SERIE TEMA 4 - PARTE 4 (31-38)

Problema 31.1 (Incluye partes a, b, c)

Enunciado del problema

Dada la función escalar $f(x, y) = x^2 e^{-2y}$ y los puntos $P(2, 0)$ y $Q(-3, 1)$, se solicita calcular:

a) La derivada direccional de f en el punto P en la dirección hacia Q.
b) El vector unitario que indica la dirección de **máximo crecimiento** y el valor de dicha tasa de cambio máxima.
c) El vector unitario que indica la dirección de **máximo decrecimiento** y el valor de dicha tasa.

Datos dados

- **Función escalar:** $f(x, y) = x^2 e^{-2y}$
- **Punto de evaluación:** $P = (2, 0)$
- **Punto de destino (dirección):** $Q = (-3, 1)$

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo del vector gradiente $\nabla f(x, y)$

El gradiente de una función $f(x, y)$ se define como el vector formado por sus derivadas parciales:

$$\nabla f(x, y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

Calculamos las derivadas parciales de $f(x, y) = x^2 e^{-2y}$:

- Respecto a x (tratando y como constante):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-2y}$$

- Respecto a y (tratando x como constante y aplicando la regla de la cadena):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{d}{dy}(e^{-2y}) = x^2(-2e^{-2y}) = -2x^2 e^{-2y}$$

Por lo tanto, el vector gradiente genérico es:

$$\nabla f(x, y) = \langle 2xe^{-2y}, -2x^2 e^{-2y} \rangle$$

2. Evaluación del gradiente en el punto $P(2, 0)$

Sustituimos $x = 2$ y $y = 0$ en la expresión del gradiente. Recordamos que $e^0 = 1$.

$$\nabla f(2,0) = \langle 2(2)e^0, -2(2^2)e^0 \rangle$$

$$\nabla f(2,0) = \langle 4(1), -2(4)(1) \rangle$$

$$\nabla f(2,0) = \langle 4, -8 \rangle \tag{1}$$

3. Determinación del vector de dirección unitario $\vec{u}$ (Inciso a)

La dirección del movimiento va desde P hacia Q. Primero hallamos el vector desplazamiento $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \vec{PQ} = Q - P = \langle -3-2, 1-0 \rangle = \langle -5, 1 \rangle$$

Calculamos la magnitud de $\vec{v}$ para normalizarlo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

El vector unitario $\vec{u}$ es:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left\langle \frac{-5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}} \right\rangle \tag{2}$$

4. Cálculo de la derivada direccional (Inciso a)

La derivada direccional $D_{\vec{u}}f(P)$ se calcula mediante el producto punto entre el gradiente en P y el vector unitario de dirección $\vec{u}$:

$$D_{\vec{u}}f(P) = \nabla f(2,0) \cdot \vec{u}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en (1) y (2):

$$D_{\vec{u}}f(P) = \langle 4, -8 \rangle \cdot \left\langle \frac{-5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}} \right\rangle$$

$$D_{\vec{u}}f(P) = (4)\left(\frac{-5}{\sqrt{26}}\right) + (-8)\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$$

$$D_{\vec{u}}f(P) = \frac{-20}{\sqrt{26}} - \frac{8}{\sqrt{26}} = \frac{-28}{\sqrt{26}}$$

Aproximación numérica:

$$\frac{-28}{\sqrt{26}} \approx -5.49125$$

5. Cálculo del máximo crecimiento (Inciso b)

El **máximo crecimiento** de la función ocurre en la dirección y sentido del vector gradiente.
La **tasa máxima** es la magnitud del gradiente $|\nabla f(P)|$.

Calculamos la magnitud:

$$|\nabla f(2,0)| = |\langle 4, -8 \rangle| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

Simplificando el radical:

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5} \approx 8.94427$$

El vector unitario de máximo crecimiento $\vec{u}_{max}$ es:

$$\vec{u}_{max} = \frac{\nabla f(2,0)}{|\nabla f(2,0)|} = \frac{\langle 4, -8 \rangle}{4\sqrt{5}} = \left\langle \frac{4}{4\sqrt{5}}, \frac{-8}{4\sqrt{5}} \right\rangle$$
$$\vec{u}_{max} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right\rangle \approx \langle 0.447214, -0.894427 \rangle$$

6. Cálculo del máximo decrecimiento (Inciso c)

El **máximo decrecimiento** ocurre en la dirección opuesta al gradiente.
La **tasa mínima** es el negativo de la magnitud del gradiente.

- **Tasa mínima:** $-|\nabla f(P)| = -4\sqrt{5} \approx -8.94427.$
- **Dirección unitaria ($\vec{u}_{min}$):** $-\vec{u}_{max}.$

$$\vec{u}_{min} = -\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right\rangle = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Resultado final

a) Derivada direccional en dirección de P a Q:

$$D_{\vec{u}} f \approx \mathbf{-5.49125} \quad \left(\text{Exacto: } -\frac{28}{\sqrt{26}}\right)$$

b) Máximo Crecimiento:

- **Tasa máxima:** $\mathbf{8.94427}$ ($4\sqrt{5}$)
- **Vector unitario:** $\langle \mathbf{0.447214}, \mathbf{-0.894427} \rangle$ ($\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \rangle$)

c) Máximo Decrecimiento:

- **Tasa mínima:** $\mathbf{-8.94427}$ ($-4\sqrt{5}$)
- **Vector unitario:** $\langle \mathbf{-0.447214}, \mathbf{0.894427} \rangle$ ($\langle \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$)

Interpretación breve del resultado

1. **Inciso a):** El resultado negativo indica que al moverse desde P hacia Q, el valor de la función disminuye. La tasa de -5.49 es coherente ya que se encuentra dentro del rango posible delimitado por la tasa mínima (-8.94) y la máxima (8.94).
2. **Direcciones:** El gradiente apunta hacia $(+x, -y)$, lo que significa que la función crece al aumentar x y disminuir y. Por el contrario, decrece más rápido si nos movemos en dirección opuesta $(-x, +y)$, como se ve en el inciso c).

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 31.2 (Incluye partes a, b, c)

Enunciado del problema

Dada la función escalar de tres variables $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y los puntos $P(-2, 3, 1)$ y $Q(0, -5, 4)$, se solicita calcular:

a) La derivada direccional de F en el punto P en la dirección hacia Q.
b) El vector unitario que indica la dirección de **máximo crecimiento** y el valor de dicha tasa.
c) El vector unitario que indica la dirección de **máximo decrecimiento** y el valor de dicha tasa.

Datos dados

- **Función escalar:** $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ (Representa la distancia euclidiana al origen).
- **Punto de evaluación:** $P = (-2, 3, 1)$
- **Punto de destino:** $Q = (0, -5, 4)$

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo del vector gradiente $\nabla F(x, y, z)$

El gradiente en el espacio tridimensional se define como:

$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle$$

Calculamos la derivada parcial con respecto a x usando la regla de la cadena ($\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Por simetría, las derivadas respecto a y y z tienen la misma forma. Así, el gradiente es:

$$\nabla F(x, y, z) = \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\rangle$$

Este resultado se puede simplificar factorizando el término radical (que es la propia función F o la distancia r):

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \langle x, y, z \rangle \tag{1}$$

2. Evaluación del gradiente en el punto $P(-2, 3, 1)$

Primero calculamos la distancia al origen desde P (el denominador de la ec. 1):

$$\sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

Sustituimos en el gradiente:

$$\nabla F(-2,3,1) = \frac{1}{\sqrt{14}}\langle -2,3,1\rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right\rangle \tag{2}$$

Observación clave: Si calculamos la magnitud de este vector gradiente, $|\nabla F(P)| = 1$. Esto es coherente, ya que la tasa de cambio de la distancia respecto a un desplazamiento radial unitario es siempre 1.

3. Determinación del vector de dirección unitario $\vec{u}$ (Inciso a)

Calculamos el vector desplazamiento $\vec{v}$ desde P hacia Q:

$$\vec{v} = \vec{PQ} = Q - P = \langle 0-(-2), -5-3, 4-1\rangle = \langle 2,-8,3\rangle$$

Calculamos su magnitud $|\vec{v}|$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-8)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+64+9} = \sqrt{77}$$

Obtenemos el vector unitario $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{77}}\langle 2,-8,3\rangle \tag{3}$$

4. Cálculo de la derivada direccional (Inciso a)

Calculamos el producto punto entre el gradiente (ec. 2) y la dirección (ec. 3):

$$D_{\vec{u}}F(P) = \nabla F(P) \cdot \vec{u}$$

$$D_{\vec{u}}F(P) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\langle -2,3,1\rangle\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{77}}\langle 2,-8,3\rangle\right)$$

Agrupamos las constantes fuera del producto punto:

$$D_{\vec{u}}F(P) = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{77}}\left((-2)(2) + (3)(-8) + (1)(3)\right)$$

$$D_{\vec{u}}F(P) = \frac{1}{\sqrt{1078}}(-4-24+3)$$

$$D_{\vec{u}}F(P) = \frac{-25}{\sqrt{1078}}$$

Valor numérico aproximado:

$$\frac{-25}{32.8329...} \approx -0.761431$$

5. Cálculo del máximo crecimiento (Inciso b)

- **Tasa máxima:** Corresponde a la magnitud del gradiente $|\nabla F(P)|$. Como vimos en el paso 2, para esta función de distancia, la magnitud es exactamente **1**.
- **Vector unitario:** Es el gradiente normalizado. Dado que el gradiente ya tiene magnitud 1, el propio gradiente es el vector unitario $\vec{u}_{max}$.

$$\vec{u}_{max} = \nabla F(P) = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right\rangle$$

6. Cálculo del máximo decrecimiento (Inciso c)

- **Tasa mínima:** Es el negativo de la magnitud: **-1**.
- **Vector unitario:** Es el opuesto al gradiente ($-\vec{u}_{max}$).

$$\vec{u}_{min} = -\nabla F(P) = \left\langle \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}} \right\rangle$$

Resultado final

a) Derivada direccional en dirección de P a Q:

$$D_{\vec{u}}F \approx \mathbf{-0.761431} \quad \left(\text{Exacto: } \frac{-25}{\sqrt{1078}}\right)$$

b) Máximo Crecimiento:

- **Tasa máxima:** $\mathbf{1}$
- **Vector unitario:** $\left\langle \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right\rangle \approx \langle \mathbf{-0.534522, 0.801784, 0.267261} \rangle$

c) Máximo Decrecimiento:

- **Tasa mínima:** $\mathbf{-1}$
- **Vector unitario:** $\left\langle \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}} \right\rangle \approx \langle \mathbf{0.534522, -0.801784, -0.267261} \rangle$

Interpretación breve del resultado

La derivada direccional negativa (-0.76) indica que al comenzar a desplazarnos desde P hacia Q, la distancia al origen disminuye; es decir, nos estamos acercando al centro de coordenadas, aunque Q globalmente esté más lejos que P. Esto ocurre porque el ángulo entre el vector posición y el vector dirección es obtuso. Las tasas máxima y mínima de ± 1 confirman la propiedad geométrica de la función distancia: si nos movemos directamente alejándonos del origen, la distancia aumenta a razón de 1 a 1.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 32

Enunciado del problema

La temperatura T en un punto (x, y) de una placa metálica es inversamente proporcional a la distancia al origen. Se sabe que en el punto $P(3, 4)$, la temperatura es $100°\mathrm{C}$.

Se solicita hallar:

1. La razón de cambio de T en P en la dirección del vector $\vec{v} = (1, 1)$.
2. La dirección de **máximo aumento** de temperatura.
3. La dirección de **máxima disminución** de temperatura.
4. La dirección en la que la tasa de variación es nula (dirección de las isotermas).

Datos dados

- **Modelo matemático:** $T(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (Inversamente proporcional a la distancia).
- **Punto de evaluación:** $P(3, 4)$.
- **Condición de frontera:** $T(3, 4) = 100$.
- **Vector de dirección (inciso 1):** $\vec{v} = \langle 1, 1 \rangle$.

Desarrollo paso a paso

1. Determinación de la constante k

Sustituimos las coordenadas de $P(3, 4)$ y la temperatura dada en la ecuación general:

$$T(3, 4) = \frac{k}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{k}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{k}{5}$$

Dado que $T(3, 4) = 100$:

$$100 = \frac{k}{5} \implies k = 500$$

La función de temperatura es:

$$T(x, y) = 500(x^2 + y^2)^{-1/2}$$

2. Cálculo del vector Gradiente ∇T

Calculamos las derivadas parciales.
Para x:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 500 \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-3/2}(2x) = \frac{-500x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Por simetría, para y:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-500y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Evaluamos en el punto $P(3, 4)$.
Sabemos que $(x^2 + y^2)^{1/2} = 5$, por lo tanto $(x^2 + y^2)^{3/2} = 5^3 = 125$.

$$\nabla T(3, 4) = \left\langle \frac{-500(3)}{125}, \frac{-500(4)}{125} \right\rangle$$

$$\nabla T(3, 4) = \langle -4(3), -4(4) \rangle = \langle -12, -16 \rangle$$

3. Inciso 1: Razón de cambio en dirección $(1, 1)$

Primero obtenemos el vector unitario $\vec{u}$ asociado a $\vec{v} = \langle 1, 1 \rangle$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Calculamos la derivada direccional mediante el producto punto:

$$D_{\vec{u}}T = \nabla T \cdot \vec{u} = \langle -12, -16 \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$D_{\vec{u}}T = \frac{-12 - 16}{\sqrt{2}} = \frac{-28}{\sqrt{2}}$$

Racionalizando:

$$D_{\vec{u}}T = -14\sqrt{2} \approx -19.799$$

4. Incisos 2 y 3: Direcciones de máximo cambio

La magnitud del gradiente es $|\nabla T| = \sqrt{(-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{400} = 20$.

- **Máximo aumento:** Dirección del gradiente normalizado.

$$\vec{u}_{max} = \frac{\nabla T}{20} = \frac{\langle -12, -16 \rangle}{20} = \langle -0.6, -0.8 \rangle$$

- **Máxima disminución:** Dirección opuesta al gradiente.

$$\vec{u}_{min} = -\vec{u}_{max} = \langle 0.6, 0.8 \rangle$$

5. Inciso 4: Dirección de variación nula

Ocurre en direcciones ortogonales al gradiente. Si $\vec{u}_{max} = \langle a, b \rangle$, las direcciones nulas son $\langle -b, a \rangle$ y $\langle b, -a \rangle$.
Dado $\vec{u}_{max} = \langle -0.6, -0.8 \rangle$:

$$\vec{u}_{nula} = \langle 0.8, -0.6 \rangle \quad \text{o} \quad \langle -0.8, 0.6 \rangle$$

Resultado final

1. **Razón de cambio en dirección** $(1,1)$:

$$-14\sqrt{2} \approx -\mathbf{19.80}\,^{\circ}\mathrm{C/unidad}$$

2. **Dirección de máximo aumento:**

$$\left\langle -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right\rangle = \langle -0.6, -0.8 \rangle$$

3. **Dirección de máxima disminución:**

$$\left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle = \langle 0.6, 0.8 \rangle$$

4. **Dirección de tasa nula (Isotermas):**

$$\left\langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle \quad \text{y} \quad \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$$

Interpretación breve del resultado

Físicamente, la placa tiene una fuente de calor en el origen $(0,0)$.

- El **gradiente** apunta hacia el origen ($\langle -0.6, -0.8 \rangle$), que es donde está la temperatura más alta.
- Al moverse en la dirección $(1,1)$, nos estamos alejando del origen, por lo que la temperatura **disminuye** rápidamente (-19.80°).
- La dirección nula es tangente al círculo centrado en el origen que pasa por P (las isotermas son círculos concéntricos).

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 33

Enunciado del problema

El potencial eléctrico V en un punto del espacio $P(x,y,z)$ está dado por la función escalar $V(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.
Se solicita calcular en el punto $P(2,-1,3)$:

1. La tasa de cambio del potencial V en la dirección que va desde P hacia el origen.
2. La dirección (vector unitario) que produce la **máxima tasa de cambio** (aumento) de V.
3. El valor de dicha **tasa máxima de cambio**.

Datos dados

- **Función Potencial:** $V(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

- **Punto de evaluación:** $P(2, -1, 3)$.
- **Punto de destino (inciso 1):** Origen $O(0, 0, 0)$.

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo del vector Gradiente ∇V

El gradiente determina cómo cambia la función en cada dirección. Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 18z$$

Vector gradiente genérico:

$$\nabla V(x, y, z) = \langle 2x, 8y, 18z \rangle$$

Evaluamos en el punto $P(2, -1, 3)$:

$$\nabla V(2, -1, 3) = \langle 2(2), 8(-1), 18(3) \rangle$$
$$\nabla V(P) = \langle 4, -8, 54 \rangle \tag{1}$$

2. Inciso 1: Tasa de cambio hacia el Origen

Definimos el vector de dirección $\vec{v}$ desde P hacia el origen O:

$$\vec{v} = \vec{PO} = O - P = \langle 0 - 2, 0 - (-1), 0 - 3 \rangle = \langle -2, 1, -3 \rangle$$

Calculamos su magnitud $|\vec{v}|$ para normalizarlo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

El vector unitario de dirección es:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} \langle -2, 1, -3 \rangle$$

Calculamos la derivada direccional (producto punto):

$$D_{\vec{u}}V = \nabla V(P) \cdot \vec{u} = \langle 4, -8, 54 \rangle \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \langle -2, 1, -3 \rangle \right)$$

$$D_{\vec{u}}V = \frac{1}{\sqrt{14}} ((4)(-2) + (-8)(1) + (54)(-3))$$

$$D_{\vec{u}}V = \frac{1}{\sqrt{14}} (-8 - 8 - 162) = \frac{-178}{\sqrt{14}}$$

Aproximación numérica: -47.573.

3. Inciso 3: Tasa máxima de cambio

Corresponde a la magnitud del vector gradiente $|\nabla V(P)|$:

$$|\nabla V(P)| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 54^2}$$

$$|\nabla V(P)| = \sqrt{16 + 64 + 2916} = \sqrt{2996}$$

Simplificamos el radical ($2996 = 4 \times 749$):

$$|\nabla V(P)| = 2\sqrt{749} \approx 54.736$$

4. Inciso 2: Dirección de máxima tasa de cambio

Es el vector unitario en la dirección del gradiente:

$$\vec{u}_{max} = \frac{\nabla V(P)}{|\nabla V(P)|} = \frac{\langle 4, -8, 54 \rangle}{2\sqrt{749}}$$

Dividiendo cada componente por 2:

$$\vec{u}_{max} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{749}}, \frac{-4}{\sqrt{749}}, \frac{27}{\sqrt{749}} \right\rangle$$

Resultado final

1. Tasa de cambio hacia el origen:

$$D_{\vec{u}} V = -\frac{178}{\sqrt{14}} \approx \mathbf{-47.57}$$

2. Dirección de máxima tasa de cambio:

$$\vec{u}_{max} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{749}}, \frac{-4}{\sqrt{749}}, \frac{27}{\sqrt{749}} \right\rangle \approx \langle \mathbf{0.073}, \mathbf{-0.146}, \mathbf{0.987} \rangle$$

3. Tasa máxima de cambio:

$$\text{Tasa Máx} = 2\sqrt{749} \approx \mathbf{54.74}$$

Interpretación breve del resultado

- **Tasa negativa hacia el origen:** El potencial V es una suma de cuadrados, por lo que su valor mínimo es 0 en el origen. Al moverse desde P hacia el origen, el valor del potencial disminuye drásticamente, lo cual confirma el signo negativo.
- **Dirección máxima:** La dirección de máximo crecimiento tiene una componente z dominante (0.987). Esto se debe a que el coeficiente de z^2 en la fórmula del potencial (9) es mucho mayor que los de x e y, haciendo que el potencial crezca mucho más rápido a lo largo del eje z.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 34.2

Enunciado del problema

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $z = 4x^2 + 9y^2$ en el punto $P(-2, -1, 25)$.

Datos dados

- **Ecuación de la superficie:** $z = 4x^2 + 9y^2$ (Paraboloide elíptico).
- **Punto de tangencia:** $P(x_0, y_0, z_0) = (-2, -1, 25)$.

Verificación del punto:
Sustituimos las coordenadas de P en la ecuación para asegurar que pertenece a la superficie:

$$z = 4(-2)^2 + 9(-1)^2 = 4(4) + 9(1) = 16 + 9 = 25$$

El punto es correcto.

Desarrollo paso a paso

1. Definición de la función implícita $F(x, y, z)$

Para hallar el plano tangente mediante el gradiente, reescribimos la ecuación de la superficie como una superficie de nivel $F(x, y, z) = c$. Pasamos todos los términos a un lado de la igualdad:

$$F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 - z = 0$$

2. Cálculo del vector normal (Gradiente)

El vector gradiente ∇F es perpendicular (normal) a la superficie de nivel en cualquier punto. Calculamos las derivadas parciales:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2) = 8x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(9y^2) = 18y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$$

El vector gradiente genérico es:

$$\nabla F(x, y, z) = \langle 8x, 18y, -1 \rangle \tag{1}$$

3. Evaluación del vector normal en el punto P

Sustituimos las coordenadas $x = -2$ y $y = -1$ en la ecuación (1) para obtener el vector normal $\vec{n}$ en el punto de tangencia:

$$\vec{n} = \nabla F(-2, -1, 25) = \langle 8(-2), 18(-1), -1 \rangle$$

$$\vec{n} = \langle -16, -18, -1 \rangle$$

Para simplificar la ecuación final del plano, podemos usar un vector normal equivalente multiplicando por -1 (esto no cambia la dirección perpendicular, solo el sentido):

$$\vec{n}' = \langle 16, 18, 1 \rangle$$

4. Obtención de la ecuación del plano

Utilizamos la forma punto-normal del plano:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Donde $\langle a, b, c \rangle = \langle 16, 18, 1 \rangle$ y $(x_0, y_0, z_0) = (-2, -1, 25)$.

Sustituimos:

$$16(x - (-2)) + 18(y - (-1)) + 1(z - 25) = 0$$

$$16(x + 2) + 18(y + 1) + (z - 25) = 0$$

Desarrollamos los productos:

$$16x + 32 + 18y + 18 + z - 25 = 0$$

Agrupamos las constantes ($32 + 18 - 25 = 25$):

$$16x + 18y + z + 25 = 0$$

Resultado final

La ecuación general del plano tangente es:

$$\mathbf{16x + 18y + z + 25 = 0}$$

Si se requiere en forma explícita ($z = \ldots$):

$$z = -16x - 18y - 25$$

Interpretación breve del resultado

El plano obtenido toca al paraboloide elíptico únicamente en el punto $P(-2, -1, 25)$.

- El vector $\langle 16, 18, 1 \rangle$ representa la dirección perpendicular a la superficie en ese punto exacto.
- **Visualización:** Si ingresas `16x + 18y + z + 25 = 0` junto con la superficie original en un graficador 3D (como GeoGebra), verás una "hoja" plana que roza perfectamente la curva en el punto indicado, comportándose como una aproximación lineal local de la superficie.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 34.4

Enunciado del problema

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la función $z = 2e^{-x}\cos y$ en el punto $P(0, \pi/3, 1)$.

Datos dados

- **Ecuación de la superficie:** $z = 2e^{-x}\cos y$
- **Punto de tangencia:** $P(x_0, y_0, z_0) = (0, \pi/3, 1)$

Validación del punto:
Verificamos que las coordenadas satisfagan la ecuación (recordando que y está en radianes):

$$z = 2e^{-0}\cos(\pi/3) = 2(1)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

El punto pertenece a la superficie.

Desarrollo paso a paso

1. Definición de la función implícita $F(x, y, z)$

Para utilizar el método del gradiente, reescribimos la ecuación explícita $z = f(x, y)$ como una superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$:

$$F(x, y, z) = 2e^{-x}\cos y - z = 0$$

[Image of tangent plane concept]

2. Cálculo del vector normal (Gradiente)

El vector normal al plano tangente $\vec{n}$ está dado por el gradiente ∇F. Calculamos las derivadas parciales:

- **Respecto a x:**
  Aplicamos la regla de la cadena ($e^u \cdot u'$):

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(2e^{-x}\cos y) = 2(-1)e^{-x}\cos y = -2e^{-x}\cos y$$

- **Respecto a y:**
  Derivada del coseno es menos seno:

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(2e^{-x}\cos y) = 2e^{-x}(-\sin y) = -2e^{-x}\sin y$$

- **Respecto a z:**

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$$

El gradiente genérico es:

$$\nabla F(x, y, z) = \langle -2e^{-x} \cos y, -2e^{-x} \sin y, -1 \rangle$$

3. Evaluación del vector normal en $P(0, \pi/3, 1)$

Sustituimos $x = 0$ y $y = \pi/3$.
Valores notables: $e^0 = 1$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

- Componente x:

$$F_x(P) = -2(1)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

- Componente y:

$$F_y(P) = -2(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

- Componente z:

$$F_z(P) = -1$$

El vector normal obtenido es $\vec{n} = \langle -1, -\sqrt{3}, -1 \rangle$.
Para simplificar la ecuación del plano, podemos usar un vector paralelo multiplicando por -1:

$$\vec{n}' = \langle 1, \sqrt{3}, 1 \rangle$$

4. Construcción de la ecuación del plano

Utilizamos la fórmula punto-normal:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Sustituyendo $\vec{n}' = \langle 1, \sqrt{3}, 1 \rangle$ y $P(0, \pi/3, 1)$:

$$1(x - 0) + \sqrt{3}\left(y - \frac{\pi}{3}\right) + 1(z - 1) = 0$$

Desarrollamos los términos:

$$x + \sqrt{3}y - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + z - 1 = 0$$

Agrupamos las variables a la izquierda y las constantes a la derecha:

$$x + \sqrt{3}y + z = 1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

Resultado final

La ecuación del plano tangente es:

$$\mathbf{x + \sqrt{3}y + z = 1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}}$$

Si se prefiere igualada a cero:

$$x + \sqrt{3}y + z - \left(1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

(Valor aproximado de la constante: ≈ 2.813*).*

Interpretación breve del resultado

La ecuación resultante describe un plano inclinado en las tres dimensiones.

- **Coeficientes:** Los coeficientes $(1, \sqrt{3}, 1)$ indican la orientación de la "cara" del plano (vector normal).
- **Visualización:** Este plano toca tangencialmente a la superficie exponencial-trigonométrica en el punto donde $y = 60^\circ$ (60 grados), comportándose localmente como la superficie misma. Como indicaste, en herramientas como GeoGebra, la entrada `x + sqrt(3)y + z = 1 + (pi*sqrt(3))/3` graficará perfectamente la solución.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 35

Enunciado del problema

Hallar los puntos sobre la superficie del hiperboloide definido por la ecuación $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ en los cuales el plano tangente es paralelo al plano dado por $4x - 2y + 4z = 5$.

Datos dados

- **Superficie (S):** $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$.
- **Plano de referencia (π):** $4x - 2y + 4z = 5$.
- **Condición:** Paralelismo entre planos (sus vectores normales deben ser proporcionales).

Desarrollo paso a paso

1. Obtención del vector normal del plano de referencia

La ecuación general de un plano es $Ax + By + Cz = D$. El vector normal se extrae directamente de los coeficientes:

$$\vec{n}_\pi = \langle 4, -2, 4 \rangle$$

2. Obtención del vector normal de la superficie (Gradiente)

Definimos la función implícita $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - 4z^2 - 16 = 0$.
El vector normal en cualquier punto (x, y, z) de la superficie es el gradiente ∇F:

$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle$$

$$\nabla F = \langle 2x, -4y, -8z \rangle$$

3. Condición de paralelismo

Para que los planos sean paralelos, sus normales deben ser proporcionales por un factor escalar λ:

$$\nabla F = \lambda \vec{n}_\pi$$

$$\langle 2x, -4y, -8z \rangle = \lambda \langle 4, -2, 4 \rangle$$

Igualamos componente a componente para despejar x, y, z en función de λ:

1. $2x = 4\lambda \implies x = 2\lambda$
2. $-4y = -2\lambda \implies y = \frac{1}{2}\lambda$
3. $-8z = 4\lambda \implies z = -\frac{1}{2}\lambda$

4. Determinación de λ

Los puntos buscados deben pertenecer a la superficie. Sustituimos las expresiones paramétricas de x, y, z en la ecuación original del hiperboloide:

$$x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$$

$$(2\lambda)^2 - 2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 = 16$$

Operamos:

$$4\lambda^2 - 2\left(\frac{\lambda^2}{4}\right) - 4\left(\frac{\lambda^2}{4}\right) = 16$$

$$4\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{2} - \lambda^2 = 16$$

Simplificamos términos semejantes ($4 - 1 - 0.5 = 2.5 = 5/2$):

$$\frac{5}{2}\lambda^2 = 16$$

$$\lambda^2 = \frac{32}{5} \implies \lambda = \pm\sqrt{\frac{32}{5}}$$

Racionalizando:

$$\lambda = \pm\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

5. Cálculo de las coordenadas

Sustituimos los dos valores de λ en las ecuaciones del paso 3.

Para $\lambda = \frac{4\sqrt{10}}{5}$:

- $x = 2\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right) = \frac{8\sqrt{10}}{5}$
- $y = \frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{10}}{5}$
- $z = -\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$

Para $\lambda = -\frac{4\sqrt{10}}{5}$:
(Los signos se invierten)

- $x = -\frac{8\sqrt{10}}{5}$
- $y = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$
- $z = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

Resultado final

Los dos puntos sobre el hiperboloide que cumplen la condición son:

$$P_1\left(\frac{8\sqrt{10}}{5}, \frac{2\sqrt{10}}{5}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$$

$$P_2\left(-\frac{8\sqrt{10}}{5}, -\frac{2\sqrt{10}}{5}, \frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$$

Aproximación decimal:
$P_1 \approx (5.060, 1.265, -1.265)$
$P_2 \approx (-5.060, -1.265, 1.265)$

Interpretación breve del resultado

La superficie es un hiperboloide de dos hojas (separadas a lo largo del eje X). Hemos encontrado dos puntos simétricos respecto al origen, uno en cada hoja del hiperboloide. En estos puntos exactos, si colocas una superficie plana tangente, esta será perfectamente paralela al plano de referencia $4x - 2y + 4z = 5$.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 36.1

Enunciado del problema

Hallar los máximos y mínimos relativos de la función escalar de dos variables:

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$$

Datos dados

- **Función objetivo:** $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$
- **Dominio:** $\mathbb{R}^2$ (Función polinómica continua y diferenciable en todo el plano).
- **Objetivo:** Localizar puntos críticos y clasificarlos usando el Criterio de la Segunda Derivada (Hessiano).

Desarrollo paso a paso

1. Obtención de los Puntos Críticos

Para encontrar los candidatos a extremos, calculamos el vector gradiente ∇f e igualamos sus componentes a cero:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 6y$$

Establecemos el sistema de ecuaciones para los puntos estacionarios ($f_x = 0, f_y = 0$):

1. $$2x + 2y = 0 \implies x = -y \tag{1}$$
2. $$2x + 6y = 0 \tag{2}$$

Sustituimos (1) en (2):

$$2(-y) + 6y = 0$$

$$4y = 0 \implies y = 0$$

Si $y = 0$, entonces $x = -0 = 0$.
El único punto crítico es el origen $P_c(0,0)$.

2. Cálculo de las Segundas Derivadas

Obtenemos las derivadas parciales de segundo orden para construir la matriz Hessiana:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + 2y) = 2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 6y) = 6$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 2y) = 2$$

(Nota: $f_{xy} = f_{yx}$ según el Teorema de Schwarz, lo cual se cumple).

3. Criterio del Hessiano (Determinante)

Calculamos el discriminante D en el punto $(0, 0)$:

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Sustituyendo los valores constantes obtenidos:

$$D = (2)(6) - (2)^2$$

$$D = 12 - 4 = 8$$

4. Clasificación del Punto Crítico

Analizamos los signos según el criterio de la segunda derivada:

1. **Signo de D**: $D = 8 > 0$. Esto indica que existe un extremo relativo (no es un punto de silla).
2. **Signo de f_{xx}**: $f_{xx} = 2 > 0$. Esto indica concavidad positiva ("hacia arriba").

Conclusión: Un discriminante positivo junto con una segunda derivada en x positiva indica la presencia de un **Mínimo Relativo**.

5. Valor de la función

Evaluamos la altura z en el punto:

$$f(0, 0) = 0^2 + 2(0)(0) + 3(0)^2 = 0$$

Resultado final

La función presenta un único extremo relativo en:

- **Punto:** $P(0, 0)$
- **Clasificación: Mínimo Relativo**
- **Valor:** $f_{min} = 0$

Interpretación breve del resultado

La función $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ representa geométricamente un **paraboloide elíptico** con vértice en el origen y apertura hacia el eje z positivo.

Podemos verificar algebraicamente que es un mínimo absoluto completando el cuadrado:

$$f(x, y) = (x^2 + 2xy + y^2) + 2y^2 = (x + y)^2 + 2y^2$$

Dado que $(x + y)^2 \geq 0$ y $2y^2 \geq 0$, la suma siempre es mayor o igual a cero. El valor mínimo posible es 0 y ocurre solo cuando $x = -y$ y $y = 0$, confirmando nuestro resultado.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 36.4

Enunciado del problema

Hallar los máximos y mínimos relativos de la función:

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$
- **Dominio:** $\mathbb{R}^2$.
- **Simetría:** La función es par respecto a ambos ejes, lo que anticipa puntos críticos simétricos.

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo de Derivadas Parciales

Aplicamos la regla del producto $u \cdot v$ con $u = (x^2 + 3y^2)$ y $v = e^{-x^2-y^2}$.

- **Para f_x:**

$$f_x = 2xe^{-x^2-y^2} + (x^2 + 3y^2)(-2x)e^{-x^2-y^2}$$

  Factorizamos $2xe^{-x^2-y^2}$:

$$f_x = 2x(1 - (x^2 + 3y^2))e^{-(x^2+y^2)} = 2x(1 - x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

- **Para f_y:**

$$f_y = 6ye^{-x^2-y^2} + (x^2 + 3y^2)(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

  Factorizamos $2ye^{-x^2-y^2}$:

$$f_y = 2y(3 - (x^2 + 3y^2))e^{-(x^2+y^2)} = 2y(3 - x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

2. Localización de Puntos Críticos

Igualamos las derivadas a cero. Dado que la exponencial nunca se anula, analizamos los factores algebraicos:

1. $2x(1 - x^2 - 3y^2) = 0$
2. $2y(3 - x^2 - 3y^2) = 0$

Soluciones posibles combinando factores:

- **Caso A:** $x = 0$ y $y = 0. \implies P_1(0, 0)$.
- **Caso B:** $x = 0$ y $(3 - x^2 - 3y^2 = 0)$.

$$3 - 3y^2 = 0 \implies y^2 = 1 \implies y = \pm 1$$

  Puntos: $P_2(0, 1)$ y $P_3(0, -1)$.
- **Caso C:** $y = 0$ y $(1 - x^2 - 3y^2 = 0)$.

$$1 - x^2 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

  Puntos: $P_4(1, 0)$ y $P_5(-1, 0)$.

3. Clasificación usando la Matriz Hessiana

Evaluamos el signo del discriminante $D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$ y de la segunda derivada directa.

- **En** $P_1(0, 0)$**:**
  - $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 6$, $f_{xy} = 0$.
  - $D = 12 > 0$ y $f_{xx} > 0$.
  - **Clasificación: Mínimo Relativo**.
  - Valor: $f(0, 0) = 0$.
- **En** $P_4(1, 0)$ **y** $P_5(-1, 0)$**:**
  - $x^2 = 1, y = 0$.
  - $f_{xx} = -4e^{-1}$, $f_{yy} = 4e^{-1}$, $f_{xy} = 0$.
  - $D = -16e^{-2} < 0$.
  - **Clasificación: Puntos de Silla**.
  - Valor: $f(\pm 1, 0) = e^{-1} \approx 0.37$.
- **En** $P_2(0, 1)$ **y** $P_3(0, -1)$**:**
  - $x = 0, y^2 = 1$.
  - $f_{xx} = -4e^{-1}$, $f_{yy} = -12e^{-1}$, $f_{xy} = 0$.
  - $D = 48e^{-2} > 0$ y $f_{xx} < 0$.
  - **Clasificación: Máximos Relativos**.
  - Valor: $f(0, \pm 1) = 3e^{-1} \approx 1.10$.

Resultado final

1. Mínimo Relativo (Global):

- **Punto:** $(0, 0)$
- **Valor:** 0

2. Máximos Relativos (Globales):

- **Puntos:** $(0, 1)$ y $(0, -1)$
- **Valor:** $3/e \approx \mathbf{1.1036}$

3. Puntos de Silla:

- **Puntos:** $(1, 0)$ y $(-1, 0)$
- **Valor:** $1/e \approx \mathbf{0.3679}$

Interpretación breve del resultado

La gráfica de la función muestra dos "montañas" gemelas ubicadas sobre el eje Y en $y = \pm 1$, separadas por un valle profundo en el origen $(0, 0)$. En el eje X, hay dos pequeñas elevaciones en $x = \pm 1$ que actúan como pasos de montaña (puntos de silla): son puntos altos si vienes desde el origen, pero puntos bajos comparados con las cimas principales.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 37.1

Enunciado del problema

Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin x + y$$

en la región rectangular definida por $0 \le x \le 2\pi$ y $0 \le y \le 2\pi$.

Datos dados

- **Función:** $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$
- **Dominio:** $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ (Región cerrada y acotada).
- **Objetivo:** Encontrar el valor máximo global y mínimo global de $z = f(x, y)$.

Desarrollo paso a paso

1. Búsqueda de Puntos Críticos en el Interior

Calculamos el gradiente e igualamos a cero:

$$f_x = \cos x + \cos(x+y) = 0 \tag{1}$$

$$f_y = \cos y + \cos(x+y) = 0 \tag{2}$$

Restando (2) de (1):

$$\cos x - \cos y = 0 \implies \cos x = \cos y$$

Esto sugiere dos posibilidades en el intervalo $[0, 2\pi]$:
a) $x = y$
b) $y = 2\pi - x$

Caso a) $x = y$**:**
Sustituimos en la ecuación (1): $\cos x + \cos(2x) = 0$.
Usando la identidad $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$:

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Factorizamos $(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$.

- $\cos x = 1/2 \implies x = \pi/3, 5\pi/3$. (Puntos: $(\pi/3, \pi/3)$ y $(5\pi/3, 5\pi/3)$).
- $\cos x = -1 \implies x = \pi$. (Punto: (π, π)).

Caso b) $y = 2\pi - x$**:**
Lleva al punto (π, π), ya encontrado.

Evaluamos la función en estos puntos críticos interiores:

1. **En** $(\pi/3, \pi/3)$**:**

$$f = \sin(\pi/3) + \sin(\pi/3) + \sin(2\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$$

2. **En** $(5\pi/3, 5\pi/3)$**:**

$$f = \sin(5\pi/3) + \sin(5\pi/3) + \sin(10\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2.598$$

3. **En** (π, π)**:**

$$f = \sin(\pi) + \sin(\pi) + \sin(2\pi) = 0$$

2. Análisis de las Fronteras

Evaluamos la función en los límites del cuadrado:

- **Lado** $y = 0$: $f(x, 0) = \sin x + \sin x = 2\sin x$. Rango: $[-2, 2]$.
- **Lado** $y = 2\pi$: $f(x, 2\pi) = 2\sin x$. Rango: $[-2, 2]$.
- **Lado** $x = 0$: $f(0, y) = 2\sin y$. Rango: $[-2, 2]$.

- **Lado $x = 2\pi$:** $f(2\pi, y) = 2\sin y$. Rango: $[-2, 2]$.

El valor máximo en las fronteras es 2 y el mínimo es -2.

3. Comparación Global

Comparamos todos los valores obtenidos:

- Interior: ≈ 2.598 y ≈ -2.598.
- Frontera: 2 y -2.
- Esquinas: 0.

Resultado final

Máximo Absoluto:

- **Valor:** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (≈ 2.598)
- **Punto:** $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

Mínimo Absoluto:

- **Valor:** $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (≈ -2.598)
- **Punto:** $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$

Interpretación breve del resultado

Dentro de la región cuadrada, las ondas de las funciones seno se superponen constructivamente en el primer cuadrante del mapa (cerca de $\pi/3$) generando un pico más alto que en cualquier borde. De forma simétrica, en el cuarto cuadrante (cerca de $5\pi/3$) se superponen destructivamente generando la fosa más profunda.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 37.2

¡Correcto! Has hecho una observación muy aguda sobre el Problema 37; es común que en ediciones de libros de ejercicios ocurran esas duplicidades erróneas. Tu resolución hipotética con **cosenos** es matemáticamente impecable y didácticamente muy valiosa como complemento.

Retomando tu solicitud, procedemos ahora a resolver formalmente el **Inciso 2 del Problema 36**, manteniendo el rigor y el formato establecidos.

Enunciado del problema

Hallar los máximos y mínimos relativos de la función escalar:

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$
- **Dominio:** $\mathbb{R}^2$ (Polinomio cuadrático).
- **Objetivo:** Encontrar el punto crítico, clasificarlo mediante el Hessiano y determinar el valor de la función.

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo del vector Gradiente ∇f

Derivamos parcialmente la función respecto a x y y:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - x) = 2x - 1$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(4y^2 + 2y) = 8y + 2$$

2. Localización del Punto Crítico

Para hallar los puntos estacionarios, igualamos el gradiente al vector nulo ($f_x = 0, f_y = 0$):

1. $$2x - 1 = 0 \implies 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2}$$
2. $$8y + 2 = 0 \implies 8y = -2 \implies y = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

El único punto crítico es $P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.

3. Cálculo de la Matriz Hessiana

Obtenemos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - 1) = 2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(8y + 2) = 8$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 1) = 0$$

4. Criterio del Determinante Hessiano (D)

Evaluamos el discriminante D en el punto crítico:

$$D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$$D = (2)(8) - (0)^2$$

$$D = 16$$

5. Clasificación del Punto

Analizamos los signos:

1. $D = 16 > 0$: Indica que existe un extremo relativo (no es punto de silla).
2. $f_{xx} = 2 > 0$: Indica concavidad positiva ("hacia arriba").

Conclusión: El punto corresponde a un **Mínimo Relativo**.

6. Cálculo del valor de la función

Sustituimos $x = 0.5$ y $y = -0.25$ en la función original:

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$f = \frac{1}{4} + 4\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{2} - \frac{2}{4}$$

$$f = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$f = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Resultado final

- **Punto Crítico:** $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ o $(0.5, -0.25)$.
- **Clasificación: Mínimo Relativo** (y Absoluto).
- **Valor de la función:** $f_{min} = \mathbf{-0.5}$.

Interpretación breve del resultado

Geométricamente, la función $z = x^2 + 4y^2 - x + 2y$ representa un **paraboloide elíptico** desplazado del origen.

Podemos verificar esto completando cuadrados:

$$f(x, y) = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 4\left(y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4}$$

$$f(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

La estructura $(u^2 + v^2 + C)$ confirma que es una superficie que abre hacia arriba con su vértice (mínimo) en $z = -1/2$.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

Problema 38

Enunciado del problema

Alrededor de M56237 existe un campo de temperatura descrito por la función $T(x,y,z) = e^{2z}(\sin x - \cos y)$. Una nave se encuentra en el punto $P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 2\right)$. Se solicita determinar la **dirección** en la cual la temperatura disminuye más rápidamente.

Datos dados

- **Campo escalar (Temperatura):** $T(x,y,z) = e^{2z}(\sin x - \cos y)$
- **Punto de evaluación:** $P = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 2\right)$
- **Objetivo:** Hallar el vector unitario que indica el máximo decrecimiento ($-\nabla T$).

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo del vector Gradiente ∇T

El gradiente apunta en la dirección de máximo incremento. Calculamos las derivadas parciales de la función T:

- **Respecto a x:**
  Consideramos y y z constantes.
  $$\frac{\partial T}{\partial x} = e^{2z}(\cos x)$$
- **Respecto a y:**
  Consideramos x y z constantes.
  $$\frac{\partial T}{\partial y} = e^{2z}(0 - (-\sin y)) = e^{2z}\sin y$$
- **Respecto a z:**
  Consideramos x y y constantes.
  $$\frac{\partial T}{\partial z} = 2e^{2z}(\sin x - \cos y)$$

El vector gradiente genérico es:

$$\nabla T(x,y,z) = \langle e^{2z}\cos x,\ e^{2z}\sin y,\ 2e^{2z}(\sin x - \cos y)\rangle$$

2. Evaluación en el punto P

Sustituimos $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$ y $z = 2$.
Sabemos que $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- **Componente x:**

$$e^{2(2)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^4$$

- **Componente y:**

$$e^{2(2)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^4$$

- **Componente z:**

$$2e^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2e^4(0)=0$$

El vector gradiente en P es:

$$\nabla T(P)=\left\langle\frac{\sqrt{2}}{2}e^4,\frac{\sqrt{2}}{2}e^4,0\right\rangle$$

3. Determinación de la dirección de máximo decrecimiento

La temperatura disminuye más rápido en la dirección opuesta al gradiente ($-\nabla T$):

$$\vec{v}_{descenso}=-\nabla T(P)=\left\langle-\frac{\sqrt{2}}{2}e^4,-\frac{\sqrt{2}}{2}e^4,0\right\rangle$$

Para expresar esto como una dirección pura, calculamos el **vector unitario $\vec{u}$**. Notamos que el vector es proporcional a $\langle -1,-1,0\rangle$. Calculamos su magnitud:

$$|\langle -1,-1,0\rangle|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$$

El vector unitario es:

$$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle -1,-1,0\rangle$$

Racionalizando:

$$\vec{u}=\left\langle-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right\rangle$$

Resultado final

La dirección donde la temperatura baja más rápido está dada por el vector unitario:

$$\mathbf{\vec{u}}=\left\langle-\frac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}},-\frac{\mathbf{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}},\mathbf{0}\right\rangle$$

Interpretación breve del resultado

Para enfriarse lo más rápido posible, la nave debe moverse en el plano xy en dirección suroeste (con componentes negativas tanto en x como en y), manteniendo constante su altura z. El hecho de que la componente z sea cero indica que, en ese instante, un cambio vertical no afecta la temperatura debido a que los términos trigonométricos se anulan entre sí ($\sin(\pi/4) - \cos(\pi/4) = 0$).

✅ *Cálculos verificados: correctos.*