SERIE TEMA 4

EJERCICIO 8

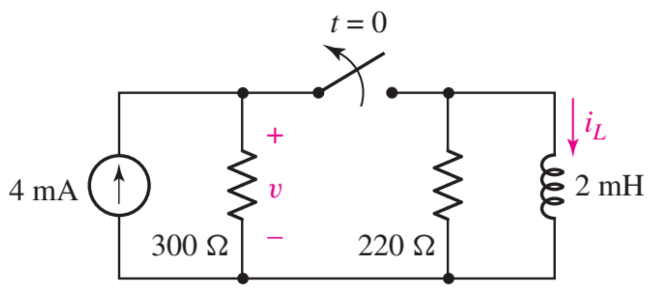


FIGURA 8.54

8. El interruptor en la figura 8.54 ha estado cerrado desde que Catfish Hunter lanzó por última vez para los Yanquis de Nueva York. Calcule la tensión marcada v, así como la energía almacenada en el inductor en (a) el instante inmediatamente anterior al momento en que el interruptor se abrió; (b) el instante inmediatamente posterior al momento en que se abrió el interruptor; (c) $t = 8\ \mu$s, (d) $t = 80\ \mu$s.

Aquí tienes la revisión y reformateo didáctico del problema de circuitos RL presentado.

Enunciado del problema

Se tiene un circuito de primer orden compuesto por una fuente de corriente I_S, dos resistencias (R_1 y R_2), un inductor (L) y un interruptor.

- El interruptor ha estado cerrado por mucho tiempo y se abre en $t = 0$.
- Para $t < 0$, todos los componentes están en paralelo.
- Para $t > 0$, el circuito se divide en dos mallas independientes: la fuente con R_1 (izquierda) y el inductor descargándose sobre R_2 (derecha).

Objetivo: Determinar el voltaje $v(t)$ en la resistencia R_1 y la energía almacenada en el inductor $w(t)$ para los siguientes instantes:
a) $t = 0^-$ (antes de la conmutación).
b) $t = 0^+$ (inmediatamente después).
c) $t = 8\ \mu\text{s}$.
d) $t = 80\ \mu\text{s}$.

Datos dados

- **Fuente de Corriente:** $I_S = 4\ \text{mA}$.
- **Resistencia 1:** $R_1 = 300\ \Omega$ (donde se mide v).

- **Resistencia 2:** $R_2 = 220\ \Omega$ (bucle de descarga del inductor).
- **Inductor:** $L = 2\ \text{mH}$.
- **Condición inicial:** Estado estable en $t < 0$ (interruptor cerrado).

Desarrollo paso a paso

1. Análisis en $t = 0^-$ (Estado Estable)

Antes de abrir el interruptor, el circuito ha estado en esta configuración por mucho tiempo. En corriente directa (DC), un inductor ideal se comporta como un **cortocircuito** ($v_L = 0\ \text{V}$).

Dado que el inductor está en paralelo con R_1 y R_2, el cortocircuito desvía toda la corriente de la fuente a través de él (camino de menor resistencia).

- **Corriente del inductor (i_L):**

$$i_L(0^-) = I_S = 4\ \text{mA}$$

- **Voltaje (v):** Al estar en paralelo con un cortocircuito:

$$v(0^-) = 0\ \text{V}$$

- **Energía almacenada (w):**

$$w(0^-) = \frac{1}{2}L[i_L(0^-)]^2$$

$$w(0^-) = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3}\ \text{H})(4 \times 10^{-3}\ \text{A})^2$$

$$w(0^-) = (10^{-3})(16 \times 10^{-6})\ \text{J} = 16 \times 10^{-9}\ \text{J}$$

$$w(0^-) = 16\ \text{nJ}$$

2. Análisis en $t = 0^+$ (Conmutación)

Al abrirse el interruptor, el circuito se separa.

- **Lado izquierdo:** La fuente I_S fluye exclusivamente por R_1.
- **Lado derecho:** El inductor L (con energía inicial) queda en serie con R_2.

Propiedad fundamental: La corriente en un inductor no cambia instantáneamente.

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 4\ \text{mA}$$

- **Energía (w):** Depende de la corriente, por lo tanto se conserva en el instante inicial:

$$w(0^+) = 16\ \text{nJ}$$

- **Voltaje (v):** Ahora la corriente de $4\ \text{mA}$ pasa por R_1:

$$v(0^+) = I_S \cdot R_1$$

$$v(0^+) = (4 \text{ mA})(300 \ \Omega) = 1.2 \text{ V}$$

3. Modelado para la respuesta transitoria ($t > 0$)

Para calcular los valores en tiempos posteriores, definimos las ecuaciones temporales.

- **Para el voltaje $v(t)$:**
  Como el lado izquierdo queda aislado como una fuente DC constante sobre R_1:

$$v(t) = 1.2 \text{ V}, \quad \forall t > 0$$

- **Para el inductor (Circuito RL de descarga):**
  La constante de tiempo τ depende de la resistencia equivalente vista por el inductor (R_2):

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{2 \times 10^{-3} \text{ H}}{220 \ \Omega} \approx 9.091 \times 10^{-6} \text{ s} = 9.091 \ \mu\text{s}$$

  La ecuación de descarga de la corriente es:

$$i_L(t) = i_L(0)e^{-t/\tau} = 4e^{-t/9.091\mu\text{s}} \text{ mA}$$

  La ecuación de la energía es:

$$w(t) = \frac{1}{2}L[i_L(t)]^2$$

4. Cálculo para $t = 8 \ \mu\text{s}$

- **Voltaje (v):**

$$v(8 \ \mu\text{s}) = 1.2 \text{ V}$$

- **Corriente (i_L):**

$$t/\tau = \frac{8}{9.091} \approx 0.88$$

$$i_L(8\mu\text{s}) = 4 \text{ mA} \cdot e^{-0.88} \approx 4(0.4147) \text{ mA} = 1.659 \text{ mA}$$

- **Energía (w):**

$$w(8\mu\text{s}) = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3} \text{ H})(1.659 \times 10^{-3} \text{ A})^2$$

$$w(8\mu\text{s}) \approx (10^{-3})(2.75 \times 10^{-6}) \text{ J} = 2.75 \times 10^{-9} \text{ J}$$

$$w(8\mu\text{s}) = 2.75 \text{ nJ}$$

5. Cálculo para $t = 80 \ \mu\text{s}$

- **Voltaje (v):**

$$v(80 \ \mu\text{s}) = 1.2 \text{ V}$$

- **Corriente (i_L):**

$$t/\tau = \frac{80}{9.091} \approx 8.8$$

$$i_L(80\mu s) = 4 \text{ mA} \cdot e^{-8.8} \approx 4(0.00015) \text{ mA} \approx 0 \text{ mA}$$

> *Nota: Como regla general, tras 5 constantes de tiempo ($5\tau \approx 45.45\ \mu s$), se considera que el transitorio ha terminado.*

- **Energía (w):**
  Dado que la corriente es prácticamente nula:

$$w(80\mu s) \approx 0 \text{ J}$$

Resultado final

Tiempo (t)	Voltaje (v)	Energía Inductor (w)	Estado del sistema
0^-	0 V	16 nJ	Estado estable (Cortocircuito)
0^+	1.2 V	16 nJ	Inicio del transitorio
$8\ \mu s$	1.2 V	2.75 nJ	Descarga ($\approx 1\tau$)
$80\ \mu s$	1.2 V	$\approx 0 \text{ J}$	Descarga completa ($> 5\tau$)

Interpretación breve del resultado

El análisis muestra correctamente la física del circuito:

1. **Continuidad de la energía:** La energía en el inductor no cambia bruscamente en $t = 0$ (se mantiene en 16 nJ).
2. **Discontinuidad del voltaje:** El voltaje v salta de 0 V a 1.2 V instantáneamente. Esto es posible en resistencias y no viola ninguna ley de conservación.
3. **Aislamiento:** Para $t > 0$, el voltaje v permanece constante porque la parte izquierda del circuito se aísla de la dinámica del inductor.
4. **Decaimiento:** La energía del inductor se disipa en forma de calor a través de la resistencia R_2 hasta agotarse.

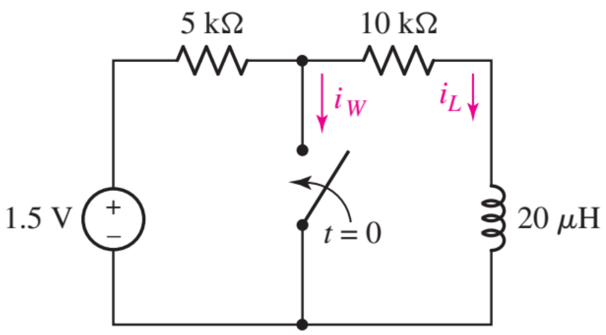
✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Te gustaría que grafiquemos la curva de corriente $i_L(t)$ para visualizar la velocidad de descarga?

EJERCICIO 10

---

10. Suponiendo que el interruptor ha estado inicialmente abierto por un tiempo realmente muy largo, (*a*) obtenga una expresión para i_W en el circuito de la figura 8.56 que sea válida para todo $t \geq 0$; (*b*) calcule i_W en $t = 0$ y $t = 1.3$ ns.



■ **FIGURA 8.56**

Aquí tienes la revisión y reformateo del problema presentado.

Enunciado del problema

Se tiene un circuito compuesto por una fuente de voltaje DC (V_S), dos resistencias (R_1 y R_2) y un inductor (L). Un interruptor conecta el nodo central (Nodo A) a tierra en $t = 0$.

- **Para $t < 0$ (Interruptor abierto):** La fuente, R_1, R_2 y L están en serie.
- **Para $t \geq 0$ (Interruptor cerrado):** El interruptor conecta el Nodo A (unión entre R_1 y R_2) a tierra, dividiendo el circuito en dos mallas independientes.

Objetivo: Determinar la expresión de la corriente que fluye por el interruptor, $i_W(t)$, y calcular sus valores en $t = 0$ y $t = 1.3 \text{ ns}$.

Datos dados

- **Fuente de Voltaje:** $V_S = 1.5 \text{ V}$.
- **Resistencias:** $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$.
- **Inductor:** $L = 20 \ \mu\text{H}$.
- **Acción del interruptor:** Se cierra en $t = 0$, conectando el Nodo A a Tierra (0 V).

Desarrollo paso a paso

1. Análisis del Estado Inicial ($t < 0$)

Con el interruptor abierto durante mucho tiempo, el circuito se encuentra en **estado estable de DC**. El inductor se comporta como un cortocircuito (cable ideal). El circuito es una sola malla serie.

Calculamos la corriente del inductor (i_L) usando la Ley de Ohm:

$$i_L(0^-) = \frac{V_S}{R_1 + R_2}$$

$$i_L(0^-) = \frac{1.5 \text{ V}}{5000\ \Omega + 10000\ \Omega} = \frac{1.5}{15000} \text{ A}$$

$$i_L(0^-) = 100\ \mu\text{A}$$

Por el principio de continuidad de la corriente en un inductor:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 100\ \mu\text{A}$$

2. Análisis del Transitorio ($t \geq 0$)

Al cerrarse el interruptor, el Nodo A se fuerza a 0 V. Esto desacopla el lado izquierdo del derecho.

A. Corriente de entrada por R_1 (i_{R1}):
La fuente de 1.5 V queda conectada directamente a tierra a través de R_1. Esta corriente es constante para $t > 0$:

$$i_{R1} = \frac{V_S}{R_1} = \frac{1.5 \text{ V}}{5000\ \Omega} = 300\ \mu\text{A}$$

B. Corriente del Inductor (i_L):
El inductor y R_2 quedan en paralelo con el cortocircuito del interruptor. Se forma un circuito de **respuesta natural** (sin fuente), donde el inductor se descarga a través de R_2.

Calculamos la constante de tiempo τ:

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{20 \times 10^{-6} \text{ H}}{10 \times 10^3\ \Omega} = 2 \times 10^{-9} \text{ s} = 2 \text{ ns}$$

La ecuación de descarga del inductor es:

$$i_L(t) = i_L(0) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$i_L(t) = 100 \cdot e^{-t/2\text{ns}}\ \mu\text{A}$$

C. Aplicación de la Ley de Corrientes de Kirchhoff (KCL)
Aplicamos KCL en el Nodo A para hallar la corriente del interruptor $i_W(t)$. Definimos las direcciones:

- i_{R1} entra al nodo.
- i_L sale del nodo (hacia la rama $R_2 - L$).
- i_W sale del nodo (hacia el interruptor/tierra).

$$\sum i_{entra} = \sum i_{sale}$$

$$i_{R1} = i_W(t) + i_L(t)$$

Despejando $i_W(t)$:

$$i_W(t) = i_{R1} - i_L(t)$$

Sustituyendo las expresiones halladas:

$$i_W(t) = \left(300 - 100e^{-t/2\text{ns}}\right)\ \mu\text{A}$$

3. Cálculo de valores puntuales

Caso 1: $t = 0\ \text{s}$

$$i_W(0) = 300 - 100e^0 = 300 - 100$$

$$i_W(0) = 200\ \mu\text{A}$$

Caso 2: $t = 1.3\ \text{ns}$
Calculamos el exponente:

$$\frac{-t}{\tau} = \frac{-1.3\ \text{ns}}{2\ \text{ns}} = -0.65$$

$$e^{-0.65} \approx 0.522$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$i_W(1.3\text{ns}) = 300 - 100(0.522)\ \mu\text{A}$$

$$i_W(1.3\text{ns}) = 300 - 52.2\ \mu\text{A}$$

$$i_W(1.3\text{ns}) = 247.8\ \mu\text{A}$$

Resultado final

- **Ecuación general:**

$$i_W(t) = (300 - 100e^{-t/2\text{ns}})\ \mu\text{A}, \quad t \geq 0$$

- **Valores calculados:**
  - $i_W(0) = \mathbf{200}\ \mu\text{A}$
  - $i_W(1.3\text{ns}) = \mathbf{247.8}\ \mu\text{A}$

Interpretación breve del resultado

El comportamiento físico es coherente:

1. **En $t = 0$:** La fuente inyecta $300\ \mu\text{A}$ al nodo. El inductor, que actúa como una "fuente de corriente" inercial, "absorbe" $100\ \mu\text{A}$ para mantener su flujo. El resto ($200\ \mu\text{A}$) debe irse por el interruptor.
2. **Transitorio:** A medida que el inductor pierde su energía (se descarga), su corriente i_L disminuye hacia cero. Esto significa que "roba" menos corriente del nodo.
3. **Estado final ($t \to \infty$):** Cuando el inductor se descarga completamente ($i_L = 0$), toda la corriente proveniente de la fuente ($300\ \mu\text{A}$) fluirá directamente por el interruptor. El cálculo en $t = 1.3\text{ns}$

muestra este aumento progresivo de i_W (de 200 a 247.8 $\mu\mathrm{A}$).

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Te gustaría analizar qué sucedería con el voltaje en el inductor durante este transitorio?

EJERCICIO 22 (A Y B)

22. El interruptor arriba de la fuente de 12 V en el circuito de la figura 8.60 ha estado cerrado desde inmediatamente después de que se inventó la rueda. Finalmente se abre en $t = 0$. (*a*) Calcule la constante de tiempo del circuito. (*b*) Obtenga una expresión para $v(t)$ válida para $t > 0$. (*c*) Calcule la energía almacenada en el capacitor 170 ms después de haber abierto el interruptor.

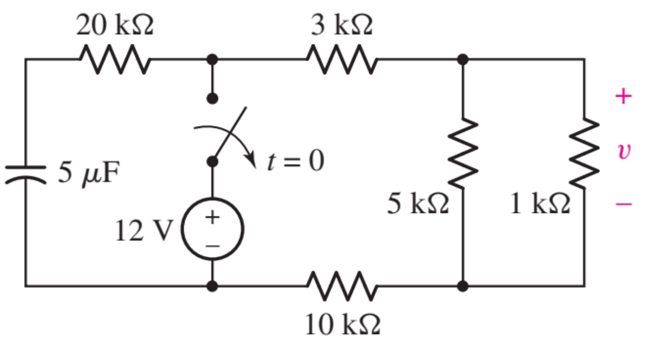


FIGURA 8.60

Aquí tienes la revisión y reformateo didáctico del problema de circuitos RC.

Enunciado del problema

Se analiza un circuito RC de primer orden con un interruptor que ha estado cerrado durante mucho tiempo y se abre en $t = 0$.

- **Estado $t < 0$ (Interruptor cerrado):** Una fuente de voltaje DC alimenta al circuito hasta alcanzar el estado estable.
- **Estado $t > 0$ (Interruptor abierto):** La fuente se desconecta y el capacitor se descarga a través de una red resistiva.

Objetivo:
a) Calcular la constante de tiempo del circuito (τ).
b) Determinar la expresión matemática del voltaje $v(t)$ a través de la resistencia de $1\ \mathrm{k}\Omega$ para $t > 0$.

Datos dados

- **Fuente de voltaje:** $V_S = 12\ \mathrm{V}$ (DC).
- **Capacitor:** $C = 5\ \mu\mathrm{F}$.
- **Red de resistencias:**

- $R_A = 20\ \text{k}\Omega$ (en serie con el capacitor).
- $R_B = 3\ \text{k}\Omega$.
- $R_C = 5\ \text{k}\Omega$ y $R_D = 1\ \text{k}\Omega$ (conectadas en **paralelo**).
- $R_E = 10\ \text{k}\Omega$.

Desarrollo paso a paso

1. Análisis del Estado Inicial ($t < 0$)

Con el interruptor cerrado por mucho tiempo, el circuito está en **estado estable de DC**. En estas condiciones, el capacitor se comporta como un **circuito abierto** ($i_C = 0$).

Al no fluir corriente por la rama del capacitor, no hay caída de tensión en la resistencia en serie de $20\ \text{k}\Omega$ ($V_{20k} = 0\ \text{V}$). Por lo tanto, el voltaje en las terminales del capacitor es igual al voltaje de la fuente.

$$v_C(0^-) = 12\ \text{V}$$

Por continuidad del voltaje en un capacitor:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 12\ \text{V}$$

2. Análisis del Transitorio ($t > 0$)

Al abrirse el interruptor, la fuente de $12\ \text{V}$ queda desconectada. El capacitor, cargado con $12\ \text{V}$, actúa ahora como la fuente temporal de energía y se descarga a través de las resistencias restantes.

A. Cálculo de la Resistencia Equivalente (R_{eq})

Identificamos la resistencia total que "ve" el capacitor en su lazo de descarga:

1. Las resistencias de $5\ \text{k}\Omega$ y $1\ \text{k}\Omega$ comparten sus nodos superior e inferior, por lo que están en **paralelo**. Calculamos su equivalente (R_p):

$$R_p = 5\ \text{k}\Omega \parallel 1\ \text{k}\Omega = \frac{5 \times 1}{5 + 1} = \frac{5}{6}\ \text{k}\Omega \approx 0.833\ \text{k}\Omega$$

2. El circuito de descarga forma un solo lazo serie compuesto por R_{20k}, R_{3k}, R_p y R_{10k}:

$$R_{eq} = 20 + 3 + R_p + 10$$

$$R_{eq} = 33 + \frac{5}{6} = \frac{198 + 5}{6} = \frac{203}{6}\ \text{k}\Omega$$

$$R_{eq} \approx 33.833\ \text{k}\Omega$$

B. Solución Inciso (a): Constante de Tiempo (τ)

La constante de tiempo se define como $\tau = R_{eq} \cdot C$.

$$R_{eq} = \frac{203}{6} \times 10^3\ \Omega$$

$$C = 5 \times 10^{-6}\ \mathrm{F}$$

$$\tau = \left(\frac{203 \times 10^3}{6}\right)(5 \times 10^{-6})\ \mathrm{s}$$

$$\tau = \frac{1015}{6} \times 10^{-3}\ \mathrm{s} \approx 169.17\ \mathrm{ms}$$

C. Solución Inciso (b): Expresión para $v(t)$

Se pide el voltaje $v(t)$ en la resistencia de $1\ \mathrm{k\Omega}$. Dado que esta resistencia está en paralelo con la de $5\ \mathrm{k\Omega}$, el voltaje $v(t)$ es el voltaje a través del bloque paralelo R_p.

El capacitor aplica su voltaje total $v_C(t)$ sobre toda la serie de resistencias. Usamos la **Regla del Divisor de Voltaje** para hallar qué porción cae en R_p:

$$v(t) = v_C(t) \cdot \frac{R_p}{R_{eq}}$$

Calculamos la relación de resistencias:

$$\frac{R_p}{R_{eq}} = \frac{5/6}{203/6} = \frac{5}{203}$$

Calculamos el valor inicial $v(0^+)$:

$$v(0^+) = v_C(0^+) \cdot \frac{5}{203} = 12\ \mathrm{V} \cdot \frac{5}{203} = \frac{60}{203}\ \mathrm{V}$$

$$v(0^+) \approx 0.2956\ \mathrm{V}$$

La expresión final sigue el decaimiento exponencial con la misma τ:

$$v(t) = v(0^+)e^{-t/\tau}$$

Calculamos el inverso de la constante de tiempo para el exponente:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.16917} \approx 5.91\ \mathrm{s}^{-1}$$

Sustituyendo:

$$v(t) = 0.296e^{-5.91t}\ \mathrm{V}$$

Resultado final

Inciso	Parámetro	Resultado
(a)	Constante de tiempo (τ)	$169.17\ \mathrm{ms}$
(b)	Voltaje en la resistencia ($v(t)$)	$0.296e^{-5.91t}\ \mathrm{V}$, para $t > 0$

Interpretación breve del resultado

1. **Reducción de voltaje:** Aunque el capacitor tiene $12\ \mathrm{V}$ iniciales, la resistencia de $1\ \mathrm{k\Omega}$ solo "ve" una fracción muy pequeña ($\approx 0.3\ \mathrm{V}$) porque la mayor parte del voltaje cae en las resistencias grandes ($20\ \mathrm{k\Omega}$ y $10\ \mathrm{k\Omega}$).
2. **Dinámica temporal:** El voltaje decae a cero a medida que se agota la energía del capacitor. La constante de tiempo indica que el voltaje caerá al 36.8% de su valor inicial en aproximadamente $169\ \mathrm{ms}$.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Te gustaría que calculemos cuánta energía total disipa la resistencia de $1\ \mathrm{k\Omega}$ durante todo el proceso de descarga?

EJERCICIO 24

---

24. Para el circuito representado en la figura 8.62, (*a*) calcule la constante de tiempo del circuito; (*b*) determine v en el instante inmediatamente antes de cerrar el interruptor; (*c*) obtenga una expresión para $v(t)$ válida para $t > 0$; (*d*) calcule $v(3\ \mathrm{ms})$.

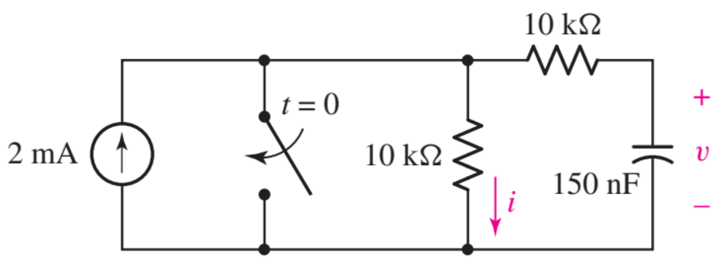


FIGURA 8.62

Aquí tienes la revisión y reformateo didáctico del problema de circuito RC presentado.

Enunciado del problema

Se analiza un circuito RC de primer orden que consta de una fuente de corriente DC (I_S), dos resistencias (R_1 y R_2) y un capacitor (C). El circuito incluye un interruptor que opera en $t = 0$.

- **Para $t < 0$ (Interruptor abierto):** La fuente alimenta al circuito y este alcanza el estado estable.

- **Para $t > 0$ (Interruptor cerrado):** El interruptor crea un cortocircuito entre los nodos superior e inferior, aislando la fuente y permitiendo la descarga del capacitor.

Objetivo:
a) Calcular la constante de tiempo (τ) del circuito para $t > 0$.
b) Determinar el voltaje en el capacitor inmediatamente antes de la conmutación ($v(0^-)$).
c) Obtener la expresión matemática del voltaje $v(t)$ para $t > 0$.
d) Calcular el valor del voltaje en el instante $t = 3\ \mathrm{ms}$.

Datos dados

- **Fuente de corriente:** $I_S = 2\ \mathrm{mA}$.
- **Resistor 1:** $R_1 = 10\ \mathrm{k\Omega}$ (en paralelo con la fuente).
- **Resistor 2:** $R_2 = 10\ \mathrm{k\Omega}$ (en serie con el capacitor).
- **Capacitor:** $C = 150\ \mathrm{nF}$.
- **Condición del interruptor:** Abierto en $t < 0$, se cierra en $t = 0$ creando un cortocircuito en la entrada de la rama $R_2 - C$.

Desarrollo paso a paso

1. Inciso (a): Cálculo de la Constante de Tiempo (τ)

Para determinar la dinámica del circuito en la fase transitoria ($t > 0$), analizamos la topología con el interruptor cerrado.

Al cerrarse el interruptor, se crea un camino de resistencia cero (cortocircuito) que conecta el extremo izquierdo de R_2 a tierra. Esto aísla la malla derecha (R_2 y C) del resto del circuito (fuente I_S y R_1). El capacitor se descarga exclusivamente a través de la resistencia R_2.

Por lo tanto, la resistencia equivalente de Thévenin vista por el capacitor es:

$$R_{eq} = R_2 = 10\ \mathrm{k\Omega}$$

Calculamos la constante de tiempo:

$$\tau = R_{eq} \cdot C$$

$$\tau = (10 \times 10^3\ \Omega)(150 \times 10^{-9}\ \mathrm{F})$$

$$\tau = 1500 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}$$

$$\tau = 1.5\ \mathrm{ms}$$

2. Inciso (b): Voltaje inicial ($t = 0^-$)

Para $t < 0$, el interruptor ha estado abierto por mucho tiempo, lo que implica que el circuito está en **Estado Estable de DC**.

- **Comportamiento del Capacitor:** En DC actúa como un circuito abierto ($I_C = 0$).
- **Análisis de corrientes:** Al estar abierta la rama del capacitor, no fluye corriente por R_2. Por tanto, toda la corriente de la fuente (I_S) circula únicamente por R_1.

Calculamos el voltaje en el nodo superior (V_{nodo}) usando la Ley de Ohm en R_1:

$$V_{nodo} = I_S \cdot R_1$$

$$V_{nodo} = (2 \text{ mA})(10 \text{ k}\Omega) = 20 \text{ V}$$

Dado que no hay corriente por R_2, no hay caída de tensión en ella ($V_{R2} = 0$). En consecuencia, el voltaje en el capacitor es igual al voltaje del nodo:

$$v(0^-) = 20 \text{ V}$$

Por continuidad del voltaje en el capacitor:

$$v(0^+) = 20 \text{ V}$$

3. Inciso (c): Expresión para $v(t)$

Para $t > 0$, tenemos un circuito RC sin fuentes (respuesta natural). La energía almacenada se disipa en R_2.
La ecuación general es:

$$v(t) = v(0) \cdot e^{-t/\tau}$$

Sustituyendo los valores:

$$v(t) = 20 \cdot e^{-t/1.5\text{ms}} \text{ V}$$

O en unidades básicas de segundos ($1/0.0015 \approx 666.67$):

$$v(t) = 20e^{-666.67t} \text{ V}$$

4. Inciso (d): Cálculo en $t = 3 \text{ ms}$

Evaluamos la expresión obtenida en $t = 3 \text{ ms}$. Notamos que este tiempo equivale a dos constantes de tiempo ($t = 2\tau$):

$$v(3\text{ms}) = 20 \cdot e^{-(3\text{ms})/(1.5\text{ms})}$$

$$v(3\text{ms}) = 20 \cdot e^{-2}$$

Usando la aproximación $e^{-2} \approx 0.1353$:

$$v(3\text{ms}) \approx 20 \cdot (0.1353)$$

$$v(3\text{ms}) \approx 2.707 \text{ V}$$

Resultado final

Inciso	Parámetro	Resultado
(a)	Constante de tiempo (τ)	1.5 ms
(b)	Voltaje inicial ($v(0^-)$)	20 V
(c)	Ecuación del voltaje ($v(t)$)	$20e^{-t/1.5\text{ms}} \text{ V}$
(d)	Voltaje en $t = 3\text{ms}$	2.71 V

Interpretación breve del resultado

El circuito funciona cargando el capacitor a 20V mediante la configuración de la fuente y R_1. Al accionar el interruptor, se "corta" el suministro y se obliga al capacitor a descargarse sobre R_2.
En el instante $t = 3 \text{ ms}$ han transcurrido exactamente **2 constantes de tiempo**. La teoría predice que después de 2τ, el voltaje debe ser el 13.5% del valor inicial.
Verificamos: $20 \text{ V} \times 0.135 = 2.7 \text{ V}$, lo cual coincide con nuestro cálculo.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Te gustaría calcular cuánta energía se ha disipado en la resistencia R_2 hasta el instante $t = 3\text{ms}$?

EJERCICIO 37

---

37. Determine $v_C(t)$ y $v_o(t)$ como está marcado en el circuito representado en la figura 8.71 para t igual a (*a*) 0^-; (*b*) 0^+; (*c*) 10 ms; (*d*) 12 ms.

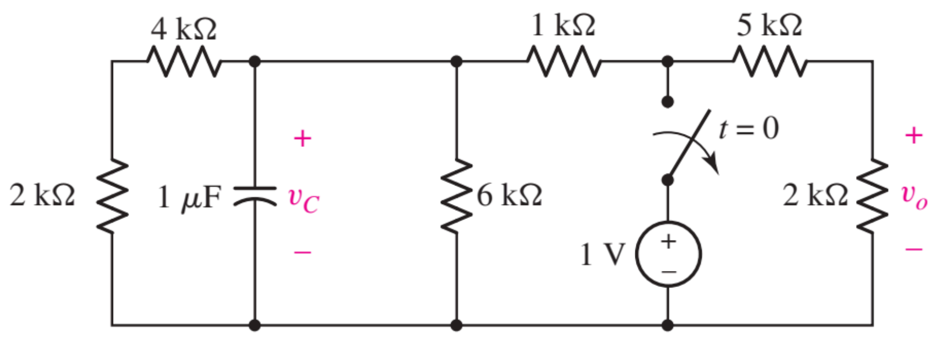


FIGURA 8.71

Aquí tienes la revisión y reformateo didáctico del problema de circuitos con múltiples constantes de tiempo y ramas.

Enunciado del problema

Se analiza un circuito que contiene una fuente de voltaje DC ideal de 1 V, un interruptor, un capacitor y dos redes resistivas distintas.

- **En $t < 0$ (Interruptor abierto):** El circuito está desenergizado.
- **En $t = 0$ (Interruptor se cierra):** La fuente alimenta simultáneamente a dos ramas conectadas en el nodo central:
    1. **Rama Derecha (v_o):** Un divisor de voltaje resistivo puro.
    2. **Rama Izquierda (v_C):** Una red RC que incluye una resistencia de entrada y una carga resistiva en paralelo al capacitor.

Objetivo: Determinar los voltajes de salida $v_o(t)$ y del capacitor $v_C(t)$ para los instantes:
a) $t = 0^-$
b) $t = 0^+$
c) $t = 10 \text{ ms}$
d) $t = 12 \text{ ms}$

Datos dados

- **Fuente:** $V_S = 1 \text{ V}$ (DC).
- **Capacitor:** $C = 1 \, \mu\text{F}$.
- **Red Derecha (para v_o):** $R_{D1} = 5 \text{ k}\Omega$, $R_{D2} = 2 \text{ k}\Omega$ (donde se mide v_o).
- **Red Izquierda (para v_C):**
    - Resistencia de entrada (serie con la fuente): $R_{in} = 1 \text{ k}\Omega$.
    - Resistencias de carga en paralelo al capacitor: Dos ramas equivalentes que suman una resistencia efectiva. Según el desarrollo, hay una resistencia de $6 \text{ k}\Omega$ y otra rama (quizás $2 + 4$) de $6 \text{ k}\Omega$, resultando en una carga paralela de $3 \text{ k}\Omega$.

Desarrollo paso a paso

1. Análisis en $t = 0^-$ (Estado Inicial)

Antes de cerrar el interruptor, la fuente está desconectada. Asumiendo que el circuito ha estado en reposo durante mucho tiempo, no hay energía almacenada.

$$v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

$$v_o(0^-) = 0 \text{ V}$$

2. Análisis en $t = 0^+$ (Conmutación)

En $t = 0$, el interruptor conecta la fuente de 1 V al nodo central.

Para el voltaje de salida v_o:
La rama derecha es puramente resistiva ($5 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega$). El voltaje responde instantáneamente. Aplicamos divisor de voltaje:

$$v_o(0^+) = V_S \cdot \frac{R_{D2}}{R_{D1} + R_{D2}}$$

$$v_o(0^+) = 1 \text{ V} \cdot \frac{2 \text{ k}\Omega}{5 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega} = \frac{2}{7} \text{ V}$$

$$v_o(0^+) \approx 0.286 \text{ V}$$

Para el voltaje del capacitor v_C:
El voltaje en un capacitor no puede cambiar abruptamente (principio de continuidad).

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

3. Análisis Transitorio ($t > 0$)

Debido a que la fuente es ideal, mantiene el nodo central a 1 V constantemente. Esto "desacopla" las dos partes del circuito: lo que suceda en la carga del capacitor no afecta al divisor de voltaje de la derecha.

Ecuación para $v_o(t)$:
Al ser resistivo y estar alimentado por una fuente DC constante:

$$v_o(t) = 0.286 \text{ V}, \quad \forall t > 0$$

Ecuación para $v_C(t)$:
Debemos hallar el equivalente de Thévenin visto desde las terminales del capacitor.

1. **Resistencia de carga (R_L):** El texto indica que el capacitor tiene en paralelo dos ramas equivalentes a $6 \text{ k}\Omega$ cada una.

$$R_{paralelo} = 6 \text{ k}\Omega \parallel 6 \text{ k}\Omega = 3 \text{ k}\Omega$$

2. **Voltaje final ($v_C(\infty)$):** En estado estable (capacitor abierto), el voltaje se divide entre la resistencia de entrada ($1 \text{ k}\Omega$) y la carga ($R_{paralelo} = 3 \text{ k}\Omega$).

$$v_C(\infty) = 1 \text{ V} \cdot \frac{3 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega} = 0.75 \text{ V}$$

3. **Constante de tiempo (τ):** Para la resistencia equivalente (R_{th}), "apagamos" la fuente (cortocircuito a tierra). R_{in} ($1 \text{ k}\Omega$) queda en paralelo con $R_{paralelo}$ ($3 \text{ k}\Omega$).

$$R_{th} = 1 \text{ k}\Omega \parallel 3 \text{ k}\Omega = \frac{1 \cdot 3}{1 + 3} \text{ k}\Omega = 0.75 \text{ k}\Omega = 750 \ \Omega$$

$$\tau = R_{th} \cdot C = (750 \ \Omega)(1 \times 10^{-6} \text{ F}) = 750 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$\tau = 0.75 \text{ ms}$$

La ecuación de carga es:

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$v_C(t) = 0.75 + (0 - 0.75)e^{-t/0.75\text{ms}}$$

$$v_C(t) = 0.75(1 - e^{-1333.3t}) \text{ V}$$

4. Cálculo para tiempos largos ($t = 10 \text{ ms}$ y 12 ms)

Comparamos los tiempos solicitados con la constante de tiempo:

$$5\tau = 5 \times 0.75 \text{ ms} = 3.75 \text{ ms}$$

Dado que tanto 10 ms como 12 ms son mucho mayores que 5τ ($t \gg \tau$), podemos asegurar que el circuito ha alcanzado el **Estado Estable**.

Para $t = 10 \text{ ms}$:

- $v_o(10\text{ms}) = \mathbf{0.286} \text{ V}$ (constante).
- $v_C(10\text{ms}) \approx v_C(\infty) = \mathbf{0.75} \text{ V}$.
  (Verificación matemática: $e^{-10/0.75} = e^{-13.3} \approx 0$).

Para $t = 12 \text{ ms}$:

- $v_o(12\text{ms}) = \mathbf{0.286} \text{ V}$.
- $v_C(12\text{ms}) = \mathbf{0.75} \text{ V}$.

Resultado final

Instante (t)	Voltaje de Salida $v_o(t)$	Voltaje del Capacitor $v_C(t)$	Estado del Sistema
0^-	0 V	0 V	Reposo
0^+	0.286 V	0 V	Inicio Transitorio
10 ms	0.286 V	0.75 V	Estado Estable ($> 5\tau$)
12 ms	0.286 V	0.75 V	Estado Estable ($> 5\tau$)

Interpretación breve del resultado

El problema ilustra dos conceptos fundamentales:

1. **Independencia de ramas:** Gracias a la fuente de voltaje ideal, la dinámica lenta del capacitor no afecta a la respuesta rápida (instantánea) de la rama resistiva v_o.
2. **Estado Estable:** Para tiempos significativamente mayores a la constante de tiempo (en este caso $t > 3.75 \text{ ms}$), las exponenciales transitorias desaparecen y las variables se asientan en sus valores finales de DC.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Te gustaría analizar qué pasaría con $v_o(t)$ si la fuente tuviera una resistencia interna significativa? (Eso acoplaría ambas ramas).

EJERCICIO 51 (A)

8.7 Respuestas natural y forzada

51. Para el circuito de dos fuentes de la figura 8.82, observe que una fuente siempre está activa. (*a*) Obtenga una expresión para $i(t)$ válida para todos los valores de t; (*b*) determine en qué tiempo la energía almacenada en el inductor alcanza 99% de su valor máximo.

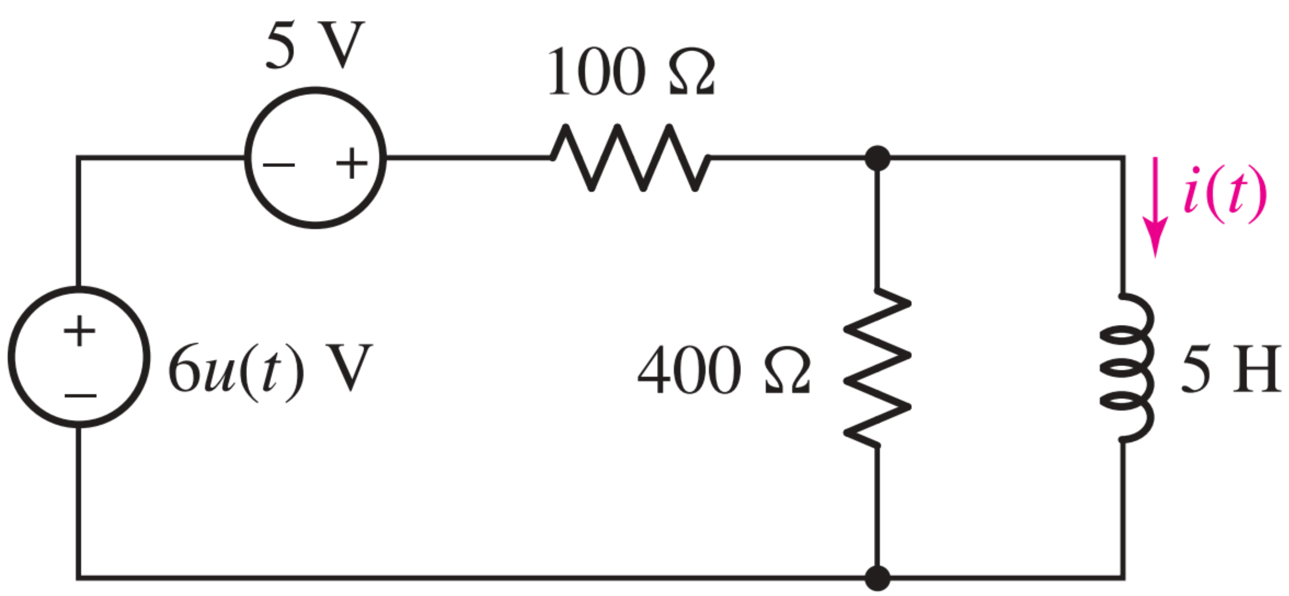


FIGURA 8.82

Aquí tienes la revisión y reformateo didáctico del problema de respuesta al escalón en un circuito RL.

Enunciado del problema

Se analiza un circuito RL de primer orden excitado por dos fuentes de voltaje en serie: una fuente constante de $5\ \mathrm{V}$ y una fuente escalón $6u(t)\ \mathrm{V}$.

- **Para $t < 0$:** La función escalón $u(t)$ es 0, por lo que solo actúa la fuente de $5\ \mathrm{V}$.
- **Para $t \geq 0$:** La función escalón se activa ($u(t) = 1$), sumando $6\ \mathrm{V}$ al circuito para un total de $11\ \mathrm{V}$.

Objetivo: Determinar la expresión matemática de la corriente del inductor $i(t)$ válida para todo t.

Datos dados

- **Fuente DC fija:** $V_{DC} = 5\ \mathrm{V}$.
- **Fuente escalón:** $V_u = 6u(t)\ \mathrm{V}$.

- **Resistencias:**
  - $R_1 = 100\ \Omega$ (en serie con las fuentes).
  - $R_2 = 400\ \Omega$ (en paralelo con la rama del inductor).
- **Inductor:** $L = 5\ \mathrm{H}$.
- **Variable:** Corriente del inductor $i(t)$.

Desarrollo paso a paso

1. Análisis en $t < 0$ (Estado Inicial)

Para $t < 0$, tenemos $u(t) = 0$, por lo que la fuente de escalón actúa como un cortocircuito. El circuito es alimentado solo por los $5\ \mathrm{V}$. Asumimos que ha pasado suficiente tiempo para alcanzar el **Estado Estable**.

- **Comportamiento del Inductor:** En DC, el inductor se comporta como un **cortocircuito** (resistencia cero).
- **Efecto en R_2:** Dado que R_2 $(400\ \Omega)$ está en paralelo con el inductor (que ahora es un cable ideal), la corriente toma el camino de menor resistencia. R_2 queda cortocircuitada y no fluye corriente por ella.

La corriente inicial $i(0^-)$ está limitada solo por R_1:

$$i(0^-) = \frac{V_{DC}}{R_1} = \frac{5\ \mathrm{V}}{100\ \Omega} = 0.05\ \mathrm{A}$$

$$i(0^-) = 50\ \mathrm{mA}$$

Por el principio de continuidad en inductores:

$$i(0) = i(0^+) = 50\ \mathrm{mA}$$

2. Análisis en $t \to \infty$ (Estado Final)

Para $t > 0$, la función escalón es $u(t) = 1$. La fuente escalón aporta $6\ \mathrm{V}$.
Las fuentes están en serie aditiva, por lo que el voltaje total de alimentación es:

$$V_{total} = 5\ \mathrm{V} + 6\ \mathrm{V} = 11\ \mathrm{V}$$

En el nuevo estado estable ($t \to \infty$), el inductor vuelve a comportarse como un cortocircuito, anulando nuevamente a R_2.

$$i(\infty) = \frac{V_{total}}{R_1} = \frac{11\ \mathrm{V}}{100\ \Omega} = 0.11\ \mathrm{A}$$

$$i(\infty) = 110\ \mathrm{mA}$$

3. Cálculo de la Constante de Tiempo (τ)

Para el análisis transitorio, necesitamos la resistencia equivalente (R_{eq}) vista desde las terminales del inductor. Para hallarla, "apagamos" las fuentes independientes (las fuentes de voltaje se reemplazan por cortocircuitos).

Al cortocircuitar las fuentes en el lado izquierdo:

1. El extremo izquierdo de R_1 $(100\ \Omega)$ se conecta a tierra.
2. El extremo inferior de R_2 $(400\ \Omega)$ ya está en tierra.
3. Ambas resistencias comparten el nodo superior (donde se conecta el inductor).

Por lo tanto, R_1 y R_2 quedan conectadas en **paralelo**.

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 = \frac{100 \cdot 400}{100 + 400} = \frac{40000}{500}\ \Omega$$

$$R_{eq} = 80\ \Omega$$

Calculamos la constante de tiempo:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{5\ \mathrm{H}}{80\ \Omega} = 0.0625\ \mathrm{s}$$

La frecuencia natural (inverso de τ) es:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.0625} = 16\ \mathrm{s}^{-1}$$

4. Construcción de la Expresión Final

La respuesta completa de un circuito de primer orden para $t \geq 0$ está dada por:

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Sustituyendo los valores (en mA):

$$i(t) = 110 + [50 - 110]e^{-16t}\ \mathrm{mA}$$

$$i(t) = (110 - 60e^{-16t})\ \mathrm{mA}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Si deseamos una expresión matemática compacta que incluya el historial previo ($t < 0$), podemos usar la función escalón:

$$i(t) = 50\ \mathrm{mA} + [(110 - 50)(1 - e^{-16t})]u(t)\ \mathrm{mA}$$

Simplificando:

$$i(t) = [50 + 60(1 - e^{-16t})u(t)]\ \mathrm{mA}$$

Resultado final

La expresión para la corriente del inductor es:

$$i(t) = \begin{cases} 50 \text{ mA} & t < 0 \\ (110 - 60e^{-16t}) \text{ mA} & t \geq 0 \end{cases}$$

O en notación compacta con escalón unitario:

$$i(t) = [50 + 60(1 - e^{-16t})u(t)] \text{ mA}$$

Interpretación breve del resultado

El circuito comienza con una corriente base de 50 mA. En $t = 0$, el voltaje de entrada salta, inyectando más energía. El inductor se opone al cambio brusco de corriente, forzando una transición suave (exponencial) que lleva la corriente desde los 50 mA iniciales hasta el nuevo valor final de 110 mA. La "velocidad" de esta transición está dictada por el exponente $16t$.

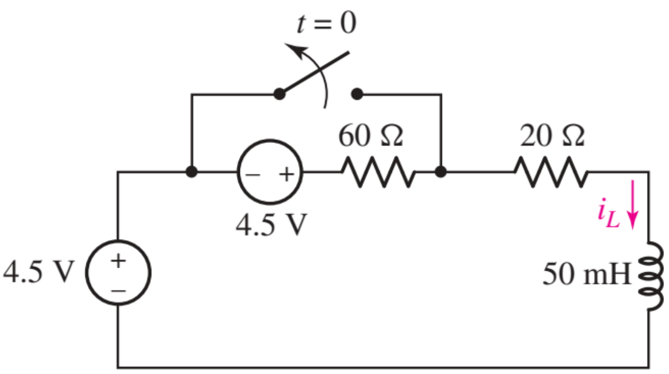
✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Por favor, procede con el inciso (b) para calcular el tiempo del 99% de energía, estaré atento para revisarlo.

EJERCICIO 52(A)

---

52. (*a*) Obtenga una expresión para i_L marcada en la figura 8.83 que sea válida para todos los valores de t. (*b*) Grafique su resultado dentro del intervalo $-1 \text{ ms} \leq t \leq 3 \text{ ms}$.



■ **FIGURA 8.83**

Aquí tienes la revisión y reformateo didáctico del problema de análisis transitorio en un circuito RL.

Enunciado del problema

Se analiza un circuito RL con un cambio de topología provocado por la apertura de un interruptor en $t = 0$.

- **Para $t < 0$ (Interruptor cerrado):** El interruptor crea un camino de baja resistencia que altera el flujo de corriente, aislando una parte del circuito.
- **Para $t \geq 0$ (Interruptor abierto):** El circuito cambia a una configuración serie donde todas las fuentes y resistencias participan.

Objetivo (Inciso a): Determinar la expresión matemática para la corriente del inductor $i_L(t)$ válida para todo $t \geq 0$.

Datos dados

- **Fuente Izquierda (V_1):** 4.5 V (siempre conectada).
- **Fuente Central (V_2):** 4.5 V (se incorpora al circuito en $t = 0$).
- **Resistencias:**
  - $R_1 = 60 \ \Omega$ (rama central).
  - $R_2 = 20 \ \Omega$ (rama derecha, serie con el inductor).
- **Inductor:** $L = 50 \text{ mH}$.
- **Interruptor:** Cerrado para $t < 0$, se abre en $t = 0$.

Desarrollo paso a paso

1. Análisis del Estado Inicial ($t < 0$)

Con el interruptor cerrado, este actúa como un cortocircuito ideal ($R_{sw} = 0 \ \Omega$) conectado en paralelo a la rama central (la que contiene V_2 y R_1).

- **Efecto del cortocircuito:** La corriente proveniente de la fuente izquierda (V_1) opta por el camino de resistencia cero (el interruptor), "saltándose" o bypasseando la rama central. Por lo tanto, V_2 y R_1 no afectan al circuito en este estado.
- **Comportamiento del Inductor:** En estado estable de DC, el inductor se comporta como un cortocircuito.

El circuito efectivo es una malla simple con V_1, el interruptor y la rama derecha (R_2). Calculamos la corriente inicial $i_L(0)$:

$$i_L(0^-) = \frac{V_1}{R_2}$$

$$i_L(0^-) = \frac{4.5 \text{ V}}{20 \ \Omega} = 0.225 \text{ A}$$

$$i_L(0^-) = 225 \text{ mA}$$

2. Análisis del Estado Final ($t \to \infty$)

En $t = 0$, el interruptor se abre, eliminando el cortocircuito. Ahora la corriente debe fluir obligatoriamente a través de la rama central.

- **Fuentes de Voltaje:** Las fuentes V_1 y V_2 quedan conectadas en serie con polaridad aditiva:

$$V_{total} = V_1 + V_2 = 4.5 \text{ V} + 4.5 \text{ V} = 9 \text{ V}$$

- **Resistencia Equivalente:** Las resistencias R_1 y R_2 quedan en serie:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 = 60 \ \Omega + 20 \ \Omega = 80 \ \Omega$$

- **Corriente Final:**

$$i_L(\infty) = \frac{V_{total}}{R_{eq}} = \frac{9 \text{ V}}{80 \ \Omega} = 0.1125 \text{ A}$$

$$i_L(\infty) = 112.5 \text{ mA}$$

3. Cálculo de la Constante de Tiempo (τ)

La dinámica del transitorio depende de la inductancia y la resistencia equivalente del circuito **después** de la conmutación ($t > 0$).

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{50 \times 10^{-3} \text{ H}}{80 \ \Omega}$$

$$\tau = 0.000625 \text{ s} = 625 \ \mu\text{s}$$

Para la ecuación exponencial, calculamos la frecuencia natural ($1/\tau$):

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.000625} = 1600 \text{ s}^{-1}$$

4. Construcción de la Expresión Final

La respuesta completa para un circuito de primer orden es:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Sustituimos los valores calculados (trabajando en mA para simplificar):

$$i_L(t) = 112.5 + [225 - 112.5]e^{-1600t} \text{ mA}$$

$$i_L(t) = 112.5 + 112.5e^{-1600t} \text{ mA}$$

Factorizando el término común:

$$i_L(t) = 112.5(1 + e^{-1600t}) \text{ mA}$$

Resultado final

La expresión de la corriente para $t \geq 0$ es:

$$i_L(t) = 112.5(1 + e^{-1600t}) \text{ mA}$$

Interpretación breve del resultado

El resultado es físicamente consistente:

1. **En $t = 0$:** La expresión da $112.5(2) = 225 \text{ mA}$, que coincide con la condición inicial.
2. **En $t \to \infty$:** La exponencial se hace cero y queda 112.5 mA, que coincide con el nuevo estado estable.
3. **Fenómeno:** Aunque el voltaje total se duplicó (de 4.5V a 9V), la resistencia total se cuadruplicó (de 20Ω a 80Ω). Por eso, la corriente final es la mitad de la inicial, resultando en una curva de decaimiento exponencial.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Te gustaría calcular ahora el voltaje a través del inductor $v_L(t)$ para ver cómo se comporta el pico de tensión en el momento de la apertura?

EJERCICIO 53

53. Obtenga una expresión para $i(t)$ marcado en el diagrama del circuito de la figura 8.84 y determine la potencia que se disipa en la resistencia de 40 Ω en $t = 2.5$ ms.

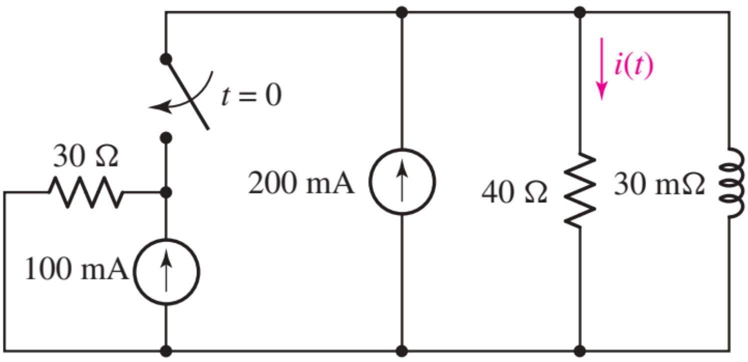


FIGURA 8.84

Aquí tienes la revisión y reformateo didáctico del problema de redistribución de energía en un circuito RL.

Enunciado del problema

Se analiza un circuito con dos fuentes de corriente y un inductor. El sistema sufre un cambio de topología en $t = 0$ debido a la apertura de un interruptor.

- **Estado $t < 0$ (Interruptor cerrado):** Ambas fuentes de corriente alimentan al nodo superior. El inductor está en paralelo con una resistencia de $40\ \Omega$.
- **Estado $t > 0$ (Interruptor abierto):** Se desconecta una parte del circuito (la rama de 100 mA y $30\ \Omega$), dejando al inductor y la resistencia de $40\ \Omega$ alimentados únicamente por la fuente de 200 mA.

Objetivo:
a) Determinar la expresión matemática para la corriente $i(t)$ que circula por la resistencia de $40\ \Omega$.
b) Calcular la potencia disipada por dicha resistencia en el instante $t = 2.5\ \text{ms}$.

Datos dados

- **Fuente 1:** $I_1 = 100\ \text{mA}$.
- **Fuente 2:** $I_2 = 200\ \text{mA}$ (permanece conectada).
- **Resistencias:** $R_1 = 30\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ (donde medimos i).
- **Inductor:** $L = 30\ \text{mH}$.
- **Interruptor:** Se abre en $t = 0$.

Desarrollo paso a paso

1. Análisis del Estado Inicial ($t < 0$)

Con el interruptor cerrado, el circuito está en **estado estable de DC**.

- **Comportamiento del Inductor:** Actúa como un cortocircuito ideal ($0\ \Omega$).
- **Efecto en R_2 $(40\ \Omega)$:** Al estar en paralelo con el cortocircuito del inductor, el voltaje en la resistencia es cero. Por lo tanto, no circula corriente por ella.

$$i(0^-) = 0\ \text{A}$$

- **Corriente del Inductor (i_L):** El inductor "roba" toda la corriente que entra al nodo superior (suma de ambas fuentes).

$$i_L(0^-) = I_1 + I_2 = 100\ \text{mA} + 200\ \text{mA}$$

$$i_L(0^-) = 300\ \text{mA}$$

2. Análisis del Transitorio ($t > 0$)

En $t = 0$, se abre el interruptor y la rama izquierda (I_1, R_1) queda desconectada.
El circuito restante consta de la fuente I_2 $(200\ \text{mA})$, la resistencia R_2 $(40\ \Omega)$ y el inductor L.

A. Condiciones Iniciales en $t = 0^+$
Por la propiedad de continuidad en inductores:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 300\ \text{mA}$$

Aplicamos la **Ley de Corrientes de Kirchhoff (KCL)** en el nodo superior para hallar la corriente en la resistencia $i(t)$. Asumimos que $i(t)$ e $i_L(t)$ salen del nodo y la fuente entra.

$$\sum i_{entra} = \sum i_{sale}$$

$$200\ \text{mA} = i(t) + i_L(t)$$

Despejamos $i(t)$ en $t = 0^+$:

$$i(0^+) = 200 \text{ mA} - 300 \text{ mA} = -100 \text{ mA}$$

B. Estado Final ($t \to \infty$)
El inductor vuelve a comportarse como cortocircuito, tomando toda la corriente de la fuente (200 mA).

$$i_L(\infty) = 200 \text{ mA}$$

$$i(\infty) = 200 \text{ mA} - 200 \text{ mA} = 0 \text{ A}$$

C. Constante de Tiempo (τ)
La resistencia vista por el inductor es $R_2 = 40 \ \Omega$ (la fuente de corriente ideal es un circuito abierto).

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{30 \times 10^{-3} \text{ H}}{40 \ \Omega} = 0.75 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\tau = 0.75 \text{ ms}$$

3. Inciso (a): Expresión para $i(t)$

La corriente en la resistencia decae desde su valor inicial (-100 mA) hasta su valor final (0 mA).
Forma general: $i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$

Sustituyendo:

$$i(t) = 0 + [-100 - 0]e^{-t/0.75\text{ms}} \text{ mA}$$

$$i(t) = -100e^{-1333.3t} \text{ mA}, \quad t > 0$$

4. Inciso (b): Cálculo de Potencia en $t = 2.5 \text{ ms}$

Paso 1: Calcular la corriente en ese instante.
Evaluamos $t = 2.5 \text{ ms}$ en la ecuación. Observamos que la relación de tiempos es:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{2.5 \text{ ms}}{0.75 \text{ ms}} = \frac{2.5}{0.75} \approx 3.333$$

$$i(2.5\text{ms}) = -100 \cdot e^{-3.333} \text{ mA}$$

$$i(2.5\text{ms}) \approx -100 \cdot (0.03567) \text{ mA} = -3.567 \text{ mA}$$

En Amperios:

$$i(2.5\text{ms}) \approx -0.003567 \text{ A}$$

Paso 2: Calcular la potencia.

$$P = i^2 R = (-0.003567 \text{ A})^2 \cdot (40 \ \Omega)$$

$$P \approx (1.272 \times 10^{-5}) \cdot 40 \text{ W}$$

$$P \approx 5.09 \times 10^{-4}\ \mathrm{W}$$

$$P \approx 0.509\ \mathrm{mW}$$

Resultado final

Inciso	Magnitud	Resultado
(a)	Corriente en $R_{40\Omega}$	$\mathbf{i(t) = -100e^{-1333.3t}}\ \mathrm{mA}$
(b)	Potencia en $2.5\mathrm{ms}$	$\mathbf{P \approx 509}\ \mu\mathrm{W}\ (0.509\ \mathrm{mW})$

Interpretación breve del resultado

1. **Signo negativo en la corriente:** El valor de $-100\ \mathrm{mA}$ indica que la corriente fluye en **sentido contrario** a la referencia estándar (hacia arriba por la resistencia). Esto ocurre porque el inductor, cargado con $300\ \mathrm{mA}$, "empuja" más corriente de la que la fuente de $200\ \mathrm{mA}$ puede suministrar. El excedente $(100\ \mathrm{mA})$ debe recircular subiendo por la resistencia.
2. **Decaimiento de energía:** A medida que pasa el tiempo, el inductor libera su exceso de energía a través de la resistencia hasta igualarse con la fuente $(200\ \mathrm{mA})$, momento en el cual la corriente por la resistencia se hace cero.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Te gustaría graficar la corriente del inductor $i_L(t)$ y la corriente de la resistencia $i(t)$ en el mismo eje para comparar sus trayectorias?

EJERCICIO 60

---

60. El interruptor del tipo "cierre antes de corte" que se muestra en la figura 8.90 ha estado en la posición a desde que salió en la televisión el primer episodio de "Johnny Quest". Finalmente, se mueve a la posición b en el tiempo $t = 0$. (a) Obtenga expresiones para $i(t)$ y $v_C(t)$ que sean válidas para todos los valores de t. (b) Determine la energía que queda en el capacitor en $t = 33\ \mu s$.

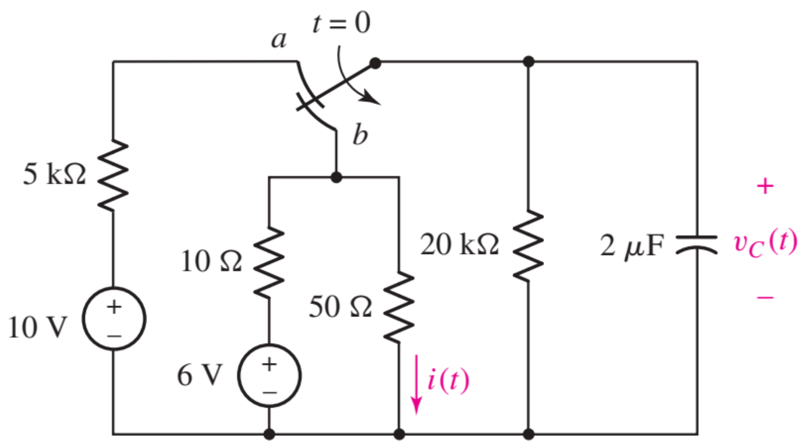


FIGURA 8.90

Aquí tienes la revisión y reformateo del problema de circuito RC con conmutación compleja.

Enunciado del problema

Se analiza un circuito con un interruptor de tipo "make-before-break" (cierre antes de corte), que asegura la continuidad del voltaje en el capacitor al pasar de la posición a a la b.

- **Posición a ($t < 0$):** El capacitor está conectado a una red de carga alimentada por 10 V.
- **Posición b ($t \geq 0$):** El capacitor se conecta a una segunda red resistiva alimentada por 6 V.

Objetivo:
a) Obtener las expresiones matemáticas para el voltaje del capacitor $v_C(t)$ y la corriente $i(t)$ (a través de la resistencia de $50\ \Omega$) válidas para todo t.
b) Calcular la energía almacenada en el capacitor en $t = 33\ \mu s$.

Datos dados

- **Fuentes:** $V_1 = 10\ \text{V}$, $V_2 = 6\ \text{V}$.
- **Capacitor:** $C = 2\ \mu\text{F}$.
- **Resistencias lado a:** $5\ \text{k}\Omega$ y $20\ \text{k}\Omega$ (donde se mide v_C).
- **Resistencias lado b:** $10\ \Omega$ (serie con fuente) y $50\ \Omega$ (donde se mide i).
- **Interruptor:** Pasa de a a b en $t = 0$.

Desarrollo paso a paso

1. Análisis del Estado Inicial ($t < 0$)

El interruptor está en la posición a y el circuito está en **estado estable DC**.

- **Capacitor:** Circuito abierto.
- **Voltaje $v_C(0^-)$:** Se determina mediante un divisor de voltaje en la malla izquierda.

$$v_C(0^-) = 10\ \mathrm{V} \cdot \frac{20\ \mathrm{k\Omega}}{5\ \mathrm{k\Omega} + 20\ \mathrm{k\Omega}} = 10 \cdot \frac{20}{25} = 8\ \mathrm{V}$$

- **Corriente $i(0^-)$:** La malla derecha (fuente 6 V, resistencias $10\ \Omega$ y $50\ \Omega$) está activa y aislada del capacitor. La corriente i fluye por la resistencia de $50\ \Omega$.

$$i(0^-) = \frac{6\ \mathrm{V}}{10\ \Omega + 50\ \Omega} = \frac{6}{60}\ \mathrm{A} = 0.1\ \mathrm{A} = 100\ \mathrm{mA}$$

2. Análisis del Transitorio ($t \geq 0$)

En $t = 0$, el capacitor (con $v_C(0) = 8\ \mathrm{V}$) se conecta al nodo b. El circuito equivalente para el capacitor consiste en la resistencia de $20\ \mathrm{k\Omega}$ (que viaja con él), en paralelo con la red del lado b ($R_{50\Omega} \parallel (R_{10\Omega} + V_{6V})$).

A. Equivalente de Thévenin visto por el capacitor:
Para hallar la resistencia y el voltaje final que "ve" el capacitor:

- **Resistencia (R_{th}):** Apagamos las fuentes (cortocircuito). Quedan en paralelo $20\ \mathrm{k\Omega}$, $50\ \Omega$ y $10\ \Omega$. Dado que $20\ \mathrm{k\Omega} \gg 50\ \Omega$, su efecto es despreciable.

$$R_{th} \approx 10\ \Omega \parallel 50\ \Omega = \frac{10 \cdot 50}{10 + 50} = \frac{500}{60} = \frac{25}{3}\ \Omega \approx 8.33\ \Omega$$

- **Voltaje final ($v_C(\infty)$):** Es el voltaje en el nodo b en estado estable. Usamos divisor de voltaje sobre la fuente de 6 V.

$$v_C(\infty) = 6\ \mathrm{V} \cdot \frac{50\ \Omega}{10\ \Omega + 50\ \Omega} = 5\ \mathrm{V}$$

- **Constante de tiempo (τ):**

$$\tau = R_{th} \cdot C = \left(\frac{25}{3}\ \Omega\right)(2 \times 10^{-6}\ \mathrm{F}) = \frac{50}{3} \times 10^{-6}\ \mathrm{s}$$

$$\tau \approx 16.67\ \mu\mathrm{s}$$

Inverso de τ para la ecuación: $1/\tau = 60,000\ \mathrm{s}^{-1}$.

B. Expresiones temporales:

- **Para $v_C(t)$:**

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$v_C(t) = 5 + (8 - 5)e^{-60000t}$$

$$v_C(t) = (5 + 3e^{-60000t})\ \text{V}$$

- **Para $i(t)$:**
  Para $t \geq 0$, la resistencia de $50\ \Omega$ está en paralelo con el capacitor, por lo que soporta el mismo voltaje $v_C(t)$.

$$i(t) = \frac{v_C(t)}{50} = \frac{5 + 3e^{-60000t}}{50}$$

$$i(t) = 0.1 + 0.06e^{-60000t}\ \text{A}$$

  En miliamperios:

$$i(t) = (100 + 60e^{-60000t})\ \text{mA}$$

3. Cálculo de Energía en $t = 33\ \mu\text{s}$

- **Tiempo normalizado:**

$$t = 33\ \mu\text{s} \approx 2\tau$$

  Exponente: $-60000 \times 33 \times 10^{-6} = -1.98$.

- **Voltaje en $t = 33\ \mu$s:**

$$v_C = 5 + 3e^{-1.98} \approx 5 + 3(0.138) = 5.414\ \text{V}$$

- **Energía (w):**

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-6})(5.414)^2$$

$$w = 10^{-6} \cdot (29.31)$$

$$w = 29.31\ \mu\text{J}$$

Resultado final

a) Expresiones para todo t:

$$v_C(t) = \begin{cases} 8\ \text{V} & t < 0 \\ 5 + 3e^{-60000t}\ \text{V} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 100\ \text{mA} & t < 0 \\ 100 + 60e^{-60000t}\ \text{mA} & t \geq 0 \end{cases}$$

b) Energía en $t = 33\ \mu$s:

$$w \approx 29.3\ \mu\text{J}$$

Interpretación breve del resultado

Al cambiar el interruptor, el capacitor pasa de estar cargado a 8 V a descargarse parcialmente hasta alcanzar los 5 V del nuevo circuito.
Es interesante notar que la corriente $i(t)$ sufre un **salto instantáneo** en $t = 0$: pasa de 100 mA a 160 mA. Esto no viola las leyes físicas, ya que la corriente en una resistencia (a diferencia de un inductor) sí puede cambiar bruscamente. El salto se debe a que en $t = 0^+$, la resistencia de $50 \, \Omega$ recibe repentinamente los 8 V del capacitor (antes tenía 5 V del divisor).

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Deseas verificar si la aproximación de despreciar la resistencia de $20\text{k}\Omega$ introdujo algún error significativo en el cálculo de energía?

EJERCICIO 61

61. El interruptor en el circuito de la figura 8.91, que se llama con frecuencia un interruptor del tipo *cierre antes de corte* (ya que durante la conmutación hace brevemente contacto con ambas partes del circuito para asegurar una transición eléctrica suave), se mueve a la posición b en $t = 0$, únicamente después de haber estado en la posición a durante un tiempo suficientemente largo para asegurar que todos los transitorios iniciales que surgieron al activar las fuentes se han extinguido hace tiempo. (a) Determine la potencia disipada por la resistencia de 5 Ω en $t = 0^-$. (b) Determine la potencia disipada en la resistencia de 3 Ω en $t = 2$ ms.

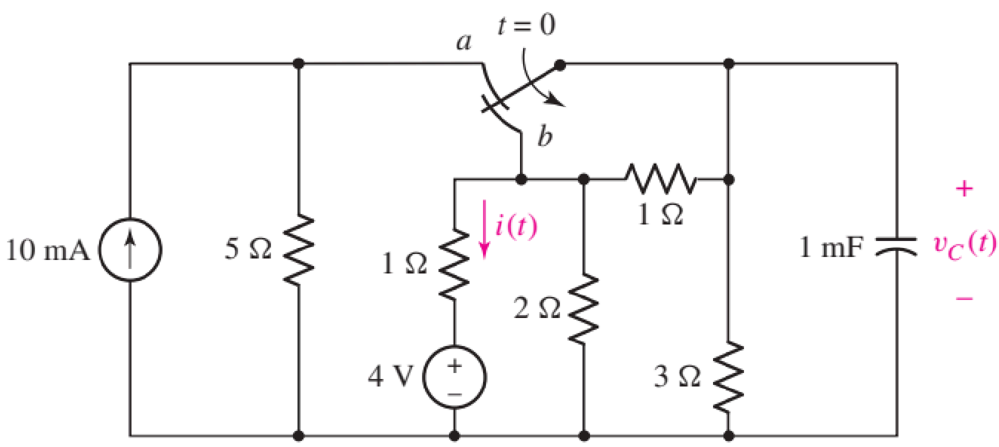


FIGURA 8.91

Aquí tienes la revisión y reformateo del problema de circuito RC con conmutación compleja.

Enunciado del problema

Se tiene un circuito con un capacitor, fuentes de voltaje y corriente, y un interruptor que cambia de posición en $t = 0$.

- **Posición 'a' ($t < 0$):** El circuito está completo, incluyendo una fuente de corriente de 10 mA y una resistencia de $5 \, \Omega$ a la izquierda. Se asume estado estable.

- **Posición 'b' ($t > 0$):** El interruptor desconecta la sección izquierda, dejando al capacitor y la red resistiva derecha alimentados únicamente por la fuente de $4\ \mathrm{V}$.

Objetivo:
a) Calcular la potencia disipada por la resistencia de $5\ \Omega$ en el instante $t = 0^-$ (justo antes de la conmutación).
b) Calcular la potencia disipada por la resistencia de $3\ \Omega$ en el instante $t = 2\ \mathrm{ms}$.

Datos dados

- **Fuentes:** $I_S = 10\ \mathrm{mA}$, $V_S = 4\ \mathrm{V}$.
- **Capacitor:** $C = 1\ \mathrm{mF}$.
- **Resistencias:** $5\ \Omega$, $2\ \Omega$, $1\ \Omega$ (serie con $4\ \mathrm{V}$), $1\ \Omega$ (rama horizontal), $3\ \Omega$ (paralelo al capacitor).
- **Interruptor:** Pasa de 'a' a 'b' en $t = 0$.

Desarrollo paso a paso

1. Parte (a): Análisis en $t = 0^-$

En $t < 0$, el interruptor está en 'a' y el circuito está en **Estado Estable DC**.

- **Capacitor:** Circuito abierto.
- **Nodo de análisis (Nodo B):** Definimos el nodo central donde se unen las resistencias de $2\ \Omega$, $1\ \Omega$ (vertical), $1\ \Omega$ (horizontal) y la rama del interruptor.

Aplicamos la **Ley de Corrientes de Kirchhoff (KCL)** en el Nodo B.
Sumatoria de corrientes que salen = Sumatoria de corrientes que entran.

- Entra: $10\ \mathrm{mA} = 0.01\ \mathrm{A}$.
- Salen hacia tierra: $R_{5\Omega}$ y $R_{2\Omega}$.
- Salen hacia otras fuentes/ramas: Rama de $4\ \mathrm{V}$ ($1\ \Omega$) y rama derecha ($1\ \Omega + 3\ \Omega$).

$$\frac{V_B}{5} + \frac{V_B}{2} + \frac{V_B - 4}{1} + \frac{V_B}{1 + 3} = 0.01$$

Agrupamos términos por V_B:

$$V_B\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4}\right) - 4 = 0.01$$

$$V_B(0.2 + 0.5 + 1 + 0.25) = 4.01$$

$$V_B(1.95) = 4.01 \implies V_B = \frac{4.01}{1.95} \approx 2.0564\ \mathrm{V}$$

Calculamos la potencia en la resistencia de $5\ \Omega$:
Esta resistencia está conectada directamente entre el Nodo B y tierra (a través del interruptor en 'a').

$$P_{5\Omega} = \frac{V_B^2}{R} = \frac{(2.0564)^2}{5} \approx \frac{4.2288}{5} \text{ W}$$

$$P_{5\Omega} \approx 0.8457 \text{ W}$$

2. Parte (b): Análisis en $t > 0$

El interruptor pasa a 'b', desconectando la fuente de 10 mA y la resistencia de $5 \ \Omega$.

A. Voltaje inicial $v_C(0)$
En $t = 0^-$, el capacitor estaba en paralelo con la resistencia de $3 \ \Omega$. Por divisor de voltaje en la rama derecha:

$$v_C(0) = V_B(0^-) \cdot \frac{3}{1+3} = 2.0564 \cdot 0.75 \approx 1.5423 \text{ V}$$

B. Voltaje final $v_C(\infty)$
En el nuevo estado estable (sin la rama izquierda), recalculamos V_B ($V_{B,\infty}$).
KCL en Nodo B (ahora sin rama de 5Ω ni fuente de corriente):

$$\frac{V_B}{2} + \frac{V_B - 4}{1} + \frac{V_B}{4} = 0$$

$$V_B(0.5 + 1 + 0.25) = 4 \implies V_B(1.75) = 4$$

$$V_{B,\infty} = \frac{4}{1.75} \approx 2.2857 \text{ V}$$

Voltaje final del capacitor (divisor de voltaje nuevamente):

$$v_C(\infty) = V_{B,\infty} \cdot 0.75 = 2.2857 \cdot 0.75 \approx 1.7143 \text{ V}$$

C. Constante de Tiempo τ
Hallamos la resistencia equivalente vista por el capacitor (R_{th}).
Apagamos la fuente de 4 V (corto).
Desde los terminales del capacitor vemos $3 \ \Omega$ en paralelo con el resto.
El "resto" es $1 \ \Omega$ (horizontal) en serie con ($1 \ \Omega \parallel 2 \ \Omega$).

$$R_{eq,resto} = 1 + \left(\frac{1 \cdot 2}{1+2}\right) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \approx 1.667 \, \Omega$$

$$R_{th} = 3 \parallel \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot (5/3)}{3 + 5/3} = \frac{5}{14/3} = \frac{15}{14} \approx 1.0714 \, \Omega$$

$$\tau = R_{th} \cdot C = \frac{15}{14} \, \Omega \cdot 1 \text{ mF} \approx 1.0714 \text{ ms}$$

D. Cálculo en $t = 2 \text{ ms}$
Ecuación de respuesta completa:

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$v_C(2\text{ms}) = 1.7143 + (1.5423 - 1.7143)e^{-2\text{ms}/1.0714\text{ms}}$$

$$v_C(2\text{ms}) = 1.7143 - 0.172 \cdot e^{-1.8667}$$

$$v_C(2\text{ms}) \approx 1.7143 - 0.172(0.1546) = 1.7143 - 0.0266 = 1.6877 \text{ V}$$

Potencia en la resistencia de $3\ \Omega$ (paralelo al capacitor):

$$P_{3\Omega} = \frac{v_C(2\text{ms})^2}{3} = \frac{(1.6877)^2}{3} \approx \frac{2.848}{3} \text{ W}$$

$$P_{3\Omega} \approx 0.949 \text{ W}$$

Resultado final

Inciso	Magnitud	Resultado
(a)	Potencia en $R_{5\Omega}$ $(t = 0^-)$	$\mathbf{846}$ mW (0.846 W)
(b)	Potencia en $R_{3\Omega}$ $(t = 2\text{ms})$	$\mathbf{949}$ mW (0.949 W)

Interpretación breve del resultado

1. **Transición de voltaje:** El capacitor comienza en ≈ 1.54 V y se carga hacia un valor final mayor de ≈ 1.71 V tras desconectarse la carga que representaba la rama izquierda.
2. **Estado en 2ms:** A los 2 ms (casi 2τ), el capacitor ya ha recorrido gran parte del camino hacia su valor final (1.68 V vs 1.71 V), lo que es coherente con la teoría de circuitos de primer orden.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Te gustaría analizar la corriente suministrada por la fuente de 4V en ese mismo instante?