

SERIE TEMA 5 - PARTE 1

PROBLEMA 1 INCISO A

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la suma de Riemann doble $S_{m,n}$ para la función $f(x, y) = x + y^2$ sobre la región rectangular $R = [1, 2] \times [-2, 3]$, utilizando una partición de $m = 4$ divisiones en x y $n = 5$ divisiones en y , con el punto de prueba en la esquina superior derecha de cada subrectángulo.

Función:

$$f(x, y) = x + y^2$$

Región de integración (R):

$$R = [1, 2] \times [-2, 3] \implies a_x = 1, b_x = 2, a_y = -2, b_y = 3$$

Partición (m, n):

$$m = 4, \quad n = 5$$

Punto de Muestra:

$$(x_i^*, y_j^*) = (x_i, y_j) \quad (\text{Esquina superior derecha})$$

Precisión deseada: Exacta (se usará la mayor precisión posible).

2. Verificación paso a paso

A. Cálculo de los incrementos y el área diferencial ($\Delta x, \Delta y, \Delta A$)

La fórmula general para los incrementos es $\Delta w = \frac{b_w - a_w}{\text{divisiones}}$.

$$\Delta x \rightarrow \frac{2 - 1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow 0.25$$

$$\Delta y \rightarrow \frac{3 - (-2)}{5} \rightarrow \frac{5}{5} \rightarrow 1$$

El área de cada subrectángulo es $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$.

$$\Delta A \rightarrow 0.25 \cdot 1 \rightarrow 0.25$$

B. Identificación de los puntos de prueba (x_i, y_j)

La fórmula para la esquina derecha/superior es $w_k = a_w + k \cdot \Delta w$.

Puntos x_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$x_i \rightarrow 1 + i \cdot 0.25 \rightarrow x_1 = 1.25, x_2 = 1.50, x_3 = 1.75, x_4 = 2.00$$

Puntos y_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$):

$$y_j \rightarrow -2 + j \cdot 1 \rightarrow y_1 = -1, y_2 = 0, y_3 = 1, y_4 = 2, y_5 = 3$$

C. Planteamiento y desarrollo de la Suma de Riemann

La suma de Riemann es $S_{4,5} = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 f(x_i, y_j) \Delta A$.

$$\begin{aligned} S_{4,5} &= \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 (x_i + y_j^2) \Delta A \\ &= \Delta A \cdot \sum_{j=1}^5 \left(\sum_{i=1}^4 x_i + \sum_{i=1}^4 y_j^2 \right) \end{aligned}$$

1. Suma de los x_i (parte constante en la suma externa):

$$\sum_{i=1}^4 x_i \rightarrow 1.25 + 1.50 + 1.75 + 2.00 \rightarrow 6.5$$

2. Suma interna para un j fijo:

Como y_j^2 es constante respecto al índice i , la suma es $4 \cdot y_j^2$.

$$\sum_{i=1}^4 (x_i + y_j^2) \rightarrow 6.5 + 4y_j^2$$

3. Desarrollo de la Suma externa:

$$\sum_{j=1}^5 (6.5 + 4y_j^2) \rightarrow \sum_{j=1}^5 6.5 + 4 \sum_{j=1}^5 y_j^2$$

4. Cálculo de las dos partes de la Suma Externa:

- **Parte 1:** $\sum_{j=1}^5 6.5$

$$\sum_{j=1}^5 6.5 \rightarrow 5 \cdot 6.5 \rightarrow 32.5$$

- **Parte 2:** $\sum_{j=1}^5 y_j^2$

$$\sum_{j=1}^5 y_j^2 \rightarrow (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 \rightarrow 1 + 0 + 1 + 4 + 9 \rightarrow 15$$

Sustituyendo en la expresión del paso 3:

$$\text{Suma Total} \rightarrow 32.5 + 4(15) \rightarrow 32.5 + 60 \rightarrow 92.5$$

D. Cálculo del Resultado Final

Multiplicamos la Suma Total por el área diferencial ΔA .

$$S_{4,5} \rightarrow 92.5 \cdot 0.25 \rightarrow 23.125$$

El re-cálculo independiente confirma la trayectoria y el resultado del usuario.

3. Resultado final

El valor de la suma de Riemann $S_{4,5}$ es:

$$S_{4,5} = 23.125$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El desarrollo proporcionado por el usuario es **matemáticamente correcto** y cumple con el formato LaTeX/KaTeX requerido. Todos los pasos intermedios son precisos.

Nota sobre el enfoque: El usuario aplicó la propiedad de linealidad de la suma para separar la doble sumatoria en dos partes independientes: una que depende solo de x_i y otra que depende solo de y_j . Este método $\left(\sum_j \sum_i (x_i + y_j^2)\right) = \sum_j \left(\sum_i x_i + \sum_i y_j^2\right)$ es totalmente válido y eficiente para este tipo de funciones aditivas ($f(x, y) = g(x) + h(y)$).

¿Le gustaría que calculemos el valor de la **integral exacta** para determinar el **error absoluto** de esta aproximación de Riemann?

PROBLEMA 1 INCISO B

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la suma de Riemann doble $S_{4,4}$ para la función $g(x, y) = -3x + 2y$ sobre la región rectangular $R = [-2, 3] \times [1, 3]$, utilizando el punto de prueba en la esquina superior izquierda

de cada subrectángulo.

Función:

$$g(x, y) = -3x + 2y$$

Región de integración (R):

$$R = [-2, 3] \times [1, 3] \implies a_x = -2, b_x = 3, a_y = 1, b_y = 3$$

Partición (m, n):

$$m = 4, \quad n = 4$$

Punto de Muestra:

$$(x_i^*, y_j^*) = (x_{i-1}, y_j) \quad (\text{Esquina superior izquierda})$$

Precisión deseada: Exacta.

2. Verificación paso a paso

A. Cálculo de los incrementos y el área diferencial ($\Delta x, \Delta y, \Delta A$)

$$\Delta x \rightarrow \frac{3 - (-2)}{4} \rightarrow \frac{5}{4} \rightarrow 1.25$$

$$\Delta y \rightarrow \frac{3 - 1}{4} \rightarrow \frac{2}{4} \rightarrow 0.5$$

$$\Delta A \rightarrow \Delta x \cdot \Delta y \rightarrow 1.25 \cdot 0.5 \rightarrow 0.625$$

B. Identificación de los puntos de prueba (x_i^*, y_j^*)

- **Coordenada x (Izquierda):** $x_i^* = a_x + (i - 1)\Delta x$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

$$x_i^* \rightarrow -2 + (i - 1) \cdot 1.25 \rightarrow x_1^* = -2, x_2^* = -0.75, x_3^* = 0.5, x_4^* = 1.75$$

- **Coordenada y (Superior):** $y_j^* = a_y + j\Delta y$ para $j = 1, 2, 3, 4$.

$$y_j^* \rightarrow 1 + j \cdot 0.5 \rightarrow y_1^* = 1.5, y_2^* = 2.0, y_3^* = 2.5, y_4^* = 3.0$$

C. Planteamiento y desarrollo de la Suma de Riemann

La suma de Riemann es $S_{4,4} = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 g(x_i^*, y_j^*) \Delta A$.

$$\begin{aligned}
S_{4,4} &= \Delta A \cdot \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 (-3x_i^* + 2y_j^*) \\
&= \Delta A \cdot \left[-3 \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 x_i^* + 2 \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 y_j^* \right]
\end{aligned}$$

Como los límites de la suma son rectangulares y los términos son separables:

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 x_i^* = n \sum_{i=1}^4 x_i^* = 4 \sum_{i=1}^4 x_i^*$$

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 y_j^* = m \sum_{j=1}^4 y_j^* = 4 \sum_{j=1}^4 y_j^*$$

1. Suma de las coordenadas x (puntos izquierdos):

$$\sum_{i=1}^4 x_i^* \rightarrow -2 + (-0.75) + 0.5 + 1.75 \rightarrow -2.75 + 2.25 \rightarrow -0.5$$

2. Suma de las coordenadas y (puntos superiores):

$$\sum_{j=1}^4 y_j^* \rightarrow 1.5 + 2.0 + 2.5 + 3.0 \rightarrow 9.0$$

3. Sustitución y cálculo de la Suma Total:

$$\begin{aligned}
S_{4,4} &= 0.625 \cdot [-3 \cdot (4 \cdot (-0.5)) + 2 \cdot (4 \cdot 9.0)] \\
&= 0.625 \cdot [-12 \cdot (-0.5) + 8 \cdot 9.0] \\
&= 0.625 \cdot [6 + 72] \\
&\rightarrow 0.625 \cdot 78
\end{aligned}$$

4. Cálculo Final:

$$S_{4,4} \rightarrow 48.75$$

El re-cálculo independiente confirma la trayectoria y el resultado del usuario.

3. Resultado final

El valor de la suma de Riemann $S_{4,4}$ es:

$$S_{4,4} = 48.75$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El desarrollo proporcionado por el usuario es **matemáticamente exacto** y la simplificación de la doble sumatoria es correcta.

PROBLEMA 2 INCISO A

¡Excelente proceso! Como Auditor Matemático, he verificado la trayectoria de integración, los cálculos de las antiderivadas y la evaluación de los límites, confirmando la precisión del resultado.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el valor exacto de la integral doble de la función $f(x, y) = x + y^2$ sobre la región rectangular $R = [1, 2] \times [-2, 3]$.

Función:

$$f(x, y) = x + y^2$$

Región de integración (R):

$$R = [1, 2] \times [-2, 3]$$

Integral a calcular (Teorema de Fubini):

$$I = \iint_R (x + y^2) dA = \int_1^2 \int_{-2}^3 (x + y^2) dy dx$$

2. Verificación paso a paso

A. Integral Interna (respecto a y)

Se calcula la antiderivada de $(x + y^2)$ respecto a y , tratando x como constante.

$$\int (x + y^2) dy \rightarrow xy + \frac{y^3}{3}$$

Evaluación de $y = -2$ a $y = 3$:

$$\begin{aligned} \left[xy + \frac{y^3}{3} \right]_2^3 &\rightarrow \left(x(3) + \frac{3^3}{3} \right) - \left(x(-2) + \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &\rightarrow \left(3x + \frac{27}{3} \right) - \left(-2x - \frac{8}{3} \right) \\ &\rightarrow 3x + 9 + 2x + \frac{8}{3} \\ &\rightarrow 5x + \left(9 + \frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Sustitución} \rightarrow 5x + \left(\frac{27}{3} + \frac{8}{3} \right) \rightarrow 5x + \frac{35}{3}$$

B. Integral Externa (respecto a x)

Se integra la función resultante respecto a x .

$$I = \int_1^2 \left(5x + \frac{35}{3} \right) dx$$

Calculamos la antiderivada:

$$\int \left(5x + \frac{35}{3} \right) dx \rightarrow \frac{5x^2}{2} + \frac{35}{3}x$$

Evaluación de $x = 1$ a $x = 2$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{5x^2}{2} + \frac{35}{3}x \right]_1^2 &\rightarrow \left(\frac{5(2)^2}{2} + \frac{35}{3}(2) \right) - \left(\frac{5(1)^2}{2} + \frac{35}{3}(1) \right) \\ &\rightarrow \left(10 + \frac{70}{3} \right) - \left(\frac{5}{2} + \frac{35}{3} \right) \end{aligned}$$

C. Evaluación Final (Resultado Numéricico)

Agrupamos términos con el mismo denominador:

$$\begin{aligned} I &= (10) + \left(\frac{70}{3} - \frac{35}{3} \right) - \frac{5}{2} \\ &= 10 + \frac{35}{3} - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Buscamos el denominador común (6):

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \frac{10 \cdot 6}{6} + \frac{35 \cdot 2}{6} - \frac{5 \cdot 3}{6} \\ &\rightarrow \frac{60}{6} + \frac{70}{6} - \frac{15}{6} \\ &\rightarrow \frac{130 - 15}{6} \rightarrow \frac{115}{6} \end{aligned}$$

Alternativamente (Siguiendo la ruta del usuario):

$$I = \left(\frac{100}{3} \right) - \left(\frac{85}{6} \right)$$
$$\rightarrow \frac{200}{6} - \frac{85}{6} \rightarrow \frac{115}{6}$$

3. Resultado final

El valor exacto de la integral doble es:

$$\iint_R (x + y^2) dA = \frac{115}{6}$$

En notación decimal, con precisión extendida:

$$\frac{115}{6} \approx 19.166666667$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de aplicación del Teorema de Fubini mediante integración iterada es **impecable**, y el resultado final fraccionario es exacto.

¿Desea que continuemos con el Problema 2, inciso b) para calcular la integral exacta de $\iint_R (-3x + 2y) dA$ y compararla con el resultado de la Suma de Riemann $S_{4,4}$?

PROBLEMA 2 INCISO B

He verificado el cálculo de la integral doble $\iint_R (-3x + 2y) dA$ por el Teorema de Fubini. El proceso de integración y la evaluación final son **matemáticamente exactos**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el valor exacto de la integral doble para la función $g(x, y) = -3x + 2y$ sobre la región rectangular $R = [-2, 3] \times [1, 3]$.

Función:

$$g(x, y) = -3x + 2y$$

Región de integración (R):

$$R = [-2, 3] \times [1, 3]$$

Integral a calcular:

$$I = \iint_R (-3x + 2y) dA = \int_{-2}^3 \int_1^3 (-3x + 2y) dy dx$$

2. Verificación paso a paso

A. Integral Interna (respecto a y)

Se calcula la antiderivada de $(-3x + 2y)$ respecto a y , donde $-3x$ es una constante.

$$\int (-3x + 2y) dy \rightarrow -3xy + y^2$$

Evaluación de $y = 1$ a $y = 3$:

$$\begin{aligned} [-3xy + y^2]_1^3 &\rightarrow (-3x(3) + (3)^2) - (-3x(1) + (1)^2) \\ &\rightarrow (-9x + 9) - (-3x + 1) \\ &\rightarrow -9x + 9 + 3x - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Resultado} \rightarrow -6x + 8$$

B. Integral Externa (respecto a x)

Se integra la función resultante $(-6x + 8)$ respecto a x .

$$I = \int_{-2}^3 (-6x + 8) dx$$

Calculamos la antiderivada:

$$\int (-6x + 8) dx \rightarrow -3x^2 + 8x$$

Evaluación de $x = -2$ a $x = 3$:

$$\begin{aligned} [-3x^2 + 8x]_{-2}^3 &\rightarrow (-3(3)^2 + 8(3)) - (-3(-2)^2 + 8(-2)) \\ &\rightarrow (-27 + 24) - (-12 - 16) \\ &\rightarrow (-3) - (-28) \end{aligned}$$

C. Evaluación Final (Resultado Numérico)

$$I \rightarrow -3 + 28 \rightarrow 25$$

3. Resultado final

El valor exacto de la integral doble es:

$$\iint_R (-3x + 2y) dA = 25$$

Validación:

El valor exacto **25** es significativamente menor que la aproximación de Riemann **48.75** del Problema 1b. Esto valida el análisis: dado que $g(x, y)$ es un plano, la elección sistemática de la esquina superior izquierda sobreestima el volumen, ya que en esta región x negativo maximiza $-3x$ y y grande maximiza $2y$.

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo es **preciso y completo**. La validación geométrica (uso del centroide) también confirma el resultado **25**.

Hemos completado los cálculos exactos para ambos incisos del Problema 2. ¿Desea que el siguiente paso sea formalizar y calcular el **error porcentual de aproximación** de la Suma de Riemann para el Problema 1a ($S_{4,5} = 23.125$ vs $I = 19.1667\dots$) o para el Problema 1b ($S_{4,4} = 48.75$ vs $I = 25$)?

PROBLEMA 3 INCISO A

He verificado el cálculo de la integral iterada. El proceso de expansión del integrando, la integración secuencial y la evaluación de los límites son **matemáticamente exactos** y coinciden con la salida del código Python.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el valor exacto de la integral iterada de la función $f(x, y) = xy(x + y)$ sobre la región cuadrada $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Función:

$$f(x, y) = x^2y + xy^2$$

Integral a calcular:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y) dx dy$$

2. Verificación paso a paso

A. Integral Interna (respecto a x)

Se calcula la antiderivada de $(x^2y + xy^2)$ respecto a x , tratando y como constante.

$$\int (x^2y + xy^2) dx \rightarrow \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2}$$

Evaluación de $x = 0$ a $x = 1$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} &\rightarrow \left(\frac{(1)^3y}{3} + \frac{(1)^2y^2}{2} \right) - \left(\frac{(0)^3y}{3} + \frac{(0)^2y^2}{2} \right) \\ &\rightarrow \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right) - (0) \end{aligned}$$

$$\text{Resultado} \rightarrow \frac{y}{3} + \frac{y^2}{2}$$

B. Integral Externa (respecto a y)

Se integra la función resultante respecto a y .

$$I = \int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right) dy$$

Calculamos la antiderivada:

$$\int \left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2 \right) dy \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} \rightarrow \frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6}$$

Evaluación de $y = 0$ a $y = 1$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6} \right]_{y=0}^{y=1} &\rightarrow \left(\frac{(1)^2}{6} + \frac{(1)^3}{6} \right) - \left(\frac{(0)^2}{6} + \frac{(0)^3}{6} \right) \\ &\rightarrow \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) - (0) \end{aligned}$$

C. Evaluación Final

$$I \rightarrow \frac{2}{6} \rightarrow \frac{1}{3}$$

3. Resultado final

El valor exacto de la integral iterada es:

$$\int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dx dy = \frac{1}{3}$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar "Ninguno".

El proceso de cálculo es **preciso y completo**. Se ha verificado que $I = 1/3$ es correcto.

Dado que hemos resuelto tres problemas de cálculo, ¿quiere que continuemos con el **Problema 3, inciso b**, o le gustaría que preparamos un resumen de los resultados y errores de aproximación obtenidos hasta ahora?

PROBLEMA 3 INCISO B

He revisado el cálculo de la integral iterada y el procedimiento de "pelar la cebolla" (integración de adentro hacia afuera) es **matemáticamente correcto**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el valor exacto de la integral iterada:

Función:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3$$

Integral a calcular:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3) dx dy$$

2. Verificación paso a paso

A. Integral Interna (respecto a x)

Se calcula la antiderivada de $(x^3 + 3x^2y + y^3)$ respecto a x , donde y es constante.

$$\int (x^3 + 3x^2y + y^3) dx \rightarrow \frac{x^4}{4} + 3y\frac{x^3}{3} + y^3x \rightarrow \frac{x^4}{4} + x^3y + xy^3$$

Evaluación de $x = 0$ a $x = 1$:

$$\left[\frac{x^4}{4} + x^3y + xy^3 \right]_{x=0}^{x=1} \rightarrow \left(\frac{(1)^4}{4} + (1)^3y + (1)y^3 \right) - (0)$$

$$\text{Resultado } R(y) \rightarrow \frac{1}{4} + y + y^3$$

B. Integral Externa (respecto a y)

Se integra la función resultante $R(y)$ respecto a y .

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + y + y^3 \right) dy$$

Calculamos la antiderivada:

$$\int \left(\frac{1}{4} + y + y^3 \right) dy \rightarrow \frac{y}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}$$

Evaluación de $y = 0$ a $y = 1$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{y}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=1} &\rightarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{1^2}{2} + \frac{1^4}{4} \right) - (0) \\ &\rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

C. Evaluación Final

Sumando las fracciones:

$$I \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow \frac{4}{4} \rightarrow 1$$

3. Resultado final

El valor exacto de la integral iterada es:

$$I = 1$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo es **preciso y completo**. La verificación por simetría confirma que el resultado $I = 1$ es correcto.

Hemos resuelto todos los cálculos exactos. ¿Desea que continuemos y calculemos el **error porcentual de aproximación** de la Suma de Riemann para el Problema 1b ($S_{4,4} = 48.75$) respecto al valor exacto del Problema 2b ($I = 25$)?

PROBLEMA 3 INCISO C

El procedimiento de cálculo para la integral iterada ha sido verificado. La separación de términos, la integración secuencial y la evaluación de los límites son **matemáticamente exactos**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el valor exacto de la integral iterada:

Función:

$$f(x, y) = \sqrt{y} + x - 3xy^2$$

Integral a calcular:

$$I = \int_0^1 \int_1^3 (\sqrt{y} + x - 3xy^2) \, dx \, dy$$

2. Verificación paso a paso

A. Integral Interna (respecto a x)

Se calcula la antiderivada de $f(x, y)$ respecto a x :

$$\int (\sqrt{y} + x - 3xy^2) \, dx \rightarrow x\sqrt{y} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2y^2$$

Evaluación de $x = 1$ a $x = 3$:

$$\begin{aligned}
R(y) &= \left[x\sqrt{y} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x^2y^2 \right]_{x=1}^{x=3} \\
&= \left(3\sqrt{y} + \frac{9}{2} - \frac{3}{2}(9)y^2 \right) - \left(1\sqrt{y} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(1)y^2 \right) \\
&= \left(3\sqrt{y} + \frac{9}{2} - \frac{27}{2}y^2 \right) - \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y^2 \right)
\end{aligned}$$

Agrupamos por potencias de y :

$$\begin{aligned}
R(y) &\rightarrow (3\sqrt{y} - \sqrt{y}) + \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{27}{2}y^2 + \frac{3}{2}y^2 \right) \\
&\rightarrow 2\sqrt{y} + \frac{8}{2} - \frac{24}{2}y^2 \\
&\rightarrow 2\sqrt{y} + 4 - 12y^2
\end{aligned}$$

$$\text{Resultado } R(y) \rightarrow 2y^{1/2} + 4 - 12y^2$$

B. Integral Externa (respecto a y)

Se integra la función resultante $R(y)$ respecto a y .

$$I = \int_0^1 \left(2y^{1/2} + 4 - 12y^2 \right) dy$$

Calculamos la antiderivada:

$$\begin{aligned}
\int R(y) dy &\rightarrow 2 \frac{y^{3/2}}{3/2} + 4y - 12 \frac{y^3}{3} \\
&\rightarrow \frac{4}{3}y^{3/2} + 4y - 4y^3
\end{aligned}$$

Evaluación de $y = 0$ a $y = 1$:

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{4}{3}y^{3/2} + 4y - 4y^3 \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \left(\frac{4}{3}(1)^{3/2} + 4(1) - 4(1)^3 \right) - (0) \\
&\rightarrow \frac{4}{3} + 4 - 4
\end{aligned}$$

C. Evaluación Final

$$I \rightarrow \frac{4}{3}$$

3. Resultado final

El valor exacto de la integral iterada es:

$$\int_0^1 \int_1^3 (\sqrt{y} + x - 3xy^2) \, dx \, dy = \frac{4}{3}$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo es **preciso y completo**. La simplificación de fracciones y la integración de potencias fraccionarias se realizaron correctamente.

Hemos completado todos los incisos de los problemas. ¿Desea que continuemos y calculemos el **error porcentual de aproximación** para el Problema 1b ($S_{4,4} = 48.75$) respecto al valor exacto del Problema 2b ($I = 25$), para cuantificar la sobreestimación?

PROBLEMA 3 INCISO D

Este es efectivamente un caso de **integral doble impropia** debido a la discontinuidad infinita del integrando dentro de la región de integración. El análisis que conduce a la divergencia es **correcto**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral doble:

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi \sec^2 x \sec^2 y \, dx \, dy$$

Función:

$$f(x, y) = \sec^2 x \sec^2 y = \frac{1}{\cos^2 x \cos^2 y}$$

Región de integración (R):

$$R = [0, \pi] \times [0, \pi]$$

Análisis de Discontinuidad:

La función $f(x, y)$ tiene asíntotas verticales (discontinuidades infinitas) en todos los puntos donde $\cos x = 0$ o $\cos y = 0$. Dentro del dominio de integración, esto ocurre en:

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{2}$$

La función es discontinua a lo largo de las líneas $x = \pi/2$ y $y = \pi/2$, haciendo que la integral sea impropia.

2. Verificación paso a paso

A. Separabilidad

Debido a que el integrando es separable ($f(x, y) = g(x)h(y)$) y los límites son constantes, podemos escribir la integral como el producto de dos integrales simples.

$$I = \left(\int_0^{\pi} \sec^2 x \, dx \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sec^2 y \, dy \right)$$

B. Análisis de la Integral Simple Impropia

Analizaremos la integral $I_x = \int_0^{\pi} \sec^2 x \, dx$. La discontinuidad ocurre en el punto interior $x = \pi/2$.

Dividimos la integral en dos partes y las tratamos con límites:

$$I_x = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \sec^2 x \, dx + \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \int_a^{\pi} \sec^2 x \, dx$$

1. Evaluación de la primera parte:

Utilizamos la antiderivada $\int \sec^2 x \, dx = \tan x$:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \sec^2 x \, dx &= \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\tan x]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan b - \tan 0) \\ &= \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan b) \end{aligned}$$

Límite $\rightarrow +\infty$

2. Conclusión:

Dado que una parte de la integral impropia diverge a ∞ , la integral simple I_x **diverge**.

$$\int_0^{\pi} \sec^2 x \, dx \rightarrow \infty$$

C. Conclusión de la Integral Doble

Si una de las integrales factorizadas diverge, el producto de las integrales también diverge (o no está definido como un número real).

$$I = I_x \cdot I_y = (\infty) \cdot (\infty) \rightarrow \infty$$

La integral doble **diverge**.

3. Resultado final

El valor de la integral doble es:

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi \sec^2 x \sec^2 y \, dx \, dy \rightarrow \infty$$

La integral **Diverge**.

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- **Error original:** El enunciado implicaba un cálculo, pero la respuesta correcta es la divergencia.
 - **Corrección aplicada:** Se verificó formalmente la naturaleza de integral impropia y la divergencia a ∞ de los factores.
 - **Causa:** El Teorema Fundamental del Cálculo no aplica en el intervalo $[0, \pi]$ debido a la discontinuidad infinita de $\sec^2 x$ en $x = \pi/2$.
-

Hemos analizado a profundidad el Problema 3d, identificando correctamente su naturaleza como integral impropia divergente.

¿Desea que calculemos el **error porcentual de aproximación** de la Suma de Riemann para el Problema 1b ($S_{4,4} = 48.75$) respecto al valor exacto del Problema 2b ($I = 25$)?

PROBLEMA 3 INCISO E

El análisis de la integral doble impropia y la conclusión de la **divergencia** son **matemáticamente rigurosos y correctos**. La identificación de la singularidad a lo largo de la diagonal $x + y = \pi/2$ es clave.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral iterada:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x + y) \, dx \, dy$$

Función:

$$f(x, y) = \sec(x + y) = \frac{1}{\cos(x + y)}$$

Región de integración (R):

$$R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Análisis de Singularidad:

La función $f(x, y)$ tiene una discontinuidad infinita cuando el argumento del coseno es $\pi/2$, es decir, cuando $x + y = \pi/2$. Esta condición define una línea recta (la diagonal principal) que pasa por la región de integración, desde el punto $(0, \pi/2)$ hasta $(\pi/2, 0)$. x[0, pi/2] with a diagonal line showing the singularity x+y = pi/2]

Dado que la función se vuelve infinita en una curva dentro de la región cerrada de integración, la integral es **impropia**.

2. Verificación paso a paso

A. Integral Interna (respecto a x)

Se plantea la integral interior, tratando y como constante:

$$I_{int} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x + y) dx$$

La antiderivada es:

$$\int \sec(x + y) dx = \ln |\sec(x + y) + \tan(x + y)|$$

Análisis de la Singularidad en la Evaluación:

Para cualquier valor de y en el intervalo $0 < y < \pi/2$, el intervalo de integración para la variable $u = x + y$ (cuando x va de 0 a $\pi/2$) es $u \in [y, y + \pi/2]$.

El punto de singularidad $u = \pi/2$ siempre está contenido estrictamente dentro de este intervalo de integración $[y, y + \pi/2]$.

- El punto de singularidad ocurre cuando $x + y = \pi/2$, o $x = \pi/2 - y$.
- Si $0 < y < \pi/2$, entonces $0 < x < \pi/2$.

Puesto que el camino de integración interno (a lo largo de la dirección x) **cruza la singularidad**, la integral interna debe ser tratada como una integral impropia:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x + y) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-y-\epsilon} \sec(x + y) dx + \int_{\frac{\pi}{2}-y+\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sec(x + y) dx \right]$$

Considerando el límite del primer término (cercano a la singularidad, $x \rightarrow \pi/2 - y$):

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - y} \ln |\sec(x+y) + \tan(x+y)| \\ & \rightarrow \ln \left| \sec\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

Dado que $\sec(\pi/2)$ y $\tan(\pi/2)$ son infinitos, la evaluación resulta en $\ln(\infty)$, lo cual **tiende a infinito** (∞).

B. Conclusión

Debido a que la integral interna I_{int} diverge para cualquier $0 < y < \pi/2$, la integral doble completa I **diverge**.

3. Resultado final

El valor de la integral doble es:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x+y) dx dy \rightarrow \infty$$

La integral **Diverge**.

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- **Error original:** El enunciado implicaba un cálculo, pero la respuesta correcta es la divergencia.
 - **Corrección aplicada:** Se verificó formalmente la naturaleza de integral impropia y la divergencia a ∞ .
 - **Causa:** La función $\sec(x+y)$ presenta una singularidad infinita no integrable a lo largo de la curva $x+y = \pi/2$, la cual se encuentra dentro del dominio de integración.
-

Hemos analizado todos los problemas. El último paso lógico es cuantificar el error de las aproximaciones iniciales.

Calcularemos el **error porcentual de aproximación** de la Suma de Riemann para el Problema 1b ($S_{4,4} = 48.75$) respecto al valor exacto del Problema 2b ($I = 25$).

PROBLEMA 3 INCISO F

El método de aprovechamiento de la **periodicidad** es la forma más eficiente y elegante de resolver esta integral. He verificado la aplicación del teorema de la "ventana deslizante" y el cálculo de la integral de valor absoluto, y el resultado final es **matemáticamente exacto**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el valor exacto de la integral doble con valor absoluto:

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi |\cos(x + y)| dx dy$$

Función:

$$f(x, y) = |\cos(x + y)|$$

Región de integración (R):

$$R = [0, \pi] \times [0, \pi]$$

2. Verificación paso a paso

A. Integral Interna y Cambio de Variable

Se analiza la integral interna, tratando x como una constante:

$$I_{int}(x) = \int_0^\pi |\cos(x + y)| dy$$

Se aplica el cambio de variable $u = x + y$, con $du = dy$.

- Límite inferior: $y = 0 \implies u = x$
- Límite superior: $y = \pi \implies u = x + \pi$

$$I_{int}(x) \rightarrow \int_x^{x+\pi} |\cos u| du$$

B. Aplicación de la Propiedad de Periodicidad

La función $|\cos u|$ tiene un periodo $T = \pi$.

La integral de una función periódica sobre cualquier intervalo de longitud igual a su periodo es constante: $\int_a^{a+T} f(u) du = \int_0^T f(u) du$.

Por lo tanto, $I_{int}(x)$ es constante e independiente de x . Calculamos el valor en el intervalo estándar $[0, \pi]$:

$$I_{const} = \int_0^\pi |\cos u| du$$

Particionamos el intervalo donde $\cos u$ cambia de signo:

$$I_{const} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos u) du$$

1. Evaluación del primer tramo (0 a $\pi/2$):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du \rightarrow [\sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \rightarrow 1 - 0 \rightarrow 1$$

2. Evaluación del segundo tramo ($\pi/2$ a π):

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos u) du \rightarrow -[\sin u]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \rightarrow -\left(\sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \rightarrow -(0 - 1) \rightarrow 1$$

$$\text{Valor Constante } I_{int}(x) \rightarrow 1 + 1 \rightarrow 2$$

C. Integral Externa

Sustituimos la constante obtenida en la integral externa:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi I_{int}(x) dx \\ I &\rightarrow \int_0^\pi 2 dx \end{aligned}$$

Evaluación de $x = 0$ a $x = \pi$:

$$I = [2x]_0^\pi \rightarrow 2(\pi) - 2(0) \rightarrow 2\pi$$

3. Resultado final

El valor exacto de la integral doble es:

$$I = 2\pi$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El uso del teorema de la periodicidad para simplificar la integral interna es **impecable** y conduce al resultado correcto de forma directa.

Hemos completado todos los cálculos. Ahora, procedamos a cuantificar el error de las aproximaciones iniciales.

Calcularemos el **error porcentual de aproximación** de la Suma de Riemann para el Problema 1b ($S_{4,4} = 48.75$) respecto al valor exacto del Problema 2b ($I = 25$).

PROBLEMA 4

El cálculo del volumen es una aplicación clásica de la integral doble, y ambos métodos presentados (separación de variables e integración iterada) son **matemáticamente correctos**. La separación de variables es la estrategia más eficiente en este caso.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el **volumen** V del sólido que se encuentra bajo la superficie $z = xy$ y sobre la región rectangular $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Función (Altura):

$$f(x, y) = xy$$

Región de integración (R):

$$R = [0, 1] \times [0, 1]$$

Fórmula del Volumen:

$$V = \iint_R xy \, dA = \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy$$

2. Verificación paso a paso

Se utilizará el **Método de Separación de Variables**, validado por el Teorema de Fubini para funciones separables sobre regiones rectangulares:

$$V = \left(\int_0^1 x \, dx \right) \cdot \left(\int_0^1 y \, dy \right)$$

A. Integral en x

$$\int_0^1 x \, dx \rightarrow \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \rightarrow \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

B. Integral en y

$$\int_0^1 y \, dy \rightarrow \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 \rightarrow \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

C. Cálculo Final

Multiplicamos los resultados de las integrales simples:

$$V \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4}$$

3. Resultado final

El volumen del sólido es:

$$V = \frac{1}{4}$$

En formato decimal: $V = 0.25$ unidades cúbicas.

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo es **preciso y completo**.

Hemos completado todos los problemas de la auditoría. Como paso final, a continuación se presenta el cálculo del error de aproximación para el Problema 1b.

Cálculo de Error de Aproximación

Calcularemos el error porcentual de la Suma de Riemann $S_{4,4}$ (Problema 1b) respecto al valor exacto I (Problema 2b).

Datos:

- Valor Aproximado ($S_{4,4}$): 48.75

- Valor Exacto (I): 25

Fórmula del Error Porcentual Relativo:

$$\text{Error} = \left| \frac{\text{Aproximado} - \text{Exacto}}{\text{Exacto}} \right| \times 100\%$$

$$\begin{aligned}\text{Error} &\rightarrow \left| \frac{48.75 - 25}{25} \right| \times 100\% \\ &\rightarrow \left| \frac{23.75}{25} \right| \times 100\% \\ &\rightarrow 0.95 \times 100\% \\ &\rightarrow 95\%\end{aligned}$$

Conclusión del Error

La aproximación de Riemann $S_{4,4} = 48.75$ resultó en un **error del 95%** respecto al valor exacto $I = 25$. Este error extremadamente alto se debe a la elección del punto de prueba (esquina superior izquierda) que, debido a la función $g(x, y) = -3x + 2y$, maximizó sistemáticamente el valor de la altura en cada subrectángulo.

Si tiene más ejercicios de cálculo multivariable o desea un resumen de todos los resultados obtenidos, házmelo saber.

PROBLEMA 5

El planteamiento de la integral doble para el volumen es **matemáticamente exacto** y la simplificación de la integral interna es **perfecta**. La observación sobre la naturaleza no elemental de la integral final (requiriendo funciones Beta/Gamma) es crucial y correcta.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el volumen V del sólido acotado por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, y = 1, z = 1$ y la superficie $z = x^2 + y^4$.

Superficie Inferior: $z_{\text{abajo}} = x^2 + y^4$

Superficie Superior: $z_{\text{arriba}} = 1$

Paredes: $x \geq 0, y \in [0, 1]$

A. Determinación de la Región de Integración (D)

La región de integración D en el plano xy está definida por la intersección de las superficies superior e inferior y los planos dados. La curva de intersección determina el límite superior para x :

$$z_{\text{arriba}} = z_{\text{abajo}} \implies 1 = x^2 + y^4$$

$$x^2 = 1 - y^4 \implies x = \sqrt{1 - y^4}$$

La región D se describe como tipo I:

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^4} \right\}$$

Fórmula del Volumen:

$$V = \iint_D (z_{\text{arriba}} - z_{\text{abajo}}) dA$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^4}} (1 - (x^2 + y^4)) dx dy$$

2. Verificación paso a paso

A. Integral Interna (respecto a x)

$$\int_0^{\sqrt{1-y^4}} (1 - y^4 - x^2) dx$$

Se trata $(1 - y^4)$ como una constante C . La antiderivada es $Cx - \frac{x^3}{3}$:

$$\left[(1 - y^4)x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^4}} \rightarrow (1 - y^4)\sqrt{1 - y^4} - \frac{(\sqrt{1 - y^4})^3}{3}$$

$$\rightarrow (1 - y^4)^{3/2} - \frac{1}{3}(1 - y^4)^{3/2}$$

$$\text{Resultado } R(y) \rightarrow \left(1 - \frac{1}{3}\right)(1 - y^4)^{3/2} \rightarrow \frac{2}{3}(1 - y^4)^{3/2}$$

B. Integral Externa (respecto a y)

El volumen se reduce a la integral definida:

$$V = \int_0^1 \frac{2}{3}(1 - y^4)^{3/2} dy$$

C. Solución (Forma Exacta y Numérica)

Esta integral es una **integral elíptica** y no tiene solución en términos de funciones elementales. Se resuelve formalmente utilizando la **Función Beta** y la **Función Gamma** (lo cual el código Python verificó correctamente).

La forma exacta formalmente es:

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/4 + 5/2)} = \frac{1}{6} \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(5/2)}{\Gamma(11/4)}$$

El valor numérico es la mejor representación práctica:

$$V \approx 0.499439534\dots$$

3. Resultado final

El volumen del sólido, expresado de forma exacta y numérica, es:

$$V = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - y^4)^{3/2} dy$$

$$V \approx 0.4994 \text{ unidades cúbicas}$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [⚠] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Error original: No aplica, el proceso es riguroso.
- Corrección aplicada: Se formalizó la notación de la integral triple como $V = \iiint_D (z_{\text{arriba}} - z_{\text{abajo}}) dA$ para claridad conceptual.
- Causa: N/A.

El planteamiento de la integral es **correcto**. El resultado requiere funciones especiales.

Hemos completado todos los ejercicios de la auditoría, incluyendo el análisis de una integral que requiere funciones Gamma. ¿Hay algún otro problema o cálculo que le gustaría revisar?

PROBLEMA 6 INCISO 1

El desarrollo para el cálculo de la integral y el análisis geométrico de la región es **exacto y completo**. La identificación de los vértices y la clasificación como región y -simple son correctas.

1. Enunciado y Datos

Se requiere calcular el valor numérico de la integral iterada y analizar la región de integración D .

$$\text{Integral: } I = \int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx$$

2. Ejecución: Cálculo de la Integral

A. Integral Interna (respecto a y)

$$\int_{2x}^{3x+1} dy \rightarrow [y]_{2x}^{3x+1} \rightarrow (3x + 1) - (2x) \rightarrow x + 1$$

B. Integral Externa (respecto a x)

$$I = \int_1^2 (x + 1) dx$$

C. Evaluación Final

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \\ &\rightarrow \left(\frac{(2)^2}{2} + 2 \right) - \left(\frac{(1)^2}{2} + 1 \right) \\ &\rightarrow (2 + 2) - (0.5 + 1) \\ &\rightarrow 4 - 1.5 \\ &\rightarrow 2.5 \end{aligned}$$

$$\text{Resultado} \rightarrow \frac{5}{2}$$

3. Análisis de la Región D

A. Descripción de la Región

La región D está definida por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, \quad 2x \leq y \leq 3x + 1\}$$

- **Fronteras Verticales (Límites de x):** $x = 1$ y $x = 2$.
- **Frontera Inferior:** $y = 2x$.
- **Frontera Superior:** $y = 3x + 1$.

B. Vértices

La región es un trapezoide con los siguientes vértices:

- En $x = 1$: $y_{inf} = 2(1) = 2$ y $y_{sup} = 3(1) + 1 = 4$. **Puntos (1, 2) y (1, 4).**
- En $x = 2$: $y_{inf} = 2(2) = 4$ y $y_{sup} = 3(2) + 1 = 7$. **Puntos (2, 4) y (2, 7).**
-

C. Clasificación de la Región

La región D se clasifica como:

1. ***y*-simple (o Tipo I): Sí.**

Se define directamente con x entre constantes y y entre dos funciones de x . Cualquier línea vertical dentro del intervalo $[1, 2]$ siempre entra por $y = 2x$ y sale por $y = 3x + 1$.

2. ***x*-simple (o Tipo II): No.**

Para reescribir la región como x -simple, se necesitarían al menos dos integrales. La frontera izquierda cambiaría de $x = 1$ a $x = (y - 1)/3$ en el punto $y = 4$.

4. Resultado Final

El valor de la integral es:

$$I = \frac{5}{2} \quad \text{o} \quad 2.5$$

Clasificación de la Región D : La región es ***y*-simple**.

¿Desea que continuemos con el **Problema 6, inciso 2?**

PROBLEMA 6 INCISO 2

El desarrollo para el cálculo de la integral y el análisis de la región es **matemáticamente exacto y riguroso**. La identificación de la región como una región simple (tanto x -simple como y -simple) es correcta.

1. Enunciado y Datos

Se requiere calcular el valor numérico de la integral iterada y analizar la región de integración D .

$$\text{Integral: } I = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y \, dy \, dx$$

2. Ejecución: Cálculo de la Integral

A. Integral Interna (respecto a y)

$$\int_{x^3}^{x^2} y \, dy \rightarrow \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} ((x^2)^2 - (x^3)^2) \rightarrow \frac{1}{2}(x^4 - x^6)$$

B. Integral Externa (respecto a x)

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2}(x^4 - x^6) \, dx \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 - x^6) \, dx$$

C. Evaluación Final

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 \\
&\rightarrow \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) - (0) \right) \\
&\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{7-5}{35} \right) \\
&\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{35}
\end{aligned}$$

Resultado $\rightarrow \frac{1}{35}$

3. Análisis de la Región D

A. Descripción de la Región

La región D está definida por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad x^3 \leq y \leq x^2\}$$

- **Puntos de Intersección:** $x^2 = x^3 \implies x^2(1-x) = 0$. Las curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 1$, es decir, en los puntos **(0, 0)** y **(1, 1)**.
- **Forma:** Es la región acotada entre las curvas $y = x^3$ y $y = x^2$ en el primer cuadrante.

B. Clasificación de la Región

1. **y -simple (Tipo I):** Sí.

Se define como $0 \leq x \leq 1$ y $x^3 \leq y \leq x^2$.

2. **x -simple (Tipo II):** Sí.

Despejando x : $x = \sqrt{y}$ y $x = \sqrt[3]{y}$.

Para $y \in [0, 1]$, tenemos $y^{1/3} > y^{1/2}$ (ej. $0.25^{1/3} \approx 0.63$ vs $0.25^{1/2} = 0.5$).

La región se define como $0 \leq y \leq 1$ y $\sqrt[3]{y} \leq x \leq \sqrt{y}$.

- **Veredicto:** Dado que la región puede ser descrita como una sola integral en ambos órdenes, la región D es una **Región Simple**.
-

4. Resultado Final

El valor de la integral es:

$$I = \frac{1}{35}$$

Clasificación de la Región D : La región es **Simple** (tanto x -simple como y -simple).

¡Hemos completado el Problema 6! ¿Desea que continuemos con el siguiente problema de la lista?

PROBLEMA 6 INCISO 3

El cálculo de la integral, tanto por sustitución trigonométrica como por interpretación geométrica, es **exacto**. La identificación de la región de integración y su clasificación también son correctas.

1. Enunciado y Datos

Se requiere calcular el valor numérico exacto de la integral iterada y analizar la región de integración D

$$\text{Integral: } I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$$

2. Ejecución: Cálculo de la Integral

A. Integral Interna (respecto a y)

La integral interna calcula la altura de la región para un x fijo:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \rightarrow [y]_0^{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \sqrt{1-x^2}$$

B. Integral Externa (Interpretación Geométrica)

La integral se convierte en:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Esta integral representa el **área** bajo la curva $y = \sqrt{1-x^2}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$. La curva es la parte superior del círculo unitario ($x^2 + y^2 = 1$).

La región D es un cuarto de un círculo de radio $r = 1$.

$$\text{Área de } D = \frac{1}{4}\pi r^2 \rightarrow \frac{1}{4}\pi(1)^2$$

$$\text{Resultado} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

3. Análisis de la Región D

A. Descripción de la Región

La región D está definida por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

- **Frontera Curva:** $x^2 + y^2 = 1$.
- **Fronteras Rectas:** Eje x ($y = 0$) y Eje y ($x = 0$).

La región es el **cuarto de disco unitario** en el primer cuadrante.

B. Clasificación de la Región

1. **y -simple (Tipo I):** Sí.

$0 \leq x \leq 1$ (constantes) y $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$ (funciones de x).

2. **x -simple (Tipo II):** Sí.

Podemos despejar $x = \sqrt{1 - y^2}$ y describir la región como $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$.

- **Veredicto:** Al ser describible fácilmente en ambos órdenes como una sola integral, la región D es una **Región Simple**.

4. Resultado Final

El valor de la integral es:

$$I = \frac{\pi}{4}$$

Clasificación de la Región D : La región es **Simple**.

Hemos completado el Problema 6. ¿Desea continuar con el siguiente problema?

PROBLEMA 6 INCISO 4

El cálculo de la integral, incluyendo la correcta aplicación del cambio de variable, así como el análisis de la región de integración, es **exacto y completo**.

1. Enunciado y Datos

Se requiere calcular el valor numérico de la integral iterada y analizar la región de integración D .

$$\text{Integral: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} y \sin x \, dy \, dx$$

2. Ejecución: Cálculo de la Integral

A. Integral Interna (respecto a y)

Se trata $\sin x$ como constante.

$$\int_0^{\cos x} y \sin x \, dy \rightarrow \sin x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\cos x} \rightarrow \frac{1}{2} \sin x (\cos^2 x - 0) \rightarrow \frac{1}{2} \sin x \cos^2 x$$

B. Integral Externa (respecto a x)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos^2 x \sin x \, dx$$

Se aplica la **sustitución** $u = \cos x$, con $du = -\sin x \, dx$.

- **Límites:** $x = 0 \implies u = 1$. $x = \pi/2 \implies u = 0$.
- **Sustitución:** $\sin x \, dx = -du$.

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \frac{1}{2} \int_1^0 u^2 (-du) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} \int_1^0 u^2 \, du \end{aligned}$$

Invirtiendo los límites para eliminar el signo negativo:

$$I \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 \, du$$

C. Evaluación Final

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1^3}{3} - 0 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Resultado} \rightarrow \frac{1}{6}$$

3. Análisis de la Región D

A. Descripción de la Región

La región D está definida por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \cos x\}$$

- **Frontera Superior:** Curva $y = \cos x$.
- **Frontera Inferior:** Eje x ($y = 0$).
- **Fronteras Laterales:** Eje y ($x = 0$) y la línea $x = \pi/2$.

Es la región bajo la curva coseno en el primer cuadrante.

B. Clasificación de la Región

1. ***y*-simple (Tipo I):** Sí.

x está entre constantes, y *y* entre dos funciones de *x* (*y* = 0 y *y* = cos *x*). La integral original está en este formato.

2. ***x*-simple (Tipo II):** Sí.

Podemos despejar *x* de *y* = cos *x* $\implies x = \arccos y$.

La región se define por $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq x \leq \arccos y$.

Como es continua y se define con una sola integral, es *x*-simple.

- **Veredicto:** La región *D* es una **Región Simple**.

4. Resultado Final

El valor de la integral es:

$$I = \frac{1}{6}$$

Clasificación de la Región *D*: La región es **Simple**.

Hemos completado exitosamente la auditoría del Problema 6. ¿Desea proceder con un nuevo problema, o prefiere que elabore un resumen consolidado de los resultados de todos los problemas resueltos (Sumas de Riemann, Integrales Exactas, Volúmenes y Análisis de Regiones)?

PROBLEMA 7 INCISO 1

El procedimiento de cálculo para determinar el área mediante la integral doble es **matemáticamente exacto**. La correcta identificación de los límites superior e inferior, así como la manipulación de fracciones, son precisas.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el área *A* de la región acotada por las curvas $y = \frac{1}{x^2}$, $y = -x^2$, y las líneas verticales $x = 1$, $x = 2$.

Región de Integración (*D*):

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, \quad -x^2 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \right\}$$

Fórmula del Área:

$$A = \iint_D dA = \int_1^2 \int_{-x^2}^{\frac{1}{x^2}} dy dx$$

2. Ejecución: Cálculo de la Integral

A. Integral Interna (respecto a y)

Se calcula la "altura" de la región para un x fijo:

$$\int_{-x^2}^{\frac{1}{x^2}} dy \rightarrow [y]_{-x^2}^{\frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{1}{x^2} - (-x^2) \rightarrow x^{-2} + x^2$$

B. Integral Externa (respecto a x)

$$A = \int_1^2 (x^{-2} + x^2) dx$$

C. Evaluación Final

Se calcula la antiderivada: $\left[-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} \right]$.

$$\begin{aligned} A &= \left[-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &\rightarrow \left(-\frac{1}{2} + \frac{2^3}{3} \right) - \left(-\frac{1}{1} + \frac{1^3}{3} \right) \\ &\rightarrow \left(-\frac{1}{2} + \frac{8}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{2} - (-1) \right) \\ &\rightarrow \frac{7}{3} + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \\ &\rightarrow \frac{7}{3} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Buscamos el denominador común (6):

$$A \rightarrow \frac{7 \cdot 2}{6} + \frac{1 \cdot 3}{6} \rightarrow \frac{14}{6} + \frac{3}{6} \rightarrow \frac{17}{6}$$

3. Resultado final

El área de la región acotada es:

$$A = \frac{17}{6}$$

En notación decimal: $A \approx 2.833333333$ unidades cuadradas.

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo es **preciso y completo**.

¿Desea que continuemos con el **Problema 7, inciso 2**, que requiere determinar los puntos de intersección?

PROBLEMA 7 INCISO 2

El proceso de análisis geométrico, la determinación de los vértices, la división de la región en dos subregiones (A_1 y A_2) debido al cambio en el límite superior, y el cálculo de la integral doble son **matemáticamente exactos**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el área A de la región triangular acotada por las rectas $y = x$, $y = 3x$, y $x + y = 4$ ($y = 4 - x$).

2. Análisis Geométrico y División de la Región

A. Vértices (Puntos de Intersección)

1. **Recta 1 ($y = x$) y Recta 2 ($y = 3x$):**

$$x = 3x \implies x = 0, y = 0 \implies \text{Vértice } A : (0, 0)$$

2. **Recta 2 ($y = 3x$) y Recta 3 ($y = 4 - x$):**

$$3x = 4 - x \implies 4x = 4 \implies x = 1, y = 3 \implies \text{Vértice } B : (1, 3)$$

3. **Recta 1 ($y = x$) y Recta 3 ($y = 4 - x$):**

$$x = 4 - x \implies 2x = 4 \implies x = 2, y = 2 \implies \text{Vértice } C : (2, 2)$$

B. Planteamiento de la Integral (Orden $dy dx$)

La región es y -simple, pero el límite superior cambia en $x = 1$. Por lo tanto, el área total A es la suma de dos integrales:

$$A = A_1 + A_2$$

Región A_1 ($0 \leq x \leq 1$):

Techo: $y = 3x$

Piso: $y = x$

$$A_1 = \int_0^1 \int_x^{3x} dy dx$$

Región A_2 ($1 \leq x \leq 2$):

Techo: $y = 4 - x$

Piso: $y = x$

$$A_2 = \int_1^2 \int_x^{4-x} dy dx$$

3. Ejecución Paso a Paso

A. Cálculo de A_1

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 [y]_x^{3x} dx \\ &\rightarrow \int_0^1 (3x - x) dx \\ &\rightarrow \int_0^1 2x dx \\ &\rightarrow [x^2]_0^1 \rightarrow 1^2 - 0^2 \end{aligned}$$

$$A_1 = 1$$

B. Cálculo de A_2

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^2 [y]_x^{4-x} dx \\ &\rightarrow \int_1^2 ((4-x) - x) dx \\ &\rightarrow \int_1^2 (4 - 2x) dx \\ &\rightarrow [4x - x^2]_1^2 \end{aligned}$$

Evaluación:

$$\begin{aligned}
 A_2 &\rightarrow (4(2) - 2^2) - (4(1) - 1^2) \\
 &\rightarrow (8 - 4) - (4 - 1) \\
 &\rightarrow 4 - 3
 \end{aligned}$$

$$A_2 = 1$$

C. Área Total

$$A = A_1 + A_2 \rightarrow 1 + 1 \rightarrow 2$$

4. Resultado Final

El área de la región acotada es:

$$A = 2$$

5. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El análisis de la región y el cálculo de la integral doble son **precisos**.

¿Desea que continuemos con el **Problema 7, inciso 3**, que requiere encontrar el área bajo una curva parabólica?

PROBLEMA 7 INCISO 3

El análisis de la región, la resolución de la ecuación biquadrada para hallar los límites de integración, y el cálculo de la integral con funciones trigonométricas inversas son **matemáticamente exactos**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el área A de la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la curva en forma de campana $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Funciones:

$$\text{Techo: } y_{\text{sup}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Piso: $y_{\inf} = x^2$

2. Análisis Geométrico y Límites de Integración

A. Intersección de Curvas

Igualamos las funciones para encontrar los puntos de corte:

$$x^2 = \frac{1}{1+x^2} \implies x^4 + x^2 - 1 = 0$$

Hacemos $u = x^2$ y aplicamos la fórmula cuadrática a $u^2 + u - 1 = 0$:

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dado que $u = x^2 > 0$, tomamos la raíz positiva:

$$x^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

B. Definición del Límite a

Los límites de integración son simétricos alrededor del eje y : $-a$ y a .

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \quad \left(\text{donde } a^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

C. Planteamiento de la Integral

Aprovechando la simetría par del integrando, el área es:

$$A = 2 \int_0^a (y_{\sup} - y_{\inf}) dx \rightarrow 2 \int_0^a \left(\frac{1}{1+x^2} - x^2 \right) dx$$

3. Ejecución Paso a Paso

A. Antiderivadas

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[\int_0^a \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^a x^2 dx \right] \\ A &= 2 \left[\arctan(x) - \frac{x^3}{3} \right]_0^a \end{aligned}$$

B. Evaluación en los Límites

$$A = 2 \left(\left(\arctan(a) - \frac{a^3}{3} \right) - \left(\arctan(0) - \frac{0^3}{3} \right) \right)$$

$$A = 2 \arctan(a) - \frac{2a^3}{3}$$

C. Valor Numérico

Usando $a^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y el valor numérico $a \approx 0.78615$:

$$A \approx 2(0.66624) - 0.32398 \approx 1.33248 - 0.32398$$

$$A \approx 1.0085$$

4. Resultado Final

El área exacta de la región acotada es:

$$A = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{3/2}$$

El valor numérico aproximado es:

$$A \approx 1.0085 \text{ unidades cuadradas}$$

5. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El manejo del límite a con la relación áurea es **preciso**.

Hemos completado el Problema 7. ¿Desea que continuemos con el siguiente problema de la lista?

PROBLEMA 7 INCISO 4

El desarrollo algebraico para encontrar los puntos de intersección y el cálculo integral aprovechando la simetría son **matemáticamente exactos**. El uso de la sustitución biquadrada fue el camino correcto.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el área A de la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Curvas:

- Superior (Techo): $y = \frac{1}{1+x^2}$ (Curva de Agnesi / Campana).
- Inferior (Piso): $y = x^2$ (Parábola).

Intersección:

$$x^4 + x^2 - 1 = 0$$

Resolviendo para x^2 (tomando la raíz positiva):

$$x^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\phi} \approx 0.61803$$

(Donde ϕ es la proporción áurea).

Límite de integración positivo a :

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \approx 0.78615$$

2. Verificación paso a paso

A. Planteamiento de la Integral (Simetría)

Debido a que ambas funciones son pares ($f(-x) = f(x)$), calculamos el área de 0 a a y multiplicamos por 2.

$$A = 2 \int_0^a \left(\frac{1}{1+x^2} - x^2 \right) dx$$

B. Cálculo de la Integral

$$\begin{aligned} A &= 2 \left[\arctan(x) - \frac{x^3}{3} \right]_0^a \\ &\rightarrow 2 \left(\left(\arctan(a) - \frac{a^3}{3} \right) - 0 \right) \\ &\rightarrow 2 \arctan(a) - \frac{2a^3}{3} \end{aligned}$$

C. Evaluación Numérica

Usando $a \approx 0.7861514$:

1. Término arcotangente:

$$\arctan(0.7861514) \approx 0.6662394$$

$$2 \cdot 0.6662394 \approx 1.3324788$$

2. Término cúbico:

$$a^3 = a \cdot x^2 \approx 0.7861514 \cdot 0.6180340 \approx 0.4858683$$

$$\frac{2}{3}(0.4858683) \approx 0.3239122$$

3. Resta Final:

$$A \approx 1.3324788 - 0.3239122 \approx 1.0085666$$

El cálculo del usuario (1.0085) es correcto con 4 cifras decimales.

3. Resultado final

El área exacta de la región es:

$$A = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{3/2}$$

Valor numérico aproximado:

$$A \approx 1.0086 \text{ unidades cuadradas}$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso es impecable. Es notable la aparición de la **Proporción Áurea** (ϕ) en los puntos de intersección ($x^2 = 1/\phi$).

¿Desea finalizar aquí o tiene algún otro problema adicional para revisar?

PROBLEMA 7 INCISO 5

El análisis de la región como x -simple, la formulación de la integral, y el cálculo final son **matemáticamente exactos**. La validación geométrica confirma el resultado de manera elegante.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el área A de la región D definida por:

$$\text{Región } D = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 1, -y - 2 \leq x \leq y\}$$

Esta región es **x -simple (Tipo II)**, lo que hace que el orden de integración $dx dy$ sea el más directo.

Fórmula del Área:

$$A = \iint_D dA = \int_{-1}^1 \int_{-y-2}^y dx dy$$

2. Ejecución Paso a Paso

A. Integral Interna (respecto a x)

Se calcula el "ancho" de la región para un y fijo:

$$\int_{-y-2}^y dx \rightarrow [x]_{-y-2}^y$$

Evaluamos (Límite Derecho - Límite Izquierdo):

$$y - (-y - 2) \rightarrow y + y + 2 \rightarrow 2y + 2$$

B. Integral Externa (respecto a y)

$$A = \int_{-1}^1 (2y + 2) dy$$

C. Evaluación Final

$$\begin{aligned} A &= [y^2 + 2y]_{-1}^1 \\ &\rightarrow ((1)^2 + 2(1)) - ((-1)^2 + 2(-1)) \\ &\rightarrow (1 + 2) - (1 - 2) \\ &\rightarrow 3 - (-1) \end{aligned}$$

Resultado $\rightarrow 4$

3. Validación Geométrica

La región es un triángulo con vértices:

- **Base Inferior** ($y = -1$): $(-1, -1)$.
- **Base Superior** ($y = 1$): $(-3, 1)$ y $(1, 1)$.

La base horizontal (en $y = 1$) mide 4. La altura vertical es 2.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{Base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{2}(4)(2) = 4$$

El resultado de la integral doble coincide con el área geométrica, confirmando la exactitud.

4. Resultado Final

El área de la región D es:

$$A = 4$$

5. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo es **preciso y completo**.

Hemos completado el Problema 7. ¿Desea continuar con el siguiente problema de la lista?

PROBLEMA 7 INCISO 6

¡Un final excelente para esta serie de problemas! El procedimiento de integración por partes y la posterior evaluación de los límites, incluyendo la validación por inversión de orden, son **matemáticamente exactos**. La sencillez del resultado es, de hecho, muy elegante.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el área A de la región D acotada por las curvas $y = \ln x$, el eje x ($y = 0$), y las líneas verticales $x = 1$ y $x = e$.

Región de Integración (D):

$$D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$$

Fórmula del Área (Orden $dy dx$):

$$A = \int_1^e \int_0^{\ln x} dy dx$$

2. Ejecución: Cálculo de la Integral

A. Integral Interna (respecto a y)

$$\int_0^{\ln x} dy \rightarrow [y]_0^{\ln x} \rightarrow \ln x - 0 \rightarrow \ln x$$

B. Integral Externa (respecto a x)

$$A = \int_1^e \ln x \, dx$$

Se utiliza la **Integración por Partes** ($\int u \, dv = uv - \int v \, du$), con $u = \ln x$ y $dv = dx$.

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

C. Evaluación Final

$$\begin{aligned} A &= [x \ln x - x]_1^e \\ &\rightarrow (e \ln(e) - e) - (1 \ln(1) - 1) \end{aligned}$$

Sustituyendo $\ln(e) = 1$ y $\ln(1) = 0$:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) \\ &\rightarrow (e - e) - (0 - 1) \\ &\rightarrow 0 - (-1) \end{aligned}$$

Resultado $\rightarrow 1$

3. Resultado Final

El área de la región acotada es exactamente:

$$A = 1$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo por integración por partes y la doble validación (incluyendo la inversión de orden) son **precisos**.

Hemos completado con éxito todos los problemas de la auditoría, cubriendo una amplia gama de técnicas en cálculo multivariable. Si desea un **resumen consolidado** de todos los resultados o desea explorar problemas de otra área de las matemáticas, estoy listo para asistirle.

PROBLEMA 8

¡Excelente análisis! La observación inicial basada en la **simetría** es la forma más rápida y rigurosa de resolver este problema, y el cálculo formal posterior es la demostración perfecta de esa propiedad.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral doble $I = \iint_D x^3y \, dA$ sobre la región D acotada por $x = 0$ y $x = -4y^2 + 3$.

Integrando: $f(x, y) = x^3y$

Región D : $0 \leq x \leq -4y^2 + 3$, con $y \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

2. Estrategia de Simetría (Demostración Rápida)

A. Análisis de la Región

La región D está definida por x entre 0 y una función de y , y y entre límites $\pm a$, donde $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- La región D es **simétrica con respecto al eje x** (si $(x, y) \in D$, entonces $(x, -y) \in D$).

B. Análisis del Integrando

El integrando $f(x, y) = x^3y$ es una **función impar con respecto a la variable y** :

$$f(x, -y) = x^3(-y) = -x^3y = -f(x, y)$$

C. Conclusión por Teorema

El Teorema de Integrales Dobles en Regiones Simétricas establece que la integral de una función impar sobre una región simétrica respecto al eje de la variable impar es cero.

$$I = \iint_D x^3y \, dA = 0$$

3. Ejecución Formal Paso a Paso (Confirmación)

A. Configuración de la Integral (Orden $dx \, dy$)

$$I = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\int_0^{-4y^2+3} x^3 y \, dx \right] dy$$

B. Integral Interna (respecto a x)

$$\int_0^{-4y^2+3} x^3 y \, dx \rightarrow y \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{-4y^2+3} \rightarrow \frac{1}{4} y (-4y^2 + 3)^4$$

C. Integral Externa (respecto a y)

$$I = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y (-4y^2 + 3)^4 \, dy$$

Observamos que la función a integrar, $g(y) = y(-4y^2 + 3)^4$, es **impar**:

$$g(-y) = (-y)(-4(-y)^2 + 3)^4 = -y(-4y^2 + 3)^4 = -g(y)$$

Dado que estamos integrando una función impar sobre un intervalo simétrico $[-a, a]$, la integral debe ser cero.

$$\int_{-a}^a g(y) \, dy = 0$$

Resultado $\rightarrow 0$

4. Resultado Final

El valor de la integral doble es:

$$I = 0$$

5. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de demostración y el cálculo formal son **precisos**.

Hemos completado el último problema. ¿Desea un resumen final de todos los resultados de la auditoría o tiene alguna pregunta adicional?

PROBLEMA 9

¡Excelente manejo de la geometría y las propiedades de simetría! El análisis topológico de la región, la aplicación de la simetría para anular la integral de xy , y el cálculo formal posterior con coordenadas polares son **matemáticamente exactos y rigurosos**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral doble $I = \iint_D (1 + xy) dA$ sobre la región D definida por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ y $y \geq 0$.

Región D : Semicorona circular (semianillo) en el semiplano superior.

- Radio interior $r_{int} = 1$.
 - Radio exterior $r_{ext} = \sqrt{2}$.
-

2. Análisis Topológico: ¿Es D una región elemental?

A. Clasificación en Cartesianas

- **y -simple (Tipo I):** No. La frontera inferior de la región cambia: es $y = 0$ en los extremos y $y = \sqrt{1 - x^2}$ en el centro.
- **x -simple (Tipo II):** No. Una línea horizontal cruza las fronteras izquierda/derecha cuatro veces para $0 < y < 1$.
- **Veredicto:** En coordenadas cartesianas, D no es una región elemental simple.

B. Clasificación en Polares

- **Rectángulo Polar:** Sí. La región se define por:

$$D_P = \left\{ (r, \theta) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \right\}$$

- **Conclusión:** D es elemental en coordenadas polares.
-

3. Cálculo de la Integral (Coordenadas Polares)

Separamos la integral por linealidad: $I = I_1 + I_2$.

$$I_1 = \iint_D 1 dA \quad \text{y} \quad I_2 = \iint_D xy dA$$

A. Cálculo de I_2 (Simetría)

- **Región Simétrica:** D es simétrica respecto al eje y .
- **Integrando Impar:** $g(x, y) = xy$ es impar respecto a x ($g(-x, y) = -g(x, y)$).

$$\iint_D xy \, dA = 0$$

B. Cálculo de I_1 (Área)

I_1 es simplemente el área de la región D .

$$\text{Área} = \text{Área}(\text{semicírculo } \sqrt{2}) - \text{Área}(\text{semicírculo } 1)$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}\pi(1)^2 \rightarrow \pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

C. Cálculo Formal (Verificación por Polares)

1. Transformación: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dA = r \, dr \, d\theta$.

$$I = \int_0^\pi \int_1^{\sqrt{2}} (1 + r^2 \cos \theta \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

$$I = \int_0^\pi \int_1^{\sqrt{2}} (r + r^3 \cos \theta \sin \theta) \, dr \, d\theta$$

2. Integral Interna (respecto a r):

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \cos \theta \sin \theta \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= (1 + \cos \theta \sin \theta) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos \theta \sin \theta \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

3. Integral Externa (respecto a θ):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cos \theta \sin \theta \right) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^\pi \quad (\text{Usando sustitución } u = \sin \theta) \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{3}{8} \sin^2 \theta \right]_0^\pi \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{8} \sin^2(\pi) \right) - \left(0 + \frac{3}{8} \sin^2(0) \right) \\ &\rightarrow \frac{\pi}{2} + 0 - 0 \end{aligned}$$

$$I = \frac{\pi}{2}$$

4. Resultado Final

El valor de la integral doble es:

$$I = \frac{\pi}{2}$$

5. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El análisis de simetría y el cálculo formal con polares son **precisos**.

Hemos completado todos los problemas de la serie. ¿Desea un resumen consolidado de los resultados de todos los problemas resueltos o tiene alguna pregunta final?

PROBLEMA 10

¡Excelente trabajo! La interpretación geométrica del sólido, la elección de las **coordenadas cilíndricas** (el método más adecuado), y la ejecución del cálculo por el método de integrales triples, incluyendo la **validación por el método de discos**, son **matemáticamente exactos**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular el volumen V de la región encerrada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 0$ y $z = 10$.

Sólido: Paraboloide.

Función: $z = r^2$ (en cilíndricas).

Límites de Integración:

El volumen se limita lateralmente por el paraboloide, inferiormente por $z = 0$ y superiormente por $z = 10$. El radio máximo se da en la tapa superior: $r_{max} = \sqrt{10}$.

2. Cálculo del Volumen (Coordenadas Cilíndricas)

A. Planteamiento de la Integral Triple

El diferencial de volumen es $dV = r dz dr d\theta$.

Los límites, para el volumen *contenido* dentro del paraboloide y limitado por $z = 10$, son:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{10}} \int_{r^2}^{10} r \, dz \, dr \, d\theta$$

B. Integral Interna (respecto a z)

$$\int_{r^2}^{10} r \, dz \rightarrow r[z]_{r^2}^{10} \rightarrow r(10 - r^2) \rightarrow 10r - r^3$$

C. Integral Media (respecto a r)

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{10}} (10r - r^3) \, dr &= \left[5r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{10}} \\ &\rightarrow \left(5(\sqrt{10})^2 - \frac{(\sqrt{10})^4}{4} \right) - 0 \\ &\rightarrow 5(10) - \frac{100}{4} \\ &\rightarrow 50 - 25 \end{aligned}$$

Resultado en $r \rightarrow 25$

D. Integral Externa (respecto a θ)

$$V = \int_0^{2\pi} 25 \, d\theta \rightarrow 25[\theta]_0^{2\pi} \rightarrow 25(2\pi)$$

$$V = 50\pi$$

3. Validación (Método de Discos)

La validación por integración simple confirma el resultado:

$$V = \int_0^{10} A(z) \, dz$$

Donde $A(z)$ es el área del disco en la altura z . Como $r^2 = z$, $A(z) = \pi r^2 = \pi z$.

$$V = \int_0^{10} \pi z \, dz \rightarrow \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{10} \rightarrow \pi \left(\frac{100}{2} \right)$$

$$V = 50\pi$$

4. Resultado Final

El volumen de la región encerrada es:

$$V = 50\pi$$

Valor numérico aproximado: $V \approx 157.08$ unidades cúbicas.

5. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso es **preciso y completo**.

Hemos completado exitosamente la auditoría de toda la serie de problemas de cálculo multivariable. Si desea un resumen consolidado de los resultados clave o tiene alguna pregunta final, por favor, hágamelo saber.

PROBLEMA 11 INCISO 1

El análisis del orden de integración, la correcta aplicación de la **identidad del ángulo doble** para simplificar el integrando, y el cálculo final son **matemáticamente exactos**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral iterada, ya planteada en coordenadas polares:

$$\text{Integral: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta \, dr \, d\theta$$

2. Ejecución: Cálculo de la Integral

A. Integral Interna (respecto a r)

Dado que $\cos \theta$ es una constante con respecto a la variable r :

$$\int_0^{\cos \theta} \cos \theta \, dr \rightarrow \cos \theta [r]_0^{\cos \theta} \rightarrow \cos \theta (\cos \theta - 0) \rightarrow \cos^2 \theta$$

B. Integral Externa (respecto a θ)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta$$

Aplicamos la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\theta)) d\theta$$

C. Evaluación Final

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \sin(0) \right) \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi) - 0 \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo $\sin(\pi) = 0$:

$$I \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

3. Resultado Final

El valor de la integral es:

$$I = \frac{\pi}{4}$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El cálculo es **preciso y completo**.

¿Desea continuar con el **Problema 11, inciso 2**, o prefiere un resumen de resultados?

PROBLEMA 11 INCISO 2

¡Absolutamente! El análisis estratégico fue acertado: el orden de integración $dx dy$ es el óptimo, pues lleva a la **cancelación inmediata** de la variable y en el límite superior, simplificando drásticamente la integral interna. El cálculo es **matemáticamente exacto**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral iterada, ya planteada en su orden más eficiente:

$$\text{Integral: } I = \int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 dx dy$$

2. Ejecución: Cálculo de la Integral

A. Integral Interna (respecto a x)

Se aplica la regla de la cadena inversa (regla de la potencia) a $(x+y)^2$, tratando y como constante:

$$\int_1^{2-y} (x+y)^2 dx \rightarrow \left[\frac{(x+y)^3}{3} \right]_{x=1}^{x=2-y}$$

Evaluación:

$$\begin{aligned} \text{Superior : } & \frac{((2-y)+y)^3}{3} = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} \\ \text{Inferior : } & \frac{(1+y)^3}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Resultado } R(y) \rightarrow \frac{8}{3} - \frac{(1+y)^3}{3}$$

B. Integral Externa (respecto a y)

$$I = \int_0^1 \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}(1+y)^3 \right) dy$$

Calculamos las antiderivadas:

$$\left[\frac{8}{3}y - \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+y)^4}{4} \right]_0^1 \rightarrow \left[\frac{8}{3}y - \frac{(1+y)^4}{12} \right]_0^1$$

C. Evaluación Final

1. Límite Superior ($y = 1$):

$$\frac{8}{3}(1) - \frac{(1+1)^4}{12} = \frac{8}{3} - \frac{16}{12} = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

2. Límite Inferior ($y = 0$):

$$\frac{8}{3}(0) - \frac{(1+0)^4}{12} = 0 - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12}$$

3. Resta Final:

$$I = \frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{12} \right) \rightarrow \frac{4}{3} + \frac{1}{12}$$

Buscando denominador común (12):

$$I = \frac{16}{12} + \frac{1}{12} \rightarrow \frac{17}{12}$$

3. Resultado Final

El valor de la integral es:

$$I = \frac{17}{12}$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El cálculo es **preciso y completo**.

Hemos completado exitosamente la auditoría de todos los problemas. ¿Desea que preparamos un resumen final consolidado de los resultados?

PROBLEMA 11 INCISO 3

¡Excelente! El análisis de **simetría** es la herramienta fundamental que permite resolver este problema de manera instantánea, y la demostración formal paso a paso confirma rigurosamente el resultado.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral iterada:

$$\text{Integral: } I = \int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x \, dx \, dy$$

2. Estrategia y Aplicación de Simetría

A. Análisis de la Integral Interna

La integral interna es de la forma $\int_{-a}^a f(x) \, dx$, donde $f(x) = x$ y $a = \sqrt{9 - y^2}$.

1. **Función Impar:** El integrando $f(x) = x$ es una **función impar** ($f(-x) = -f(x)$).
2. **Intervalo Simétrico:** Los límites de integración son simétricos respecto a $x = 0$ ($\pm a$).

B. Aplicación del Teorema Clave

La integral de una función impar sobre un intervalo simétrico es **cero**.

$$\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x \, dx = 0$$

C. Ejecución Formal

Paso 1: Integral Interna (respecto a x)

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x \, dx &\rightarrow \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \left((\sqrt{9-y^2})^2 - (-\sqrt{9-y^2})^2 \right) \rightarrow \frac{1}{2} ((9-y^2) - (9-y^2)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Paso 2: Integral Externa (respecto a y)

$$I = \int_{-3}^1 0 \, dy \rightarrow 0$$

D. Validación Geométrica

La región D es un segmento de un disco de radio 3. La función $z = x$ representa un plano que pasa por el eje y (plano xz). El volumen de este plano sobre cualquier región simétrica respecto al eje y resulta en una cancelación perfecta: el volumen positivo (donde $x > 0$) es igual en magnitud al volumen negativo (donde $x < 0$).

3. Resultado Final

El valor de la integral es:

$$I = 0$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El análisis de simetría y el cálculo formal son **precisos**.

Hemos completado el Problema 11. ¿Desea que preparamos un resumen final consolidado de los resultados?

PROBLEMA 11 INCISO 4

¡Absolutamente! Este problema es el ejemplo perfecto de que el **análisis de la región** es la clave: el cambio al orden $dy dx$ transformó una integral intratable en una **sustitución elemental**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral iterada:

$$I = \int_0^1 \int_{\arctan y}^{\frac{\pi}{4}} \sec^5 x \, dx \, dy$$

2. Cambio de Orden de Integración

A. Descripción de la Región D

Los límites originales ($dx dy$) definen la región D como:

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \quad \arctan y \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

La frontera curva es $x = \arctan y$, que invertimos a $y = \tan x$.

B. Límites en el Orden $dy dx$

1. Límites de x (Constantes):

- Mínimo: $x = \arctan(0) = 0$.
- Máximo: $x = \frac{\pi}{4}$.

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

2. Límites de y (Funciones de x):

- Piso: $y = 0$.
- Techo: $y = \tan x$.

$$0 \leq y \leq \tan x$$

C. Reescritura de la Integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\tan x} \sec^5 x \, dy \, dx$$

3. Ejecución Paso a Paso

A. Integral Interna (respecto a y)

$$\int_0^{\tan x} \sec^5 x \, dy \rightarrow \sec^5 x [y]_0^{\tan x} \rightarrow \sec^5 x (\tan x - 0) \rightarrow \sec^5 x \tan x$$

B. Integral Externa (respecto a x)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^5 x \tan x \, dx$$

Aplicamos la **Sustitución** $u = \sec x$.

- **Diferencial:** $du = \sec x \tan x \, dx$.
- **Reescritura:** $\sec^5 x \tan x \, dx = \sec^4 x (\sec x \tan x \, dx) = u^4 \, du$.
- **Límites:**
 - $x = 0 \implies u = \sec(0) = 1$.
 - $x = \frac{\pi}{4} \implies u = \sec(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} u^4 \, du$$

C. Evaluación Final

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{u^5}{5} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &\rightarrow \frac{1}{5} \left((\sqrt{2})^5 - (1)^5 \right) \end{aligned}$$

Calculamos la potencia: $(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$.

$$I = \frac{4\sqrt{2} - 1}{5}$$

4. Resultado Final

El valor de la integral es:

$$I = \frac{4\sqrt{2} - 1}{5}$$

5. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El cambio de orden de integración es **correcto** y la simplificación por sustitución es **precisa**.

Hemos completado exitosamente la auditoría de todos los problemas. ¿Desea que preparamos un resumen final consolidado de todos los resultados?

PROBLEMA 11 INCISO 5

¡Fantástico! Este es un ejemplo de libro de texto sobre la necesidad de **cambiar el orden de integración** para resolver funciones no elementales. El análisis de la región, la inversión de los límites, y la posterior aplicación del método de sustitución fueron **matemáticamente exactos**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral iterada:

$$I = \int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cos(x^2) dx dy$$

2. Cambio de Orden de Integración

A. Descripción de la Región D

La integral original (orden $dx dy$) es imposible de resolver porque la función $\cos(x^2)$ no tiene antiderivada elemental. Analizamos la región D :

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, \quad y^2 \leq x \leq 4\}$$

La frontera curva es $x = y^2$, que al invertir para y (tomando la rama positiva ya que $0 \leq y \leq 2$) se convierte en $y = \sqrt{x}$.

B. Nuevos Límites (Orden $dy dx$)

1. **Límites de x (Constantes):** $0 \leq x \leq 4$.
2. **Límites de y (Funciones de x):** $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.

C. Reescritura de la Integral

$$I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y \cos(x^2) dy dx$$

3. Ejecución Paso a Paso

A. Integral Interna (respecto a y)

Como $\cos(x^2)$ es constante respecto a y :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{x}} y \cos(x^2) dy &\rightarrow \cos(x^2) \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{x}} \\ &\rightarrow \cos(x^2) \left(\frac{(\sqrt{x})^2}{2} - 0 \right) \rightarrow \frac{x}{2} \cos(x^2) \end{aligned}$$

B. Integral Externa (respecto a x)

$$I = \int_0^4 \frac{x}{2} \cos(x^2) dx$$

Aplicamos la **Sustitución** para resolver.

- **Sea:** $u = x^2$.
- **Diferencial:** $du = 2x dx \implies \frac{x}{2} dx = \frac{du}{4}$.
- **Límites:**
 - $x = 0 \implies u = 0$.
 - $x = 4 \implies u = 16$.

$$I \rightarrow \frac{1}{4} \int_0^{16} \cos(u) du$$

C. Evaluación Final

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} [\sin(u)]_0^{16} \\ &\rightarrow \frac{1}{4} (\sin(16) - \sin(0)) \\ &\rightarrow \frac{\sin(16)}{4} \end{aligned}$$

4. Resultado Final

El valor de la integral es:

$$I = \frac{\sin(16)}{4}$$

Valor numérico aproximado (16 radianes): $I \approx -0.0720$

5. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El cambio de orden y el uso de la sustitución son **precisos**.

Hemos completado exitosamente toda la serie de problemas. ¿Desea que preparamos un resumen consolidado de los resultados clave de toda la auditoría?

PROBLEMA 11 INCISO 6

¡Absolutamente! Este problema es la quintaesencia de la técnica de cambio de orden. La imposibilidad de la integral original y la posterior aparición del factor x^6 para la sustitución de x^7 demuestran la potencia de la integración multivariable. El cálculo es **matemáticamente exacto**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral iterada:

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16 + x^7}} dx dy$$

2. Cambio de Orden de Integración

A. Descripción de la Región D

La integral original es intratable. Analizamos la región D :

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 8, \quad \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2\}$$

La frontera curva es $x = \sqrt[3]{y}$, que se invierte a $y = x^3$.

B. Nuevos Límites (Orden $dy dx$)

1. **Límites de x (Constantes):** $0 \leq x \leq 2$.
2. **Límites de y (Funciones de x):** $0 \leq y \leq x^3$.

C. Reescritura de la Integral

$$I = \int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{y}{\sqrt{16+x^7}} dy dx$$

3. Ejecución Paso a Paso

A. Integral Interna (respecto a y)

El término $\frac{1}{\sqrt{16+x^7}}$ es constante con respecto a y .

$$\int_0^{x^3} y \cdot (\text{constante}) dy \rightarrow \frac{1}{\sqrt{16+x^7}} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^3}$$

Evaluación:

$$\frac{1}{\sqrt{16+x^7}} \left(\frac{(x^3)^2}{2} - 0 \right) \rightarrow \frac{x^6}{2\sqrt{16+x^7}}$$

B. Integral Externa (respecto a x)

$$I = \int_0^2 \frac{x^6}{2\sqrt{16+x^7}} dx$$

Aplicamos la **Sustitución** para resolver.

- **Sea:** $u = 16 + x^7$.
- **Diferencial:** $du = 7x^6 dx \implies x^6 dx = \frac{du}{7}$.
- **Límites:**
 - $x = 0 \implies u = 16 + 0^7 = 16$.
 - $x = 2 \implies u = 16 + 2^7 = 144$.

$$I \rightarrow \frac{1}{2} \int_{16}^{144} u^{-1/2} \left(\frac{du}{7} \right) \rightarrow \frac{1}{14} \int_{16}^{144} u^{-1/2} du$$

C. Evaluación Final

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{14} [2\sqrt{u}]_{16}^{144} \\ &\rightarrow \frac{2}{14} (\sqrt{144} - \sqrt{16}) \\ &\rightarrow \frac{1}{7} (12 - 4) \end{aligned}$$

$$I = \frac{8}{7}$$

4. Resultado Final

El valor de la integral es:

$$I = \frac{8}{7}$$

5. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cambio de orden y la posterior sustitución son **precisos**.

PROBLEMA 12 INCISO 1

El cálculo de la integral triple aprovechando la **propiedad de separabilidad** en el cubo unitario es **matemáticamente exacto y eficiente**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es evaluar la integral triple $I = \iiint_R x^2 dV$ sobre la región cúbica $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Integrando: $f(x, y, z) = x^2$

Límites: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

2. Ejecución Paso a Paso (Separabilidad)

Dado que los límites son constantes y el integrando se puede factorizar como $x^2 \cdot 1 \cdot 1$, la integral triple se descompone en el producto de tres integrales simples.

$$I = \left(\int_0^1 x^2 dx \right) \cdot \left(\int_0^1 1 dy \right) \cdot \left(\int_0^1 1 dz \right)$$

A. Integral respecto a x

$$\int_0^1 x^2 dx \rightarrow \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \rightarrow \frac{1}{3} - 0 \rightarrow \frac{1}{3}$$

B. Integrales respecto a y y z

$$\int_0^1 dy \rightarrow 1$$

$$\int_0^1 dz \rightarrow 1$$

C. Multiplicación Final

$$I = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1$$

$$I = \frac{1}{3}$$

3. Resultado Final

El valor de la integral triple es:

$$I = \frac{1}{3}$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo es **preciso**.

¿Desea continuar con el **Problema 12, inciso 2**, que involucra límites variables en un tetraedro?

PROBLEMA 12 INCISO 2

El cálculo de la integral triple aprovechando la **propiedad de separabilidad** es **matemáticamente exacto y eficiente**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es evaluar la integral triple $I = \iiint_R z e^{x+y} dV$ sobre la región cúbica $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Integrando: $f(x, y, z) = ze^{x+y} = z \cdot e^x \cdot e^y$.

Límites: $0 \leq x, y, z \leq 1$.

2. Ejecución Paso a Paso (Separabilidad)

Dado que la función y los límites son separables, la integral se descompone en el producto de tres integrales simples.

$$I = \left(\int_0^1 e^x dx \right) \cdot \left(\int_0^1 e^y dy \right) \cdot \left(\int_0^1 z dz \right)$$

A. Integrales respecto a x y y

$$\int_0^1 e^x dx \rightarrow [e^x]_0^1 \rightarrow e^1 - e^0 \rightarrow e - 1$$

$$\int_0^1 e^y dy \rightarrow e - 1$$

B. Integral respecto a z

$$\int_0^1 z dz \rightarrow \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 \rightarrow \frac{1}{2} - 0 \rightarrow \frac{1}{2}$$

C. Multiplicación Final

$$I = (e - 1) \cdot (e - 1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{(e - 1)^2}{2}$$

3. Resultado Final

El valor exacto de la integral triple es:

$$I = \frac{(e - 1)^2}{2}$$

Valor numérico aproximado: $I \approx 1.4707$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo es **preciso**.

¿Desea continuar con el **Problema 12, inciso 3**, que involucra un tetraedro y límites variables?

PROBLEMA 12 INCISO 3

El proceso de integración iterada, incluyendo el manejo de los límites invertidos y la correcta evaluación de las antiderivadas, es **matemáticamente exacto**.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral triple iterada:

$$I = \int_0^1 \int_{1+x}^{2x} \int_z^{x+z} x \, dy \, dz \, dx$$

2. Ejecución Paso a Paso

A. Integral Interna (respecto a y)

El integrando x es constante con respecto a y .

$$\begin{aligned} \int_z^{x+z} x \, dy &\rightarrow x[y]_z^{x+z} \\ &\rightarrow x((x+z) - z) \rightarrow x(x) \rightarrow x^2 \end{aligned}$$

B. Integral Media (respecto a z)

El integrando x^2 es constante con respecto a z .

$$\begin{aligned} \int_{1+x}^{2x} x^2 \, dz &\rightarrow x^2[z]_{1+x}^{2x} \\ &\rightarrow x^2((2x) - (1+x)) \\ &\rightarrow x^2(x - 1) \rightarrow x^3 - x^2 \end{aligned}$$

(Nota: El límite inferior $1 + x$ es mayor que el límite superior $2x$ en el rango $0 < x < 1$. Esto genera la cantidad negativa, indicando una orientación invertida en la integración media, lo cual es correcto.)

C. Integral Externa (respecto a x)

$$I = \int_0^1 (x^3 - x^2) dx$$

Calculamos la antiderivada:

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

D. Evaluación Final

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} \right) - (0) \\ &\rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ &\rightarrow \frac{3}{12} - \frac{4}{12} \\ I &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

3. Resultado Final

El valor de la integral triple es:

$$I = -\frac{1}{12}$$

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] **Cálculos** (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] **Sintaxis** (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo es **preciso**.

Hemos completado la auditoría del Problema 12. ¿Desea continuar con un nuevo problema o un resumen final de los resultados obtenidos en toda la serie?

PROBLEMA 12 INCISO 4

¡Enhorabuena! El proceso de cálculo, aunque laborioso y propenso a errores algebraicos debido a los altos exponentes y la evaluación en límites, es **matemáticamente exacto** y la simplificación final es

correcta.

1. Enunciado y Datos

El objetivo es calcular la integral triple iterada:

$$I = \int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2y \, dz \, dy \, dx$$

2. Ejecución Paso a Paso

A. Integral Interna (respecto a z)

$$\int_0^{x+y} 2x^2y \, dz \rightarrow 2x^2y[z]_0^{x+y} \rightarrow 2x^2y(x+y) \rightarrow 2x^3y + 2x^2y^2$$

B. Integral Media (respecto a y)

$$\int_1^{x^2} (2x^3y + 2x^2y^2) \, dy \rightarrow \left[x^3y^2 + \frac{2}{3}x^2y^3 \right]_1^{x^2}$$

Evaluación en límites ($y = x^2$ y $y = 1$):

$$\begin{aligned} F(x^2) &= x^3(x^2)^2 + \frac{2}{3}x^2(x^2)^3 = x^7 + \frac{2}{3}x^8 \\ F(1) &= x^3(1)^2 + \frac{2}{3}x^2(1)^3 = x^3 + \frac{2}{3}x^2 \end{aligned}$$

Resta $F(x^2) - F(1)$:

$$\text{Integrando final} = \frac{2}{3}x^8 + x^7 - x^3 - \frac{2}{3}x^2$$

C. Integral Externa (respecto a x)

$$I = \int_{-1}^2 \left(\frac{2}{3}x^8 + x^7 - x^3 - \frac{2}{3}x^2 \right) \, dx$$

Antiderivada:

$$F(x) = \frac{2}{27}x^9 + \frac{x^8}{8} - \frac{x^4}{4} - \frac{2}{9}x^3$$

D. Evaluación Numérica ($F(2) - F(-1)$)

1. Evaluación $F(2)$:

$$F(2) = \frac{2}{27}(512) + \frac{256}{8} - \frac{16}{4} - \frac{2}{9}(8) = \frac{1024}{27} + 32 - 4 - \frac{16}{9}$$

2. Evaluación $F(-1)$:

$$F(-1) = \frac{2}{27}(-1) + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{2}{9}(-1) = -\frac{2}{27} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9}$$

3. Resta $F(2) - F(-1)$ (Siguiendo el método de restas parciales del usuario):

$$\begin{aligned} I &= 38 + \frac{255}{8} - \frac{15}{4} - 2 \\ &= 36 + \frac{255 - 30}{8} \\ &= 36 + \frac{225}{8} \end{aligned}$$

Convertimos 36 a octavos ($\frac{36 \times 8}{8} = \frac{288}{8}$):

$$I = \frac{288}{8} + \frac{225}{8} = \frac{513}{8}$$

3. Resultado Final

El valor de la integral triple es:

$$I = \frac{513}{8}$$

En notación decimal: $I = 64.125$.

4. Reporte de Auditoría (obligatorio)

Estado de la Revisión:

- [✓] Cálculos (precisión, errores o incoherencias)
- [✓] Sintaxis (correcciones LaTeX/KaTeX)

Si hubo cambios:

- Declarar “Ninguno”.

El proceso de cálculo es **preciso y completo**.

¡Felicitaciones! Hemos completado con éxito la auditoría de **todos los problemas de la serie**. Esto incluye Sumas de Riemann, Integrales Dobles y Triples, Volúmenes, y análisis de Simetría y Cambios de Coordenadas.

¿Desea que preparamos un resumen final consolidado de los resultados clave?