

SERIE TEMA 4 - PARTE 3 (21-30)

Problema 21

¡Magnífico! Este **Problema 21** es la culminación perfecta porque aplica el cálculo de derivadas parciales (gradiente) a una situación física real: el **Potencial Eléctrico**.

Como experto en electrónica, te diré que calcular la "razón de cambio del potencial" es lo mismo que calcular las componentes del **Campo Eléctrico** (\vec{E}), ya que $\vec{E} = -\nabla V$.

Vamos a resolver los tres incisos (eje x , y , z) en un solo flujo coherente.

1. Cuestionario Inicial

1. Función de Potencial:

$$V(x, y, z) = \frac{100}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Tip de experto: Para derivar más fácil, reescribámoslo con exponente negativo:

$$V = 100(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$$

2. Punto de Evaluación:

$$P(2, -1, 1).$$

3. Objetivo:

Calcular las derivadas parciales $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ evaluadas en el punto P .

4. Unidades:

Voltios por centímetro (V/cm).

2. Planificación Estratégica

1. Modelo de Derivada General:

Observamos que la función es simétrica para x, y, z . Calcularemos una fórmula general para la derivada parcial y luego la particularizaremos para cada variable.

Usaremos la **Regla de la Cadena** ($u^{-1} \rightarrow -u^{-2} \cdot u'$).

2. Cálculo del Denominador Común:

Como vamos a evaluar en el mismo punto para los tres incisos, calcularemos primero el valor de $(x^2 + y^2 + z^2)$ en el punto P para simplificar la aritmética.

3. Ejecución Paso a Paso

Paso 1: Derivada General

Sea $u = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces $V = 100u^{-1}$.

La derivada parcial respecto a una variable genérica ξ (que puede ser x, y o z) es:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 100 \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{-100}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \cdot (2\xi)$$

Simplificando:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{-200\xi}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

Esta es nuestra **Fórmula Maestra**.

Paso 2: Evaluación del Término Común (El denominador)

En el punto $P(2, -1, 1)$:

- $x = 2$
- $y = -1$
- $z = 1$

Calculamos la suma de cuadrados (el término base):

$$S = x^2 + y^2 + z^2 = (2)^2 + (-1)^2 + (1)^2$$

$$S = 4 + 1 + 1 = 6$$

El denominador de nuestra fórmula maestra es S^2 :

$$Denominator = 6^2 = 36$$

Por lo tanto, nuestra fórmula para evaluar se simplifica a:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{-200 \cdot (\text{coordenada})}{36}$$

Paso 3: Cálculo de los Incisos

1. En la dirección del eje x

Usamos la coordenada $x = 2$.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-200(2)}{36} = \frac{-400}{36}$$

Simplificamos dividiendo entre 4:

$$= -\frac{100}{9} \approx -11.11 \text{ V/cm}$$

2. En la dirección del eje y

Usamos la coordenada $y = -1$.

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-200(-1)}{36} = \frac{200}{36}$$

Simplificamos dividiendo entre 4:

$$= \frac{50}{9} \approx \mathbf{5.55 \text{ V/cm}}$$

3. En la dirección del eje z

Usamos la coordenada $z = 1$.

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-200(1)}{36} = \frac{-200}{36}$$

Simplificamos dividiendo entre 4:

$$= -\frac{50}{9} \approx \mathbf{-5.55 \text{ V/cm}}$$

4. Interpretación Física (Bonus de Electrónica)

Lo que acabamos de calcular son las componentes del **Gradiente de Potencial** (∇V).

$$\nabla V = \langle -11.11, 5.55, -5.55 \rangle \text{ V/cm}$$

En física, el **Campo Eléctrico** \vec{E} se define como el negativo del gradiente ($\vec{E} = -\nabla V$). Por lo tanto, en ese punto existe un campo eléctrico real:

$$\vec{E} = \langle 11.11, -5.55, 5.55 \rangle \text{ V/cm}$$

- **Significado del signo:**

- En el eje x , el potencial baja rápidamente (-11.11), lo que significa que el campo eléctrico empuja fuertemente hacia la derecha (positivo).
- En el eje y , el potencial sube (5.55), por lo que el campo empuja hacia la izquierda (negativo).

Resumen Final

Las razones de cambio de V en el punto $(2, -1, 1)$ son:

1. **Eje X:** $-\frac{100}{9} \approx -11.11 \text{ V/cm}$

2. **Eje Y:** $\frac{50}{9} \approx 5.55 \text{ V/cm}$

3. **Eje Z:** $-\frac{50}{9} \approx -5.55 \text{ V/cm}$

¡Y con esto hemos completado la última misión! Ha sido una maratón excelente de problemas aplicados.
¿Hay algo más que necesites revisar antes de cerrar?

Problema 22

Aquí tienes la resolución del **Problema 22**, formateada y revisada.

Este es un final de alto nivel para nuestra serie de ejercicios: el **Modelo Gaussiano de Dispersión Atmosférica**. Es la ecuación estándar utilizada por agencias medioambientales para evaluar el impacto de emisiones industriales.

Enunciado del problema

La concentración C (en $\mu g/m^3$) de dióxido de azufre a una distancia x y altura z de una chimenea está dada por:

$$C(x, z) = \frac{200}{x^2} \left[e^{-\frac{0.02(z-10)^2}{x^2}} + e^{-\frac{0.02(z+10)^2}{x^2}} \right]$$

Calcular e interpretar $\frac{\partial C}{\partial x}$ y $\frac{\partial C}{\partial z}$ en el punto $(2, 5)$.
(Distancia $x = 2$ km, Altura $z = 5$ m).

Datos preliminares (Cálculo de factores)

Evaluamos los términos exponenciales en el punto $(2, 5)$ para usarlos durante la derivación numérica:

- **Exponente 1:** $u = -\frac{0.02(5-10)^2}{2^2} = -0.125 \implies e^u \approx \mathbf{0.8825}$
- **Exponente 2:** $v = -\frac{0.02(5+10)^2}{2^2} = -1.125 \implies e^v \approx \mathbf{0.3247}$

Desarrollo paso a paso

A. Tasa de variación respecto a la altura ($\frac{\partial C}{\partial z}$)

Consideramos x constante.

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{200}{x^2} \frac{\partial}{\partial z} [e^u + e^v]$$

Derivamos usando la Regla de la Cadena:

- $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{0.04(z-10)}{x^2}$
- $\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{0.04(z+10)}{x^2}$

Sustituyendo y evaluando en $(2, 5)$:

Factor común: $-\frac{0.04}{x^2} = -0.01$. Coeficiente externo: $\frac{200}{4} = 50$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial z} &\approx 50 [e^{-0.125}(-0.01)(-5) + e^{-1.125}(-0.01)(15)] \\ &\approx 50[(0.8825)(0.05) + (0.3247)(-0.15)] \end{aligned}$$

$$\approx 50[0.0441 - 0.0487]$$

$$\approx 50[-0.0046] = -\mathbf{0.23}$$

B. Tasa de variación respecto a la distancia ($\frac{\partial C}{\partial x}$)

Consideramos z constante. Usamos la **Regla del Producto** ya que x está en el prefactor y en los exponentes.

$$C = \underbrace{200x^{-2}}_f \cdot \underbrace{[e^u + e^v]}_g$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = f'g + fg'$$

- $f'(2) = -400(2)^{-3} = -50$
- $g(2) = 0.8825 + 0.3247 = 1.2072$
- Término 1 ($f'g$): $-50(1.2072) = -\mathbf{60.36}$

Derivada de los exponentes respecto a x :

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(0.02)(z-10)^2}{x^3} = \frac{0.04(25)}{8} = 0.125$
- $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(0.02)(z+10)^2}{x^3} = \frac{0.04(225)}{8} = 1.125$

Término 2 (fg'):

$$f(2) = 50$$

$$g'(2) = e^u(0.125) + e^v(1.125) = (0.8825)(0.125) + (0.3247)(1.125) \approx 0.1103 + 0.3653 = 0.4756$$

$$fg' = 50(0.4756) = \mathbf{23.78}$$

Suma Total:

$$\frac{\partial C}{\partial x} \approx -60.36 + 23.78 = -\mathbf{36.58}$$

Resultado final e Interpretación

1. $\frac{\partial C}{\partial z} \approx -0.23 \mu g/m^3$ por metro
 - **Interpretación:** A esa distancia y altura, la contaminación disminuye ligeramente si subimos. Estamos justo en una zona de transición influenciada por la reflexión del suelo.
2. $\frac{\partial C}{\partial x} \approx -36.58 \mu g/m^3$ por km
 - **Interpretación:** La contaminación cae drásticamente a medida que nos alejamos de la fuente (dispersión). Si te mueves 1 km más lejos, el aire es significativamente más limpio.

✅ Cálculos verificados: correctos.

🏆 ¡GRAN FINAL!

Hemos concluido el análisis de una serie de problemas de ingeniería ambiental y física matemática de alto nivel. Has demostrado capacidad para:

- Manejar ecuaciones complejas con múltiples términos exponenciales.
- Aplicar derivadas parciales para interpretar fenómenos físicos reales (dispersión y gradientes).
- Evaluar numéricamente modelos para la toma de decisiones.

¡Ha sido un honor ser tu guía en este desafío matemático! ¡Mucho éxito!

Problema 23.1

Aquí tienes la resolución del **Problema 23, Inciso 1**, formateada y revisada.

Este ejercicio introduce la **Linealización**, que es el equivalente en 3D a encontrar la recta tangente en el cálculo de una variable.

Enunciado del problema

Encontrar la función lineal $L(x, y)$ que aproxima a la función $f(x, y)$ en el punto dado:

Problema 23, Inciso 1:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Punto: $(2, 1)$

Datos dados

- Función:** $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Paraboloide circular).
- Punto de tangencia:** $(a, b) = (2, 1)$.
- Fórmula de Aproximación Lineal (Plano Tangente):**

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Desarrollo paso a paso

1. Evaluación de la función en el punto (z_0)

Calculamos la altura de la superficie en las coordenadas dadas:

$$f(2, 1) = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$$

El punto de contacto en el espacio es $P(2, 1, 5)$.

2. Cálculo de las Derivadas Parciales (Pendientes)

Obtenemos las funciones de pendiente general:

- Respecto a x :**

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$$

- Respecto a y :

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y$$

3. Evaluación de las pendientes en $(2, 1)$

Sustituimos las coordenadas para hallar la inclinación específica del plano en ese punto:

- $f_x(2, 1) = 2(2) = 4$
- $f_y(2, 1) = 2(1) = 2$

4. Construcción de la Función Lineal $L(x, y)$

Sustituimos todos los valores ($z_0 = 5$, $m_x = 4$, $m_y = 2$) en la fórmula de linealización:

$$L(x, y) = 5 + 4(x - 2) + 2(y - 1)$$

Para obtener la ecuación final, desarrollamos y simplificamos:

$$L(x, y) = 5 + 4x - 8 + 2y - 2$$

$$L(x, y) = 4x + 2y - 5$$

Resultado final

La aproximación lineal de $f(x, y)$ en el punto $(2, 1)$ es:

$$L(x, y) = 4x + 2y - 5$$

Interpretación breve del resultado

Geométricamente, $f(x, y)$ es una copa curva y $L(x, y)$ es un plano rígido que la toca en un solo punto.

- **Validación Numérica:** Como se mostró en el desarrollo, si evaluamos un punto cercano como $(2.1, 1.1)$:
 - Valor real (f): 5.62
 - Valor aproximado (L): 5.60
 - El error es mínimo (0.02), lo que confirma que el plano es una excelente aproximación local.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

¿Continuamos con el **Inciso 2** ($f(x, y) = \sin x \sin y$ en el origen)?

Este caso es interesante porque al estar en el punto $(0, 0)$, muchas componentes se anularán, resultando en un plano tangente muy simple (el plano horizontal $z = 0$).

Problema 23.4

Aquí tienes la resolución del **Problema 23, Inciso 4**, formateada y revisada.

Este es un excelente ejercicio final porque muestra cómo la geometría local (planitud en una dirección) simplifica la ecuación del plano tangente.

Enunciado del problema

Encontrar la función lineal $L(x, y)$ que aproxima a la función $f(x, y)$ en el punto dado:

Problema 23, Inciso 4:

$$f(x, y) = x^2 + \cos y$$

Punto: $(2, \pi)$

Datos dados

- **Función:** Combinación de término cuadrático y trigonométrico.
- **Punto:** $(2, \pi)$.
- **Objetivo:** Hallar el plano tangente $L(x, y)$.

Desarrollo paso a paso

1. Evaluación de la función en el punto (z_0)

$$f(2, \pi) = (2)^2 + \cos(\pi)$$

Recordando que $\cos(\pi) = -1$:

$$z_0 = 4 + (-1) = 3$$

2. Cálculo y Evaluación de Derivadas Parciales

- **Respecto a x :**

$$f_x(x, y) = 2x$$

Evaluación en $x = 2$:

$$f_x(2, \pi) = 2(2) = 4$$

- **Respecto a y :**

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos y) = -\sin y$$

Evaluación en $y = \pi$:

$$f_y(2, \pi) = -\sin(\pi) = 0$$

3. Construcción de la Función Lineal

Sustituimos los valores ($z_0 = 3, m_x = 4, m_y = 0$) en la fórmula de linealización:

$$L(x, y) = 3 + 4(x - 2) + 0(y - \pi)$$

El término asociado a y se anula, simplificando enormemente la expresión:

$$L(x, y) = 3 + 4x - 8$$

$$L(x, y) = 4x - 5$$

Resultado final

La aproximación lineal es:

$$L(x, y) = 4x - 5$$

Interpretación breve del resultado

La función $L(x, y)$ no depende de y .

- **Geométricamente:** En el punto $y = \pi$, la función coseno alcanza un mínimo local (un valle). En el fondo de un valle, la tangente es horizontal (pendiente 0).
- **Visualización:** El plano tangente es una "rampa" que sube en la dirección X (pendiente 4) pero es totalmente plana en la dirección Y .

Validación Numérica:

Si evaluamos un punto cercano, $(2.1, \pi + 0.1)$:

- **Real (f):** $(2.1)^2 + \cos(3.24) \approx 4.41 - 0.995 = 3.415$
- **Aproximado (L):** $4(2.1) - 5 = 8.4 - 5 = 3.40$
- **Error:** 0.015 (Excelente precisión).

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

🏆 ¡MARATÓN COMPLETADA!

Hemos llegado al final de esta extensa y productiva sesión. Has completado una guía integral que abarca:

1. **Superficies y Mapas de Nivel.**
2. **Límites y Continuidad (con sus casos patológicos).**
3. **Derivadas Parciales y Regla de la Cadena.**
4. **Ecuaciones Diferenciales Parciales (Onda, Calor, Laplace).**
5. **Linealización y Planos Tangentes.**

Ha sido un verdadero placer acompañarte como tu revisor matemático. Tienes ahora un cuaderno de ejercicios resueltos con rigor y claridad. ¡Mucho éxito en tus exámenes y futuros proyectos de ingeniería!

Problema 24.1

Aquí tienes la resolución del **Problema 24, Inciso 1**, estructurada y verificada.

Este ejercicio es la introducción perfecta a la **Regla de la Cadena Multivariable**, una herramienta indispensable cuando trabajamos con sistemas anidados (funciones dentro de funciones).

Enunciado del problema

Utilizar la Regla de la Cadena para hallar $\frac{\partial w}{\partial y}$ dadas las siguientes funciones:

Problema 24, Inciso 1:

$$w = u \sin v$$

Donde:

$$u(x, y) = x^2 + y^2$$

$$v(x, y) = xy$$

Datos dados

- **Función dependiente:** $w(u, v)$.
- **Variables intermedias:** $u(x, y)$ y $v(x, y)$.
- **Variable independiente de interés:** y .
- **Objetivo:** Calcular la variación total de w respecto a y .

Desarrollo paso a paso

1. Diagrama de Dependencia (Árbol)

Para saber cómo afecta y a w , debemos trazar todos los caminos posibles que conectan ambas variables.

- **Camino 1:** $w \rightarrow u \rightarrow y$
- **Camino 2:** $w \rightarrow v \rightarrow y$

[Image of chain rule tree diagram]

La fórmula correspondiente es la suma de estos caminos:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

2. Cálculo de derivadas del "Nivel Superior" (w respecto a u, v)

$$w = u \sin v$$

- Respecto a u (v es constante):

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \sin v$$

- Respecto a v (u es constante):

$$\frac{\partial w}{\partial v} = u \cos v$$

3. Cálculo de derivadas del "Nivel Inferior" (u, v respecto a y)

- Para $u = x^2 + y^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

- Para $v = xy$:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x$$

4. Ensamblaje y Sustitución

Sustituimos los cuatro componentes en la ecuación (1):

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (\sin v)(2y) + (u \cos v)(x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y \sin v + xu \cos v$$

Para obtener el resultado final en términos de las variables originales, reemplazamos u y v :

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y \sin(xy) + x(x^2 + y^2) \cos(xy)$$

Resultado final

La derivada parcial es:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y \sin(xy) + (x^3 + xy^2) \cos(xy)$$

Interpretación breve del resultado

La variación total de w se compone de dos efectos:

1. **Efecto directo por amplitud (u):** Representado por el término con el seno.
2. **Efecto directo por fase (v):** Representado por el término con el coseno.

La regla de la cadena simplemente suma estas contribuciones ponderadas por la sensibilidad interna ($\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$).

✅ Cálculos verificados: correctos.

Pasemos al **Inciso 2**:

$$w = uv + v^2$$

$$u = e^r \sin s, \quad v = e^s \cos r$$

Mencionaste una posible confusión en el libro sobre qué derivada piden ($\partial w / \partial r$ o $\partial s / \partial y$). Generalmente, en este tipo de problemas se pide $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$.

¿Analizamos este caso asumiendo que piden las derivadas respecto a las variables independientes r y s ?

Problema 24.3

Aquí tienes la resolución del **Problema 24, Inciso 3**, formateada y revisada.

Este ejercicio es el cierre ideal porque introduce la **Derivada Total**. Aquí ya no estamos "congelando" variables; todo se mueve al mismo tiempo porque todo depende de un único reloj maestro: el tiempo t .

Enunciado del problema

Calcular la derivada total $\frac{dw}{dt}$ utilizando la Regla de la Cadena:

Problema 24, Inciso 3:

$$w = r^2 - s \tan v$$

Donde las trayectorias paramétricas son:

$$r(t) = \sin^2 t$$

$$s(t) = \cos t$$

$$v(t) = 4t$$

Datos dados

- **Función escalar:** $w(r, s, v)$.
- **Curvas paramétricas:** $r(t), s(t), v(t)$.
- **Objetivo:** Hallar la tasa de cambio neta $\frac{dw}{dt}$.
- **Herramienta:** Regla de la Cadena para una variable independiente:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

Desarrollo paso a paso

1. Derivadas Parciales de w (Sensibilidad del sistema)

Derivamos w respecto a sus variables directas:

- **Respecto a r :** $\frac{\partial w}{\partial r} = 2r$
- **Respecto a s :** $\frac{\partial w}{\partial s} = -\tan v$

- **Respecto a v :** $\frac{\partial w}{\partial v} = -s \sec^2 v$

2. Derivadas Ordinarias respecto a t (Velocidades de las variables)

Derivamos las funciones de trayectoria:

- **Para $r = \sin^2 t$:** Usamos regla de la cadena simple ($u^2 \rightarrow 2u \cdot u'$).

$$\frac{dr}{dt} = 2 \sin t \cos t = \sin(2t)$$

- **Para $s = \cos t$:**

$$\frac{ds}{dt} = -\sin t$$

- **Para $v = 4t$:**

$$\frac{dv}{dt} = 4$$

3. Ensamblaje (Suma de contribuciones)

Sustituimos todos los componentes en la ecuación maestra (1):

$$\frac{dw}{dt} = (2r)(\sin 2t) + (-\tan v)(-\sin t) + (-s \sec^2 v)(4)$$

4. Sustitución Final (Dependencia temporal explícita)

Reemplazamos r, s, v por sus expresiones en t :

- Término 1: $2(\sin^2 t)(\sin 2t)$
- Término 2: $\sin t \tan(4t)$
- Término 3: $-4(\cos t) \sec^2(4t)$

Resultado final

La derivada total respecto al tiempo es:

$$\frac{dw}{dt} = 2 \sin^2 t \sin(2t) + \sin t \tan(4t) - 4 \cos t \sec^2(4t)$$

(Nota: El primer término también puede escribirse como $4 \sin^3 t \cos t$ si no usamos el ángulo doble, ambas formas son correctas).

Interpretación breve del resultado

[Image of chain rule tree diagram]

Este resultado representa la **velocidad de cambio instantánea** de la magnitud w .

A diferencia de las derivadas parciales que analizan "qué pasa si cambio solo r ", la derivada total nos dice

"qué está pasando realmente en el sistema" dado que r , s y v están cambiando coordinadamente a medida que el tiempo avanza.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

🎓 ¡CURSO COMPLETADO!

¡Felicidades! Has cruzado la meta. Hemos revisado una colección exhaustiva de problemas que cubren:

1. **Mapas y Superficies:** Entendiendo el terreno ($x^2 + y^2$, elipsoides).
2. **Límites:** Detectando abismos y discontinuidades.
3. **Derivadas Parciales:** Analizando pendientes específicas.
4. **Física Matemática:** Ecuaciones de Onda y Calor.
5. **Regla de la Cadena:** Conectando sistemas dinámicos complejos.

Tienes ahora un portafolio de ejercicios resueltos con rigor matemático y visión de ingeniería. **¡Mucho éxito en tus exámenes y en tu carrera profesional!**

Problema 25

Aquí tienes la resolución del **Problema 25**, formateada y verificada.

Este es el broche de oro perfecto: un problema de **Tasas Relacionadas** (Related Rates). Aquí aplicamos la regla de la cadena no para derivar una función abstracta, sino para conectar velocidades de cambio físicas (cómo crece el radio vs. cómo crece el volumen).

Enunciado del problema

El radio r y la altura h de un **cilindro circular recto** aumentan a razón de 0.01 cm/min y 0.02 cm/min, respectivamente.

Si $r = 4$ cm y $h = 7$ cm, hallar:

1. La tasa de crecimiento del **Volumen**.
2. La rapidez con la que varía el **Área Superficial**.

Datos dados

- **Geometría:** Cilindro circular recto.
- **Variables de estado:** $r = 4$ cm, $h = 7$ cm.
- **Tasas de cambio (velocidades):**
 - $\frac{dr}{dt} = 0.01$ cm/min.
 - $\frac{dh}{dt} = 0.02$ cm/min.
- **Objetivo:** Hallar $\frac{dV}{dt}$ y $\frac{dA}{dt}$.

Desarrollo paso a paso

Parte 1: Tasa de cambio del Volumen ($\frac{dV}{dt}$)

La fórmula del volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$.

Aplicamos la Regla de la Cadena Multivariable derivando respecto al tiempo t :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{dh}{dt}$$

Calculamos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$
- $\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$

Sustituimos en la ecuación de tasas:

$$\frac{dV}{dt} = (2\pi r h) \frac{dr}{dt} + (\pi r^2) \frac{dh}{dt}$$

Evaluamos con los datos numéricos ($r = 4$, $h = 7$):

$$\frac{dV}{dt} = [2\pi(4)(7)](0.01) + [\pi(4)^2](0.02)$$

$$\frac{dV}{dt} = (56\pi)(0.01) + (16\pi)(0.02)$$

$$\frac{dV}{dt} = 0.56\pi + 0.32\pi$$

$$\frac{dV}{dt} = 0.88\pi$$

Parte 2: Tasa de cambio del Área Superficial ($\frac{dA}{dt}$)

Asumimos el **Área Total** (tapas + lateral), cuya fórmula es $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{dt}$$

Calculamos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial A}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi h$
- $\frac{\partial A}{\partial h} = 2\pi r$

Sustituimos en la ecuación de tasas:

$$\frac{dA}{dt} = (4\pi r + 2\pi h) \frac{dr}{dt} + (2\pi r) \frac{dh}{dt}$$

Evaluamos con los datos:

$$\frac{dA}{dt} = [4\pi(4) + 2\pi(7)](0.01) + [2\pi(4)](0.02)$$

$$\frac{dA}{dt} = (16\pi + 14\pi)(0.01) + (8\pi)(0.02)$$

$$\frac{dA}{dt} = (30\pi)(0.01) + 0.16\pi$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.30\pi + 0.16\pi$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.46\pi$$

Resultado final

1. Crecimiento del Volumen:

$$\frac{dV}{dt} = 0.88\pi \approx \mathbf{2.76 \text{ cm}^3/\text{min}}$$

2. Crecimiento del Área Total:

$$\frac{dA}{dt} = 0.46\pi \approx \mathbf{1.45 \text{ cm}^2/\text{min}}$$

Interpretación breve del resultado

[Image of cylinder with labeled radius and height]

Aunque tanto el radio como la altura crecen muy despacio (centésimas de milímetro), el volumen crece a casi 3 centímetros cúbicos por minuto. Esto ilustra la **sensibilidad** del volumen: pequeños cambios en las dimensiones lineales (especialmente el radio, que está al cuadrado) se amplifican cúbicamente en el volumen.

Correcciones y justificación (Ambigüedad)

- **Ambigüedad detectada:** El enunciado original menciona "área total de la superficie lateral", lo cual es una contradicción (o es total, o es lateral).
- **Interpretación adoptada:** Se calculó el **Área Total** (tapas + lateral) por ser el estándar en problemas de cilindros cerrados.
- **Cálculo alternativo (Solo Lateral):** Si solo se pidiera el área lateral ($A_L = 2\pi rh$), el resultado habría sido:

$$\frac{dA_L}{dt} = 2\pi(hr' + rh') = 2\pi(0.07 + 0.08) = 0.30\pi$$

(Esto es útil tenerlo en cuenta si la respuesta del libro difiere).

 **Cálculos verificados:** correctos.

¡CURSO FINALIZADO CON ÉXITO!

¡Enhorabuena! Has completado la revisión de **toda la serie de problemas**. Hemos cubierto un temario universitario completo de Cálculo Multivariable:

1. **Geometría 3D:** Superficies cuádricas y mapas de contorno.
2. **Topología:** Límites, continuidad y existencia.
3. **Derivación:** Parciales, mixtas, regla de la cadena y gradientes.
4. **Aplicaciones Físicas:** Ondas, calor, potencial eléctrico y difusión.
5. **Ingeniería:** Tasas relacionadas y linealización.

Ha sido un honor acompañarte como tu revisor matemático. Tienes un material de estudio sólido y verificado. ¡Mucho éxito en tus futuros desafíos!

Problema 26

Aquí tienes la resolución del **Problema 26**, formateada y revisada.

Este problema es la aplicación definitiva del cálculo multivariable en la física. Conecta la **Regla de la Cadena** con la **Termodinámica**, permitiéndonos predecir cómo evoluciona la temperatura de un sistema dinámico.

Enunciado del problema

Dada la **Ley de los Gases Ideales**:

$$PV = kT$$

Donde P es la presión, V es el volumen, T es la temperatura y k es una constante.

Encontrar la **tasa de cambio de la temperatura respecto al tiempo** ($\frac{\partial T}{\partial t}$), dadas las tasas de cambio de la presión ($\frac{\partial P}{\partial t}$) y el volumen ($\frac{\partial V}{\partial t}$).

Datos dados

- **Ecuación de Estado:** $PV = kT$.
- **Variables dependientes del tiempo:** $P(t)$, $V(t)$, $T(t)$.
- **Constante:** k .
- **Objetivo:** Hallar una expresión para $\frac{\partial T}{\partial t}$.

Desarrollo paso a paso

1. Despeje de la variable de interés (T)

Para aplicar la regla de la cadena y ver cómo T depende de P y V , primero la aislamos:

$$T(P, V) = \frac{1}{k}PV \tag{1}$$

2. Cálculo de las Derivadas Parciales de Estado

Calculamos la sensibilidad de la temperatura ante cambios en la presión y el volumen, usando la ecuación (1):

- **Respecto a la Presión ($\frac{\partial T}{\partial P}$):**

Consideramos V constante.

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{1}{k} V$$

- **Respecto al Volumen ($\frac{\partial T}{\partial V}$):**

Consideramos P constante.

$$\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{1}{k} P$$

3. Aplicación de la Regla de la Cadena

Dado que T depende de P y V , y ambos cambian con el tiempo t , la derivada total es la suma de sus contribuciones:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial t}$$

Sustituimos las derivadas parciales halladas en el paso 2:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{V}{k} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{P}{k} \right) \frac{\partial V}{\partial t}$$

4. Factorización y Simplificación

Extraemos el factor común $1/k$ para obtener una fórmula más limpia:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{k} \left(V \frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

Resultado final

La tasa de cambio de la temperatura respecto al tiempo es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{V \frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t}}{k}$$

Interpretación breve del resultado

Esta fórmula matemática tiene un profundo significado físico:

[Image of Charles Law graph V vs T]

- El término $P \frac{\partial V}{\partial t}$ representa la contribución del **trabajo mecánico** (expansión o compresión). Si el gas se expande (cambio positivo de volumen) a alta presión, la temperatura tiende a cambiar significativamente.
- El término $V \frac{\partial P}{\partial t}$ representa cambios isocóricos. Si la presión aumenta sin cambiar el volumen, la temperatura debe subir.
- **Consistencia Matemática:** Esta expresión es equivalente a diferenciar el producto PV : $\frac{d}{dt}(PV) = P\dot{V} + V\dot{P}$.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

❖ ¡FINAL DE LA SERIE!

¡Felicidades! Has completado exitosamente la revisión de **26 problemas complejos** de cálculo multivariable. Has demostrado dominio en:

1. Geometría Analítica 3D.
2. Topología (Límites y Continuidad).
3. Cálculo Diferencial (Derivadas Parciales y Totales).
4. Modelado Físico y de Ingeniería.

Tienes ahora un material de estudio impecable. ¡Mucho éxito en tu carrera!

Problema 27

Aquí tienes la resolución del **Problema 27**, formateada y verificada.

Este es un ejercicio clásico de **Tasas Relacionadas** (Related Rates) aplicado a la física. Nos muestra cómo competir fuerzas opuestas: el calentamiento intenta expandir el gas, pero el aumento de presión intenta comprimirlo.

Enunciado del problema

La temperatura T , la presión P y el volumen V de un gas satisfacen la ecuación:

$$PV = 8T$$

En un instante determinado, se tiene que $T = 200$ y $P = 10$. Además, la temperatura aumenta a razón de **2 unidades/min** y la presión aumenta a razón de **0.5 unidades/min**.

Objetivo: Hallar la rapidez de cambio del volumen (dV/dt) en ese instante.

Datos dados

- **Ecuación de Estado:** $P(t) \cdot V(t) = 8 \cdot T(t)$.
- **Estado actual (t_0):**
 - $P = 10$
 - $T = 200$
- **Tasas de cambio:**
 - $\frac{dT}{dt} = 2$
 - $\frac{dP}{dt} = 0.5$
- **Incógnita:** $\frac{dV}{dt}$.

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo del Volumen actual (V)

Como no nos dan V explícitamente, lo calculamos usando la ecuación original con los datos del instante actual:

$$10 \cdot V = 8(200)$$

$$10V = 1600$$

$$V = 160$$

Ahora tenemos el estado completo: $(P, V, T) = (10, 160, 200)$.

2. Derivación Implícita respecto al tiempo

Derivamos ambos lados de la ecuación $PV = 8T$ respecto a t .

Para el lado izquierdo, usamos la **Regla del Producto** ($u'v + uv'$):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(P \cdot V) &= \frac{d}{dt}(8T) \\ \frac{dP}{dt}V + P\frac{dV}{dt} &= 8\frac{dT}{dt}\end{aligned}\tag{1}$$

3. Despeje de la incógnita ($\frac{dV}{dt}$)

Aislamos el término que contiene la tasa de volumen:

$$\begin{aligned}P\frac{dV}{dt} &= 8\frac{dT}{dt} - V\frac{dP}{dt} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{8\frac{dT}{dt} - V\frac{dP}{dt}}{P}\end{aligned}$$

4. Sustitución y Cálculo

Sustituimos los valores numéricos ($P = 10, V = 160, dT/dt = 2, dP/dt = 0.5$):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{8(2) - 160(0.5)}{10}$$

Calculamos el numerador (Efecto Térmico vs. Efecto Mecánico):

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{16 - 80}{10} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{-64}{10} \\ \frac{dV}{dt} &= -6.4\end{aligned}$$

Resultado final

La rapidez de cambio del volumen es:

$$\frac{dV}{dt} = -6.4 \text{ unidades de volumen/min}$$

Interpretación breve del resultado

El signo negativo indica que el volumen está **disminuyendo**.

[Image of Charles Law graph V vs T]

- **Análisis de fuerzas:** El término $8(dT/dt) = 16$ representa la tendencia del gas a expandirse por el calor (como sugiere la Ley de Charles). Sin embargo, el término de presión $V(dP/dt) = 80$ es mucho mayor.
- **Conclusión:** El aumento de presión es el factor dominante y está "aplastando" o comprimiendo el gas más rápido de lo que el calor puede expandirlo.

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

❖ ¡FINAL DE LA SERIE!

¡Felicidades! Has completado exitosamente la revisión de **27 problemas complejos** de cálculo multivariable. Has demostrado dominio en:

1. Geometría Analítica 3D.
2. Topología (Límites y Continuidad).
3. Cálculo Diferencial (Derivadas Parciales y Totales).
4. Modelado Físico y de Ingeniería (Tasas Relacionadas).

Tienes ahora un material de estudio impecable. **¡Mucho éxito en tu carrera!**

Problema 28

Aquí tienes la resolución del **Problema 28**, formateada y verificada.

Este ejercicio es una aplicación brillante del **Cálculo Multivariable** en la medicina, donde las **tasas relacionadas** se usan para seguir el crecimiento fisiológico.

Enunciado del problema

La fórmula de DuBois & DuBois para el Área de Superficie Corporal (S) es:

$$S(x, y) = 0.007184 x^{0.425} y^{0.725}$$

Calcular la rapidez de crecimiento del área superficial ($\frac{dS}{dt}$) dados los siguientes datos:

- $x = 13$ kg, $\frac{dx}{dt} = 2$ kg/año.
- $y = 86$ cm, $\frac{dy}{dt} = 9$ cm/año.

Datos dados

- **Función:** $S(x, y)$ (Tipo Cobb-Douglas).
- **Velocidades:** $\frac{dx}{dt} = 2$, $\frac{dy}{dt} = 9$.
- **Objetivo:** Hallar la derivada total $\frac{dS}{dt}$.

Desarrollo paso a paso

1. Fórmula de la Regla de la Cadena

La variación total de S respecto al tiempo es la suma de las variaciones causadas por el peso (x) y la estatura (y):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

[Image of chain rule tree diagram]

2. Cálculo del Área Actual (S)

Evaluamos S en el instante $x = 13, y = 86$:

$$S = 0.007184 \cdot (13)^{0.425} \cdot (86)^{0.725}$$

$$S \approx 0.007184 \cdot (2.975) \cdot (25.263)$$

$$S \approx 0.540 \text{ m}^2$$

3. Fórmula Simplificada (Derivadas Parciales)

Para funciones de potencias, las derivadas parciales se simplifican a la siguiente forma (por diferenciación logarítmica):

$$\frac{\partial S}{\partial x} = S \cdot \frac{0.425}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial y} = S \cdot \frac{0.725}{y}$$

Sustituimos en la ecuación (1):

$$\frac{dS}{dt} = S \left[\frac{0.425}{x} \frac{dx}{dt} + \frac{0.725}{y} \frac{dy}{dt} \right]$$

4. Sustitución y Cálculo Final

Insertamos todos los valores numéricos:

$$\frac{dS}{dt} \approx 0.540 \left[\left(\frac{0.425}{13} \cdot 2 \right) + \left(\frac{0.725}{86} \cdot 9 \right) \right]$$

$$\frac{dS}{dt} \approx 0.540 [0.0654 + 0.0760]$$

$$\frac{dS}{dt} \approx 0.540 [0.1414]$$

$$\frac{dS}{dt} \approx 0.0764$$

Resultado final

La rapidez de crecimiento del área superficial corporal del niño es:

$$\frac{dS}{dt} \approx 0.0764 \text{ m}^2/\text{año}$$

Interpretación breve del resultado

El niño está ganando superficie corporal a razón de 0.076 metros cuadrados por año.

- **Contribución del Peso:** $\approx 46\%$
- **Contribución de la Estatura:** $\approx 54\%$

En esta etapa, la estatura aporta ligeramente más a la ganancia de superficie total que el aumento de peso, lo que es coherente con el crecimiento infantil.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

🌟 ¡SERIE DE PROBLEMAS FINALIZADA!

Con la culminación de este análisis biomédico, has completado con éxito la revisión de **toda la guía de cálculo multivariable**.

¡Ha sido un placer asistirte en este proyecto! **¡Mucho éxito en tu futuro!**

Problema 29.1

Aquí tienes la resolución del **Problema 29, Inciso 1**, formateada y verificada.

Este ejercicio es la aplicación directa de las derivadas parciales para encontrar el vector de máxima variación, el **Gradiente**.

Enunciado del problema

Calcular el vector Gradiente ∇f de la función en el punto indicado:

Problema 29, Inciso 1:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Punto: $P(-4, 2)$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y)$, que es la distancia euclidiana al origen (r).

- **Vector Gradiente:** $\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$.
- **Punto de evaluación:** $(-4, 2)$.

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo Simbólico de las Derivadas Parciales

Reescribimos la función como $f = (x^2 + y^2)^{1/2}$ y aplicamos la Regla de la Cadena.

- **Respecto a x (f_x):**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot (2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- **Respecto a y (f_y):**

Por simetría, el proceso es idéntico:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

2. Evaluación del Denominador Común

Calculamos la magnitud del radio en el punto $P(-4, 2)$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

Simplificamos: $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$.

3. Evaluación de Componentes

Sustituimos $x = -4$, $y = 2$ y el denominador $2\sqrt{5}$:

- **Componente i (f_x):**

$$f_x(-4, 2) = \frac{-4}{2\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

- **Componente j (f_y):**

$$f_y(-4, 2) = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Resultado final

El vector gradiente en el punto $P(-4, 2)$ es:

$$\nabla f(-4, 2) = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Interpretación breve del resultado

- **Dirección:** El vector apunta en la dirección de máximo crecimiento (hacia el exterior del cono).
- **Magnitud:** La magnitud de este vector es $|\nabla f| = 1$. Esto es consistente con la función de distancia, pues la razón de cambio de la distancia es siempre **1 metro por metro recorrido** al avanzar radialmente.

✅ Cálculos verificados: correctos.

¿Procedemos a extender el concepto al espacio tridimensional con el **Inciso 2** ($F(x, y, z) = yz^3 - 2x^2$)?

Problema 29.2

¡Excelente! Has llegado al final de la hoja. La extensión del gradiente a 3D es el paso clave para la Geometría Analítica del Espacio.

Aquí tienes la resolución del **Problema 29, Inciso 2**, formateada y verificada.

Enunciado del problema

Calcular el vector Gradiente ∇F de la función en el punto indicado:

Problema 29, Inciso 2:

$$F(x, y, z) = yz^3 - 2x^2$$

Punto: $P(2, -3, 1)$

Datos dados

- **Función:** $F(x, y, z)$ (un campo escalar).
- **Vector Gradiente:** $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$.
- **Punto de evaluación:** $P(2, -3, 1)$.

Desarrollo paso a paso

1. Derivada Parcial respecto a x (F_x)

Consideramos y y z constantes.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(yz^3 - 2x^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 - 4x$$

$$F_x = -4x$$

2. Derivada Parcial respecto a y (F_y)

Consideramos x y z constantes.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yz^3 - 2x^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = z^3 \cdot (1) - 0$$

$$F_y = z^3$$

3. Derivada Parcial respecto a z (F_z)

Consideramos x e y constantes.

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(yz^3 - 2x^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = y \cdot (3z^2) - 0$$

$$F_z = 3yz^2$$

4. Evaluación en el punto $P(2, -3, 1)$

Sustituimos las coordenadas $x = 2, y = -3, z = 1$ en las funciones derivadas:

- **Componente i** (F_x):

$$F_x(P) = -4(2) = -8$$

- **Componente j** (F_y):

$$F_y(P) = (1)^3 = 1$$

- **Componente k** (F_z):

$$F_z(P) = 3(-3)(1)^2 = -9$$

Resultado final

El vector gradiente en el punto $P(2, -3, 1)$ es:

$$\nabla F(2, -3, 1) = \langle -8, 1, -9 \rangle$$

Interpretación geométrica

El vector $\langle -8, 1, -9 \rangle$ es **normal** (perpendicular) a la superficie de nivel de la función que pasa por el punto P . Si un objeto se moviese en la dirección de este vector, experimentaría el **máximo aumento** en el valor de la función F .

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

 **¡FIN DE LA SERIE DE PROBLEMAS!**

¡Felicidades! Has completado con éxito la revisión de **toda la guía de cálculo multivariable**, abarcando desde la geometría básica hasta las aplicaciones avanzadas del gradiente en múltiples dimensiones.

Ha sido un gusto ser tu guía. ¡Mucho éxito en tu futuro!

Problema 30.1

Aquí tienes la resolución del **Problema 30, Inciso 1**, formateada y verificada.

Este ejercicio es el ejemplo por excelencia de cómo se aplica el gradiente. El resultado es la pendiente exacta de la superficie al caminar en la dirección del vector.

Enunciado del problema

Calcular la derivada direccional $D_u f$ de la función en el punto P y en la dirección del vector \vec{v} :

Problema 30, Inciso 1:

$$f(x, y) = \sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1}$$

Punto: $P(3, -2)$

Vector: $\vec{v} = \langle 1, 5 \rangle$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y) = (9x^2 - 4y^2 - 1)^{1/2}$.
- **Fórmula:** $D_{\hat{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \hat{u}$.
- **Nota crítica:** El vector \vec{v} debe ser normalizado a \hat{u} .

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo del Gradiente (∇f) en $P(3, -2)$

Primero, evaluamos la función base $\sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1} = R$:

$$R = \sqrt{9(3)^2 - 4(-2)^2 - 1} = \sqrt{81 - 16 - 1} = 8$$

- **Componente i (f_x):**

$$f_x = \frac{1}{2}(9x^2 - 4y^2 - 1)^{-1/2} \cdot (18x) = \frac{9x}{R}$$

$$f_x(3, -2) = \frac{9(3)}{8} = \frac{27}{8}$$

- **Componente j (f_y):**

$$f_y = \frac{1}{2}(9x^2 - 4y^2 - 1)^{-1/2} \cdot (-8y) = \frac{-4y}{R}$$

$$f_y(3, -2) = \frac{-4(-2)}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\nabla f(3, -2) = \left\langle \frac{27}{8}, 1 \right\rangle$$

2. Normalización del Vector de Dirección (\hat{u})

Calculamos la magnitud del vector $\vec{v} = \langle 1, 5 \rangle$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

El vector unitario es:

$$\hat{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}} \right\rangle$$

3. Cálculo del Producto Punto

$$\begin{aligned} D_u f &= \left\langle \frac{27}{8}, 1 \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}} \right\rangle \\ D_u f &= \frac{27}{8\sqrt{26}} + \frac{5}{\sqrt{26}} \end{aligned}$$

Buscamos el denominador común ($8\sqrt{26}$):

$$\begin{aligned} D_u f &= \frac{27}{8\sqrt{26}} + \frac{5 \cdot 8}{8\sqrt{26}} \\ D_u f &= \frac{27 + 40}{8\sqrt{26}} \\ D_u f &= \frac{67}{8\sqrt{26}} \end{aligned}$$

Resultado final

La derivada direccional es:

$$D_u f = \frac{67}{8\sqrt{26}} \quad (\approx 1.64)$$

Interpretación breve del resultado

- **Pendiente:** El resultado positivo indica que la función **crece** si caminas en esa dirección.
- **Significado Físico:** En el punto P , la superficie es una rampa que sube 1.64 unidades verticales por cada unidad de distancia horizontal que se recorre en la dirección del vector \vec{v} .

[Image of gradient vector field]

✓ *Cálculos verificados: correctos.*

Procedemos con el **Inciso 2** (∇f en 3D y producto punto) para completar esta serie de problemas.

Problema 30.2

¡Felicitaciones! 🎉 Has llegado al final de la hoja. La Derivada Direccional en 3D es la aplicación más completa del concepto de Gradiente.

Aquí tienes la resolución del **Problema 30, Inciso 2**, estructurada y verificada.

Enunciado del problema

Calcular la derivada direccional $D_{\hat{u}}f$ de la función en el punto P y en la dirección del vector \vec{v} :

Problema 30, Inciso 2:

$$f(x, y, z) = xy^3z^2$$

Punto: $P(2, 1, 4)$

Vector: $\vec{v} = \langle 1, 2, -3 \rangle$

Datos dados

- **Función:** $f(x, y, z)$.
- **Punto de evaluación:** $P(2, 1, 4)$.
- **Fórmula:** $D_{\hat{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \hat{u}$.

Desarrollo paso a paso

1. Cálculo del Gradiente Evaluado ($\nabla f(P)$)

Obtenemos las tres derivadas parciales y las evaluamos en $P(2, 1, 4)$.

- $F_x = y^3z^2$:

$$F_x(P) = (1)^3(4)^2 = 16$$

- $F_y = 3xy^2z^2$:

$$F_y(P) = 3(2)(1)^2(4)^2 = 6 \cdot 16 = 96$$

- $F_z = 2xy^3z$:

$$F_z(P) = 2(2)(1)^3(4) = 16$$

$$\nabla f(P) = \langle 16, 96, 16 \rangle$$

2. Normalización del Vector de Dirección (\hat{u})

Calculamos la magnitud de $\vec{v} = \langle 1, 2, -3 \rangle$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

El vector unitario es:

$$\hat{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right\rangle$$

3. Cálculo de la Derivada Direccional (Producto Punto)

$$D_{\hat{u}}f = \nabla f \cdot \hat{u}$$

$$D_{\hat{u}}f = \langle 16, 96, 16 \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right\rangle$$

Operamos la suma de productos en el numerador (con denominador común $\sqrt{14}$):

$$D_{\hat{u}}f = \frac{16(1) + 96(2) + 16(-3)}{\sqrt{14}}$$

$$D_{\hat{u}}f = \frac{16 + 192 - 48}{\sqrt{14}}$$

$$D_{\hat{u}}f = \frac{160}{\sqrt{14}}$$

Resultado final

La derivada direccional es:

$$D_{\hat{u}}f = \frac{160}{\sqrt{14}} \quad (\approx 42.76)$$

Interpretación Física

- **Crecimiento Neto:** El valor positivo indica que, al moverse en la trayectoria \vec{v} , la función crece rápidamente.
- **Dominancia:** A pesar de que el movimiento tiene una fuerte componente negativa en z (-3), el gradiente es tan grande en y (96) que anula esa caída y resulta en un crecimiento neto acelerado.

✅ *Cálculos verificados: correctos.*

🌟 ¡FINAL DE LA MARATÓN DE CÁLCULO!

¡**Felicidades!** Has completado la revisión y resolución de toda la guía de ejercicios. Has cubierto un temario exhaustivo que sienta las bases para la física de campos y la ingeniería avanzada.

Ha sido un placer absoluto acompañarte en esta extensa y rigurosa sesión. ¡**Mucho éxito en tus futuros desafíos!**