

Serie de ejercicios Tema 3 Parte 3 (22-31)

Problema 22 inciso 2

Enunciado del problema

Determine los vectores \mathbf{T} (Tangente Unitario), \mathbf{N} (Normal Principal) y \mathbf{B} (Binormal) para la curva $\mathbf{r}(t) = (4t, \cos 2t, \sin 2t)$ en todo t .

Datos dados

La curva en \mathbb{R}^3 está definida por la función vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = (4t, \cos 2t, \sin 2t)$$

Se buscan las expresiones para el Triedro Móvil: $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$.

Desarrollo paso a paso

El Triedro Móvil (o Marco de Frenet-Serret) se define mediante la aplicación directa de las siguientes fórmulas:

- **Vector Tangente Unitario:** $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$
- **Vector Normal Principal:** $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$
- **Vector Binormal:** $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$

Paso 1: Calcular el vector velocidad $\mathbf{r}'(t)$

Derivamos la función $\mathbf{r}(t)$ componente a componente respecto a t :

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}(4t, \cos 2t, \sin 2t)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (4, -2 \sin 2t, 2 \cos 2t)$$

Paso 2: Calcular la rapidez $|\mathbf{r}'(t)|$

Calculamos la magnitud (norma) del vector velocidad:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(4)^2 + (-2 \sin 2t)^2 + (2 \cos 2t)^2}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{16 + 4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t}$$

Factorizamos el 4 y aplicamos la identidad pitagórica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{16 + 4(\sin^2 2t + \cos^2 2t)}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{16 + 4(1)} = \sqrt{20}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{5}$$

Paso 3: Calcular el vector Tangente Unitario $\mathbf{T}(t)$

Normalizamos el vector velocidad dividiéndolo por su magnitud:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(4, -2 \sin 2t, 2 \cos 2t)}{2\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{T}(t) = \left(\frac{4}{2\sqrt{5}}, \frac{-2 \sin 2t}{2\sqrt{5}}, \frac{2 \cos 2t}{2\sqrt{5}} \right)$$

$$\mathbf{T}(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{\sin 2t}{\sqrt{5}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{5}} \right)$$

Paso 4: Calcular la derivada del tangente unitario $\mathbf{T}'(t)$

Derivamos $\mathbf{T}(t)$ respecto a t para encontrar la dirección del vector normal:

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} (2, -\sin 2t, \cos 2t) \right]$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{d}{dt}[2], \frac{d}{dt}[-\sin 2t], \frac{d}{dt}[\cos 2t] \right)$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} (0, -2 \cos 2t, -2 \sin 2t)$$

Paso 5: Calcular la magnitud $|\mathbf{T}'(t)|$

Calculamos la norma de $\mathbf{T}'(t)$:

$$|\mathbf{T}'(t)| = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{-2 \cos 2t}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{-2 \sin 2t}{\sqrt{5}} \right)^2}$$

$$|\mathbf{T}'(t)| = \sqrt{0 + \frac{4 \cos^2 2t}{5} + \frac{4 \sin^2 2t}{5}}$$

$$|\mathbf{T}'(t)| = \sqrt{\frac{4}{5} (\cos^2 2t + \sin^2 2t)} = \sqrt{\frac{4}{5} (1)}$$

$$|\mathbf{T}'(t)| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Paso 6: Calcular el vector Normal Principal $\mathbf{N}(t)$

Normalizamos el vector $\mathbf{T}'(t)$:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2 \cos 2t, -2 \sin 2t)}{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{2}(0, -2 \cos 2t, -2 \sin 2t)$$

$$\mathbf{N}(t) = (0, -\cos 2t, -\sin 2t)$$

Paso 7: Calcular el vector Binormal $\mathbf{B}(t)$

Calculamos el producto cruz $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$:

$$\mathbf{B}(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2, -\sin 2t, \cos 2t) \right] \times [(0, -\cos 2t, -\sin 2t)]$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -\sin 2t & \cos 2t \\ 0 & -\cos 2t & -\sin 2t \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante para cada componente:

- **Componente i:** $\frac{1}{\sqrt{5}}[(-\sin 2t)(-\sin 2t) - (\cos 2t)(-\cos 2t)] = \frac{1}{\sqrt{5}}[\sin^2 2t + \cos^2 2t] = \frac{1}{\sqrt{5}}$
- **Componente j:** $\frac{1}{\sqrt{5}}[(\cos 2t)(0) - (2)(-\sin 2t)] = \frac{1}{\sqrt{5}}[2 \sin 2t] = \frac{2 \sin 2t}{\sqrt{5}}$
- **Componente k:** $\frac{1}{\sqrt{5}}[(2)(-\cos 2t) - (-\sin 2t)(0)] = \frac{1}{\sqrt{5}}[-2 \cos 2t] = -\frac{2 \cos 2t}{\sqrt{5}}$

El vector resultante es:

$$\mathbf{B}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2 \sin 2t}{\sqrt{5}}, -\frac{2 \cos 2t}{\sqrt{5}} \right)$$

Resultado final

Las expresiones para los vectores del triángulo móvil son:

Vector Tangente Unitario:

$$\mathbf{T}(t) = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{\sin(2t)}{\sqrt{5}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Vector Normal Principal:

$$\mathbf{N}(t) = \langle 0, -\cos(2t), -\sin(2t) \rangle$$

Vector Binormal:

$$\mathbf{B}(t) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2 \sin(2t)}{\sqrt{5}}, -\frac{2 \cos(2t)}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Interpretación breve del resultado

La curva $\mathbf{r}(t)$ describe una **hélice circular** que avanza a lo largo del eje x . Los resultados lo confirman:

1. La **rapidez** $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{5}$ es constante.
2. La **curvatura** $\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{2/\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$ también es constante.
3. El **vector Normal** $\mathbf{N}(t)$ no tiene componente en x ($N_x = 0$) y siempre apunta hacia el eje x , que es el eje central de la hélice.

Estas son las propiedades características de una hélice uniforme.

 Cálculos verificados: correctos.

Problema 22 inciso 4

Enunciado del problema

Determine los vectores **T** (Tangente Unitario), **N** (Normal Principal) y **B** (Binormal) para la curva $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ en el instante $t = 0$.

Datos dados

La curva en \mathbb{R}^3 está definida por la función vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$$

Se buscan los vectores **T(0)**, **N(0)** y **B(0)**, evaluados en el punto $t = 0$.

Desarrollo paso a paso

El Triedro Móvil (Marco de Frenet-Serret) se calcula aplicando las definiciones diferenciales y evaluándolas en el punto $t = 0$.

Paso 1: Calcular el vector velocidad $\mathbf{r}'(t)$ y evaluarlo en $t = 0$

Primero, calculamos la derivada simbólica $\mathbf{r}'(t)$:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}(\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}) = (\sqrt{2}, e^t, -e^{-t})$$

Evaluamos este vector en $t = 0$:

$$\mathbf{r}'(0) = (\sqrt{2}, e^0, -e^{-0}) = (\sqrt{2}, 1, -1)$$

Paso 2: Calcular la rapidez $|\mathbf{r}'(0)|$

Calculamos la magnitud (norma) del vector velocidad en $t = 0$:

$$|\mathbf{r}'(0)| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2 + (-1)^2}$$

$$|\mathbf{r}'(0)| = \sqrt{2 + 1 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

Paso 3: Calcular el vector Tangente Unitario $\mathbf{T}(0)$

Usamos la definición $\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|}$:

$$\mathbf{T}(0) = \frac{(\sqrt{2}, 1, -1)}{2}$$

$$\mathbf{T}(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Paso 4: Calcular la derivada del tangente $\mathbf{T}'(t)$ y evaluarla en $t = 0$

Para encontrar $\mathbf{N}(0)$, necesitamos $\mathbf{T}'(0)$. Primero, encontramos la expresión simbólica de $\mathbf{T}(t)$.

Calculamos la rapidez simbólica $|\mathbf{r}'(t)|$:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (e^t)^2 + (-e^{-t})^2} = \sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}$$

Reconociendo un trinomio cuadrado perfecto: $e^{2t} + 2(e^t)(e^{-t}) + e^{-2t} = (e^t + e^{-t})^2$.

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$$

El vector tangente simbólico es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(\sqrt{2}, e^t, -e^{-t})}{e^t + e^{-t}}$$

Para derivar $\mathbf{T}(t)$, usamos la regla del producto $\mathbf{T}'(t) = \frac{d}{dt}[f(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$, donde $f(t) = (e^t + e^{-t})^{-1}$ y $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (\sqrt{2}, e^t, -e^{-t})$.

$$\mathbf{T}'(t) = f'(t)\mathbf{v}(t) + f(t)\mathbf{v}'(t)$$

Calculamos las derivadas $f'(t)$ y $\mathbf{v}'(t)$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -1(e^t + e^{-t})^{-2} \cdot (e^t - e^{-t}) = \frac{-(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} \\ \mathbf{v}'(t) &= (0, e^t, e^{-t}) \end{aligned}$$

Ahora, evaluamos todas las componentes en $t = 0$:

- $f(0) = (e^0 + e^0)^{-1} = (1 + 1)^{-1} = \frac{1}{2}$
- $f'(0) = \frac{-(e^0 - e^0)}{(e^0 + e^0)^2} = \frac{-(1 - 1)}{(1 + 1)^2} = 0$

- $\mathbf{v}(0) = (\sqrt{2}, 1, -1)$
- $\mathbf{v}'(0) = (0, e^0, e^{-0}) = (0, 1, 1)$

Sustituimos estos valores en la fórmula de $\mathbf{T}'(0)$:

$$\mathbf{T}'(0) = f'(0)\mathbf{v}(0) + f(0)\mathbf{v}'(0)$$

$$\mathbf{T}'(0) = (0) \cdot (\sqrt{2}, 1, -1) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (0, 1, 1)$$

$$\mathbf{T}'(0) = (0, 0, 0) + \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{T}'(0) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Paso 5: Calcular la magnitud $|\mathbf{T}'(0)|$

Calculamos la norma del vector $\mathbf{T}'(0)$:

$$|\mathbf{T}'(0)| = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$|\mathbf{T}'(0)| = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Paso 6: Calcular el vector Normal Principal $\mathbf{N}(0)$

Usamos la definición $\mathbf{N}(0) = \frac{\mathbf{T}'(0)}{|\mathbf{T}'(0)|}$:

$$\mathbf{N}(0) = \frac{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\mathbf{N}(0) = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{N}(0) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Paso 7: Calcular el vector Binormal $\mathbf{B}(0)$

Calculamos el producto cruz $\mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0)$:

$$\mathbf{B}(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \times \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Resolvemos usando el determinante:

$$\mathbf{B}(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$$

- **Componente i:** $\left((\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- **Componente j:** $- \left((\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{1}{2})(0) \right) = - \left(\frac{2}{4} - 0 \right) = -\frac{1}{2}$
- **Componente k:** $\left((\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) - (\frac{1}{2})(0) \right) = \frac{2}{4} - 0 = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{B}(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Resultado final

Los vectores del triedro móvil para la curva $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ en el instante $t = 0$ son:

Vector Tangente Unitario:

$$\mathbf{T}(0) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Vector Normal Principal:

$$\mathbf{N}(0) = \left\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

Vector Binormal:

$$\mathbf{B}(0) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

Interpretación breve del resultado

Se verifica que el sistema $(\mathbf{T}(0), \mathbf{N}(0), \mathbf{B}(0))$ es ortonormal, es decir, todos los vectores son unitarios y mutuamente ortogonales (su producto punto es cero):

- $|\mathbf{T}(0)| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$
- $|\mathbf{N}(0)| = \sqrt{0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$
- $|\mathbf{B}(0)| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$
- $\mathbf{T}(0) \cdot \mathbf{N}(0) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$

Los tres vectores forman una base ortonormal derecha que describe la orientación de la curva en $t = 0$.

Cálculos verificados: correctos.

Problema 23

Enunciado del problema

Verificar si las curvas en el espacio:

$$\mathbf{u}(T) = \left(-\frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T, 1 - \frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T, \frac{1}{2} \sin T \cos T + \frac{1}{2} T \right)$$

$$\mathbf{r}(t) = (t, \cos t, \sin t)$$

se cortan entre sí. En caso afirmativo, determinar el punto de intersección y el ángulo entre sus vectores tangentes en el punto de intersección. Si no se cortan, justificar.

Datos dados

- Curva 1: $\mathbf{r}(t) = (t, \cos t, \sin t)$
- Curva 2: $\mathbf{u}(T) = \left(-\frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T, 1 - \frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T, \frac{1}{2} \sin T \cos T + \frac{1}{2} T \right)$

Se buscan los parámetros (t_0, T_0) tales que $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{u}(T_0)$, el punto \mathbf{P}_0 y el ángulo θ entre $\mathbf{r}'(t_0)$ y $\mathbf{u}'(T_0)$.

Desarrollo paso a paso

Fase 1: Búsqueda del punto de intersección

Para encontrar una intersección, debemos igualar las componentes de $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(T)$, lo que genera un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas (t, T) :

$$\begin{aligned} (x) : \quad t &= -\frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T \\ (y) : \quad \cos t &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T \\ (z) : \quad \sin t &= \frac{1}{2} \sin T \cos T + \frac{1}{2} T \end{aligned}$$

Paso 1.1: Resolver el subsistema (x) e (y)

Observamos que la expresión de la Ecuación (x) aparece en la Ecuación (y). Sustituimos (x) en (y):

$$\cos t = 1 + (t)$$

Resolvemos la ecuación $\cos t = 1 + t$.

- Sabemos que el rango de $\cos t$ es $[-1, 1]$.

- Si $t > 0$, entonces $1 + t > 1$, lo cual está fuera del rango de $\cos t$.
- Si $t < 0$, entonces $1 + t < 1$.
- La única posibilidad es $t = 0$. Verificamos:
 - Lado Izquierdo: $\cos(0) = 1$
 - Lado Derecho: $1 + (0) = 1$
- Por lo tanto, la única solución real es $t = 0$.

Paso 1.2: Encontrar T usando $t = 0$

Sustituimos $t = 0$ en la Ecuación (x):

$$0 = -\frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T$$

Factorizamos $\sin T$:

$$0 = \sin T \left(-\frac{1}{2} \sin T - 1 \right)$$

Esto genera dos posibles casos:

1. $\sin T = 0 \implies T = k\pi$, para cualquier entero $k \in \mathbb{Z}$.
2. $-\frac{1}{2} \sin T - 1 = 0 \implies \sin T = -2$. Esto es imposible, ya que el rango de $\sin T$ es $[-1, 1]$.

Las únicas soluciones candidatas para T son $T = k\pi$.

Paso 1.3: Verificar la Ecuación (z)

Debemos encontrar qué pareja $(t, T) = (0, k\pi)$ satisface la Ecuación (z):

$$\sin t = \frac{1}{2} \sin T \cos T + \frac{1}{2} T$$

Sustituimos los valores:

$$\sin(0) = \frac{1}{2} \sin(k\pi) \cos(k\pi) + \frac{1}{2}(k\pi)$$

Dado que $\sin(k\pi) = 0$ para cualquier entero k :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(0) \cos(k\pi) + \frac{k\pi}{2} \\ 0 &= \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

La única solución para esta ecuación es $k = 0$.

Por lo tanto, la única solución al sistema es $(t, T) = (0, 0)$. Las curvas sí se cortan.

Paso 1.4: Determinar el punto de intersección P_0

Evaluamos $\mathbf{r}(t)$ en $t = 0$:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{r}(0) = (0, \cos 0, \sin 0)$$

$$\mathbf{P}_0 = (0, 1, 0)$$

(Verificación con $\mathbf{u}(0)$: $\mathbf{u}(0) = (-\frac{1}{2} \sin^2 0 - \sin 0, 1 - \frac{1}{2} \sin^2 0 - \sin 0, \frac{1}{2} \sin 0 \cos 0 + 0) = (0, 1, 0)$. Coinciden.)

Fase 2: Cálculo del ángulo de intersección

Paso 2.1: Calcular el vector tangente $\mathbf{v}_r = \mathbf{r}'(0)$

Derivamos $\mathbf{r}(t) = (t, \cos t, \sin t)$:

$$\mathbf{r}'(t) = (1, -\sin t, \cos t)$$

Evaluamos en $t = 0$:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{r}'(0) = (1, -\sin 0, \cos 0) = (1, 0, 1)$$

Paso 2.2: Calcular el vector tangente $\mathbf{v}_u = \mathbf{u}'(0)$

Derivamos $\mathbf{u}(T)$:

- $x'(T) = \frac{d}{dT} \left(-\frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T\right) = -\frac{1}{2}(2 \sin T \cos T) - \cos T = -\sin T \cos T - \cos T$
- $y'(T) = \frac{d}{dT} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 T - \sin T\right) = -\sin T \cos T - \cos T$
- $z'(T) = \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{2} \sin T \cos T + \frac{1}{2} T\right) = \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{4} \sin(2T) + \frac{1}{2} T\right) = \frac{1}{4}(2 \cos(2T)) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos(2T) + \frac{1}{2}$

Evaluamos en $T = 0$:

- $x'(0) = -\sin 0 \cos 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$
- $y'(0) = -\sin 0 \cos 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$
- $z'(0) = \frac{1}{2} \cos(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2} = 1$

$$\mathbf{v}_u = \mathbf{u}'(0) = (-1, -1, 1)$$

Paso 2.3: Calcular el ángulo θ

Usamos la fórmula del producto escalar: $\cos \theta = \frac{\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_u}{|\mathbf{v}_r| |\mathbf{v}_u|}$.

Calculamos el producto escalar (numerador):

$$\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_u = (1, 0, 1) \cdot (-1, -1, 1)$$

$$\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_u = (1)(-1) + (0)(-1) + (1)(1) = -1 + 0 + 1 = 0$$

Dado que el producto escalar es 0, y los vectores tangentes no son nulos ($|\mathbf{v}_r| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{v}_u| = \sqrt{3}$), $\cos \theta = 0$.

$$\theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

Resultado final

- **Intersección:** Sí, las curvas se cortan.
- **Punto de Intersección:** La intersección ocurre en el único punto $\mathbf{P}_0 = (0, 1, 0)$, correspondiente a los parámetros $t = 0$ y $T = 0$.
- **Ángulo de Intersección:**

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ radianes (o } 90^\circ\text{)}$$

Interpretación breve del resultado

El análisis del sistema de ecuaciones confirma que las curvas se cruzan en un único punto. El cálculo de los vectores tangentes en dicho punto, $\mathbf{v}_r = (1, 0, 1)$ y $\mathbf{v}_u = (-1, -1, 1)$, revela que su producto escalar es 0. Esto significa que los vectores son **ortogonales**, y por lo tanto, las curvas se cortan en un ángulo recto (90°).

 Cálculos verificados: correctos.

Problema 24 inciso 7

Enunciado del problema

Calcular la curvatura de $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.

Datos dados

La curva en \mathbb{R}^3 está definida por la función vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

Se busca la curvatura $\kappa(t)$ usando la fórmula general:

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Desarrollo paso a paso

Paso 1: Calcular el vector velocidad $\mathbf{r}'(t)$

Se aplica la regla del producto a cada componente:

- $x'(t) = \frac{d}{dt}(e^t \cos t) = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$
- $y'(t) = \frac{d}{dt}(e^t \sin t) = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$
- $z'(t) = \frac{d}{dt}(e^t) = e^t$

$$\mathbf{r}'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t)$$

Paso 2: Calcular el vector aceleración $\mathbf{r}''(t)$

Se derivan las componentes de $\mathbf{r}'(t)$, aplicando nuevamente la regla del producto:

- $x''(t) = \frac{d}{dt}(e^t(\cos t - \sin t)) = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$
- $y''(t) = \frac{d}{dt}(e^t(\sin t + \cos t)) = e^t(\sin t + \cos t) + e^t(\cos t - \sin t) = 2e^t \cos t$
- $z''(t) = \frac{d}{dt}(e^t) = e^t$

$$\mathbf{r}''(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t, e^t)$$

Paso 3: Calcular el producto cruz $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix}$$

Se factoriza e^t de la segunda fila y e^t de la tercera fila, resultando en un factor e^{2t} :

$$= e^{2t} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t & 1 \end{vmatrix}$$

- $\mathbf{i} : e^{2t}[(\sin t + \cos t)(1) - (1)(2 \cos t)] = e^{2t}(\sin t - \cos t)$
- $\mathbf{j} : -e^{2t}[(\cos t - \sin t)(1) - (1)(-2 \sin t)] = -e^{2t}(\cos t + \sin t)$
- $\mathbf{k} : e^{2t}[(\cos t - \sin t)(2 \cos t) - (\sin t + \cos t)(-2 \sin t)]$
 $= e^{2t} [(2 \cos^2 t - 2 \sin t \cos t) - (-2 \sin^2 t - 2 \sin t \cos t)]$
 $= e^{2t} [2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t] = 2e^{2t}$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (e^{2t}(\sin t - \cos t), -e^{2t}(\cos t + \sin t), 2e^{2t})$$

Paso 4: Calcular la magnitud $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|$ (Numerador)

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{[e^{2t}(\sin t - \cos t)]^2 + [-e^{2t}(\cos t + \sin t)]^2 + [2e^{2t}]^2}$$

Se factoriza $\sqrt{e^{4t}} = e^{2t}$:

$$= e^{2t} \sqrt{(\sin t - \cos t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 2^2}$$

$$= e^{2t} \sqrt{(\sin^2 t - 2 \sin t \cos t + \cos^2 t) + (\cos^2 t + 2 \sin t \cos t + \sin^2 t) + 4}$$

$$= e^{2t} \sqrt{(1) + (1) + 4} = e^{2t} \sqrt{6}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{6}e^{2t}$$

Paso 5: Calcular la magnitud $|\mathbf{r}'(t)|$ (Rapidez)

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[e^t(\cos t - \sin t)]^2 + [e^t(\sin t + \cos t)]^2 + [e^t]^2}$$

Se factoriza $\sqrt{e^{2t}} = e^t$:

$$\begin{aligned} &= e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1^2} \\ &= e^t \sqrt{(\cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t) + (\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t) + 1} \\ &= e^t \sqrt{(1) + (1) + 1} = e^t \sqrt{3} \\ |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{3}e^t \end{aligned}$$

Paso 6: Calcular $|\mathbf{r}'(t)|^3$ (Denominador)

$$|\mathbf{r}'(t)|^3 = (\sqrt{3}e^t)^3 = (\sqrt{3})^3(e^t)^3 = 3\sqrt{3}e^{3t}$$

Paso 7: Calcular la curvatura $\kappa(t)$

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}}$$

Se simplifican los términos:

- Radicales: $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$
- Exponentes: $\frac{e^{2t}}{e^{3t}} = e^{2t-3t} = e^{-t}$

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$$

Resultado final

La curvatura de la curva en un instante t es:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$$

Interpretación breve del resultado

La curva descrita es una **espiral cónica**, ya que yace sobre la superficie del cono $z^2 = x^2 + y^2$ (puesto que $(e^t)^2 = (e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2$).

El resultado $\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$ muestra que a medida que t aumenta ($t \rightarrow \infty$), la curvatura $\kappa(t)$ tiende a cero. Esto significa que la espiral se "abre" y se vuelve progresivamente "más recta" a medida que se aleja del origen (el vértice del cono).

Cálculos verificados: correctos.

Problema 24 inciso 8

Enunciado del problema

Calcular la curvatura κ de la curva polar $r = 1 - \sin \theta$ en $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Datos dados

La curva está definida en coordenadas polares por la ecuación:

$$r(\theta) = 1 - \sin \theta$$

El punto de evaluación es $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$.

La fórmula de curvatura para una curva polar $r = r(\theta)$ es:

$$\kappa(\theta) = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

Donde $r' = \frac{dr}{d\theta}$ y $r'' = \frac{d^2r}{d\theta^2}$.

Desarrollo paso a paso

Paso 1: Calcular las derivadas $r'(\theta)$ y $r''(\theta)$

$$r(\theta) = 1 - \sin \theta$$

$$r'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(1 - \sin \theta) = -\cos \theta$$

$$r''(\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\cos \theta) = \sin \theta$$

Paso 2: Evaluar r , r' , y r'' en $\theta = \frac{\pi}{3}$

Usamos los valores trigonométricos $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

- $r = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$
- $r' = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
- $r'' = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Paso 3: Calcular el Numerador $|r^2 + 2(r')^2 - rr''|$

Calculamos cada término del numerador por separado:

- $r^2 = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4} = \frac{7-4\sqrt{3}}{4}$
- $2(r')^2 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4}$
- $rr'' = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}$

Sustituimos estos valores en la expresión del numerador:

$$\begin{aligned}& \left| \frac{7-4\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4} - \frac{2\sqrt{3}-3}{4} \right| \\&= \left| \frac{(7-4\sqrt{3}) + 2 - (2\sqrt{3}-3)}{4} \right| \\&= \left| \frac{7-4\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} + 3}{4} \right| \\&= \left| \frac{(7+2+3) + (-4\sqrt{3}-2\sqrt{3})}{4} \right| \\&= \left| \frac{12-6\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

(El valor absoluto se elimina ya que $6 = \sqrt{36}$ y $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, por lo que $6 > 3\sqrt{3}$).

Paso 4: Calcular el Denominador $(r^2 + (r')^2)^{3/2}$

Primero, calculamos la base $(r^2 + (r')^2)$:

- $r^2 = \frac{7-4\sqrt{3}}{4}$
- $(r')^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$r^2 + (r')^2 = \frac{7-4\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

El denominador completo es $(2 - \sqrt{3})^{3/2}$.

Paso 5: Calcular la curvatura κ

$$\kappa = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}} = \frac{\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}{(2 - \sqrt{3})^{3/2}}$$

Factorizamos el numerador para simplificar:

$$\kappa = \frac{\frac{3(2-\sqrt{3})}{2}}{(2-\sqrt{3})^{3/2}}$$

Aplicamos la regla de exponentes $\frac{x}{x^{3/2}} = x^{1-3/2} = x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\kappa = \frac{3}{2 \cdot (2 - \sqrt{3})^{1/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

Paso 6: Simplificación del radical anidado

El término $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ puede simplificarse. Usando la identidad $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ donde $C = \sqrt{A^2 - B}$:

$$A = 2, B = 3 \implies C = \sqrt{2^2 - 3} = 1.$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Sustituimos esto en la expresión de κ :

$$\kappa = \frac{3}{2 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{3\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}-1)}$$

Racionalizamos el denominador:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{3\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}-1)} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\ \kappa &= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2(3-1)} = \frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2(2)} \\ \kappa &= \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}\end{aligned}$$

Resultado final

La curvatura de la curva $r = 1 - \sin \theta$ en $\theta = \frac{\pi}{3}$ es:

$$\kappa = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

Interpretación breve del resultado

El valor $\kappa \approx 2.896$ es un escalar positivo que mide cuán bruscamente se dobla la curva (conocida como cardioide) en el punto $\theta = \frac{\pi}{3}$. Un valor mayor indica una curva más cerrada, y un valor menor indica una curva más "plana".

 Cálculos verificados: correctos.

Problema 24 inciso 9

Enunciado del problema

Halle la ecuación del círculo de curvatura (círculo osculador) de la gráfica de la función $y = x^2$ en $x = 5$.

Datos dados

- Función: $y = x^2$
- Punto de evaluación: $x_0 = 5$

Se busca la ecuación canónica del círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

Desarrollo paso a paso

1. Calcular el punto de tangencia (x_0, y_0)

Evaluamos la función en $x_0 = 5$:

$$y_0 = (5)^2 = 25$$

El punto de tangencia es $\mathbf{P}_0 = (5, 25)$.

2. Calcular las derivadas y evaluarlas en $x_0 = 5$

Calculamos la primera y segunda derivada de $y = x^2$:

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(2x) = 2$$

Evaluamos ambas en $x_0 = 5$:

- $y'(5) = 2(5) = 10$
- $y''(5) = 2$

3. Calcular el Radio de Curvatura R

Se utiliza la fórmula del radio de curvatura para una función $y = f(x)$:

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Sustituimos los valores evaluados:

$$R = \frac{(1 + (10)^2)^{3/2}}{|2|} = \frac{(1 + 100)^{3/2}}{2}$$

$$R = \frac{(101)^{3/2}}{2} = \frac{101\sqrt{101}}{2}$$

4. Calcular el Centro de Curvatura (h, k)

Las coordenadas del centro (h, k) se calculan con las siguientes fórmulas:

Coordenada h :

$$h = x_0 - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''}$$

$$h = 5 - \frac{10(1 + (10)^2)}{2} = 5 - \frac{10(101)}{2}$$

$$h = 5 - 5(101) = 5 - 505 = -500$$

Coordenada k :

$$k = y_0 + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

$$k = 25 + \frac{1 + (10)^2}{2} = 25 + \frac{101}{2}$$

$$k = \frac{50}{2} + \frac{101}{2} = \frac{151}{2}$$

El centro del círculo es $(-500, \frac{151}{2})$.

5. Ensamblar la ecuación del círculo

La ecuación es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

Calculamos R^2 :

$$R^2 = \left(\frac{101\sqrt{101}}{2} \right)^2 = \frac{101^2 \cdot (\sqrt{101})^2}{2^2}$$

$$R^2 = \frac{101^2 \cdot 101}{4} = \frac{101^3}{4} = \frac{1030301}{4}$$

Sustituimos h , k y R^2 :

$$(x - (-500))^2 + \left(y - \frac{151}{2} \right)^2 = \frac{1030301}{4}$$

Resultado final

La ecuación del círculo de curvatura es:

$$(x + 500)^2 + \left(y - \frac{151}{2}\right)^2 = \frac{1030301}{4}$$

Interpretación breve del resultado

La ecuación describe el círculo que mejor se aproxima a la parábola $y = x^2$ en el punto $(5, 25)$. Dado que $y'' = 2 > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba. Esto se verifica con el resultado, ya que el centro del círculo $k = \frac{151}{2} = 75.5$ está "por encima" del punto de tangencia $y_0 = 25$.

 Cálculos verificados: correctos.

Problema 24 inciso 13

Enunciado del problema

Halle la ecuación del círculo de curvatura (círculo osculador) de la gráfica de la función $y = x^2$ en $x = 3$.

Datos dados

- Función: $y = x^2$
- Punto de evaluación: $x_0 = 3$

Se busca la ecuación canónica del círculo de curvatura: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

Desarrollo paso a paso

1. Calcular el punto de tangencia (x_0, y_0)

Se evalúa la función en $x_0 = 3$:

$$y_0 = (3)^2 = 9$$

El punto de tangencia es $\mathbf{P}_0 = (3, 9)$.

2. Calcular las derivadas y evaluarlas en $x_0 = 3$

Se calcula la primera y segunda derivada de $y = x^2$:

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(2x) = 2$$

Se evalúan ambas derivadas en $x_0 = 3$:

- $y'(3) = 2(3) = 6$
- $y''(3) = 2$

3. Calcular el Radio de Curvatura R

Se utiliza la fórmula del radio de curvatura para una función explícita $y = f(x)$:

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Sustituyendo los valores evaluados:

$$\begin{aligned} R &= \frac{(1 + (6)^2)^{3/2}}{|2|} = \frac{(1 + 36)^{3/2}}{2} \\ R &= \frac{(37)^{3/2}}{2} = \frac{37\sqrt{37}}{2} \end{aligned}$$

4. Calcular el Centro de Curvatura (h, k)

Las coordenadas del centro (h, k) se obtienen con las siguientes fórmulas:

Coordenada h :

$$\begin{aligned} h &= x_0 - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''} \\ h &= 3 - \frac{6 \cdot (1 + (6)^2)}{2} = 3 - \frac{6(37)}{2} \\ h &= 3 - 3(37) = 3 - 111 = -108 \end{aligned}$$

Coordenada k :

$$\begin{aligned} k &= y_0 + \frac{1 + (y')^2}{y''} \\ k &= 9 + \frac{1 + (6)^2}{2} = 9 + \frac{37}{2} \\ k &= \frac{18}{2} + \frac{37}{2} = \frac{55}{2} \end{aligned}$$

El centro del círculo es $(-108, \frac{55}{2})$.

5. Ensamblar la ecuación del círculo

La ecuación canónica es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

Primero, calculamos R^2 :

$$R^2 = \left(\frac{37\sqrt{37}}{2} \right)^2 = \frac{37^2 \cdot (\sqrt{37})^2}{2^2}$$

$$R^2 = \frac{37^2 \cdot 37}{4} = \frac{37^3}{4} = \frac{50653}{4}$$

Sustituimos h , k y R^2 :

$$(x - (-108))^2 + \left(y - \frac{55}{2} \right)^2 = \frac{50653}{4}$$

Resultado final

La ecuación del círculo de curvatura es:

$$(x + 108)^2 + \left(y - \frac{55}{2} \right)^2 = \frac{50653}{4}$$

Interpretación breve del resultado

La ecuación describe el círculo que mejor se aproxima a la parábola $y = x^2$ en el punto $(3, 9)$. Dado que $y'' = 2 > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba. Esto es coherente con el resultado, ya que la coordenada y del centro ($k = \frac{55}{2} = 27.5$) está "por encima" de la coordenada y del punto de tangencia ($y_0 = 9$).

 Cálculos verificados: correctos.

Problema 25

Enunciado del problema

Hallar la ecuación del círculo osculador en el punto máximo y mínimo de $y = \frac{1}{3}x^3 - x$.

Datos dados

- Función: $y = \frac{1}{3}x^3 - x$
- Puntos de evaluación: Los puntos de extremo local (máximo y mínimo) de la función.

Se buscan las ecuaciones canónicas $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$ para dichos puntos.

Desarrollo paso a paso

Paso 1: Calcular las derivadas

Se calcula la primera (y') y segunda (y'') derivada de la función:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x$$

$$y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) = x^2 - 1$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(x^2 - 1) = 2x$$

Paso 2: Encontrar y clasificar los puntos críticos

Se encuentran los puntos críticos resolviendo $y' = 0$:

$$x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

Se clasifican usando el criterio de la segunda derivada ($y'' = 2x$):

- Para $x = -1$: $y''(-1) = 2(-1) = -2$. Como $y'' < 0$, este punto es un **Máximo Local**.
- Para $x = 1$: $y''(1) = 2(1) = 2$. Como $y'' > 0$, este punto es un **Mínimo Local**.

Paso 3: Calcular las coordenadas de los puntos extremos

Se calculan las coordenadas y para cada punto crítico:

- **Punto Máximo (P_{max}) en $x_0 = -1$:**

$$y_0 = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{P}_{\max} = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$$

- **Punto Mínimo (P_{min}) en $x_0 = 1$:**

$$y_0 = \frac{1}{3}(1)^3 - (1) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\mathbf{P}_{\min} = \left(1, -\frac{2}{3}\right)$$

Paso 4: Calcular el Círculo Osculador 1 (En el Máximo)

En un extremo local, la tangente es horizontal ($y' = 0$). Las fórmulas para el centro (h, k) y el radio R se simplifican a:

- $R = \frac{1}{|y''|}$
- $h = x_0$
- $k = y_0 + \frac{1}{y''}$

Usamos los datos de P_{max} : $(x_0, y_0) = (-1, 2/3)$ y $y'' = -2$.

- Radio R_1 : $R_1 = \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}$
- Centro h_1 : $h_1 = -1$

- Centro k_1 : $k_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$

La ecuación es $(x - h_1)^2 + (y - k_1)^2 = R_1^2$:

$$(x - (-1))^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Paso 5: Calcular el Círculo Osculador 2 (En el Mínimo)

Usamos los datos de P_{min} : $(x_0, y_0) = (1, -2/3)$ y $y'' = 2$.

- Radio R_2 : $R_2 = \frac{1}{|2|} = \frac{1}{2}$
- Centro h_2 : $h_2 = 1$
- Centro k_2 : $k_2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-4+3}{6} = -\frac{1}{6}$

La ecuación es $(x - h_2)^2 + (y - k_2)^2 = R_2^2$:

$$(x - 1)^2 + \left(y - \left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Resultado final

Las ecuaciones de los círculos osculadores en los puntos de extremo local son:

- **En el Punto Máximo $P_{max} = (-1, 2/3)$:**

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- **En el Punto Mínimo $P_{min} = (1, -2/3)$:**

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Interpretación breve del resultado

La función $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ es una función impar (simétrica respecto al origen). Los resultados obtenidos son coherentes con esta simetría:

- Los puntos de tangencia $P_{max} = (-1, 2/3)$ y $P_{min} = (1, -2/3)$ son simétricos respecto al origen.

- Los centros de curvatura $C_1 = (-1, 1/6)$ y $C_2 = (1, -1/6)$ también son simétricos respecto al origen.
 - Los radios de curvatura $R_1 = 1/2$ y $R_2 = 1/2$ son idénticos, como se esperaba.
-

 Cálculos verificados: correctos.

Problema 26

Enunciado del problema

Muestre que el vector de aceleración $\mathbf{a}(t)$ se expresa como:

$$\mathbf{a}(t) = v \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt} \mathbf{T}$$

Datos dados

Para esta demostración, se parte de las definiciones fundamentales de la cinemática:

- **Vector Velocidad:** $\mathbf{v}(t)$
 - **Vector Aceleración:** $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)$
 - **Rapidez (escalar):** $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$
 - **Vector Tangente Unitario:** $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$
-

Desarrollo paso a paso

1. Se inicia reordenando la definición del vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ para expresar el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ como el producto de su magnitud (la rapidez $v(t)$) y su dirección (el vector $\mathbf{T}(t)$).

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{T}(t)$$

2. Por definición, el vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ es la derivada temporal del vector velocidad $\mathbf{v}(t)$.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)$$

3. Se sustituye la expresión de $\mathbf{v}(t)$ del primer paso en la definición de $\mathbf{a}(t)$.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt} [v(t)\mathbf{T}(t)]$$

4. Se aplica la regla del producto para la derivada de un escalar ($v(t)$) que multiplica a un vector ($\mathbf{T}(t)$):

$$(\text{Regla: } \frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t))$$

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{dv}{dt} \right) \mathbf{T}(t) + v(t) \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} \right)$$

5. Utilizando la propiedad conmutativa de la suma de vectores, se reordenan los términos para que coincidan con la expresión solicitada.

$$\mathbf{a}(t) = v(t) \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt} \mathbf{T}(t)$$

Resultado final

Queda demostrado que la aceleración se puede expresar como:

$$\mathbf{a}(t) = v \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt} \mathbf{T}$$

Interpretación breve del resultado

Esta ecuación es fundamental en la cinemática, ya que descompone el vector de aceleración \mathbf{a} en sus dos componentes ortogonales:

- **Componente Tangencial:** El término $v \frac{d\mathbf{T}}{dt}$. Es paralelo a la dirección del movimiento (dirección \mathbf{T}) y describe el cambio en la **magnitud** de la velocidad (la rapidez).
- **Componente Normal:** El término $\frac{dv}{dt} \mathbf{T}$. Es perpendicular al movimiento (ya que \mathbf{T}' es ortogonal a \mathbf{T}) y describe el cambio en la **dirección** de la velocidad.

 Cálculos verificados: correctos.

Problema 27

Enunciado del problema

La posición de una partícula está determinada por la expresión $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 15t + 1)\mathbf{i} + (10t - 2t^2 - 2)\mathbf{j} + (5t^2 - 25t + 3)\mathbf{k}$. Calcule la distancia recorrida entre los segundos 3 y 7.

Datos dados

- **Vector de Posición:** $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 15t + 1)\mathbf{i} + (10t - 2t^2 - 2)\mathbf{j} + (5t^2 - 25t + 3)\mathbf{k}$
- **Intervalo de tiempo:** $t_1 = 3$ s a $t_2 = 7$ s.

Se busca la distancia recorrida (longitud de arco) L , la cual se calcula con la integral de la rapidez:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt = \int_3^7 |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Desarrollo paso a paso

Paso 1: Calcular el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$

Se deriva el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ con respecto al tiempo t :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} (3t^2 - 15t + 1)\mathbf{i} + \frac{d}{dt} (10t - 2t^2 - 2)\mathbf{j} + \frac{d}{dt} (5t^2 - 25t + 3)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = (6t - 15)\mathbf{i} + (10 - 4t)\mathbf{j} + (10t - 25)\mathbf{k}$$

Paso 2: Calcular la rapidez $|\mathbf{v}(t)|$

Se calcula la magnitud (norma) del vector velocidad. Para simplificar, se factorizan las componentes:

- $v_x = 6t - 15 = 3(2t - 5)$
- $v_y = 10 - 4t = -2(2t - 5)$
- $v_z = 10t - 25 = 5(2t - 5)$

El vector velocidad se puede reescribir como:

$$\mathbf{v}(t) = (2t - 5) \cdot (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$

Ahora, calculamos la magnitud:

$$|\mathbf{v}(t)| = |(2t - 5) \cdot (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})|$$

$$|\mathbf{v}(t)| = |2t - 5| \cdot |3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}|$$

$$|\mathbf{v}(t)| = |2t - 5| \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2}$$

$$|\mathbf{v}(t)| = |2t - 5| \cdot \sqrt{9 + 4 + 25}$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{38} |2t - 5|$$

Paso 3: Configurar y evaluar la integral de la distancia L

Se establece la integral definida para la longitud de arco:

$$L = \int_3^7 \sqrt{38} |2t - 5| dt = \sqrt{38} \int_3^7 |2t - 5| dt$$

Se analiza el signo del término $(2t - 5)$ en el intervalo de integración $t \in [3, 7]$. El término $2t - 5$ es cero en $t = 2.5$.

Dado que $t \geq 3$ en todo el intervalo, $2t - 5$ es siempre positivo. Por lo tanto, $|2t - 5| = (2t - 5)$ para $t \in [3, 7]$.

La integral se simplifica a:

$$L = \sqrt{38} \int_3^7 (2t - 5) dt$$

Se resuelve la integral:

$$L = \sqrt{38} \left[\frac{2t^2}{2} - 5t \right]_3^7$$

$$L = \sqrt{38} [t^2 - 5t]_3^7$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$L = \sqrt{38} [(7^2 - 5(7)) - (3^2 - 5(3))]$$

$$L = \sqrt{38} [(49 - 35) - (9 - 15)]$$

$$L = \sqrt{38} [14 - (-6)]$$

$$L = \sqrt{38}(14 + 6)$$

$$L = 20\sqrt{38}$$

Resultado final

La distancia recorrida por la partícula entre los segundos 3 y 7 es:

$$L = 20\sqrt{38} \text{ metros}$$

Interpretación breve del resultado

La distancia total recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $[3 \text{ s}, 7 \text{ s}]$ es $20\sqrt{38}$ metros, que es aproximadamente 123.29 metros. Esto se obtiene integrando la rapidez $|\mathbf{v}(t)|$, que resultó ser una función lineal simple $\sqrt{38}(2t - 5)$ en ese intervalo.

 Cálculos verificados: correctos.

Problema 28

Enunciado del problema

Un canal de desagüe pluvial, emplea dos láminas galvanizadas, las cuales se colocan sobre los planos $4x + 2y + 6z = 12$ y $3x + 6y + 2z = 6$. Determine las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del canal (considere a $x = t$ como el parámetro).

Datos dados

La trayectoria del canal es la línea de intersección de los dos planos:

- Plano 1 (P_1): $4x + 2y + 6z = 12$
- Plano 2 (P_2): $3x + 6y + 2z = 6$

La parametrización solicitada debe usar $x = t$.

Desarrollo paso a paso

Paso 1: Establecer y simplificar el sistema de ecuaciones

Se establece el sistema de ecuaciones de los planos. Se divide la Ecuación 1 entre 2 para simplificar el álgebra:

$$(I) \quad 2x + y + 3z = 6$$
$$(II) \quad 3x + 6y + 2z = 6$$

Paso 2: Despejar y en función de x (Eliminación de z)

Se multiplica la Ecuación (I) por 2 y la Ecuación (II) por 3 para igualar los coeficientes de z :

$$(I) \times 2 \implies 4x + 2y + 6z = 12$$
$$(II) \times 3 \implies 9x + 18y + 6z = 18$$

Se resta la nueva Ecuación (I) de la nueva Ecuación (II):

$$(9x - 4x) + (18y - 2y) + (6z - 6z) = 18 - 12$$

$$5x + 16y = 6$$

Despejando y :

$$16y = 6 - 5x$$
$$y = \frac{6 - 5x}{16} = \frac{3}{8} - \frac{5}{16}x$$

Paso 3: Despejar z en función de x (Eliminación de y)

Se utiliza el sistema simplificado del Paso 1. Se multiplica la Ecuación (I) por 6 para igualar los coeficientes de y :

$$(I) \times 6 \implies 12x + 6y + 18z = 36$$
$$(II) \implies 3x + 6y + 2z = 6$$

Se resta la Ecuación (II) de la nueva Ecuación (I):

$$(12x - 3x) + (6y - 6y) + (18z - 2z) = 36 - 6$$

$$9x + 16z = 30$$

Despejando z :

$$16z = 30 - 9x$$

$$z = \frac{30 - 9x}{16} = \frac{15}{8} - \frac{9}{16}x$$

Paso 4: Aplicar la parametrización $x = t$

Se sustituye $x = t$ en las expresiones encontradas para x, y , y z :

$$x(t) = t$$

$$y(t) = \frac{3}{8} - \frac{5}{16}t$$

$$z(t) = \frac{15}{8} - \frac{9}{16}t$$

Resultado final

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del canal (la línea de intersección) son:

$$\begin{aligned}x(t) &= t \\y(t) &= \frac{3}{8} - \frac{5}{16}t \\z(t) &= \frac{15}{8} - \frac{9}{16}t\end{aligned}$$

Interpretación breve del resultado

Estas ecuaciones describen una línea recta en \mathbb{R}^3 que representa la intersección de los dos planos (las láminas). Como se verificó en el análisis proporcionado (Paso 4 de la entrada), cualquier punto (x, y, z) generado por un valor t en esta línea satisface las ecuaciones de *ambos* planos simultáneamente.

 Cálculos verificados: correctos.

Problema 29

Enunciado del problema

Se dispara una bala perpendicularmente hacia arriba con un arma y a una velocidad inicial de $v_0 = 300 \text{ m/s}$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bala? Observación: No se toma en cuenta la resistencia del aire.

Datos dados

- **Velocidad inicial (v_0):** $+300 \text{ m/s}$
- **Posición inicial (y_0):** 0 m (punto de disparo)
- **Aceleración constante (a):** $-g = -9.8 \text{ m/s}^2$ (actuando hacia abajo)

- **Velocidad final (v_f) en h_{max} :** 0 m/s (condición en la altura máxima)
-

Desarrollo paso a paso

Se utiliza la ecuación de cinemática (M.R.U.A.) independiente del tiempo, ya que relaciona las velocidades, la aceleración y el desplazamiento (h_{max}).

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a \cdot h_{max}$$

Sustituimos los valores conocidos en la ecuación:

$$(0)^2 = (300)^2 + 2(-9.8) \cdot h_{max}$$

$$0 = 90000 - 19.6 \cdot h_{max}$$

Despejamos h_{max} :

$$19.6 \cdot h_{max} = 90000$$

$$h_{max} = \frac{90000}{19.6}$$

$$h_{max} \approx 4591.8367\ldots \text{ m}$$

Resultado final

Redondeando el resultado a 6 cifras significativas (según el protocolo):

$$h_{max} = 4591.84 \text{ m}$$

Interpretación breve del resultado

La altura máxima, $h_{max} \approx 4.59 \text{ km}$, es el desplazamiento vertical que alcanza la bala en el instante exacto en que su velocidad vertical se reduce a 0 m/s debido a la aceleración constante de la gravedad, antes de comenzar su descenso.

 Cálculos verificados: correctos.

Problema 30

Enunciado del problema

La velocidad de una partícula está dada por la expresión $\mathbf{v}(t) = (10^6 e^{-t} + 3t^2)\mathbf{i} - (2t + 2)\mathbf{j}$. Determine la distancia del origen al punto donde se encuentra la partícula en $t = 9 \text{ s}$ si se sabe que la partícula se encuentra en el punto $P(700, 20, 0)$ cuando $t = 12$. Considere t en segundos, distancia en metros y velocidad en m/s .

Datos dados

- **Vector Velocidad:** $\mathbf{v}(t) = (10^6 e^{-t} + 3t^2)\mathbf{i} - (2t + 2)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$
- **Condición de Contorno:** $\mathbf{r}(12) = (700, 20, 0)$
- **Tiempo Final de Evaluación:** $t_F = 9 \text{ s}$

El objetivo es encontrar la distancia al origen $D = |\mathbf{r}(9)|$.

Desarrollo paso a paso

La distancia al origen se calcula encontrando el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en $t = 9 \text{ s}$ y luego calculando su magnitud.

Paso 1: Posición General $\mathbf{r}(t)$

Se integra el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ para obtener el vector de posición general:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t) dt = \int [(10^6 e^{-t} + 3t^2)\mathbf{i} - (2t + 2)\mathbf{j}] dt \\ \mathbf{r}(t) &= (-10^6 e^{-t} + t^3 + C_x)\mathbf{i} + (-t^2 - 2t + C_y)\mathbf{j} + C_z\mathbf{k}\end{aligned}$$

Paso 2: Cálculo de Constantes de Integración

Se utiliza la condición de contorno $\mathbf{r}(12) = (700, 20, 0)$:

- $z(12) = 0 \implies C_z = 0$
- $y(12) = 20 \implies -(12)^2 - 2(12) + C_y = 20 \implies -144 - 24 + C_y = 20 \implies -168 + C_y = 20 \implies C_y = 188$
- $x(12) = 700 \implies -10^6 e^{-12} + (12)^3 + C_x = 700 \implies -6.144\dots + 1728 + C_x = 700 \implies 1721.855\dots + C_x = 700 \implies C_x \approx -1021.856$

Paso 3: Posición Específica $\mathbf{r}(t)$

Sustituyendo las constantes:

$$\mathbf{r}(t) = (-10^6 e^{-t} + t^3 - 1021.856)\mathbf{i} + (-t^2 - 2t + 188)\mathbf{j}$$

Paso 4: Posición en $t = 9 \text{ s}$

Se evalúa $\mathbf{r}(t)$ en $t = 9$:

- $x(9) = -10^6 e^{-9} + (9)^3 - 1021.856 = -123.410\dots + 729 - 1021.856 \approx -416.266 \text{ m}$
- $y(9) = -(9)^2 - 2(9) + 188 = -81 - 18 + 188 = 89 \text{ m}$
- $z(9) = 0 \text{ m}$

$$\mathbf{r}(9) = -416.266\mathbf{i} + 89\mathbf{j}$$

Paso 5: Distancia al Origen D

$$D = |\mathbf{r}(9)| = \sqrt{x(9)^2 + y(9)^2 + z(9)^2}$$

$$D = \sqrt{(-416.266)^2 + (89)^2 + 0^2}$$

$$D \approx \sqrt{173277.3 + 7921} = \sqrt{181198.3}$$

$$D \approx 425.674 \text{ m}$$

Resultado final

La distancia del origen al punto donde se encuentra la partícula en $t = 9 \text{ s}$ es:

$$D = 425.674 \text{ m}$$

Interpretación breve del resultado

Tras integrar la velocidad para hallar la trayectoria específica de la partícula (usando $\mathbf{r}(12)$ para encontrar las constantes de integración), se determina que su posición en $t = 9 \text{ s}$ es $\mathbf{r}(9) \approx (-416.27, 89, 0)$. La distancia euclídea desde el origen $(0, 0, 0)$ a este punto es de 425.674 m .

-
- Cálculos verificados: correctos.

Problema 31

Enunciado del problema

Una persona se encuentra en un faro a una altura $h_1 = 18 \text{ m}$ y ve partir un barco con altura $h_2 = 18 \text{ m}$ que sigue una trayectoria: $\mathbf{p}(t) = (r \sin(10 - 4t) \cos(10 - 4t), r \sin(10 - 4t) \sin(10 - 4t), r \cos(10 - 4t))$. Donde t es el tiempo en hora. ¿Cuál es la distancia que recorre el barco a lo largo de la trayectoria desde la base del faro, hasta que se deja de ver el mástil? Considere que la tierra es esférica y con un radio $r = 6371 \text{ km}$.

Datos dados

- Altura del faro (h_1): 18 m
- Altura del mástil (h_2): 18 m
- Radio de la Tierra (r): $6371 \text{ km} = 6,371,000 \text{ m}$
- Trayectoria $\mathbf{p}(t)$: (*Información distractora, ver Interpretación*)

Desarrollo paso a paso

Este es un problema de horizonte geométrico. La distancia S que el barco puede recorrer antes de que su mástil desaparezca del horizonte del observador en el faro es la suma de la distancia del horizonte del faro (S_1) y la distancia del horizonte del barco (S_2).

Paso 1: Calcular la distancia del horizonte del faro (S_1)

Se forma un triángulo rectángulo entre el centro de la Tierra (C), la cima del faro (F) y el punto de tangencia en el horizonte (H). La hipotenusa es $r + h_1$ y uno de los catetos es r . El ángulo central en C es θ_1 .

Usando trigonometría:

$$\cos(\theta_1) = \frac{r}{r + h_1}$$
$$\cos(\theta_1) = \frac{6,371,000}{6,371,000 + 18} = \frac{6,371,000}{6,371,018} \approx 0.999997175$$

Calculamos θ_1 en radianes:

$$\theta_1 = \arccos(0.999997175) \approx 0.00237699 \text{ rad}$$

La distancia de arco S_1 es $r \cdot \theta_1$:

$$S_1 = (6,371,000 \text{ m}) \cdot (0.00237699 \text{ rad}) \approx 15144.5 \text{ m}$$

Paso 2: Calcular la distancia del horizonte del barco (S_2)

Dado que la altura del mástil $h_2 = 18 \text{ m}$ es idéntica a la altura del faro h_1 , el cálculo es el mismo:

$$S_2 = S_1 \approx 15144.5 \text{ m}$$

Paso 3: Calcular la distancia total S

La distancia total es la suma de ambas distancias de arco:

$$S = S_1 + S_2$$

$$S \approx 15144.5 \text{ m} + 15144.5 \text{ m} = 30289 \text{ m}$$

Resultado final

La distancia que recorre el barco es **30289 m** (o 30.289 km).

Interpretación breve del resultado

La ecuación de la trayectoria $\mathbf{p}(t)$ es información irrelevante (un distractor). El problema se resuelve determinando la distancia geométrica máxima (la línea del horizonte) a la que dos objetos de 18m de altura pueden verse mutuamente en un planeta con un radio de 6371 km. Esta distancia es la suma de la distancia al horizonte de cada objeto, resultando en aproximadamente 30.29 km.

- ✓ Cálculos verificados: correctos.