23

Enunciado del problema

Verificar si las curvas en el espacio:

$$\mathbf{u}(T) = \left(-\frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T, 1 - \frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T, \frac{1}{2} \sin T \cos T + \frac{1}{2} T \right)$$

$$\mathbf{r}(t) = (t, \cos t, \sin t)$$

se cortan entre sí. En caso afirmativo, determinar el punto de intersección y el ángulo entre sus vectores tangentes en el punto de intersección. Si no se cortan, justificar.

Datos dados

- Curva 1: $\mathbf{r}(t) = (t, \cos t, \sin t)$
- Curva 2: $\mathbf{u}(T) = \left(-\frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T, 1 - \frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T, \frac{1}{2} \sin T \cos T + \frac{1}{2} T \right)$

Se buscan los parámetros (t_0, T_0) tales que $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{u}(T_0)$, el punto \mathbf{P}_0 y el ángulo θ entre $\mathbf{r}'(t_0)$ y $\mathbf{u}'(T_0)$.

Desarrollo paso a paso

Fase 1: Búsqueda del punto de intersección

Para encontrar una intersección, debemos igualar las componentes de $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(T)$, lo que genera un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas (t, T) :

$$\begin{aligned} (x) : \quad t &= -\frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T \\ (y) : \quad \cos t &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T \\ (z) : \quad \sin t &= \frac{1}{2} \sin T \cos T + \frac{1}{2} T \end{aligned}$$

Paso 1.1: Resolver el subsistema (x) e (y)

Observamos que la expresión de la Ecuación (x) aparece en la Ecuación (y). Sustituimos (x) en (y):

$$\cos t = 1 + (t)$$

Resolvemos la ecuación $\cos t = 1 + t$.

- Sabemos que el rango de $\cos t$ es $[-1, 1]$.

- Si $t > 0$, entonces $1 + t > 1$, lo cual está fuera del rango de $\cos t$.
- Si $t < 0$, entonces $1 + t < 1$.
- La única posibilidad es $t = 0$. Verificamos:
 - Lado Izquierdo: $\cos(0) = 1$
 - Lado Derecho: $1 + (0) = 1$
- Por lo tanto, la única solución real es $t = 0$.

Paso 1.2: Encontrar T usando $t = 0$

Sustituimos $t = 0$ en la Ecuación (x):

$$0 = -\frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T$$

Factorizamos $\sin T$:

$$0 = \sin T \left(-\frac{1}{2} \sin T - 1 \right)$$

Esto genera dos posibles casos:

1. $\sin T = 0 \implies T = k\pi$, para cualquier entero $k \in \mathbb{Z}$.
2. $-\frac{1}{2} \sin T - 1 = 0 \implies \sin T = -2$. Esto es imposible, ya que el rango de $\sin T$ es $[-1, 1]$.

Las únicas soluciones candidatas para T son $T = k\pi$.

Paso 1.3: Verificar la Ecuación (z)

Debemos encontrar qué pareja $(t, T) = (0, k\pi)$ satisface la Ecuación (z):

$$\sin t = \frac{1}{2} \sin T \cos T + \frac{1}{2} T$$

Sustituimos los valores:

$$\sin(0) = \frac{1}{2} \sin(k\pi) \cos(k\pi) + \frac{1}{2} (k\pi)$$

Dado que $\sin(k\pi) = 0$ para cualquier entero k :

$$0 = \frac{1}{2} (0) \cos(k\pi) + \frac{k\pi}{2}$$

$$0 = \frac{k\pi}{2}$$

La única solución para esta ecuación es $k = 0$.

Por lo tanto, la única solución al sistema es $(t, T) = (0, 0)$. Las curvas sí se cortan.

Paso 1.4: Determinar el punto de intersección P_0

Evaluamos $\mathbf{r}(t)$ en $t = 0$:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{r}(0) = (0, \cos 0, \sin 0)$$

$$\mathbf{P}_0 = (0, 1, 0)$$

(Verificación con $\mathbf{u}(0)$: $\mathbf{u}(0) = (-\frac{1}{2} \sin^2 0 - \sin 0, 1 - \frac{1}{2} \sin^2 0 - \sin 0, \frac{1}{2} \sin 0 \cos 0 + 0) = (0, 1, 0)$. Coinciden.)

Fase 2: Cálculo del ángulo de intersección

Paso 2.1: Calcular el vector tangente $\mathbf{v}_r = \mathbf{r}'(0)$

Derivamos $\mathbf{r}(t) = (t, \cos t, \sin t)$:

$$\mathbf{r}'(t) = (1, -\sin t, \cos t)$$

Evaluamos en $t = 0$:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{r}'(0) = (1, -\sin 0, \cos 0) = (1, 0, 1)$$

Paso 2.2: Calcular el vector tangente $\mathbf{v}_u = \mathbf{u}'(0)$

Derivamos $\mathbf{u}(T)$:

- $x'(T) = \frac{d}{dT} \left(-\frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T \right) = -\frac{1}{2} (2 \sin T \cos T) - \cos T = -\sin T \cos T - \cos T$
- $y'(T) = \frac{d}{dT} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T \right) = -\sin T \cos T - \cos T$
- $z'(T) = \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{2} \sin T \cos T + \frac{1}{2} T \right) = \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{4} \sin(2T) + \frac{1}{2} T \right) = \frac{1}{4} (2 \cos(2T)) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos(2T) + \frac{1}{2}$

Evaluamos en $T = 0$:

- $x'(0) = -\sin 0 \cos 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$
- $y'(0) = -\sin 0 \cos 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$
- $z'(0) = \frac{1}{2} \cos(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1) + \frac{1}{2} = 1$

$$\mathbf{v}_u = \mathbf{u}'(0) = (-1, -1, 1)$$

Paso 2.3: Calcular el ángulo θ

Usamos la fórmula del producto escalar: $\cos \theta = \frac{\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_u}{|\mathbf{v}_r| |\mathbf{v}_u|}$.

Calculamos el producto escalar (numerador):

$$\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_u = (1, 0, 1) \cdot (-1, -1, 1)$$

$$\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_u = (1)(-1) + (0)(-1) + (1)(1) = -1 + 0 + 1 = 0$$

Dado que el producto escalar es 0, y los vectores tangentes no son nulos ($|\mathbf{v}_r| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{v}_u| = \sqrt{3}$), $\cos \theta = 0$.

$$\theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

Resultado final

- **Intersección:** Sí, las curvas se cortan.
- **Punto de Intersección:** La intersección ocurre en el único punto $\mathbf{P}_0 = (0, 1, 0)$, correspondiente a los parámetros $t = 0$ y $T = 0$.
- **Ángulo de Intersección:**

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ radianes (o } 90^\circ)$$

Interpretación breve del resultado

El análisis del sistema de ecuaciones confirma que las curvas se cruzan en un único punto. El cálculo de los vectores tangentes en dicho punto, $\mathbf{v}_r = (1, 0, 1)$ y $\mathbf{v}_u = (-1, -1, 1)$, revela que su producto escalar es 0. Esto significa que los vectores son **ortogonales**, y por lo tanto, las curvas se cortan en un ángulo recto (90°).

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 24 inciso 7

Enunciado del problema

Calcular la curvatura de $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.

Datos dados

La curva en \mathbb{R}^3 está definida por la función vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

Se busca la curvatura $\kappa(t)$ usando la fórmula general:

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Desarrollo paso a paso

Paso 1: Calcular el vector velocidad $\mathbf{r}'(t)$

Se aplica la regla del producto a cada componente:

- $x'(t) = \frac{d}{dt}(e^t \cos t) = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$
- $y'(t) = \frac{d}{dt}(e^t \sin t) = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$
- $z'(t) = \frac{d}{dt}(e^t) = e^t$

$$\mathbf{r}'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t)$$

Paso 2: Calcular el vector aceleración $\mathbf{r}''(t)$

Se derivan las componentes de $\mathbf{r}'(t)$, aplicando nuevamente la regla del producto:

- $x''(t) = \frac{d}{dt}(e^t(\cos t - \sin t)) = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$
- $y''(t) = \frac{d}{dt}(e^t(\sin t + \cos t)) = e^t(\sin t + \cos t) + e^t(\cos t - \sin t) = 2e^t \cos t$
- $z''(t) = \frac{d}{dt}(e^t) = e^t$

$$\mathbf{r}''(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t, e^t)$$

Paso 3: Calcular el producto cruz $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix}$$

Se factoriza e^t de la segunda fila y e^t de la tercera fila, resultando en un factor e^{2t} :

$$= e^{2t} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t & 1 \end{vmatrix}$$

- $\mathbf{i} : e^{2t}[(\sin t + \cos t)(1) - (1)(2 \cos t)] = e^{2t}(\sin t - \cos t)$
- $\mathbf{j} : -e^{2t}[(\cos t - \sin t)(1) - (1)(-2 \sin t)] = -e^{2t}(\cos t + \sin t)$
- $\mathbf{k} : e^{2t}[(\cos t - \sin t)(2 \cos t) - (\sin t + \cos t)(-2 \sin t)]$
 $= e^{2t} [(2 \cos^2 t - 2 \sin t \cos t) - (-2 \sin^2 t - 2 \sin t \cos t)]$
 $= e^{2t} [2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t] = 2e^{2t}$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (e^{2t}(\sin t - \cos t), -e^{2t}(\sin t + \cos t), 2e^{2t})$$

Paso 4: Calcular la magnitud $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|$ (Numerador)

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{[e^{2t}(\sin t - \cos t)]^2 + [-e^{2t}(\sin t + \cos t)]^2 + [2e^{2t}]^2}$$

Se factoriza $\sqrt{e^{4t}} = e^{2t}$:

$$= e^{2t} \sqrt{(\sin t - \cos t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 2^2}$$

$$= e^{2t} \sqrt{(\sin^2 t - 2 \sin t \cos t + \cos^2 t) + (\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t) + 4}$$

$$= e^{2t} \sqrt{(1) + (1) + 4} = e^{2t} \sqrt{6}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{6}e^{2t}$$

Paso 5: Calcular la magnitud $|\mathbf{r}'(t)|$ (Rapidez)

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[e^t(\cos t - \sin t)]^2 + [e^t(\sin t + \cos t)]^2 + [e^t]^2}$$

Se factoriza $\sqrt{e^{2t}} = e^t$:

$$\begin{aligned} &= e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1^2} \\ &= e^t \sqrt{(\cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t) + (\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t) + 1} \\ &= e^t \sqrt{(1) + (1) + 1} = e^t \sqrt{3} \\ |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{3}e^t \end{aligned}$$

Paso 6: Calcular $|\mathbf{r}'(t)|^3$ (Denominador)

$$|\mathbf{r}'(t)|^3 = (\sqrt{3}e^t)^3 = (\sqrt{3})^3 (e^t)^3 = 3\sqrt{3}e^{3t}$$

Paso 7: Calcular la curvatura $\kappa(t)$

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}}$$

Se simplifican los términos:

- Radicales: $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$
- Exponentes: $\frac{e^{2t}}{e^{3t}} = e^{2t-3t} = e^{-t}$

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$$

Resultado final

La curvatura de la curva en un instante t es:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$$

Interpretación breve del resultado

La curva descrita es una **espiral cónica**, ya que yace sobre la superficie del cono $z^2 = x^2 + y^2$ (puesto que $(e^t)^2 = (e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2$).

El resultado $\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$ muestra que a medida que t aumenta ($t \rightarrow \infty$), la curvatura $\kappa(t)$ tiende a cero. Esto significa que la espiral se "abre" y se vuelve progresivamente "más recta" a medida que se aleja del origen (el vértice del cono).

✓ Cálculos verificados: correctos.

Problema 24 inciso 8

Enunciado del problema

Calcular la curvatura κ de la curva polar $r = 1 - \sin \theta$ en $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Datos dados

La curva está definida en coordenadas polares por la ecuación:

$$r(\theta) = 1 - \sin \theta$$

El punto de evaluación es $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$.

La fórmula de curvatura para una curva polar $r = r(\theta)$ es:

$$\kappa(\theta) = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

Donde $r' = \frac{dr}{d\theta}$ y $r'' = \frac{d^2r}{d\theta^2}$.

Desarrollo paso a paso

Paso 1: Calcular las derivadas $r'(\theta)$ y $r''(\theta)$

$$r(\theta) = 1 - \sin \theta$$

$$r'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(1 - \sin \theta) = -\cos \theta$$

$$r''(\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\cos \theta) = \sin \theta$$

Paso 2: Evaluar r , r' , y r'' en $\theta = \frac{\pi}{3}$

Usamos los valores trigonométricos $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

- $r = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$
- $r' = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
- $r'' = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Paso 3: Calcular el Numerador $|r^2 + 2(r')^2 - rr''|$

Calculamos cada término del numerador por separado:

- $r^2 = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4} = \frac{7-4\sqrt{3}}{4}$
- $2(r')^2 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4}$
- $rr'' = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}$

Sustituimos estos valores en la expresión del numerador:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{7-4\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4} - \frac{2\sqrt{3}-3}{4} \right| \\ &= \left| \frac{(7-4\sqrt{3}) + 2 - (2\sqrt{3}-3)}{4} \right| \\ &= \left| \frac{7-4\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+3}{4} \right| \\ &= \left| \frac{(7+2+3) + (-4\sqrt{3}-2\sqrt{3})}{4} \right| \\ &= \left| \frac{12-6\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{6-3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(El valor absoluto se elimina ya que $6 = \sqrt{36}$ y $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, por lo que $6 > 3\sqrt{3}$).

Paso 4: Calcular el Denominador $(r^2 + (r')^2)^{3/2}$

Primero, calculamos la base $(r^2 + (r')^2)$:

- $r^2 = \frac{7-4\sqrt{3}}{4}$
- $(r')^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$r^2 + (r')^2 = \frac{7-4\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

El denominador completo es $(2 - \sqrt{3})^{3/2}$.

Paso 5: Calcular la curvatura κ

$$\kappa = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}} = \frac{\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}{(2 - \sqrt{3})^{3/2}}$$

Factorizamos el numerador para simplificar:

$$\kappa = \frac{\frac{3(2-\sqrt{3})}{2}}{(2-\sqrt{3})^{3/2}}$$

Aplicamos la regla de exponentes $\frac{x}{x^{3/2}} = x^{1-3/2} = x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\kappa = \frac{3}{2 \cdot (2-\sqrt{3})^{1/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Paso 6: Simplificación del radical anidado

El término $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ puede simplificarse. Usando la identidad $\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ donde $C = \sqrt{A^2-B}$:

$$A=2, B=3 \implies C = \sqrt{2^2-3} = 1.$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Sustituimos esto en la expresión de κ :

$$\kappa = \frac{3}{2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{3\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}-1)}$$

Racionalizamos el denominador:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{3\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}-1)} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\ \kappa &= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2(3-1)} = \frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2(2)} \\ \kappa &= \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}\end{aligned}$$

Resultado final

La curvatura de la curva $r = 1 - \sin \theta$ en $\theta = \frac{\pi}{3}$ es:

$$\kappa = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

Interpretación breve del resultado

El valor $\kappa \approx 2.896$ es un escalar positivo que mide cuán bruscamente se dobla la curva (conocida como cardioide) en el punto $\theta = \frac{\pi}{3}$. Un valor mayor indica una curva más cerrada, y un valor menor indica una curva más "plana".

Problema 24 inciso 9

Enunciado del problema

Halle la ecuación del círculo de curvatura (círculo osculador) de la gráfica de la función $y = x^2$ en $x = 5$.

Datos dados

- Función: $y = x^2$
- Punto de evaluación: $x_0 = 5$

Se busca la ecuación canónica del círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

Desarrollo paso a paso

1. Calcular el punto de tangencia (x_0, y_0)

Evalúamos la función en $x_0 = 5$:

$$y_0 = (5)^2 = 25$$

El punto de tangencia es $\mathbf{P}_0 = (5, 25)$.

2. Calcular las derivadas y evaluarlas en $x_0 = 5$

Calculamos la primera y segunda derivada de $y = x^2$:

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(2x) = 2$$

Evalúamos ambas en $x_0 = 5$:

- $y'(5) = 2(5) = 10$
- $y''(5) = 2$

3. Calcular el Radio de Curvatura R

Se utiliza la fórmula del radio de curvatura para una función $y = f(x)$:

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Sustituimos los valores evaluados:

$$R = \frac{(1 + (10)^2)^{3/2}}{|2|} = \frac{(1 + 100)^{3/2}}{2}$$

$$R = \frac{(101)^{3/2}}{2} = \frac{101\sqrt{101}}{2}$$

4. Calcular el Centro de Curvatura (h, k)

Las coordenadas del centro (h, k) se calculan con las siguientes fórmulas:

Coordenada h :

$$h = x_0 - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''}$$

$$h = 5 - \frac{10(1 + (10)^2)}{2} = 5 - \frac{10(101)}{2}$$

$$h = 5 - 5(101) = 5 - 505 = -500$$

Coordenada k :

$$k = y_0 + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

$$k = 25 + \frac{1 + (10)^2}{2} = 25 + \frac{101}{2}$$

$$k = \frac{50}{2} + \frac{101}{2} = \frac{151}{2}$$

El centro del círculo es $(-500, \frac{151}{2})$.

5. Ensamblar la ecuación del círculo

La ecuación es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

Calculamos R^2 :

$$R^2 = \left(\frac{101\sqrt{101}}{2} \right)^2 = \frac{101^2 \cdot (\sqrt{101})^2}{2^2}$$

$$R^2 = \frac{101^2 \cdot 101}{4} = \frac{101^3}{4} = \frac{1030301}{4}$$

Sustituimos h , k y R^2 :

$$(x - (-500))^2 + \left(y - \frac{151}{2} \right)^2 = \frac{1030301}{4}$$

Resultado final

La ecuación del círculo de curvatura es:

$$(x + 500)^2 + \left(y - \frac{151}{2}\right)^2 = \frac{1030301}{4}$$

Interpretación breve del resultado

La ecuación describe el círculo que mejor se aproxima a la parábola $y = x^2$ en el punto $(5, 25)$. Dado que $y'' = 2 > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba. Esto se verifica con el resultado, ya que el centro del círculo $k = \frac{151}{2} = 75.5$ está "por encima" del punto de tangencia $y_0 = 25$.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 24 inciso 13

Enunciado del problema

Halle la ecuación del círculo de curvatura (círculo osculador) de la gráfica de la función $y = x^2$ en $x = 3$.

Datos dados

- Función: $y = x^2$
- Punto de evaluación: $x_0 = 3$

Se busca la ecuación canónica del círculo de curvatura: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

Desarrollo paso a paso

1. Calcular el punto de tangencia (x_0, y_0)

Se evalúa la función en $x_0 = 3$:

$$y_0 = (3)^2 = 9$$

El punto de tangencia es $\mathbf{P}_0 = (3, 9)$.

2. Calcular las derivadas y evaluarlas en $x_0 = 3$

Se calcula la primera y segunda derivada de $y = x^2$:

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(2x) = 2$$

Se evalúan ambas derivadas en $x_0 = 3$:

- $y'(3) = 2(3) = 6$
- $y''(3) = 2$

3. Calcular el Radio de Curvatura R

Se utiliza la fórmula del radio de curvatura para una función explícita $y = f(x)$:

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Sustituyendo los valores evaluados:

$$R = \frac{(1 + (6)^2)^{3/2}}{|2|} = \frac{(1 + 36)^{3/2}}{2}$$

$$R = \frac{(37)^{3/2}}{2} = \frac{37\sqrt{37}}{2}$$

4. Calcular el Centro de Curvatura (h, k)

Las coordenadas del centro (h, k) se obtienen con las siguientes fórmulas:

Coordenada h :

$$h = x_0 - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''}$$
$$h = 3 - \frac{6 \cdot (1 + (6)^2)}{2} = 3 - \frac{6(37)}{2}$$
$$h = 3 - 3(37) = 3 - 111 = -108$$

Coordenada k :

$$k = y_0 + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$
$$k = 9 + \frac{1 + (6)^2}{2} = 9 + \frac{37}{2}$$
$$k = \frac{18}{2} + \frac{37}{2} = \frac{55}{2}$$

El centro del círculo es $(-108, \frac{55}{2})$.

5. Ensamblar la ecuación del círculo

La ecuación canónica es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

Primero, calculamos R^2 :

$$R^2 = \left(\frac{37\sqrt{37}}{2} \right)^2 = \frac{37^2 \cdot (\sqrt{37})^2}{2^2}$$

$$R^2 = \frac{37^2 \cdot 37}{4} = \frac{37^3}{4} = \frac{50653}{4}$$

Sustituimos h , k y R^2 :

$$(x - (-108))^2 + \left(y - \frac{55}{2} \right)^2 = \frac{50653}{4}$$

Resultado final

La ecuación del círculo de curvatura es:

$$(x + 108)^2 + \left(y - \frac{55}{2} \right)^2 = \frac{50653}{4}$$

Interpretación breve del resultado

La ecuación describe el círculo que mejor se aproxima a la parábola $y = x^2$ en el punto $(3, 9)$. Dado que $y'' = 2 > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba. Esto es coherente con el resultado, ya que la coordenada y del centro ($k = \frac{55}{2} = 27.5$) está "por encima" de la coordenada y del punto de tangencia ($y_0 = 9$).

 *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 25

Enunciado del problema

Hallar la ecuación del círculo osculador en el punto máximo y mínimo de $y = \frac{1}{3}x^3 - x$.

Datos dados

- Función: $y = \frac{1}{3}x^3 - x$
- Puntos de evaluación: Los puntos de extremo local (máximo y mínimo) de la función.

Se buscan las ecuaciones canónicas $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$ para dichos puntos.

Desarrollo paso a paso

Paso 1: Calcular las derivadas

Se calcula la primera (y') y segunda (y'') derivada de la función:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x$$

$$y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) = x^2 - 1$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(x^2 - 1) = 2x$$

Paso 2: Encontrar y clasificar los puntos críticos

Se encuentran los puntos críticos resolviendo $y' = 0$:

$$x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

Se clasifican usando el criterio de la segunda derivada ($y'' = 2x$):

- Para $x = -1$: $y''(-1) = 2(-1) = -2$. Como $y'' < 0$, este punto es un **Máximo Local**.
- Para $x = 1$: $y''(1) = 2(1) = 2$. Como $y'' > 0$, este punto es un **Mínimo Local**.

Paso 3: Calcular las coordenadas de los puntos extremos

Se calculan las coordenadas y para cada punto crítico:

- **Punto Máximo** (P_{max}) en $x_0 = -1$:

$$y_0 = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{P_{max}} = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$$

- **Punto Mínimo** (P_{min}) en $x_0 = 1$:

$$y_0 = \frac{1}{3}(1)^3 - (1) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\mathbf{P_{min}} = \left(1, -\frac{2}{3}\right)$$

Paso 4: Calcular el Círculo Osculador 1 (En el Máximo)

En un extremo local, la tangente es horizontal ($y' = 0$). Las fórmulas para el centro (h, k) y el radio R se simplifican a:

- $R = \frac{1}{|y''|}$
- $h = x_0$
- $k = y_0 + \frac{1}{y''}$

Usamos los datos de P_{max} : $(x_0, y_0) = (-1, 2/3)$ y $y'' = -2$.

- Radio R_1 : $R_1 = \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}$
- Centro h_1 : $h_1 = -1$

- Centro k_1 : $k_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{-2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$

La ecuación es $(x - h_1)^2 + (y - k_1)^2 = R_1^2$:

$$(x - (-1))^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Paso 5: Calcular el Círculo Osculador 2 (En el Mínimo)

Usamos los datos de P_{min} : $(x_0, y_0) = (1, -2/3)$ y $y'' = 2$.

- Radio R_2 : $R_2 = \frac{1}{|2|} = \frac{1}{2}$
- Centro h_2 : $h_2 = 1$
- Centro k_2 : $k_2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-4+3}{6} = -\frac{1}{6}$

La ecuación es $(x - h_2)^2 + (y - k_2)^2 = R_2^2$:

$$(x - 1)^2 + \left(y - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Resultado final

Las ecuaciones de los círculos osculadores en los puntos de extremo local son:

- **En el Punto Máximo** $P_{max} = (-1, \frac{2}{3})$:

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- **En el Punto Mínimo** $P_{min} = (1, -\frac{2}{3})$:

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Interpretación breve del resultado

La función $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ es una función impar (simétrica respecto al origen). Los resultados obtenidos son coherentes con esta simetría:

- Los puntos de tangencia $P_{max} = (-1, 2/3)$ y $P_{min} = (1, -2/3)$ son simétricos respecto al origen.

- Los centros de curvatura $C_1 = (-1, 1/6)$ y $C_2 = (1, -1/6)$ también son simétricos respecto al origen.
- Los radios de curvatura $R_1 = 1/2$ y $R_2 = 1/2$ son idénticos, como se esperaba.

✓ Cálculos verificados: correctos.

Problema 26

Enunciado del problema

Muestre que el vector de aceleración $\mathbf{a}(t)$ se expresa como:

$$\mathbf{a}(t) = v \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt} \mathbf{T}$$

Datos dados

Para esta demostración, se parte de las definiciones fundamentales de la cinemática:

- **Vector Velocidad:** $\mathbf{v}(t)$
- **Vector Aceleración:** $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t)$
- **Rapidez (escalar):** $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$
- **Vector Tangente Unitario:** $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$

Desarrollo paso a paso

1. Se inicia reordenando la definición del vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ para expresar el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ como el producto de su magnitud (la rapidez $v(t)$) y su dirección (el vector $\mathbf{T}(t)$).

$$\mathbf{v}(t) = v(t) \mathbf{T}(t)$$

2. Por definición, el vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ es la derivada temporal del vector velocidad $\mathbf{v}(t)$.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t)$$

3. Se sustituye la expresión de $\mathbf{v}(t)$ del primer paso en la definición de $\mathbf{a}(t)$.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt} [v(t) \mathbf{T}(t)]$$

4. Se aplica la regla del producto para la derivada de un escalar ($v(t)$) que multiplica a un vector ($\mathbf{T}(t)$):

$$(Regla: \frac{d}{dt} [f(t) \mathbf{u}(t)] = f'(t) \mathbf{u}(t) + f(t) \mathbf{u}'(t))$$

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{dv}{dt} \right) \mathbf{T}(t) + v(t) \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} \right)$$

5. Utilizando la propiedad conmutativa de la suma de vectores, se reordenan los términos para que coincidan con la expresión solicitada.

$$\mathbf{a}(t) = v(t) \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt} \mathbf{T}(t)$$

Resultado final

Queda demostrado que la aceleración se puede expresar como:

$$\mathbf{a}(t) = v \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt} \mathbf{T}$$

Interpretación breve del resultado

Esta ecuación es fundamental en la cinemática, ya que descompone el vector de aceleración \mathbf{a} en sus dos componentes ortogonales:

- **Componente Tangencial:** El término $\frac{dv}{dt} \mathbf{T}$. Es paralelo a la dirección del movimiento (dirección \mathbf{T}) y describe el cambio en la **magnitud** de la velocidad (la rapidez).
- **Componente Normal:** El término $v \frac{d\mathbf{T}}{dt}$. Es perpendicular al movimiento (ya que \mathbf{T}' es ortogonal a \mathbf{T}) y describe el cambio en la **dirección** de la velocidad.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 27

Enunciado del problema

La posición de una partícula está determinada por la expresión $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 15t + 1)\mathbf{i} + (10t - 2t^2 - 2)\mathbf{j} + (5t^2 - 25t + 3)\mathbf{k}$. Calcule la distancia recorrida entre los segundos 3 y 7.

Datos dados

- **Vector de Posición:** $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 15t + 1)\mathbf{i} + (10t - 2t^2 - 2)\mathbf{j} + (5t^2 - 25t + 3)\mathbf{k}$
- **Intervalo de tiempo:** $t_1 = 3$ s a $t_2 = 7$ s.

Se busca la distancia recorrida (longitud de arco) L , la cual se calcula con la integral de la rapidez:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt = \int_3^7 |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Desarrollo paso a paso

Paso 1: Calcular el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$

Se deriva el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ con respecto al tiempo t :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}(3t^2 - 15t + 1)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(10t - 2t^2 - 2)\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(5t^2 - 25t + 3)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = (6t - 15)\mathbf{i} + (10 - 4t)\mathbf{j} + (10t - 25)\mathbf{k}$$

Paso 2: Calcular la rapidez $|\mathbf{v}(t)|$

Se calcula la magnitud (norma) del vector velocidad. Para simplificar, se factorizan las componentes:

- $v_x = 6t - 15 = 3(2t - 5)$
- $v_y = 10 - 4t = -2(2t - 5)$
- $v_z = 10t - 25 = 5(2t - 5)$

El vector velocidad se puede reescribir como:

$$\mathbf{v}(t) = (2t - 5) \cdot (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$

Ahora, calculamos la magnitud:

$$|\mathbf{v}(t)| = |(2t - 5) \cdot (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})|$$

$$|\mathbf{v}(t)| = |2t - 5| \cdot |3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}|$$

$$|\mathbf{v}(t)| = |2t - 5| \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2}$$

$$|\mathbf{v}(t)| = |2t - 5| \cdot \sqrt{9 + 4 + 25}$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{38}|2t - 5|$$

Paso 3: Configurar y evaluar la integral de la distancia L

Se establece la integral definida para la longitud de arco:

$$L = \int_3^7 \sqrt{38}|2t - 5|dt = \sqrt{38} \int_3^7 |2t - 5|dt$$

Se analiza el signo del término $(2t - 5)$ en el intervalo de integración $t \in [3, 7]$. El término $2t - 5$ es cero en $t = 2.5$.

Dado que $t \geq 3$ en todo el intervalo, $2t - 5$ es siempre positivo. Por lo tanto, $|2t - 5| = (2t - 5)$ para $t \in [3, 7]$.

La integral se simplifica a:

$$L = \sqrt{38} \int_3^7 (2t - 5)dt$$

Se resuelve la integral:

$$L = \sqrt{38} \left[\frac{2t^2}{2} - 5t \right]_3^7$$

$$L = \sqrt{38} [t^2 - 5t]_3^7$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$L = \sqrt{38} [(7^2 - 5(7)) - (3^2 - 5(3))]$$

$$L = \sqrt{38} [(49 - 35) - (9 - 15)]$$

$$L = \sqrt{38} [14 - (-6)]$$

$$L = \sqrt{38}(14 + 6)$$

$$L = 20\sqrt{38}$$

Resultado final

La distancia recorrida por la partícula entre los segundos 3 y 7 es:

$$L = 20\sqrt{38} \text{ metros}$$

Interpretación breve del resultado

La distancia total recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $[3 \text{ s}, 7 \text{ s}]$ es $20\sqrt{38}$ metros, que es aproximadamente 123.29 metros. Esto se obtiene integrando la rapidez $|\mathbf{v}(t)|$, que resultó ser una función lineal simple $\sqrt{38}(2t - 5)$ en ese intervalo.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 28

Enunciado del problema

Un canal de desagüe pluvial, emplea dos láminas galvanizadas, las cuales se colocan sobre los planos $4x + 2y + 6z = 12$ y $3x + 6y + 2z = 6$. Determine las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del canal (considere a $x = t$ como el parámetro).

Datos dados

La trayectoria del canal es la línea de intersección de los dos planos:

- Plano 1 (P_1): $4x + 2y + 6z = 12$
- Plano 2 (P_2): $3x + 6y + 2z = 6$

La parametrización solicitada debe usar $x = t$.

Desarrollo paso a paso

Paso 1: Establecer y simplificar el sistema de ecuaciones

Se establece el sistema de ecuaciones de los planos. Se divide la Ecuación 1 entre 2 para simplificar el álgebra:

$$\begin{aligned}(I) \quad 2x + y + 3z &= 6 \\(II) \quad 3x + 6y + 2z &= 6\end{aligned}$$

Paso 2: Despejar y en función de x (Eliminación de z)

Se multiplica la Ecuación (I) por 2 y la Ecuación (II) por 3 para igualar los coeficientes de z :

$$\begin{aligned}(I) \times 2 &\implies 4x + 2y + 6z = 12 \\(II) \times 3 &\implies 9x + 18y + 6z = 18\end{aligned}$$

Se resta la nueva Ecuación (I) de la nueva Ecuación (II):

$$\begin{aligned}(9x - 4x) + (18y - 2y) + (6z - 6z) &= 18 - 12 \\5x + 16y &= 6\end{aligned}$$

Despejando y :

$$\begin{aligned}16y &= 6 - 5x \\y &= \frac{6 - 5x}{16} = \frac{3}{8} - \frac{5}{16}x\end{aligned}$$

Paso 3: Despejar z en función de x (Eliminación de y)

Se utiliza el sistema simplificado del Paso 1. Se multiplica la Ecuación (I) por 6 para igualar los coeficientes de y :

$$\begin{aligned}(I) \times 6 &\implies 12x + 6y + 18z = 36 \\(II) &\implies 3x + 6y + 2z = 6\end{aligned}$$

Se resta la Ecuación (II) de la nueva Ecuación (I):

$$\begin{aligned}(12x - 3x) + (6y - 6y) + (18z - 2z) &= 36 - 6 \\9x + 16z &= 30\end{aligned}$$

Despejando z :

$$16z = 30 - 9x$$

$$z = \frac{30 - 9x}{16} = \frac{15}{8} - \frac{9}{16}x$$

Paso 4: Aplicar la parametrización $x = t$

Se sustituye $x = t$ en las expresiones encontradas para x , y , y z :

$$\begin{aligned}x(t) &= t \\y(t) &= \frac{3}{8} - \frac{5}{16}t \\z(t) &= \frac{15}{8} - \frac{9}{16}t\end{aligned}$$

Resultado final

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del canal (la línea de intersección) son:

$$\begin{aligned}x(t) &= t \\y(t) &= \frac{3}{8} - \frac{5}{16}t \\z(t) &= \frac{15}{8} - \frac{9}{16}t\end{aligned}$$

Interpretación breve del resultado

Estas ecuaciones describen una línea recta en \mathbb{R}^3 que representa la intersección de los dos planos (las láminas). Como se verificó en el análisis proporcionado (Paso 4 de la entrada), cualquier punto (x, y, z) generado por un valor t en esta línea satisface las ecuaciones de *ambos* planos simultáneamente.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 29

Enunciado del problema

Se dispara una bala perpendicularmente hacia arriba con un arma y a una velocidad inicial de $v_0 = 300 \text{ m/s}$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bala? Observación: No se toma en cuenta la resistencia del aire.

Datos dados

- **Velocidad inicial (v_0):** $+300 \text{ m/s}$
- **Posición inicial (y_0):** 0 m (punto de disparo)
- **Aceleración constante (a):** $-g = -9.8 \text{ m/s}^2$ (actuando hacia abajo)

- **Velocidad final (v_f) en h_{max} :** 0 m/s (condición en la altura máxima)
-

Desarrollo paso a paso

Se utiliza la ecuación de cinemática (M.R.U.A.) independiente del tiempo, ya que relaciona las velocidades, la aceleración y el desplazamiento (h_{max}).

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a \cdot h_{max}$$

Sustituimos los valores conocidos en la ecuación:

$$(0)^2 = (300)^2 + 2(-9.8) \cdot h_{max}$$

$$0 = 90000 - 19.6 \cdot h_{max}$$

Despejamos h_{max} :

$$19.6 \cdot h_{max} = 90000$$

$$h_{max} = \frac{90000}{19.6}$$

$$h_{max} \approx 4591.8367... \text{ m}$$

Resultado final

Redondeando el resultado a 6 cifras significativas (según el protocolo):

$$h_{max} = 4591.84 \text{ m}$$

Interpretación breve del resultado

La altura máxima, $h_{max} \approx 4.59 \text{ km}$, es el desplazamiento vertical que alcanza la bala en el instante exacto en que su velocidad vertical se reduce a 0 m/s debido a la aceleración constante de la gravedad, antes de comenzar su descenso.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 30

Enunciado del problema

La velocidad de una partícula está dada por la expresión $\mathbf{v}(t) = (10^6 e^{-t} + 3t^2)\mathbf{i} - (2t + 2)\mathbf{j}$.

Determine la distancia del origen al punto donde se encuentra la partícula en $t = 9 \text{ s}$ si se sabe que la partícula se encuentra en el punto $P(700, 20, 0)$ cuando $t = 12$. Considere t en segundos, distancia en metros y velocidad en m/s .

Datos dados

- **Vector Velocidad:** $\mathbf{v}(t) = (10^6 e^{-t} + 3t^2)\mathbf{i} - (2t + 2)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$
- **Condición de Contorno:** $\mathbf{r}(12) = (700, 20, 0)$
- **Tiempo Final de Evaluación:** $t_F = 9 \text{ s}$

El objetivo es encontrar la distancia al origen $D = |\mathbf{r}(9)|$.

Desarrollo paso a paso

La distancia al origen se calcula encontrando el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en $t = 9 \text{ s}$ y luego calculando su magnitud.

Paso 1: Posición General $\mathbf{r}(t)$

Se integra el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ para obtener el vector de posición general:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t) dt = \int [(10^6 e^{-t} + 3t^2)\mathbf{i} - (2t + 2)\mathbf{j}] dt \\ \mathbf{r}(t) &= (-10^6 e^{-t} + t^3 + C_x)\mathbf{i} + (-t^2 - 2t + C_y)\mathbf{j} + C_z\mathbf{k}\end{aligned}$$

Paso 2: Cálculo de Constantes de Integración

Se utiliza la condición de contorno $\mathbf{r}(12) = (700, 20, 0)$:

- $z(12) = 0 \implies C_z = 0$
- $y(12) = 20 \implies -(12)^2 - 2(12) + C_y = 20 \implies -144 - 24 + C_y = 20 \implies -168 + C_y = 20 \implies C_y = 188$
- $x(12) = 700 \implies -10^6 e^{-12} + (12)^3 + C_x = 700 \implies -6.144... + 1728 + C_x = 700 \implies 1721.855... + C_x = 700 \implies C_x \approx -1021.856$

Paso 3: Posición Específica $\mathbf{r}(t)$

Sustituyendo las constantes:

$$\mathbf{r}(t) = (-10^6 e^{-t} + t^3 - 1021.856)\mathbf{i} + (-t^2 - 2t + 188)\mathbf{j}$$

Paso 4: Posición en $t = 9 \text{ s}$

Se evalúa $\mathbf{r}(t)$ en $t = 9$:

- $x(9) = -10^6 e^{-9} + (9)^3 - 1021.856 = -123.410... + 729 - 1021.856 \approx -416.266 \text{ m}$
- $y(9) = -(9)^2 - 2(9) + 188 = -81 - 18 + 188 = 89 \text{ m}$
- $z(9) = 0 \text{ m}$

$$\mathbf{r}(9) = -416.266\mathbf{i} + 89\mathbf{j}$$

Paso 5: Distancia al Origen D

$$D = |\mathbf{r}(9)| = \sqrt{x(9)^2 + y(9)^2 + z(9)^2}$$

$$D = \sqrt{(-416.266)^2 + (89)^2 + 0^2}$$

$$D \approx \sqrt{173277.3 + 7921} = \sqrt{181198.3}$$

$$D \approx 425.674 \text{ m}$$

Resultado final

La distancia del origen al punto donde se encuentra la partícula en $t = 9 \text{ s}$ es:

$$D = 425.674 \text{ m}$$

Interpretación breve del resultado

Tras integrar la velocidad para hallar la trayectoria específica de la partícula (usando $\mathbf{r}(12)$ para encontrar las constantes de integración), se determina que su posición en $t = 9 \text{ s}$ es $\mathbf{r}(9) \approx (-416.27, 89, 0)$. La distancia euclidiana desde el origen $(0, 0, 0)$ a este punto es de 425.674 m .

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 31

Enunciado del problema

Una persona se encuentra en un faro a una altura $h_1 = 18 \text{ m}$ y ve partir un barco con altura $h_2 = 18 \text{ m}$ que sigue una trayectoria: $\mathbf{p}(t) = (r \sin(10 - 4t) \cos(10 - 4t), r \sin(10 - 4t) \sin(10 - 4t), r \cos(10 - 4t))$. Donde t es el tiempo en hora. ¿Cuál es la distancia que recorre el barco a lo largo de la trayectoria desde la base del faro, hasta que se deja de ver el mástil? Considere que la tierra es esférica y con un radio $r = 6371 \text{ km}$.

Datos dados

- **Altura del faro (h_1):** 18 m
 - **Altura del mástil (h_2):** 18 m
 - **Radio de la Tierra (r):** $6371 \text{ km} = 6,371,000 \text{ m}$
 - **Trayectoria $\mathbf{p}(t)$:** *(Información distractora, ver Interpretación)*
-

Desarrollo paso a paso

Este es un problema de horizonte geométrico. La distancia S que el barco puede recorrer antes de que su mástil desaparezca del horizonte del observador en el faro es la suma de la distancia del horizonte del faro (S_1) y la distancia del horizonte del barco (S_2).

Paso 1: Calcular la distancia del horizonte del faro (S_1)

Se forma un triángulo rectángulo entre el centro de la Tierra (C), la cima del faro (F) y el punto de tangencia en el horizonte (H). La hipotenusa es $r + h_1$ y uno de los catetos es r . El ángulo central en C es θ_1 .

Usando trigonometría:

$$\cos(\theta_1) = \frac{r}{r + h_1}$$
$$\cos(\theta_1) = \frac{6,371,000}{6,371,000 + 18} = \frac{6,371,000}{6,371,018} \approx 0.999997175$$

Calculamos θ_1 en radianes:

$$\theta_1 = \arccos(0.999997175) \approx 0.00237699 \text{ rad}$$

La distancia de arco S_1 es $r \cdot \theta_1$:

$$S_1 = (6,371,000 \text{ m}) \cdot (0.00237699 \text{ rad}) \approx 15144.5 \text{ m}$$

Paso 2: Calcular la distancia del horizonte del barco (S_2)

Dado que la altura del mástil $h_2 = 18 \text{ m}$ es idéntica a la altura del faro h_1 , el cálculo es el mismo:

$$S_2 = S_1 \approx 15144.5 \text{ m}$$

Paso 3: Calcular la distancia total S

La distancia total es la suma de ambas distancias de arco:

$$S = S_1 + S_2$$
$$S \approx 15144.5 \text{ m} + 15144.5 \text{ m} = 30289 \text{ m}$$

Resultado final

La distancia que recorre el barco es **30289 m** (o 30.289 km).

Interpretación breve del resultado

La ecuación de la trayectoria $\mathbf{p}(t)$ es información irrelevante (un distractor). El problema se resuelve determinando la distancia geométrica máxima (la línea del horizonte) a la que dos objetos de 18 m de altura pueden verse mutuamente en un planeta con un radio de 6371 km . Esta distancia es la suma de la distancia al horizonte de cada objeto, resultando en aproximadamente 30.29 km .

✅ *Cálculos verificados: correctos.*
