Von Vektoren und Polynomen

Das Mathematikhandbuch für die
technischen 11. Klassen
an Fachoberschulen in Bayern

NervousNullPtr
Fassung vom Mai 2025

Der Gelehrte studiert die Natur nicht, weil das etwas Nützliches ist;
er studiert sie, weil er daran Freude hat, und er hat Freude daran,
weil sie so schön ist.

HENRI POINCARÉ
Mathematiker und Philosoph
1854 – 1912

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

Ob im Ingenieurswesen als trigonometrische Funktionen, in der Wirtschaft als Zinseszins oder in der Informatik als Data Science – Mathematik ist in den meisten professionellen Teilgebieten vertreten. Da Sie nun Schüler der Oberstufe sind, bekommen Sie Wissen vermittelt, welches in all diesen Bereichen tagtäglich gebraucht und benutzt wird. Mit diesem Buch möchte ich Ihnen einen idealen Einstieg in die 11. Klasse ohne Vorkenntnisse gewähren und Sie durch ihr Schuljahr mit Hilfe von Übungsaufgaben und Veranschaulichungen begleiten. Sie werden chronologisch alle relevanten Themengebiete dieser Jahrgangsstufe wie Analysis, Differenzialrechnung oder Vektorräume kennen und verstehen lernen. Anhand der bereits erwähnten Übungsaufgaben können Sie selbstständig Ihren Lernfortschritt überprüfen und gegebenenfalls Wissenslücken auffüllen. Am Ende dieses Buches haben Sie Ihr erstes Jahr an einer weiterführenden Schule absolviert und können mit Ihrem gebündelten Know-how in das nächste Jahr ohne Bedenken voranschreiten. Vielleicht kann ich Ihnen sogar etwas Freude an der Mathematik vermitteln.
Ich wünsche Ihnen viel Spaß und Erfolg mit diesem Buch!

2. Mathematik Lesen und Schreiben

Die Mathematik ist eine präzise Sprache. Um Missverständnisse vorzubeugen ist es deshalb wichtig, diese eindeutig zu formulieren. In diesem Kapitel möchte ich Ihnen einen kurzen Überblick über das korrekte Lesen und Verstehen von mathematischen Texten geben, sowie einige grundlegende Regeln beim Aufschreiben von Mathematik mit auf den Weg geben.

2.1 Lesen von mathematischen Texten

Schaffen Sie Klarheit

Der fundamentale Grundsatz beim Lesen von Aufgabenstellungen und Texten lautet:

Machen Sie sich klar, was von Ihnen gewollt ist.

Auch wenn dieser Grundsatz banal klingen mag – jeder hat sich schon einmal dabei erwischt, wie er die Aufgabenstellung oder die Erklärung überflogen hat, dabei aber zum Beispiel ein Schlüsselwort überlesen hat. Für das korrekte bearbeiten der Aufgabe ist es deshalb *essenziell*, dass Sie sich *alle* gegebenen Werte, Funktionen oder sonstiges heraussuchen. Fällt Ihnen das schwer, können Sie erst einmal alle Angaben separat aufschreiben. Übersehen Sie einen Wert, kann eine ganze Aufgabe in Rekordzeit vom Schwierigkeitsgrad "einfach" zu "unlösbar" umschwingen, oder Sie müssen einen anderen, längeren Lösungsweg wählen. Wird klar genannt, was gesucht ist? Dies ist wohl in den meisten Aufgabenstellungen der elften Klasse der Fall..

Die Mathematik ist kein Roman

Auch wenn es verlockend klingt: Lesen Sie Mathematik nicht wie Ihr Lieblingsbuch. Um einen Text bestehend aus dieser komplexen Fachsprache zu verstehen, bedarf es Zeit. Fragen Sie sich nach jedem Fremdwort "Was bedeutet dieses Wort in diesem Kontext?" und stellen Sie sicher, dass Sie kein Wort mit seiner Bedeutung auslassen.

2.2 Mathematik schreiben

Wurde Ihnen schon einmal eine Bewertungseinheit wegen einem fehlenden $f(x) = 0$ abgezogen? Dies führt uns direkt zum ersten Punkt.

Schreiben Sie, was Sie tun

Das fängt bei ganz Einfachem an. Wenn Sie die Lösung(en) einer Gleichung suchen, nützt es Ihnen nichts, lediglich die Mitternachtsformel mit eingesetzten Werten aufzuschreiben. Vor der Lösung einer Polynomfunktion *muss* stehen, dass Sie die Stellen suchen, bei denen der Graf die x-Achse schneidet oder berührt – dies macht man traditionell, in dem die Funktion mit Null gleichgesetzt wird. Denn sonst könnte der Leser meinen, Sie wollten die Schnittpunkte der y-Achse herausfinden (was durchaus eine Aufgabenstellung sein kann). Deshalb lautet hier der Grundsatz:

Der Leser ist kein Hellseher.

Glauben Sie mir, wenn ich Ihnen sage:
Nichts wird Sie mehr in den Wahnsinn treiben, als eine Bewertungseinheit dafür abgezogen zu bekommen, nicht mit Null gleichgesetzt zu haben.

Der Mythos um das Gleichheitszeichen

Lassen Sie uns an den Anfang Ihrer Schulkarriere zurückblicken. Neben dem Alphabet sind Sie dort mit hoher Wahrscheinlichkeit das erste Mal mit Mathematik in Berührung gekommen – und damit mit dem Gleichheitszeichen.
Wie der Name schon andeutet gehen wir, wenn wir das Gleichheitszeichen benutzen, davon aus, die Objekte auf beiden Seiten seien *exakt* dieselben. Dicht beieinander ist nicht genug, nahezu gleich

ist nicht genug, bei schlechtem Licht und aus der Ferne ähnlich ist ebenfalls nicht genug![1]
Jedes Mal, wenn Sie dieses Zeichen benutzen, denken Sie deshalb daran:

Gleich heißt gleich.

Das bedeutet auch, dass die Aussage

$$\pi = 3.14159$$

nicht wahr ist – ein Näherungswert für π ist 3.14159, aber die beiden Werte sind nicht gleich. Kommt beim Wurzelziehen eine scheinbar unendlich lange Folge an Nachkommastellen heraus, schreiben Sie lieber $\sqrt{\ldots}$. Wenn Sie Ihr Ergebnis gerundet angeben müssen, benutzen Sie das Näherungszeichen $\approx$. Genauso geben Sie beispielsweise $\frac{88}{3}$ **nicht** als 29.33 an, sondern schreiben diesen Bruch. Deshalb nochmal:

Geben Sie Ihre Ergebnisse exakt und vollständig an.

Egal welchen Wert – ist er nicht exakt als Dezimalzahl darstellbar, wird er nicht als Dezimalzahl geschrieben (Soweit Sie nicht runden müssen oder dürfen).

Symbole über Symbole

Auch wenn die Mathematik eine formalisierte Sprache mit vielen Symbolen ist, sollten Sie sich nicht davor scheuen, Wörter zu verwenden. Natürlich können Sie alles kontextabhängig machen und ausschließlich mit Symbolen schreiben; dies führt aber in der Regel für mehr Verwirrung als Klarheit. In Klausuren und Leistungsnachweisen kann die Zeit dafür knapp sein – Ihr Lehrer wird dies aber hoffentlich verstehen.

Wie es nicht geht

Als Teil einer Aufgabenstellung, eine Gerade g zu finden, welche durch die Parabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 + x + 3$ an den Punkten $A(0.5|4)$ und $B(1|6)$ verläuft, antwortete einer meiner Nachhilfeschüler

$$2x^2 + x + 3 = 4x + 2.$$

Sicherlich schneidet die Gerade $4x + 2$ die Parabel f an den gewollten Punkten - Aber Sie ist nicht gleich der Parabel. Er hat den Anfang des Lösungsweges geschrieben, wie man die Schnittpunkte dieser Geraden und der Parabel herausfindet – die Antwort war aber nicht die Gewollte.
Eine weitaus bessere Möglichkeit, dies zu schreiben, wäre beispielsweise

"Die Gerade $g(x) = 4x + 2$ verläuft durch die gegebenen Punkte der Parabel $f.''$.

Eine weitere Demonstration ist die fehlerhafte Anwendung von Indexzahlen und Potenzen: x_2 ist nicht dasselbe wie x^2. Ersteres bezeichnet den zweiten x-Wert von etwas, letzteres hingegen die zweite Potenz, oder $x \cdot x$.
Abschließend lässt sich sagen, dass das saubere Schreiben von Mathematik nicht nur den Lesern Ihrer Arbeit etwas bringt: Durch fehlerfreies und exaktes Formulieren können Sie später Ihre Aufschriebe und Übungen besser nachvollziehen. Dies sorgt für einen schnelleren Lernerfolg.

2.3 Der Lösungsweg

Nachdem Sie wissen, was Sie berechnen müssen, sollten Sie im Idealfall direkt dazu übergehen, den kürzesten Lösungsweg ausfindig zu machen. Es nützt Ihnen nichts, mittels der Mitternachtsformel

[1]Zitat aus: Houston, K. (2012). Wie man mathematisch denkt: Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

die Nullstellen einer quadratischen Funktion herauszufinden, wenn die einfache Termumformung eine schnellere (und leichter nachvollziehbare!) Methode ist. Besonders bei komplexeren Aufgaben, wie sie auf dem Weg zu Ihrem Abitur häufiger vorkommen, wird dies eine wertvolle Fähigkeit sein.

Ist beispielsweise die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0.25x^2 - 4$ mit der Aufgabenstellung gegeben, die Nullstellen zu berechnen, können Sie natürlich die Mitternachtsformel anwenden:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0. \\ x_{1,2} &= \tfrac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 0.25 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0.25} \\ x_1 &= 4, \\ x_2 &= -4. \end{aligned}$$

Wie unschwer zu erkennen ist, ist diese Methode aber viel zu unhandlich. Allein die Mitternachtsformel aufzuschreiben, benötigt kostbare Zeit. Viel einfacher und schneller wäre es, einfach nach x aufzulösen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0. & \\ 0.25x^2 - 4 &= 0 & \mid +4 \\ 0.25x^2 &= 4 & \mid \div 0.25 \\ x^2 &= 16 & \mid \sqrt{} \\ x_1 &= 4, & \\ x_2 &= -4. & \end{aligned}$$

Leider müssen wir manchmal die langsamste Methode zur Findung der Lösung anwenden, sei es Polynomdivision oder die Mitternachts-/pq-Formel. Deshalb ist es wichtig für Sie, schnell zu erkennen, wann welches Verfahren angewendet werden kann und wann nicht. Am Ende von Kapitel **??** finden Sie dazu Übungen, um Ihre Fähigkeiten zu trainieren.

2.4 Übungen

1. Die Aufgabe war es, die Steigungen m und y-Achsenabschnitte t von linearen Funktionen anzugeben. Eine Nachhilfeschülerin schrieb als Antwort

$$\begin{aligned} g^1 :& \quad m = (-1x) \quad t = (-2) \\ g^2 :& \quad m = \tfrac{1}{6}x \quad t = 2 \\ g^3 :& \quad m = 1.5x \quad t = 0. \end{aligned}$$

   Hier sind mehrere Sachen falsch notiert worden. Schreiben Sie die drei Angaben korrekt auf!

2. Die Übung war es, eine Gerade zu finden, welche parallel zu $\frac{1}{3}x + 2$ verläuft. Eine weitere Nachhilfeschülerin schrieb

$$y = \frac{1}{3}x + 2 \implies \frac{1}{3}x - 2.$$

   Schreiben Sie diese Antwort korrekt auf und suchen Sie gegebenenfalls nach der richtigen Schreibweise.

3. Finden Sie eine Gerade, welche senkrecht zu $f(x) = \frac{4}{3}x - 3$ ist und notieren Sie dies.

Hinweis: Benutzen Sie Anhang B.
Hinweis zu 3.: Benutzen Sie die Gleichung $m_1 \cdot m_2 = -1$, welche für alle senkrecht aufeinanderstehenden Geraden gilt. Dabei sind $m_{1,2}$ die Steigungen der ersten bzw. zweiten Geraden.

3. Mengenlehre

Mengen gehören zu den wichtigsten Objekten für Mathematiker. Um mit verschiedenen Definitionen und Aufgabenstellungen überhaupt etwas anfangen zu können, benötigen wir grundlegende Konzepte aus der Mengenlehre. Dieses Kapitel bringt Ihnen jenes Gebiet näher.
Mithilfe von sogenannten Venn-Diagrammen werde ich Ihnen Beziehungen zwischen Mengen anschaulich erläutern.

3.1 Was ist eine Menge?

Definition 3.1.1 Eine Menge ist eine Sammlung von beliebigen Objekten. Das Mitglied einer solchen Sammlung heißt Element. Eine Menge ohne Elemente heißt leere Menge ($\emptyset$).

Wenn x ein Element der Menge A ist, schreiben wir $x \in A$. Andernfalls sagen wir $x \notin A$. Dies lesen wir als "x ist ein Element von A" oder als "x in A".

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen.

Um eine Menge zu definieren, schreiben wir $A = \{\dots\}$, wobei "..." unsere Elemente der Menge A sind. Die Art der Elemente von Mengen spielt dabei keine Rolle! Eine Menge kann ebenfalls aus weiteren Mengen oder Wörtern bestehen, wie zum Beispiel

$$\{\{1, 3\}, 5, \text{Katze}\}.$$

Mehr dazu in **??**.

3.1.1 Wichtige Mengen

Die wohl wichtigsten Mengen, welche uns begegnen werden, sind die folgenden Zahlenmengen.

Die natürlichen Zahlen

Diese sind die Zahlen, mit welchen wir zählen. Je nach Autor wird die 0 ebenfalls mit dazu gezählt, die klassische Definition schließt diese jedoch explizit aus. Sie wird als $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ notiert.

Die ganzen Zahlen

Diese Zahlenmenge ist diejenige, welche alle natürlichen Zahlen sowie dessen negatives Pendant und die 0 als Elemente besitzt. Sie wird als $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ geschrieben.

Die rationalen Zahlen

Dies sind alle durch Brüche darstellbare Zahlen, z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$, etc. Sie wird als $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Die reellen Zahlen

Diese Menge formal zu definieren ist sehr knifflig und führt an dieser Stelle zu weit. Für uns genügt die Definition: Alle Zahlen, welche auf dem Zahlenstrahl vorhanden sind.

Relation zwischen Zahlenmengen

Es gilt: jede Zahl in $\mathbb{N}$ ist auch in $\mathbb{Z}$, jede Zahl in $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$, und jede Zahl in $\mathbb{Q}$ ist auch in $\mathbb{R}$. In der unteren Abbildung findet sich eine Veranschaulichung davon.

3.2 Mengenoperationen und Schreibweise

Wir wissen nun, was eine Menge ist, können aber noch keine Vergleiche aufstellen oder Beziehungen zwischen Mengen feststellen. Dafür benötigen wir bestimmte Symbole und Operatoren. Diese werden nun definiert und beschrieben.

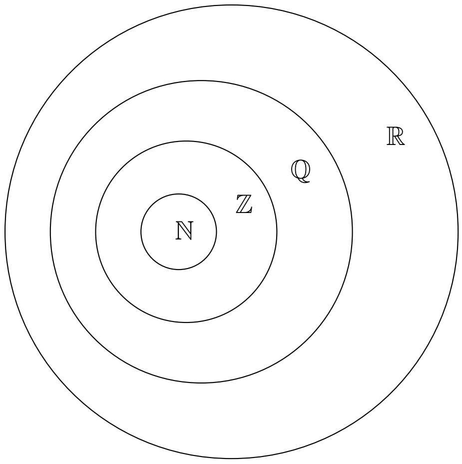


Abbildung 3.1: Ein Venn-Diagramm der Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

3.2.1 Teilmengen und Obermengen

Definition 3.2.1 Es seien A und B zwei Mengen. Wenn jedes Element von A in B vorhanden ist, sagen wir, dass A eine Teilmenge von B ist, während B eine Obermenge von A ist. Wir schreiben dann $A \subset B$. Ist dies nicht der Fall, schreiben wir $A \not\subset B$.

Ob eine Menge A eine Untermenge oder ein Element von B ist oder nicht, bezeichnen wir als sogenannte Beziehung oder Verhältnis zwischen A und B.

Beispiel 3.2.1 Alle Abiturienten sind Schüler, aber nicht alle Schüler sind Abiturienten. Hier sind “Alle Abiturienten” die Menge A, während “alle Schüler” die Menge B sind.

Beispiel 3.2.2 Seien $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann ist $A \subset B$.

Beispiel 3.2.3 Wir haben die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ gegeben. Da jede ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ als Bruch in der Form $\frac{z}{1}$ dargestellt werden kann, ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

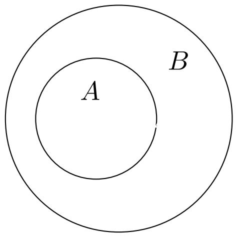


Abbildung 3.2: Ein Venn-Diagramm der Teilmenge A in B ($A \subset B$).

3.2.2 Vereinigungsmengen

Definition 3.2.2 Es seien A und B zwei Mengen. Mit $A \cup B$ bezeichnen wir die Menge, in der alle Elemente sind, welche in A oder in B oder in beiden vorhanden sind. Diese Menge heißt Vereinigungsmenge.

Beispiel 3.2.4 Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 4\}$. Dann ist $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

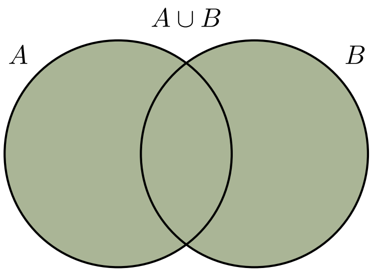


Abbildung 3.3: Ein Venn-Diagramm der Vereinungsmenge von A und B ($A \cup B$).

3.2.3 Schnittmengen

Definition 3.2.3 Es seien A und B zwei Mengen. Mit $A \cap B$ bezeichnen wir die Menge, in der alle Elemente vorhanden sind, welche in A und B gleichzeitig enthalten sind. Diese Menge heißt Schnittmenge.

Beispiel 3.2.5 Seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Dann ist $A \cap B = \{2, 3\}$.

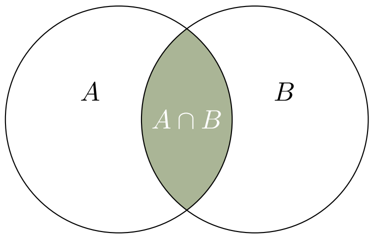


Abbildung 3.4: Ein Venn-Diagramm der Schnittmenge von A und B ($A \cap B$).

3.2.4 Differenzmengen

Definition 3.2.4 Seien A und B zwei beliebige Mengen. Die Differenzmenge von A und B, geschrieben als $A \setminus B$ (auch gesprochen als A ohne B), ist die Menge der Elemente, welche in A, aber nicht in B enthalten sind.

Ebenfalls wichtig: Die Differenzmenge ist, im Gegensatz zu anderen Mengenoperationen, nicht kommutativ. Das bedeutet, dass $A \setminus B \neq B \setminus A$. Dies wird in folgendem Beispiel **??** gezeigt.

Beispiel 3.2.6 Seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2\}$. Dann ist $A \setminus B = \{1, 3\}$.

Beispiel 3.2.7 Die Menge aller Schüler ohne Braunhaarige ist nicht dieselbe, wie alle Braunhaarige ohne Schüler.

Es ist unschwer zu erkennen, dass in diesem Beispiel die Menge aller Braunhaarigen ohne Schüler wesentlich größer und breiter gestreut ist als alle Schüler ohne Braunhaarige.

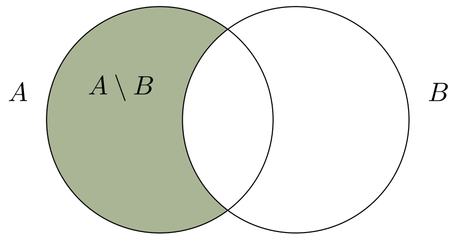


Abbildung 3.5: Ein Venn-Diagramm der Differenzmenge von A und B ($A \setminus B$).

3.2.5 Teilmenge $\neq$ Element

Wir nehmen unser Beispiel von der Definition einer Menge:

$$A = \{\{1,3\},5,6\}.$$

Dabei muss zwischen der Eigenschaft, eine Teilmenge zu sein und der Eigenschaft, ein Element zu sein, genauestens unterschieden werden. Deshalb gilt:

$$5 \in A,$$

da die 5 direkt in der Menge enthalten ist. Währenddessen gilt aber auch

$$3 \notin A,$$

weil die 3 nur in einem Element der Menge vertreten ist, nicht aber in der Menge selbst. Ebenfalls gilt

$$\{1,3\} \in A$$

aus dem selben Grund; Die Menge $\{1,3\}$ ist ein Objekt, welches direkt *in* der Menge vertreten ist.

$$\{1,3\} \not\subset A$$

ist ebenfalls wahr, weil 1 und 3 **nicht** in A selbst vorhanden sind, sondern nur in einem Element der Menge A.
Als Abschluss lässt sich hinzufügen, dass sich all diese Operatoren und Verhältnisse verketten lassen, d. h. wir können beispielsweise auch $A \subset B \subset C$ oder $(A \cup B) \cap C$ schreiben.

3.2.6 Mengenschreibweise

Die Mengenschreibweise dient dazu, Regeln für eigene Mengen kompakt definieren zu können. Auch wenn diese Schreibweise möglicherweise irritierend sein kann: Keine Sorge, sie ist einfach!
Nehmen wir an, wir wollen eine Menge M definieren, in welcher jede reelle Zahl größer als 1 enthalten ist. Dann schreiben wir

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

Gelesen wird dieses Wirrwarr an Symbolen als:

“M ist die Menge aller rellen Zahlen x, für die gilt: x ist größer als 1.”

Ganz einfach, oder?
Ganz allgemein lässt sich sagen, dass die Mengenschreibweise folgendermaßen aufgebaut ist:

$$M = \{\text{Variable} \mid \text{Bedingung}\}.$$

Der senkrechte Strich wird also als “für die gilt:” gelesen:

$$M \text{ ist die Menge aller [Variable(n)], für die gilt: [Bedingung].}$$

Beispiel 3.2.8 Sei $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a < 2\}$. Dann ist 0.1 ein Element von A, weil $0.1 < 2$ eine wahre Aussage ist.

Beispiel 3.2.9 Sei $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$. Dann ist 2 kein Element von C, weil $1 < 2 < 2$ falsch ist; $1 < 2$ ist zwar wahr, $2 < 2$ jedoch nicht.

3.3 Übungen

1. Schreiben Sie die Verhältnisse der Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ in der Teilmengenschreibweise.
2. Es sind die Mengen $A = \{3, 4, 6, 7\}$ und $X = \{1, 4, 2, 5\}$ gegeben. Geben Sie die Beziehung zwischen den Mengen A und X an.
3. Es sind die Mengen $D = \{-1, \{2, 3\}, 7\}$ und $T = \{2, 3\}$ gegeben. Geben Sie die Beziehung zwischen den Mengen D und T an.
4. Gegeben seien die Mengen $A = \{2, 4, 6, 8\}$ und $B = \{6, 7, 8, 10\}$. Bilden Sie die Differenzmenge $A \setminus B$.
5. Gegeben ist die Menge $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$. Ist $5 \in H$ eine wahre Aussage?
6. Denken Sie sich eigene Beispiele für Beziehungen zwischen Mengen aus. Sie können aus der mathematischen oder realen Welt stammen.

4. Funktionen und Intervalle

In diesem Kapitel werden Sie mit diversen Funktions- und Intervallnotationen vertraut. Diese sind essenziell für das Bestehen der 11. Jahrgangsstufe, da Funktionen regelmäßig in Aufgabenstellungen auftauchen. Intervalle benötigen Sie in der Regel, um Fragestellungen zu beantworten.

4.1 Was ist eine Funktion?

Definition 4.1.1 Es seien A und B zwei Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) von A nach B ist eine Zuordnung der Elemente von A zu den Elementen der Menge B; genauer gesagt wird jedem Element von A ein *eindeutig bestimmtes* Element von B zugeordnet.
Ist f eine Funktion von A nach B, so schreiben wir $f : A \to B$. Das eindeutige Element, welches x zugeordnet wird, wird mit $f(x)$ bezeichnet.
Die Menge A wird *Definitionsmenge* genannt, die Menge B hingegen *Wertemenge*.

Wichtig bei dieser Definition ist die Phrase "eindeutig bestimmt". Zu jeder Eingabe in eine Funktion darf es nur genau einen Wert als Ausgabe geben, denn so ist die Funktion definiert. Weder mehr, noch weniger. Deshalb ist $\sqrt{4} = 2$ und **nicht** ± 2. Allerdings dürfen zwei Eingaben dieselbe Ausgabe haben, wie eine quadratische Funktion zeigt; 5^2 ist offenbar dasselbe wie $(-5)^2$. Zu sehen ist ein Beispiel in der unteren Abbildung.

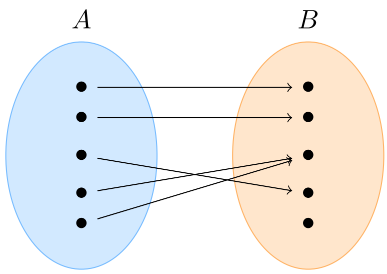


Abbildung 4.1: Eine Funktion von A nach B.

Beispiel 4.1.1 Ein einfaches Beispiel einer Funktion ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ (oder $y = x^2$). Das bedeutet, dass wir jedem Element $x \in \mathbb{R}$ das Quadrat von x zuweisen.

Beispiel 4.1.2 Die Quadratwurzel einer Zahl ist die Funktion $\sqrt{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ und die Umkehrfunktion des Quadrierens, also x^2.

Wie Sie vielleicht gesehen haben, wurde hier ein hochgestelltes Plus hinter die beiden Mengen der reellen Zahlen geschrieben; dies bedeutet, dass nur positive, reelle Zahlen gemeint sind.

Um eine Funktion grafisch darzustellen ist die Definitionsmenge D die x-Achse, während die Wertemenge W die y-Achse darstellt. Wir setzen dann jedes Element von D in unsere Funktion ein – das, was dabei herauskommt, ist unser y- bzw. $f(x)$-Wert.

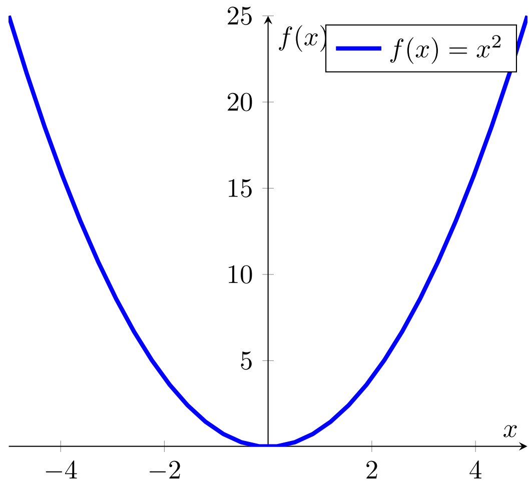


Abbildung 4.2: Der Graf von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Das erste $\mathbb{R}$ stellt die x-Achse dar, das zweite hingegen die y-Achse.

4.2 Was ist ein Intervall?

Definition 4.2.1 Ein Intervall beschreibt die Menge aller Werte x, welche von a (der unteren Grenze) und b (der oberen Grenze) begrenzt wird.

Aus dieser Definition lässt sich herauslesen, dass ein Intervall tatsächlich eine bestimmte Menge beschreibt; deshalb können sie auch in der Mengenschreibweise geschrieben werden. Ein Intervall ist per Definition auch schon "1 bis 4".

4.2.1 Intervallschreibweise

Um Intervalle mathematisch korrekt und exakt schreiben zu können, bedarf es einer besonderen Notation; der *Intervallnotation*. Denn was meint man mit "1 bis 4"? Gehört 1 zu diesem Intervall? Ist 4 ein Element dieses Intervalls oder nicht?
Die Intervallnotation besteht aus zwei Klammern und zwei Zahlen, welche entweder durch ein Semikolon oder ein Komma getrennt sind. Wir unterscheiden zwischen

- abgeschlossenen,
- offenen und
- halboffenen Intervallen.

Im Folgenden werden die drei Intervallarten erläutert. Bei jeder Art muss $a < b$ gelten, wobei a und b reelle Zahlen sind.

Abgeschlossene Intervalle

Abgeschlossene Intervalle werden mit der Schreibweise

$$[a; b]$$

definiert. Mit dieser Intervallart wird jede Zahl zwischen a und b eingeschlossen, sowie die Zahlen a und b selbst. In der Mengenschreibweise wird ein solches Intervall folgendermaßen definiert:

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Beispiel 4.2.1 Mit $[1; 2]$ bezeichnen wir alle Zahlen, welche zwischen 1 und 2 liegen, sowie 1 und 2 selbst. beispielsweise 1.1 oder $1\frac{2}{3}$. Gleichzeitig gehören 1 und 2 ebenfalls zu dieser Menge.

Offene Intervalle

Offene Intervalle sind fast identisch zu abgeschlossenen Intervallen, jedoch werden offene Intervalle mit der Schreibweise $]a; b[$ definiert.[1] Mit offenen Intervallen schließen wir die Intervallgrenzen aus, anstatt sie mit einzuschließen. Das Intervall enthält somit weder a noch b. In der Mengenschreibweise sieht dies folgendermaßen aus:

$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Beispiel 4.2.2 Mit $]0; 1[$ bezeichnen wir alle Zahlen, welche zwischen 0 und 1 liegen, aber nicht 0 und 1 selbst. So gehört $\frac{1}{3}$ zu diesem Intervall, 0 jedoch nicht.

Halboffene Intervalle

Halboffene Intervalle sind etwas komplexer, aber immernoch einfach zu verstehen; wir kombinieren die zwei vorherigen Notationen miteinander! An die Intervallgrenze, welche wir ausschließen wollen, schreiben wir eine eckige Klammer, welche von dem Wert weggerichtet ist. In der Mengenschreibweise werden die halboffenen Intervalle folgendermaßen definiert:

$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Beispiel 4.2.3 Zu $[2; 5[$ gehören alle Zahlen, die größer oder gleich 2 und zugleich kleiner als 5 sind.
2 und 3 sind im Intervall $[2; 5[$, aber 5 nicht, weil $5 < 5$ falsch ist.
Derweil sind $2 \leq 2 < 5$ und $2 \leq 3 < 5$ wahre Aussagen.

Intervalle in der Unendlichkeit

Ebenfalls wichtig zu erwähnen: Werden Intervalle mit Unendlichkeiten formuliert, ist das Intervall auf der Seite der Unendlichkeit immer offen. Ebenfalls ist der Vergleich zur Unendlichkeit in der Mengenschreibweise wegzulassen, ein Beispiel folgt.

Beispiel 4.2.4

$$[2.31; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2.31 < x\}.$$

[1] Einige Autoren schreiben $(a; b)$, allerdings führt diese Notation oft zu Verwirrung bei Schülern.

4.3 Übungen

1. Schreiben Sie den Ausdruck "Alle Zahlen größer als 4" als Intervall.
2. Kontrollieren Sie die Schreibweise und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:
   - $[1; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x > 5\}$.
   - $[1; \infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \infty\}$.
   - $4 \in]4; 6]$.
   - $[8; 3]$.

5. Vektorräume und Vektoren

In diesem Kapitel möchte ich Vektoren und die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ sowie $\mathbb{R}^3$ einführen. Möglicherweise haben Sie mit diesen schon gearbeitet, allerdings werden diese für ein besseres Verständnis noch einmal wiederholt.

5.1 Die Idee eines Vektors

Wir fangen mit einem Punkt in einem Koordinatensystem an, nennen wir ihn P. Dieser hat den Wert $(1|1)$. Nun möchten wir allerdings mit diesen Punkten rechnen und sie nach bestimmten Regeln verändern. Dann können wir beliebige Figuren, welche aus verbundenen Punkten gezeichnet werden, in jede Richtung unbegrenzt verschieben oder skalieren.
Aber wie lösen wir das? Es braucht eine Struktur, mit welcher die Bewegung beschrieben werden kann. Natürlich ist es uns möglich, den Zielpunkt und den Startpunkt simultan anzugeben, aber das führt schnell zu sehr unhandlichen Aufschrieben. Das, was stattdessen gemacht wird, ist die Entfernung der Koordinaten des Ziel- und Startpunktes zu berechnen und diese als Werte zu nehmen. So können Sie die Bewegung auf jeden beliebigen Punkt anwenden.
Im Folgenden werden diese Bewegungs“anleitungen” definiert und veranschaulicht.

5.2 Was sind Vektoren?

Um die Beispiele zu vereinfachen, wurden für Grafiken ausschließlich zweidimensionale Vektoren gewählt, da diese die Vorgänge am besten veranschaulichen. Sie werden allerdings ohnehin nicht mehr als dreidimensionale Vektoren benötigen.

Definition 5.2.1 Sei $\vec{v}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^n$. Dieser bezeichnet dann ein geordnetes Tupel der Werte $a_1, a_2, ...a_n$. Dies schreiben wir als $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$ oder als $\vec{v} = (a_1, ...a_n)$. Besteht ein Vektor nur aus Nullen, so nennen wir ihn *Nullvektor*.

Um diese Definition richtig zu verstehen, ist eines wichtig:
Ein Vektor ist weniger ein konkreter Pfeil in einem Koordinatensystem; es ist viel mehr eine unendliche Gruppe an Pfeilen, welche überall im Koordinatensystem präsent sind oder eine generelle “Anleitung”, wie ein beliebiger Punkt zu verschieben ist.
Deshalb hat ein Element eines Vektorraums keine Koordinaten; es kann *überall* im Koordinatensystem eingezeichnet werden und bleibt genau dasselbe Element.

Beispiel 5.2.1 Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Vektor und $P(1|1)$ ein Punkt. Dann kann der Punkt P mit dem Vektor $\vec{v}$ nach $P'(2|3)$ verschoben werden.

Definition 5.2.2 Sei P ein beliebiger Punkt in einem Koordinatensystem. Der **Ortsvektor** von P ist derjenige Vektor, der vom Ursprung auf P zeigt.

Um den Ortsvektor eines Punktes zu bekommen, nehmen wir schlicht die Werte des Punktes und übertragen sie in einen Vektor.

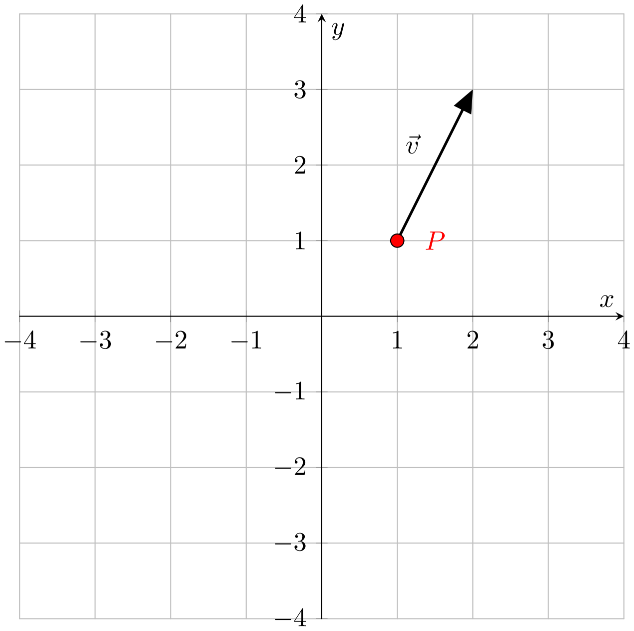


Abbildung 5.1: Die Verschiebung des Punktes P mit dem Vektor $\vec{v}$.

5.2.1 Vektoren bestimmen

Nachdem Sie nun wissen, was Vektoren sind, sollten Sie diese auch bestimmen können. Da Vektoren eine Bewegungsanleitung für einen Punkt zu einem anderen ist, brauchen wir für diese Bestimmung ebenfalls zwei Punkte. Dabei gilt die Regel:

Spitze minus Fuß.

Das, was wir damit meinen, ist, dass die Koordinaten des Punktes A von den Koordinaten des Zielpunktes B subtrahiert werden müssen; die daraus resultierenden Werte sind die des Vektors.

Beispiel 5.2.2 Wir haben den Punkt $A(2|3)$ gegeben und wollen die Bewegung haben, mit der wir auf den Punkt $B(1|2)$ kommen. Da B der Punkt ist, zu welchem wir uns hinbewegen wollen, ist dieser unsere "Spitze", A hingegen unser "Fuß". Dann rechnen wir:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir unseren Vektor gefunden. Die korrespondierende Abbildung finden Sie unten.

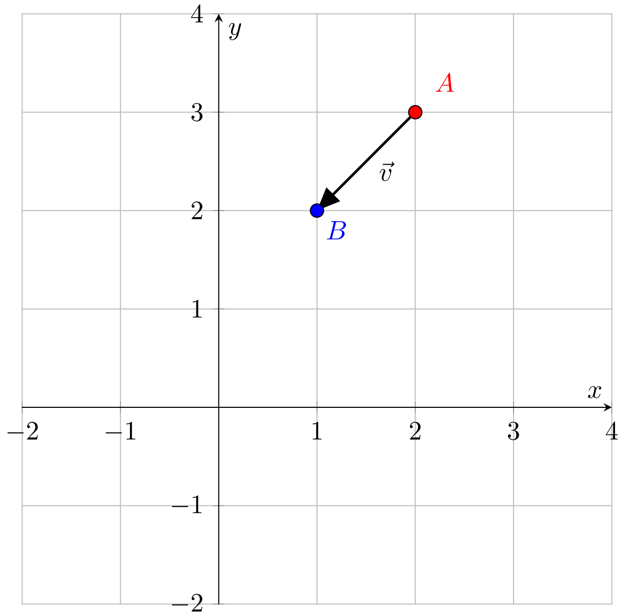


Abbildung 5.2: Die beiden Punkte A und B mit dem dazugehörigen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Falls Sie hingegen Vektoren rein grafisch bestimmen müssen, dann bietet sich eine ebenfalls einfache Methode an; zählen Sie die Schritte, die Sie auf der x-Achse gehen müssen; dies ist Ihr x-Wert. Nun gehen Sie zu den Schritten auf der y-Achse über und tun sie dies so lange, bis sie die gebrauchte Anzahl an Werten haben.

5.2.2 Die Länge eines Vektors

Definition 5.2.3 Sei $\vec{v}$ ein Vektor mit den Werten $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Dann ist die Länge (Betrag) von $\vec{v}$ gegeben durch $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$. Die Länge des Vektors $\vec{v}$ wird als $|\vec{v}|$ geschrieben.

Beispiel 5.2.3 Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Kommt Ihnen das bekannt vor? Wenn Sie an den Satz des Pythagoras gedacht haben, liegen Sie vollkommen richtig! Wie in der unteren Abbildung gezeigt, benutzen wir diesen um die Länge eines Vektors zu berechnen. Tatsächlich gilt der Satz des Pythagoras in erweiterter Form für *jede* Dimension.

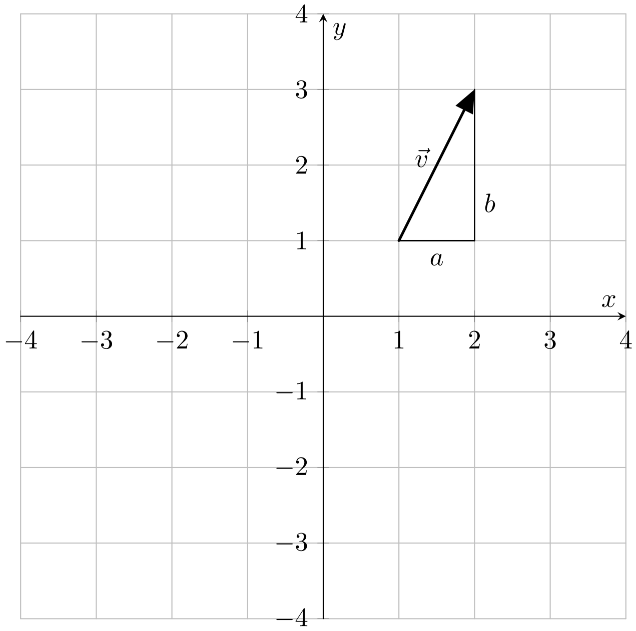


Abbildung 5.3: Die Länge eines Vektors mit dem Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = |\vec{v}|^2$.

Einheitsvektoren

Definition 5.2.4 Ein Einheitsvektor ist ein Vektor mit der Länge 1.

Ein Einheitsvektor wird oft mit einem Zirkumflex (z. B. $\hat{a}$, $\hat{v}$) bezeichnet. In Abschnitt **??** unter dem Punkt "Skalarmultiplikation" finden Sie zum Bilden von Einheitsvektoren weitere Informationen.

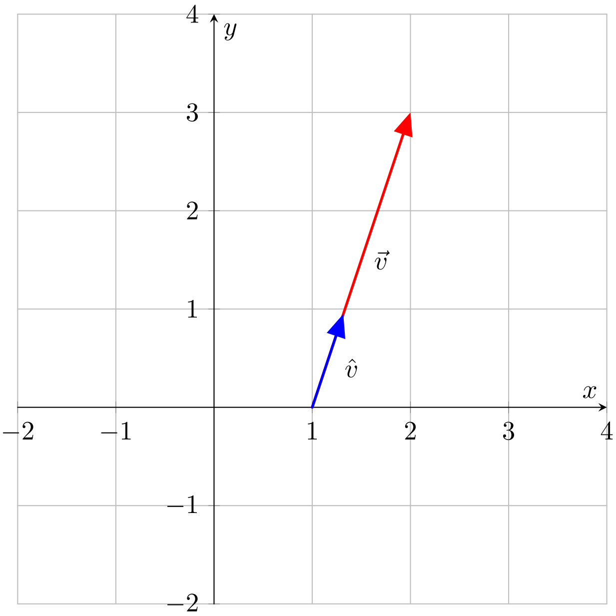


Abbildung 5.4: Der Vektor $\vec{v}$ (rot, Fuß bei (1|0)) mit dem dazugehörigen Einheitsvektor $\hat{v}$ (blau).

5.2.3 Rechnen mit Vektoren

Da mit Vektoren und deren Eigenschaften natürlich ebenfalls gerechnet werden kann, werden die Regeln dafür im Folgenden erläutert. Da die Idee des Rechnens mit Vektoren erst einmal sehr abstrakt erscheint, möchte ich dafür grafische Hilfsmittel einsetzen.

Addition und Subtraktion

Definition 5.2.5 Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren in der Dimension n. Die Summe dieser Vektoren ist dann gegeben durch

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{1_{\vec{a}}} + a_{1_{\vec{b}}} \\ \dots \\ a_{n_{\vec{a}}} + a_{n_{\vec{b}}} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 5.2.4 Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. Dann ist die Summe

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2+5 \\ 3+6 \\ 4+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Die Addition zweier Vektoren ist nichts anderes, als den sogenannten “Fuß” des einen Vektors an die “Spitze” des anderen zu setzen.

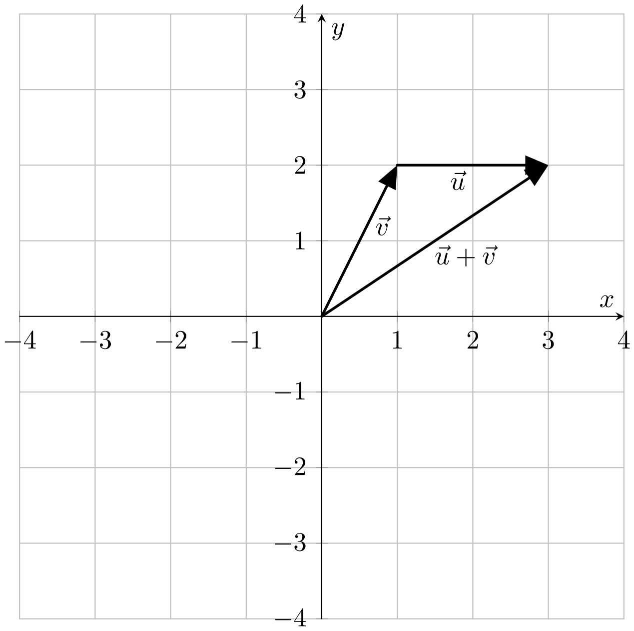


Abbildung 5.5: Die grafische Addition der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Skalarmultiplikation

Definition 5.2.6 Die Skalarmultiplikation ist für einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ mit einem Skalar $s \in \mathbb{R}$ definiert als

$$s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ \dots \\ s \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis heißt Skalarprodukt.

Die Skalarmultiplikation ist eine Möglichkeit, die Länge eines Vektors zu verändern, ohne den Vektor zu rotieren, wie unten gezeigt wird.

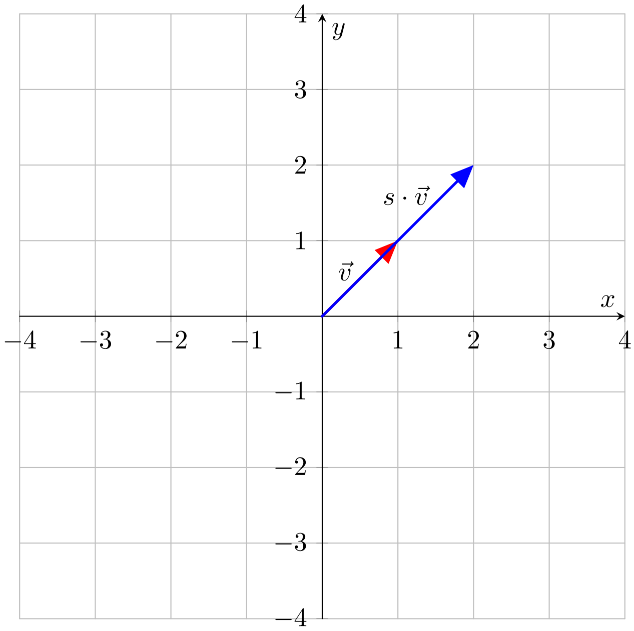


Abbildung 5.6: Die grafische Skalarmultiplikation des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Skalar $s = 2$.

Erinnern Sie sich noch an den Begriff des Einheitsvektors? Tatsächlich ist es uns möglich, jeden Vektor $\vec{v}$ so skalar zu multiplizieren, dass daraus ein Einheitsvektor wird. Dies wird durch die skalare Multiplikation von

$$\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

erreicht.
Wenn wir uns an die Rechengesetze der Brüche zurückerinnern, können wir dies sogar verifizieren:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{1} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}.$$

Desweiteren gilt:
Um einen Vektor umzukehren, müssen wir mit einem negativen s multiplizieren, wie die nächste Definition zeigt:

> **Definition 5.2.7** Der Gegenvektor $-\vec{v}$ macht die Verschiebung des Vektors $\vec{v}$ rückgängig.

In der Abbildung **??** findet sich ein Beispiel dafür.

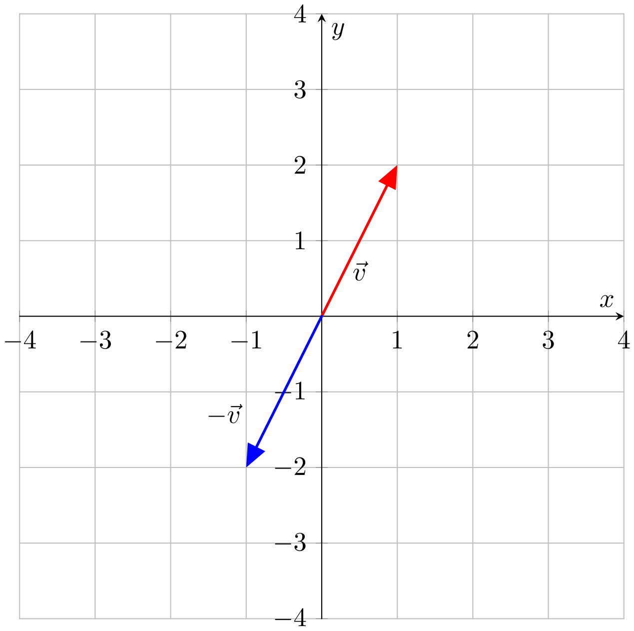


Abbildung 5.7: Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (rot) mit dem Gegenvektor $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (blau).

Skalarmultiplikation zweier Vektoren

Definition 5.2.8 Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ zwei beliebige Vektoren. Das Skalarprodukt (*inneres Produkt, Punktprodukt*) wird durch

$$\vec{x} \circ \vec{z} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

berechnet. Es gilt ebenfalls:

$$\vec{x} \circ \vec{z} = |\vec{x}| \cdot |\vec{z}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{z}).$$

Dabei ist $\sphericalangle(\vec{x}, \vec{z})$ der Winkel, welcher von $\vec{x}$ und $\vec{z}$ eingeschlossen wird.

Beispiel 5.2.5 Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren. Dann ist das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 25$.

Wie Sie sicherlich sehen können, ist das Ergebnis des Skalarprodukts *kein* weiterer Vektor, sondern eine reelle Zahl. Auch wenn diese Rechnung im ersten Augenblick wenig Sinn macht, so hat sie doch ihre Daseinsberechtigung; mit dem Skalarprodukt zweier Vektoren lässt sich bestimmen, ob diese senkrecht aufeinander stehen. Dies führt uns direkt zur nächsten Definition:

Definition 5.2.9 Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei beliebige Vektoren. Wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist, stehen sie senkrecht (orthogonal) aufeinander.

In den folgenden Abbildungen finden Sie dazu zwei Beispiele.

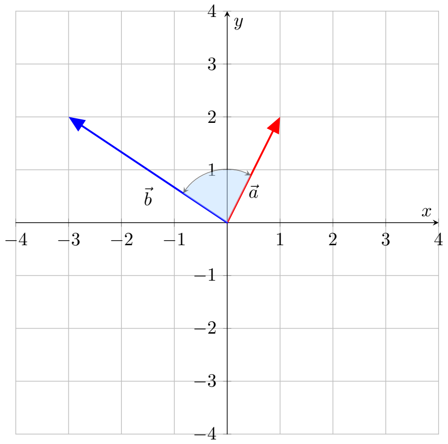


Abbildung 5.8: $\vec{a}$ (rot) $\perp$ $\vec{b}$ (blau) $\Longleftrightarrow$ $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$. Der Winkel $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ ist blau hinterlegt.

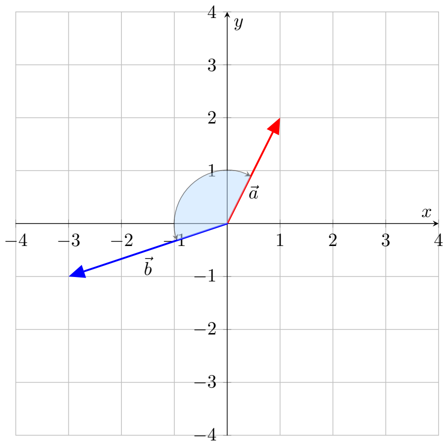


Abbildung 5.9: $\vec{a}$ (rot) $\not\perp$ $\vec{b}$ (blau) $\Longleftrightarrow$ $\vec{a} \circ \vec{b} \neq 0$. Der Winkel $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ ist blau hinterlegt.

5.3 Lineare Unabhängigkeit

Im Laufe dieses Kapitels wird Ihnen wiederholt der Begriff der linearen (Un-)Abhängigkeit begegnen. Um nicht im Dunkeln zu tappen, wird diese Eigenschaft natürlich ebenfalls erläutert, da diese elementar für das Teilgebiet der linearen Algebra ist.

5.3.1 Linearkombination

Die Definition der Linearkombination ist recht einfach:

> **Definition 5.3.1** Seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gegeben. Dann ist der Vektor $\vec{c}$ eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn sich dieser ausschließlich unter der Verwendung von Vektoraddition und Skalarmultiplikation mit den anderen beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken

lässt.

Keine Sorge, wenn Ihnen diese Definition zu abstrakt erscheinen mag, sie ist eigentlich recht intuitiv: Stellen Sie sich zwei Pfeile $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie einen Punkt A vor, den sie erreichen möchten. Können Sie den Punkt von Ihrer Position (genannt P) aus nur mithilfe des Verschiebens, Aneinanderreihens (Addition) oder des Veränderns der Länge (Skalarmultiplikation) beider Pfeile erreichen, so ist der Pfeil $\vec{PA}$ eine Linearkombination der Pfeile $\vec{a}$ und $\vec{b}$. $\vec{PA}$ lässt sich also als eine Kombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken. Es folgt die Veranschaulichung und ein konkretes Beispiel.

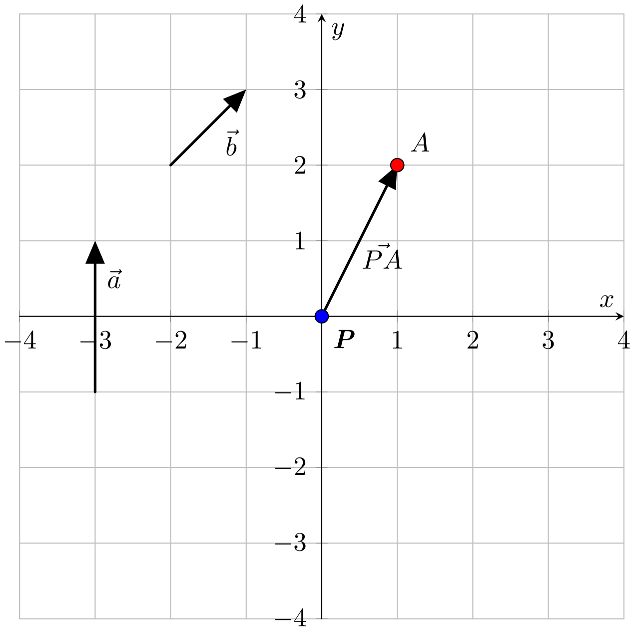


Abbildung 5.10: Veranschaulichung der Erklärung. Hier lässt sich $\vec{PA}$ durch die Halbierung von $\vec{a}$ und die Addition von $\vec{b}$ ausdrücken.

Beispiel 5.3.1 Es seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0.5\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

Dann ist der Vektor $\vec{c}$ eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, denn

$$\begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix}0.5\\1\\0\end{pmatrix}$$

Es gilt natürlich: Lineare Unabhängigkeit liegt dann und nur dann vor, wenn der Vektor keine Linearkombination anderer Vektoren ist. Da Sie nun den Begriff der Linearkombination beherrschen, folgt nun eine alternative Definition.

Definition 5.3.2 Es seien $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ beliebige Vektoren.
Sie sind genau dann **linear unabhängig**, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur durch eine Linearkombination der Form

$$s_1\vec{a_1} + s_2\vec{a_2} + \cdots + s_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

schreiben lässt, in der alle Koeffizienten $s_1, \dots, s_n$ gleich Null sind.

Wieso ergibt das nun Sinn? Stellen Sie sich drei Pfeile $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sowie Ihre Position P vor. Reihen Sie nun die Pfeile beliebig aneinander (so, dass der Fuß des ersten Pfeils direkt an Ihrer Position liegt). Erinnern wir uns dann daran zurück, dass ein Nullvektor ($\vec{0}$) eine Anleitung für eine bestimmte Bewegung ist: nämlich garkeine Bewegung. Können Sie nur durch verschieben und dem Verändern der Länge der drei Pfeile einen neuen Pfeil "herstellen", welcher zurück auf Ihre Position P zeigt? Wenn Sie dies können (ohne die Pfeile zu "vernichten", also ihre Länge auf Null zu setzen), lassen sich die Pfeile mit den jeweils anderen darstellen, da wir ihre Bewegungen rückgängig machen können.
Erreichen wir dies nur durch die Vernichtung der Pfeile, gibt es keine Möglichkeit, die Pfeile durch die Anderen darzustellen. Dann sind sie keine Linearkombinationen voneinander, also linear unabhängig.
Es folgen zwei grafische Beispiele und ein Textbeispiel, um diese Idee zu verdeutlichen.

Beispiel 5.3.2 Es seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ gegeben.
Sie sind nicht linear unabhängig, denn der Nullvektor lässt sich folgendermaßen darstellen.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

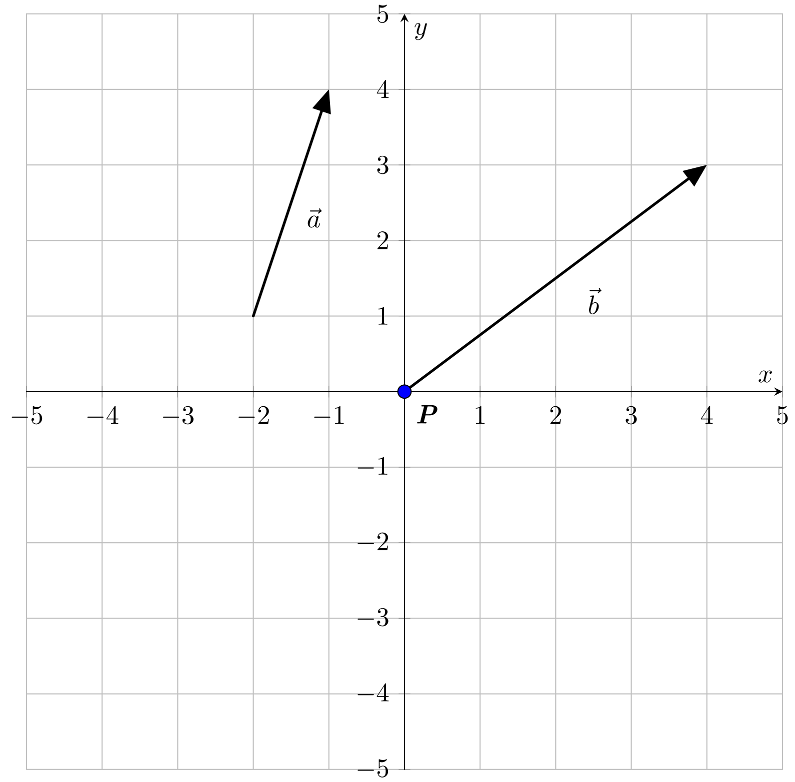


Abbildung 5.11: Veranschaulichung der Erklärung. Die Vektoren lassen sich nicht so verschieben, strecken oder umkehren, sodass sie von P zurück auf P zeigen. Sie sind **linear unabhängig**.

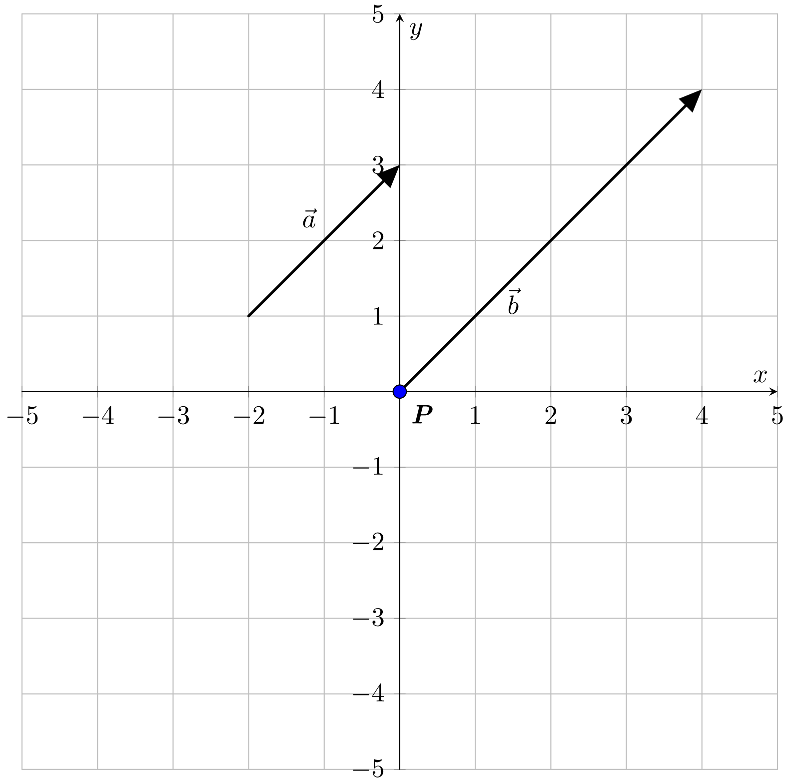


Abbildung 5.12: Veranschaulichung der Erklärung. Die Vektoren lassen sich derartig verschieben und strecken, stauchen sowie umkehren, sodass sie von P zurück auf P zeigen. Sie sind **linear abhängig**.

Nun möchte ich Ihnen zwei Methoden vermitteln, Vektoren auf lineare Unabhängigkeit zu überprüfen. Dabei gilt:

Vektoren sind linear unabhängig, wenn das zugehörige Gleichungssystem *keine* Lösungen (außer der Trivialen) besitzt. Sie sind linear abhängig, wenn das Gleichungssystem eine nicht-triviale Lösung besitzt.

5.3.2 Lineare Gleichungssysteme

Der Begriff linearer Gleichungssysteme sollte Ihnen bereits geläufig sein. Nichtsdestotrotz werde ich ihn der Vollständigkeit halber noch einmal anreißen.

Definition 5.3.3 Ein lineares Gleichungssystem (auch mit LGS abgekürzt) ist eine Menge linearer Gleichungen mit unbekannten Variablen. Dabei sollen alle Gleichungen erfüllt sein.

Beispiel 5.3.3 Es seien $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $8 = 3x + 4y$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $2y - 7x = 10$ zwei Gleichungen. Dann ist das Gleichungssystem

$$3x + 4y = 8 \tag{5.1}$$
$$2y - 7x = 10 \tag{5.2}$$

gegeben.

Überführen von Vektoren in ein LGS

Definition 5.3.4 Sei eine bestimmte Anzahl an Vektoren $\vec{a_n}$ gegeben. Dann verbinden wir die Vektoren folgendermaßen miteinander:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{a_n} = \vec{0}.$$

Beispiel 5.3.4 Es seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$ gegeben.

Dann werden die Vektoren in die obige Gleichung eingesetzt:

$$\vec{0} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c}$$
$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$$

Daraus entsteht sodann fast direkt das Gleichungssystem:

Beispiel 5.3.5 Wird

$$\vec{0} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$$

in ein Gleichungssystem aufgelöst, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\lambda_1\\2\lambda_1\\3\lambda_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\lambda_2\\-2\lambda_2\\4\lambda_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\lambda_3\\6\lambda_3\\2\lambda_3\end{pmatrix}$$

$$0 = 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$$
$$0 = 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 6\lambda_3$$
$$0 = 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3$$

Wie Sie sehen, werden also die Werte in einem festen Schema umgeschrieben. Dabei müssen die Koeffizienten nicht λ heißen, sie können jede Form annehmen.

Lösen von LGS

Das klassische Lösen von LGS ist kein Hexenwerk; Es existieren *drei* Wege, diese zu lösen. Glücklicherweise sagt der jeweilige Name bereits aus, auf welche Methoden wir zurückgreifen, um das jeweilige System zu lösen.

Einsetzungsverfahren

Das Einsetzungsverfahren besteht aus *4* Schritten und bietet sich für LGS mit beliebig vielen Gleichungen an:

1. Umstellen einer Gleichung nach einer Variable.

2. Einsetzen der umgestellten Gleichung in die anderen Gleichungen.
3. Es fällt eine Variable weg, Schritt 1 und 2 wiederholen.

Ein Beispiel folgt.

Beispiel 5.3.6 Sei das Gleichungssystem

$$3x + 4y = 8 \tag{5.3}$$
$$2y - 7x = 10 \tag{5.4}$$

gegeben. Wir beginnen damit, **??** nach y aufzulösen:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 8 \\ 4y &= 8 - 3x \\ y &= 2 - \frac{3}{4}x \end{aligned} \tag{5.5}$$

Diesen Wert für y setzen wir nun in **??** ein:

$$\begin{aligned} 2y - 7x &= 10 \\ 2\left(2 - \frac{3}{4}x\right) - 7x &= 10 \\ 4 - 1.5x - 7x &= 10 \\ 4 - 8.5x &= 10 \end{aligned}$$

Nach x umstellen:

$$\begin{aligned} 4 - 8.5x &= 10 \\ -8.5x &= 6 \\ x &= -\frac{6}{8.5} \end{aligned}$$

Diesen x-Wert setzen wir nun in die umgestellte Form von **??** ein:

$$\begin{aligned} y &= 2 - \frac{3}{4}x \\ y &= 2 - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{6}{8.5}\right) \\ y &= 2 + \frac{9}{17} \end{aligned}$$

Diese beiden x- und y-Werte, also

$$\begin{aligned} y &= 2 + \frac{9}{17} \\ x &= -\frac{6}{8.5} \end{aligned}$$

sind demnach unsere Lösungen für das Gleichungssystem.

Natürlich können Sie dieses Verfahren für beliebig viele Gleichungen erweitern (siehe obige Schritte), der Übersicht halber wurde hier lediglich ein 2-Variablen-Gleichungssystem verwendet.

Gleichsetzungsverfahren

Das Gleichsetzungsverfahren bietet sich hervorragend für LGS mit 2 Gleichungen an. Es besteht ebenfalls aus *4* Schritten:

1. Umstellen beider Gleichungen nach einer Variable.
2. Gleichsetzen beider Gleichungen.
3. Neue Gleichung auflösen.
4. Ergebnis in eine der beiden Gleichungen auflösen.

Ein Beispiel folgt.

Beispiel 5.3.7 Sei das Gleichungssystem

$$2x + 4y = 8 \tag{5.6}$$
$$4y - 4x = 5 \tag{5.7}$$

gegeben. Wir beginnen damit, **??** nach y aufzulösen:

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 8 \\ 4y &= 8 - 2x \\ y &= 2 - \frac{1}{2}x \end{aligned} \tag{5.8}$$

Nun stellen wir **??** ebenfalls nach y um:

$$\begin{aligned} 4y - 4x &= 8 \\ 4y &= 8 + 4x \\ y &= 2 - x \end{aligned} \tag{5.9}$$

Als nächstes setzen wir **??** und **??** gleich und lösen diese Gleichung auf:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{2}x &= 2 - x \\ 2 &= 2 - 1.5x \\ 0 &= -1.5x \\ 0 &= x \end{aligned}$$

Zuletzt setzen wir unser x entweder in **??** oder **??** ein. In diesem Fall benutzen wir **??**, lösen auf und erhalten dadurch unser y.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 8 \\ 2 \cdot 0 + 4y &= 8 \\ 4y &= 8 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Lösungen für dieses Gleichungssystem $x = 0$ und $y = 2$ sind.

5.3.3 Gaußsches Eliminationsverfahren

Das Gaußsche Eliminationsverfahren führt oftmals zu Verwirrung, jedoch kann es bei richtiger Anwendung um einiges schneller sein als die regulären Methoden zum Lösen von LGS.
Es besteht aus *3* Schritten:

1. Die Gleichungen in Matrixform schreiben.
2. Matrix in die Stufenform[1] umformen.
3. Ablesen und Einsetzen.

Eine Eliminationsmatrix ist folgendermaßen aufgebaut:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_2 \end{array}\right)$$

Dabei kann die Matrix beliebig klein (oder groß!) sein, in unserem Fall ist die Matrix jedoch meistens eine 2×2 oder 3×3 Matrix. Alle a-Werte korrespondieren zu einem Wert des Gleichungssystems; jeder dieser Werte ist der jeweilige Faktor vor einer Variablen. Die b-Werte hingegen sind diejenigen Werte, welche "nach" dem Gleichheitszeichen geschrieben werden.

Beispiel 5.3.8 Sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 5z &= 8 \\ x - 3y - 2.5z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Dann ist die Eliminationsmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 8 \\ 1 & -3 & -2.5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Haben Sie nun diese Eliminationsmatrix, so ist Ihr nächstes Ziel, diese auf die sogenannte Stufenform zu bringen. Eine Matrix in Stufenform ist grundlegend folgendermaßen aufgebaut:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & b_2 \end{array}\right)$$

Diese Form erreichen Sie, indem Sie die Zeilen ausschließlich durch verrechnen mit anderen Zeilen umformen.

Beispiel 5.3.9 Sei die Eliminationsmatrix

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & -2.5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \end{array}$$

gegeben. Eine valide Umformung ist dann $\mathrm{III} \to \mathrm{III} - 2\mathrm{II}$ (Die 3. Zeile wird zur 3. Zeile minus

[1] Die Stufenform ist eine Form, in der pro Zeile ein Wert mehr gleich Null ist.

$2 \times$ der 2. Zeile):

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$

Jeder Wert aus III wird also mit dem mit 2 multiplizierten Wert aus II subtrahiert.
Der letzte Schritt ist II $\rightarrow$ II $- \frac{1}{3}$I:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{25}{6} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$

Dabei ist es essentiell, dass Sie zuerst die unteren beiden Werte eliminieren (Null werden lassen). Dies macht es Ihnen im späteren Verfahren leichter.

Hinweis 5.3.1 Denken Sie daran: Sie werden nicht immer auf Anhieb in der Lage zu sein, die Nullen dort zu generieren, wo sie gebraucht werden. Scheuen Sie sich nicht davor, die anderen Zeilen zu Ihrem Nutzen umzuformen.

5.4 Basis und Dimension eines Vektorraums

5.4.1 Dimensionen

Um den Begriff einer Dimension zu definieren, stellen wir uns zunächst folgendes vor:
Wenn Sie ein Strichmännchen auf ein Blatt Papier zeichnen, existiert dieses Männchen im zweidimensionalen Raum. Denn: Die Position kann mit zwei Koordinaten eindeutig bestimmt werden. Eine für die x-Achse (Rechts und Links), die Andere für die y-Achse, als Oben und Unten.
Wir hingegen leben in einer dreidimensionalen Welt; es ist uns nicht möglich, die Position eines Körpers *eindeutig* mit zwei Koordinaten anzugeben. Ein Ballon mit der x-Koordinate 4 und der y-Koordinate 2 hat unendlich viele mögliche Positionen, denn die z-Koordinate ist frei wählbar. Ich rege Sie dazu an, es selbst zu versuchen!

Definition 5.4.1 Die Dimension eines beliebigen Vektorraums ist die maximale Anzahl an linear unabhängigen Richtungen, die es benötigt, um einen Vektor eindeutig anzugeben.

5.4.2 Basis

Definition 5.4.2 Eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ist die Menge der Vektoren, mit welchen sich jeder beliebige Vektor des Vektorraums darstellen lässt.

Wie die restlichen Definitionen erscheint diese erst einmal abstrakt, doch gehen wir sie gemeinsam an:
Zunächst wird der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert. Dabei steht das ^{n} für die Anzahl der Dimensionen, zum Beispiel 2-Dimensional ($x - y$-Koordinatensystem) oder 3-Dimensional ($x - y - z$-Koordinatensystem). Danach wird definiert, dass die Basis dieses n-dimensionalen Raumes eine Menge von n Vektoren sind, mit denen sich jeder beliebige Vektor darstellen lässt. In anderen Worten kann man mit einer bestimmten Kombination dieser Vektoren jeden erdenklichen Punkt dieses Raumes erreichen.

Beispiel 5.4.1 Eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die oben genannte Basis wird auch *Einheitsbasis* genannt, da die zugrundeliegenden Vektoren lediglich aus der 1 bestehen, lässt man die Null außer Acht.
Weiterhin sind die Koordinaten eines beliebigen Vektors $\vec{v}$ die Linearfaktoren seiner Basis, zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{e_1} + 3 \cdot \vec{e_2}.$$

Hierbei sind $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ die oben im Beispiel gegebenen Einheitsvektoren.
Setzt man diese Vektoren ein, erhält man eine offensichtlich wahre Aussage:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wäre eine andere Vektorraumbasis gegeben, würde dieses Vektor natürlich anders aussehen. Gerne dürfen Sie dies ausprobieren!
Desweiteren gilt:

Die Basisvektoren sind linear unabhängig.

Um also zu prüfen, ob eine Menge an Vektoren eine Basis bildet, müssen Sie prüfen, ob diese linear unabhängig voneinander sind, siehe **??** für weitere Informationen.

5.5 Übungen

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.55 \\ 1.2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
2. Was ist die Länge des Vektors $\vec{a}$ der vorherigen Aufgabe?
3. Addieren Sie grafisch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.75 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1.25 \end{pmatrix}$ und geben Sie das Ergebnis an.
4. Finden Sie den fehlenden Wert des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, welcher im Rechten Winkel zu Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ steht.
   Hinweis: benutzen Sie die Definition **??** *für diese Aufgabe.*
5. Es ist der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} s \\ 3 \\ 2s \end{pmatrix}$ mit $|\vec{b}| = 7$ gegeben. Bestimmen Sie ein mögliches s (auf 4 Nachkommastellen gerundet) und normalisieren Sie $\vec{b}$.
6. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{6}{4}x \\ 1.55 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ sowie $\vec{a} \cdot \vec{b} = 54$. Berechnen Sie x.

7. Die Länge der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2a \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4a \end{pmatrix}$ ist dieselbe. Geben Sie die zwei möglichen Werte für a an.

8. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -3x - 2y + 5z &= 8 \\ 2x + 5y - 2.5z &= 0 \\ x + 2y - 3z &= -3 \end{aligned}$$

   Schreiben Sie dieses LGS in Matrizenform.
   Tipp: Beachten Sie Vorzeichen.

9. Prüfen Sie das lineare Gleichungssystem aus 8. auf eventuelle Lösungen mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

10. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Überführen Sie diese Vektoren in ein Gleichungssystem und überprüfen Sie Dieses mithilfe des Gauß-Algorithmus auf Lösungen.

6. Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen sind Ihnen sicherlich bereits bekannt. Mit ihnen lassen sich zahlreiche in der Natur vorkommende Relationen wie die Flugbahn von Objekten beschreiben. Viele Aufgabenstellungen werden in der Zukunft darauf abzielen, mit solchen Funktionen jonglieren zu können.

6.1 Was sind quadratische Funktionen?

Definition 6.1.1 Eine quadratische Funktion ist eine Funktion, welche sich in der Form

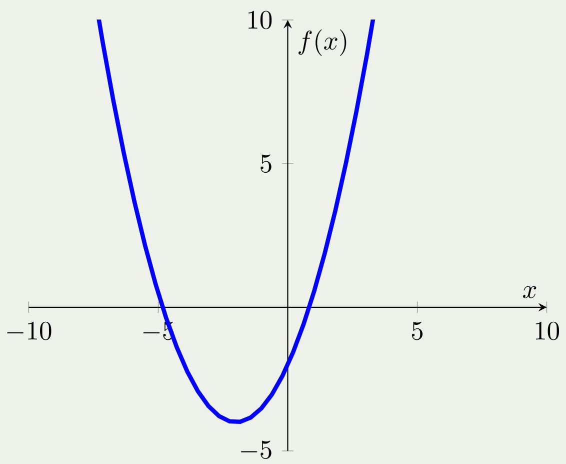
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

darstellen lässt. Dabei gilt: $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Wie Sie sicher schon wissen, sind die Grafen jener Funktionen sogenannte Parabeln. Ein Beispiel folgt nun.

Beispiel 6.1.1 Eine quadratische Funktion ist

$$f(x) = 0.5x^2 + x - 2.$$



6.1.1 Der Streckfaktor *a*

Der Streckfaktor a ist der maßgebende Punkt bei der Form einer Parabel. Um Funktionen zeichnen zu können, ist es deshalb nötig, dass sie diesen Wert schnell und sicher interpretieren können.

Nach oben und unten geöffnet

Parabeln können "nach unten" oder "nach oben" geöffnet sein. Eine nach oben geöffnete Parabel haben Sie im Beispiel **??** bereits gesehen. Eine Parabel ist

- Nach oben geöffnet, wenn $a > 0$,
- nach unten geöffnet, wenn $a < 0$.

Gestaucht und gestreckt

Es wird gesagt, Parabeln können entweder "gestreckt", "gestaucht" oder eine Normalparabel sein. Eine solche Funktion ist

- eine Normalparabel, wenn $a = \pm 1$,
- eine gestreckte Parabel, wenn $a > 1$ oder $a < -1$,

- eine gestauchte Parabel, wenn $a \in]0;1[$ oder $a \in]0;-1[$.

In menschlicher Sprache:
Wenn a größer als 1 oder kleiner als -1 ist, nennen wir die Parabel gestreckt. Ist sie zwischen 0 und 1 oder 0 und -1, so ist sie gestaucht. Ist a keines von Beidem, so ist es eine Normalparabel. Die drei Arten finden sich in den unteren Abbildungen.

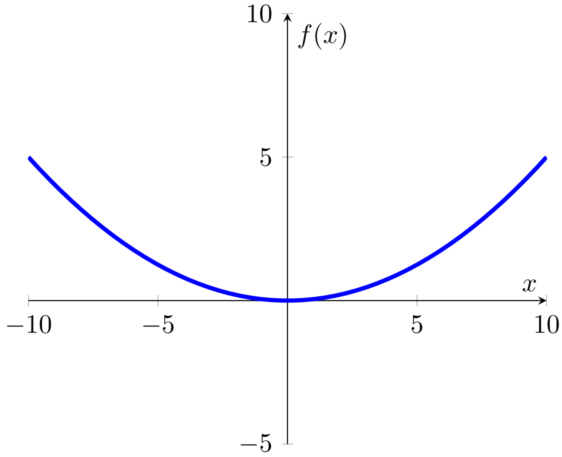


Abbildung 6.1: Eine gestauchte Parabel.

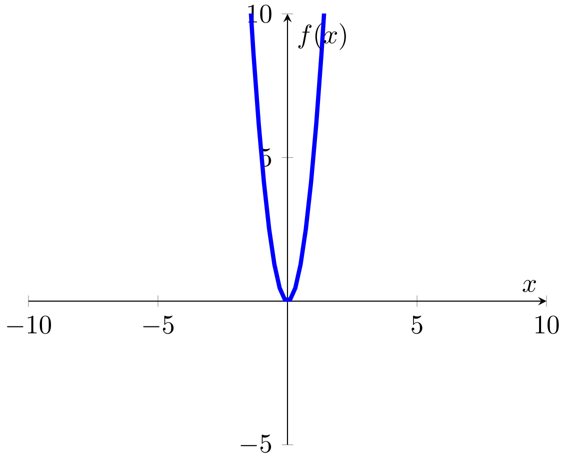


Abbildung 6.2: Eine gestreckte Parabel.

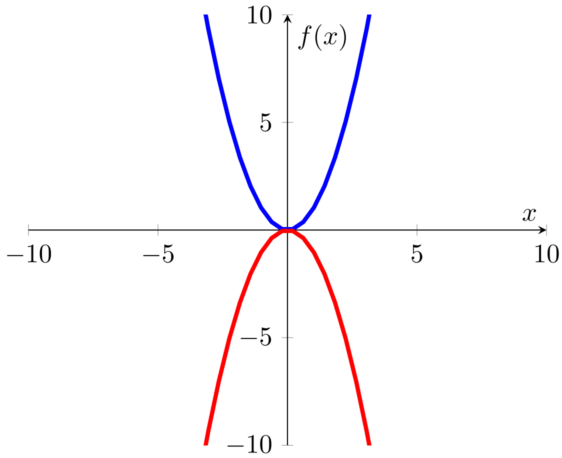


Abbildung 6.3: Eine nach oben geöffnete (blau) und nach unten geöffnete Normalparabel (rot).

6.1.2 Der Scheitelpunkt

Definition 6.1.2 Eine nach oben geöffnete Parabel zeichnet sich durch ein Funktionsminimum aus, die nach unten Geöffnete hingegen durch ein Funktionsmaximum. Dieser Punkt wird bei beiden Arten als *Scheitelpunkt* bezeichnet.

Dabei gilt die Relation: Der Scheitelpunkt $S(x \mid y)$ kann mit

$$S(-\frac{b}{2a} \mid \frac{4ac-b^2}{4a})$$

bestimmt werden. Diese Terme sind durch umformen der Gleichung $f(x) = ax^2+bx+c$ entstanden. Als Knobelaufgabe rege ich Sie dazu an, sich diese Regel selbst herzuleiten!

6.1.3 Die Scheitelpunktform

Neben der Normalform, welche Sie schon kennengelernt haben, können wir quadratische Funktionen in einer weiteren Weise darstellen.

Definition 6.1.3 Die Scheitelpunktform ist eine Form einer quadratischen Gleichung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aus der man den Scheitelpunkt direkt ablesen kann:

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S.$$

Der Scheitelpunkt ist dabei $S(x_S \mid y_S)$.

Beispiel 6.1.2 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 1$. Dann ist die Scheitelpunktform dieser Funktion

$$f(x) = (x + 0)^2 + 1.$$

In der Abbildung **??** finden Sie den dazugehörigen Grafen.

Umwandeln der Normalform in die Scheitelpunktform

Um diese Umwandlung zu vollbringen, sind vier Schritte notwendig:

1. Koeffizient a ausklammern.
2. Quadratische Ergänzung.
3. Negativen Term ausmultiplizieren.
4. Binomische Formel anwenden.

Quadratische Ergänzung

Die quadratische Ergänzung ist ein Verfahren, mit dem sich Terme von der Form $x^2 + bx$ in die Form einer binomischen Formel bringen lassen. Wir haben den Term $ax^2 + bx + c$ gegeben. Um Ihn in die Form einer binomischen Formel zu bringen, klammern wir zuerst a aus:

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c \\ = \quad & a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x\right) + c. \end{aligned}$$

Dieser eingeklammerte Term wird jetzt in die Form $x^2 + 2dx + d^2$ gebracht, damit wir die erste binomische Formel anwenden können.

$$\begin{aligned} & a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x\right) + c \\ = \quad & a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Um es zu verdeutlichen, ersetzen wir $\frac{b}{a}$ durch p:

$$a\left(x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right).$$

Dabei wird der Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ als "nahrhafte Null" oder "Nullergänzung" bezeichnet, da wir natürlich nicht die Bedeutung des Terms verändern dürfen; wir dürfen lediglich Terme so hinzufügen, dass sie die Funktion selbst nicht verändern.

Beispiel 6.1.3 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x^2 + 8x + 8$. Diese wollen wir in die Scheitelpunktform bringen.
Als erstes klammern wir das a aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 + 8x + 8 \\ &= 4(x^2 + 2x) + 8. \end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(x^2 + 2x) + 8 && \mid \text{Ergänzen von } \left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ &= 4(x^2 + 2x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{2}{2}\right)^2) + 8 \\ &= 4(x^2 + 2x + 1 - 1) + 8 && \mid \text{Ausmultiplizieren von} - 1 \\ &= 4(x^2 + 2x + 1) + 8 + 4 \cdot (-1) \\ &= 4(x^2 + 2x + 1) + 8 - 4 \\ &= 4(x^2 + 2x + 1) + 4. \end{aligned}$$

Nun wenden wir die erste binomische Formel auf die Klammer an:

$$\begin{aligned} &= 4(x^2 + 2x + 1) + 4 \\ &= 4(x + 1)^2 + 4. \end{aligned}$$

Verständnisfrage: Welche Koordinaten besitzt hier der Scheitelpunkt?

Umwandeln der Scheitelpunktform in die Normalform

Um den vorherigen Schritt rückgängig zu machen sind die folgenden Schritte notwendig:

1. Binomische Formel anwenden.
2. Einsetzen.
3. Vereinfachen.

Ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=a(x-d)^2+e$ gegeben, wenden wir als erstes die binomische Formel auf die Klammer an und setzen ein:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-d)^2+e \\ &= a(x^2-2\cdot dx+d^2)+e. \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir die Klammer aus:

$$= ax^2-2\cdot adx+ad^2+e$$

Nun müssen Sie nurnoch die Terme ad^2+e zusammenfassen, da dieser Term eine reelle Zahl ergibt.

Beispiel 6.1.4 Es ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=2(x-5)^2+4$ gegeben.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-5)^2+4 && \mid \text{Binomische Formel anwenden} \\ &= 2(x^2-2\cdot 5x+5^2)+4 \\ &= 2(x^2-10x+25)+4 && \mid \text{Ausmultiplizieren} \\ &= 2x^2-20x+50+4 \\ &= 2x^2-20x+54. \end{aligned}$$

6.2 Nullstellen

Definition 6.2.1 Die Nullstellen sind bei einer Funktion diejenigen Werte, welche beim Einsetzen in den Funktionsterm die Null ergeben. Diese Werte werden mit x_1 bis x_n bezeichnet.

Anders formuliert sind die Nullstellen einer Funktion die x-Werte, bei welchen dieser Graf der Funktion die x-Achse schneidet.
Natürlich gibt es nicht für jede erdenkliche (quadratische) Funktion Nullstellen in den reellen Zahlen: Nehmen Sie Beispielsweise die Gleichung

$$f(x)=x^2+1.$$

Den Grafen für diese Gleichung finden Sie unten. Wenn wir versuchen, nach x aufzulösen, müssten wir aus einer negativen Zahl eine Wurzel ziehen. Und wie Sie sich sicher erinnern können, ist dies im reellen Zahlenraum nicht möglich; das Aussehen des Grafen bestätigt dies.

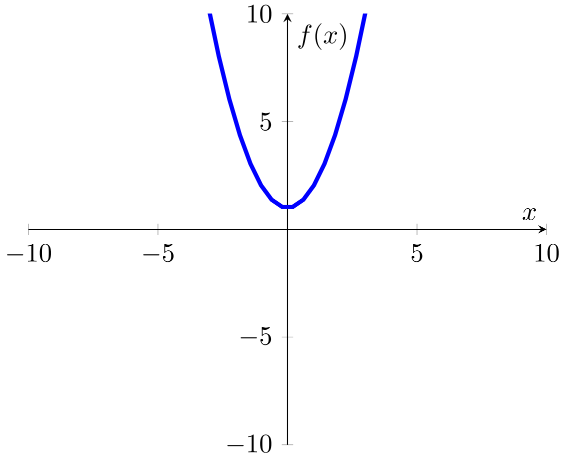


Abbildung 6.4: Der Graf der Funktion $f(x) = x^2 + 1$.

Es ist trivial zu erkennen, dass der Graf die x-Achse nie schneidet.

6.2.1 Bestimmen der Nullstellen

Da Sie nun wissen, was Nullstellen sind, sollten Sie diese auch bestimmen können.

Grafische Bestimmung

Wie Sie aus **??** vielleicht bereits entnehmen konnten, ist es uns möglich, die Nullstellen aus dem Grafen abzulesen.

Beispiel 6.2.1 Es ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 4$ sowie dessen Graf gegeben.

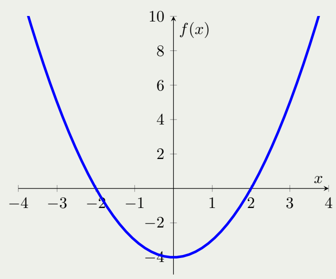


Abbildung 6.5: Der Graf der Funktion $f(x) = x^2 - 4$.

Durch Betrachten des Grafen ist es uns möglich, die beiden Nullstellen mit $x_{1,2} = \pm 2$ anzugeben.

Wie sieht es aber mit Funktionen wie $f(x) = 1.2x^2 - 3x - 4$ aus? Pures Ablesen führt uns nicht zu einem exakten Ergebnis, wie Sie unten erkennen können.

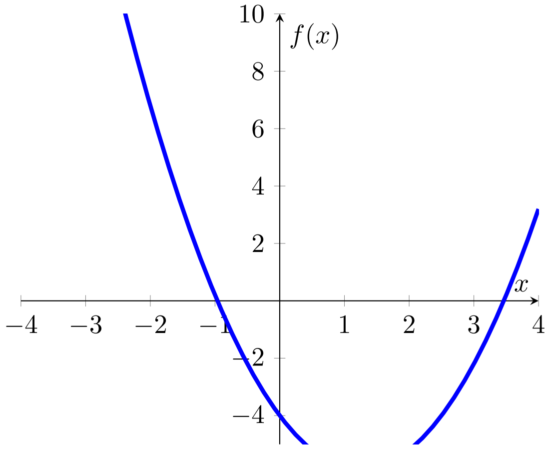


Abbildung 6.6: Der Graf der Funktion $f(x) = 1.2x^2 - 3x - 4$.

Dafür benötigen wir eine weitere Methode.

Rechnerische Bestimmung

Natürlich können wir versuchen, jede quadratische Funktion nach x aufzulösen. Auf Dauer kostet das aber Zeit. Deshalb gibt es die sogenannte Mitternachtsformel, mit welcher beide Nullstellen einer solchen Funktion bestimmt werden kann. Die Mitternachtsformel lautet

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dabei wird der Term unter der Wurzel ($b^2 - 4ac$) die *Diskriminante* genannt und in der Regel mit D bezeichnet. Sie gibt an, wie viele Nullstellen die Funktion hat. Es gilt:

- $D = 0 \implies$ Eine Nullstelle.
- $D > 0 \implies$ Zwei Nullstellen.
- $D < 0 \implies$ Keine Nullstelle.

Diese Regeln sind sogar recht einfach herzuleiten, denn wenn wir uns die Mitternachtsformel anschauen, dann ist $-b \pm \sqrt{0}$ immernoch dasselbe wie $-b$. Wenn die Diskriminante größer als 0 ist, rechnen wir einmal $-b + \sqrt{D}$ und $-b - \sqrt{D}$, was zu zwei Lösungen führt. Da wir aus negativen Zahlen keine Wurzeln ziehen können, gibt es für $D < 0$ keine Lösungen.

Beispiel 6.2.2 Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1.2x^2 - 3x - 4$ gegeben. Dabei ist $a = 1.2$, $b = -3$ und $c = -4$. Wir setzen mit Null gleich, also

$$f(x) = 0.$$

Die Diskriminante gibt uns

$$\begin{aligned} D = &\quad (-3)^2 - 4 \cdot 1.2 \cdot (-4) \\ = &\quad 28.2. \end{aligned}$$

Da hier $D > 0$ ist, hat die Gleichung zwei Lösungen, welche wir nun mit dem Einsetzen der

Werte in die Mitternachtsformel bestimmen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \tfrac{-(-3)\pm\sqrt{D}}{2\cdot 1.2} \\ x_1 &\approx 3.4627, \\ x_2 &\approx -0.9627. \end{aligned}$$

Herleitung der Mitternachtsformel

Wenn Sie sich für die Herkunft dieser Formel interessieren, habe ich die Herleitung hier zusammengefasst. Ich rege Sie dazu an, jeden Schritt nachzuvollziehen!
Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 && \mid -c \\ ax^2+bx &= -c && \mid \cdot 4a \\ 4a^2x^2+4abx &= -4ac && \mid +b^2 \\ 4a^2x^2+4abx+b^2 &= -4ac+b^2. \end{aligned}$$

Nun ist genaues Hinsehen gefragt: auf der linken Seite sehen wir die erste binomische Formel; nämlich

$$a^2+2ab+b^2.$$

Dies ist natürlich dann das gleiche wie $(a+b)^2$. Nun wandeln wir die linke Seite um:

$$(2ax^2)+2\cdot 2abx+b^2 = b^2-4ac.$$

Nun wenden wir die erste binomische Formel an und erhalten

$$\begin{aligned} (2ax+b)^2 &= b^2-4ac && \mid \sqrt{\cdots} \\ 2ax+b &= \pm\sqrt{b^2-4ac} && \mid -b \\ 2ax &= -b\pm\sqrt{b^2-4ac} && \mid \div 2a \\ x_{1,2} &= \tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Ich habe am Anfang des Buches geschrieben, dass die Wurzel nur einen Ausgabewert hat, also wieso steht dort nun ein $\pm$ davor? Nun ja, wenn wir die Lösungen von Gleichungen bestimmen wollen, gibt es bei quadratischen Gleichungen in der Regel zwei Lösungen, wie zum Beispiel bei $x^2=4$. Hier kann $x=2$ oder $x=-2$ sein. Um alle Lösungen zu erhalten, müssen wir deshalb die Wurzel in einem Fall addieren und im anderen subtrahieren.

6.2.2 Schnittpunkte mit anderen mathematischen Objekten

Die Fähigkeit, Schnittpunkte und Berührpunkte von quadratischen Funktionen mit anderen Funktionen bestimmen zu können, ist ebenfalls essenziell.

Schnittpunkte mit Parabeln

Definition 6.2.2 Es seien $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $g(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$ zwei quadratische Funktionen. Dann gilt:

$$h(x)=(a_2-a_1)x^2+(b_2-b_1)x+(c_2-c_1).$$

Die Lösungen dieser neuen Parabel sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$. Die y-Koordinaten erhalten wir, indem wir beide x-Koordinaten in einen der beiden

Funktionen einsetzen. Gibt es keine Lösungen, so haben sie keine Schnittpunkte.

Der Grund, wieso dies gilt, ist ganz simpel: Da wir wissen wollen, wann sie sich schneiden (also den gleichen Funktionswert haben), setzen wir beide gleich:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

Nun bringen wir alles durch Termumformung auf eine Seite:

$$\begin{aligned}
a_1x^2 + b_1x + c_1 &= a_2x^2 + b_2x + c_2 && \mid -a_1x^2 \\
b_1x + c_1 &= (a_2x^2 - a_1x^2) + b_2x + c_2 && \mid -b_1x \\
c_1 &= (a_2x^2 - a_1x^2) + (b_2x - b_1x) + c_2 && \mid -c_1 \\
0 &= (a_2x^2 - a_1x^2) + (b_2x - b_1x) + (c_2 - c_1) && \mid \text{Ausklammern} \\
0 &= (a_2 - a_1)x^2 + (b_2 - b_1)x + (c_2 - c_1).
\end{aligned}$$

Und da haben wir es! Der selbe Funktionsterm wie oben. Ihnen ist es natürlich erlaubt, alles auf die andere Seite zu bringen. Dann sind zwar die zu subtrahieren Glieder "vertauscht" (Statt $a_2 - a_1$ z. B. $a_1 - a_2$), aus mathematischer Sicht macht dies aber keinen Unterschied. Prüfen Sie dies gerne selbst zuhause nach, indem Sie mit Tools wie GeoGebra oder Desmos zwei Parabeln eingeben, und dann deren Differenzen; die Nullstellen bleiben die gleichen.

Beispiel 6.2.3 Wir haben die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2 + 2x - 1$ gegeben. Um die Schnittpunkte dieser Parabeln miteinander herauszufinden, setzen wir die nötigen Werte in die obere Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned}
h(x) &= (1 - 3)x^2 + (2 - (-3))x + (-1 - 2) \\
&= -2x^2 + 5x - 3.
\end{aligned}$$

Nun setzen wir diesen Funktionsterm mit Null gleich und lösen die Gleichung.

$$\begin{aligned}
h(x) &= 0. \\
x_{1,2} &= \tfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)} \\
x_1 &= 1, \\
x_2 &= 1.5.
\end{aligned}$$

Einsetzen der beiden Werte in eine der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
g(1) &= 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 \\
&= 2 && \textit{(y-Koordinate für x-Koordinate 1.)} \\
g(1.5) &= 1.5^2 + 2 \cdot 1.5 - 1 \\
&= 4.25 && \textit{(y-Koordinate für x-Koordinate 1.5.)}
\end{aligned}$$

Also sind die zwei Schnittpunkte die Punkte $A(1|2)$ und $B(1.5|4.25)$.

Schnittpunkte mit Geraden

Definition 6.2.3 Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = mx + t$ zwei Funktionen. Dann gilt:

$$h(x) = ax^2 + (b - m)x + (c - t).$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$. Die y-Koordinaten erhalten wir, indem wir beide x-Koordinaten in einen der beiden Funktionen einsetzen. Gibt es keine Lösungen. so haben sie keine Schnittpunkte.

Die Herleitung dieser Regel erfolgt analog zur Herleitung von Definition **??** und wird dem Leser im Rahmen einer Übungsaufgabe überlassen.

Beispiel 6.2.4 Die Parabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ und die Gerade $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 4x$ sind gegeben. Durch das Einsetzen der Werte in die obere Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} h(x) &= 2x^2 + (2-4)x + (-4-0) \\ &= 2x^2 - 2x - 4. \end{aligned}$$

Nun setzen wir wieder mit Null gleich und wenden die Mitternachtsformel an.

$$\begin{aligned} h(x) &= 0. \\ x_{1,2} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} \\ x_1 &= 2, \\ x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Einsetzen beider x-Werte in $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(2) &= 4 \cdot 2 \\ &= 8 && \textit{(y-Koordinate für x-Koordinate 2.)} \\ g(-1) &= 4 \cdot (-1) \\ &= -4 && \textit{(y-Koordinate für x-Koordinate } -1.\textit{)} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die beiden Schnittpunkte $A(2|8)$ sowie $B(-1|-4)$ sind.

Natürlich können Sie auch die x-Werte in $f(x)$ einsetzen, da f aber eine quadratische Funktion ist, ist dies in aller Regel aufwändiger.

6.3 Übungen

1. Leiten Sie die Regel der Definition **??** her.
2. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 + 3x - 3$. Bestimmen Sie die Lösungen von f.
3. Die Wurfweite und -höhe eines Basketballwurfes lässt sich annähernd durch die Funktion $f(x) = -0.1x^2 + 2x + 9$ beschreiben.
   - Geben Sie f in der Scheitelpunktform an.
   - Was ist die maximale Wurfhöhe?
   - Wie weit wurde der Basketball geworfen?

   Hinweis: Zeichnen Sie eine Skizze, um Ihnen die Aufgabenstellung klarer zu machen.
4. Was ist die Normalform der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = 4(x + 3) - 6$? Welche Lösungen hat diese Gleichung?

7. Ganzrationale Funktionen

Die ganzrationalen Funktionen sind eine der wohl breitesten Themengebiete. Einige dieser Funktionen haben Sie in Form von linearen und quadratischen Gleichungen schon kennengelernt. In diesem Kapitel werden sogenannte Polynome eingeführt, welche Sie den Rest Ihrer schulischen Laufbahn begleiten werden.

7.1 Was ist eine ganzrationale Funktion?

Ganzrationale Funktionen oder Polynomfunktionen sind bestimmte Funktionen, welche aus mehreren Gliedern bestehen.

Definition 7.1.1 Eine ganzrationale (oder Polynom-)Funktion ist eine Funktion, welche sich in der Form

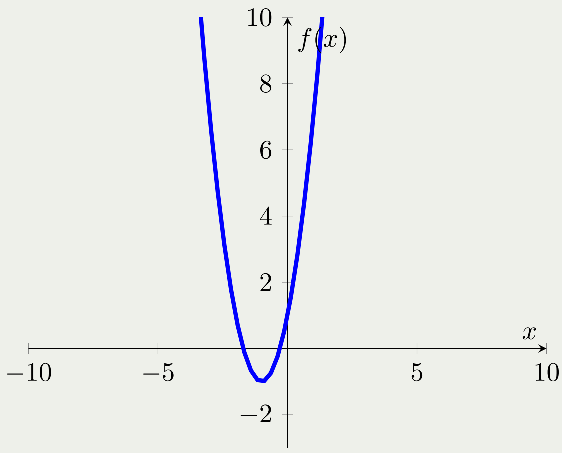
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

darstellen lässt. Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \neq 0$.

Dabei nennen wir die Menge aller a die *Koeffizienten* und a_n den *Leitkoeffizienten*. Der höchste Exponent n gibt außerdem den Grad der Funktion an, wir sprechen dann von einer Polynomfunktion n-ten Grades.

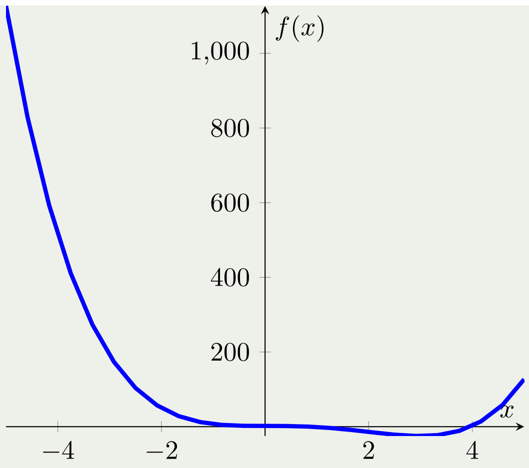
Beispiel 7.1.1 Ein einfaches Beispiel einer Polynomfunktion zweiten Grades ist

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 1.$$



Beispiel 7.1.2 Eine ganzrationale Funktion vierten Grades ist

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2.$$



Produktform

Eine weitere Möglichkeit, Polynome darzustellen, ist die Produktform.

Definition 7.1.2 Die Produktform einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist diejenige Schreibweise, bei der die Nullstellen abgelesen werden können:

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n).$$

Dabei ist a_n der Leitkoeffizient und x_1 bis x_n die Nullstellen.

Im Folgenden sehen Sie ein kombiniertes Beispiel einer Produktform und wie man zu dieser kommt.

Beispiel 7.1.3 Wir haben die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ gegeben. Durch das Anwenden der Mitternachtsformel erhalten wir die Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 &= -1, \\ x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Da a_n bei unserer Funktion 3 ist und wir beide Nullstellen haben, können wir diese nun in die obere Form einsetzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 3(x - (-1))(x - 3) \\ &= 3(x + 1)(x - 3). \end{aligned}$$

Um die Nullstellen nun abzulesen, müssen wir beobachten, wann die Terme innerhalb der Klammern gleich Null werden. Der Trick dafür ist, die Zahl hinter dem x zu nehmen und das Vorzeichen umzudrehen. Wird dies mit jedem Term gemacht, erhalten wir jede Nullstelle.

7.2 Verlauf von Polynomen

Im Laufe der 11. Klasse müssen Sie Polynome skizzieren – dafür ist es bedeutend, den Verlauf von ganzrationalen Funktionen zu erkennen. Um diesen Verlauf mathematisch beschreiben zu können, bedarf es einer besonderen Notation.

7.2.1 Grenzwerte

Definition 7.2.1 Der Grenzwert oder Limes einer Funktion $f(x)$ beschreibt den Wert, dem sich f bei bestimmten Eingaben von x nähert. Wir schreiben dann

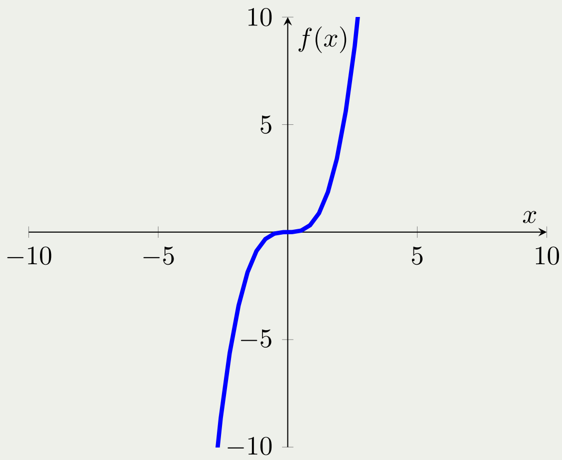
$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

Gelesen wird dies als

Der Grenzwert (Limes) von $f(x)$ beträgt L, wenn sich x dem Wert p annähert.

An Ihrer Schule wird das Symbol des Limes vielleicht weggelassen; dafür müssen Sie Ihren Lehrer fragen. Auch wenn diese Definition zunächst (berechtigt) sehr abstrakt erscheinen mag, so ist sie doch intuitiv; wenn Sie mit der Phrase "Es nähert sich etwas" etwas anfangen können, kennen Sie den Begriff des Grenzwertes bereits. Ein Beispiel folgt.

Beispiel 7.2.1 Betrachten wir folgenden Grafen:



Wenn wir uns den Verlauf dieses Grafen anschauen, fällt uns folgendes auf:
Sobald x beliebig kleiner wird, wird auch $f(x)$ beliebig kleiner, der y-Wert sinkt also. Wird x hingegen größer, wird $f(x)$ ebenfalls größer. Um dies zu formalisieren, benutzen wir die obige Definition.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Gelesen wird dies folgendermaßen:
Der Funkionswert von f nähert sich $-\infty$, wenn x sich $-\infty$ nähert.
Der Funkionswert von f nähert sich $+\infty$, wenn x sich $+\infty$ nähert.

7.2.2 Globalverhalten

Natürlich verläuft nicht jedes Polynom so wie im oberen Beispiel; es ist ein Zusammenspiel aus dem Grad der Funktion und dem vorangestelltem Leitkoeffizienten.

Definition 7.2.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ganzrationale Funktion mit dem Grad n und dem Leitkoeffizienten a_n. Dann gilt für den Grad:

- Wenn n ungerade ist, verläuft der Funktionsgraf von $-\infty$ nach $+\infty$.
- Ist n hingegen gerade, verläuft der Funktionsgraf von $+\infty$ nach $+\infty$

Währenddessen gilt für den Leitkoeffizienten:

- Wenn $a_n > 0$, dann verläuft die Funktion wie oben beschrieben.
- Wenn $a_n < 0$, dann werden die Vorzeichen der Unendlichkeiten umgekehrt.

Definition 7.2.3 Das Globalverhalten einer Funktion beschreibt die Grenzwerte der Funktion, wenn sich das Argument $-\infty$ bzw ∞ nähert.

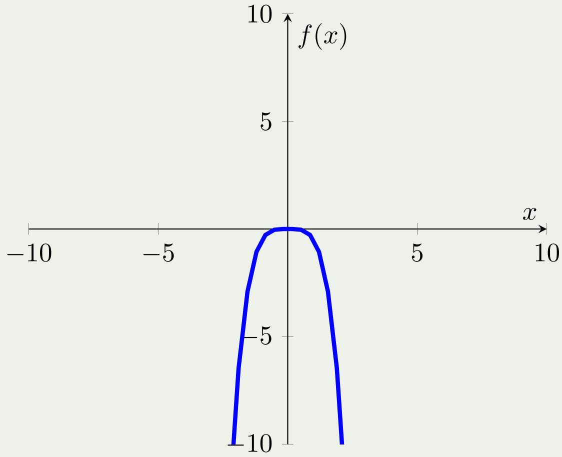
Um die Analyse des Globalverhaltens einer Funktion möglichst effizient zu vollbringen, wenden wir erst die Regel des Grades n auf die Funktion an, danach die des Leitkoeffizienten a_n. Im Klartext bedeutet dies für den Grafen einer Funktion folgendes:

$a_n \cdot x^n$	n ist gerade	n ist ungerade
$a_n > 0$	Kommt von oben. Geht nach oben.	Kommt von unten. Geht nach oben.
$a_n < 0$	Kommt von unten. Geht nach unten.	Kommt von oben. Geht nach unten.

Tabelle 7.1: Der Einfluss des Grades und des Leitkoeffizienten auf das Globalverhalten einer Funktion.

Zwei Beispiele folgen nun für besseres Verständnis.

Beispiel 7.2.2 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -0.5x^4$:



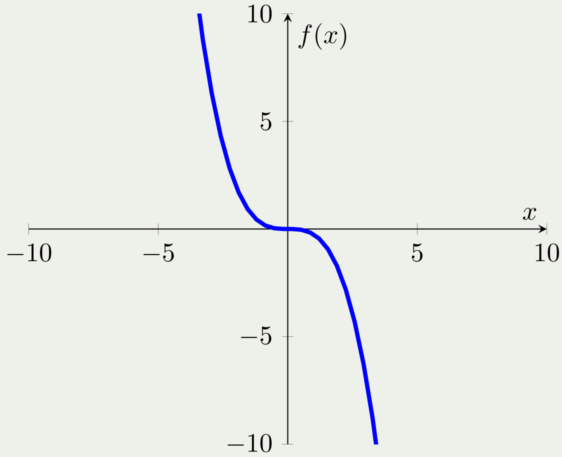
Da hier der Grad der Funktion 4 ist, diese Zahl also gerade ist und zugleich der Leitkoeffizient gleich -0.5 (also negativ) ist, erhalten wir durch die beiden vorherigen Definitionen das Globalverhalten

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{und}$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Wenn wir den Grafen analysieren, stellen wir fest, dass je weiter wir auf der x-Achse nach links wandern (x kleiner werden lassen), desto kleiner wird auch unser $f(x)$-Wert. Wenn wir unseren x-Wert größer werden lassen, wird $f(x)$ auch kleiner! Also stimmen unsere Formalisierungen.

In diesem Beispiel haben wir uns mit dem Funktionsterm beholfen, aber natürlich können wir auch Aussagen über die Funktion nur anhand des Grafen treffen wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 7.2.3 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einem unbekanntem Funktionsterm, den Grafen kennen wir hingegen:



Wandern wir zunächst auf der x-Achse nach links. Dann erhöht sich unser $f(x)$-Wert, verläuft also in das positive Unendliche. Betrachten wir die rechte Seite der x-Achse, scheint $f(x)$ kleiner zu werden. Nach Definition **??** und Tabelle **??** ist a_n dann negativ, wenn der Graf entweder:

- von $-\infty$ nach $-\infty$ (Wenn n gerade ist) verläuft, oder
- von $+\infty$ nach $-\infty$ (Im Fall von einem ungeraden n) verläuft.

Ersteres ist offenbar nicht der Fall, also *muss* unser n ungerade sein. Nun stellen wir folgende Behauptungen auf:

- n ist ungerade.
- Der Leitkoeffizient a_n ist negativ.

Der Funktionsterm war tatsächlich $f(x) = -0.25x^3$, also sind unsere beiden Behauptungen wahr.

Symmetrie

Unter Umständen ist Ihnen bereits eine gewisse Symmetrie bei einigen Grafen aufgefallen. Das ist korrekt! Ganzrationale Funktionen haben – abhängig von Tabelle **??** – unterschiedliche Symmetrien, wie im Folgenden erläutert wird.

Definition 7.2.4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein beliebiges Polynom. Es gilt:

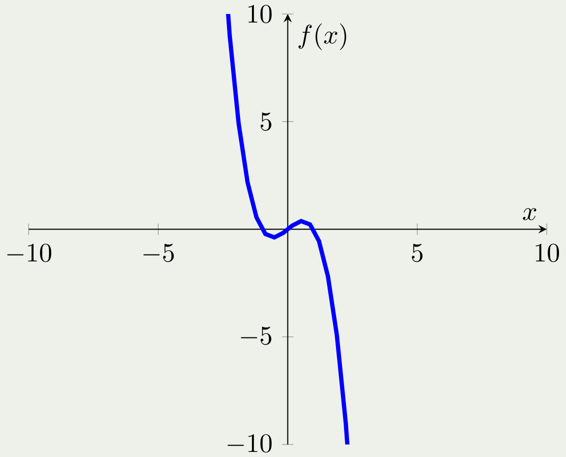
1. Punktsymmetrie zum Ursprung liegt vor, wenn $f(-x) = -f(x)$.
2. Achsensymmetrie zur y-Achse liegt vor, wenn $f(-x) = f(x)$.

Ein Polynom geraden Grades kann nie punktsymmetrisch sein, ein Polynom ungeraden Grades hingegen nie achsensymmetrisch.

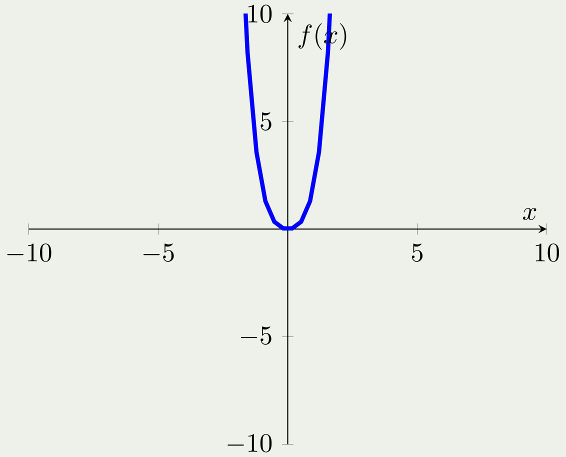
Durch ein wenig cleveres Denken kommen wir auf die folgenden Regeln.

1. Punktsymmetrie liegt dann und nur dann vor, wenn nur ungerade Exponenten in der Funktion vorkommen.
2. Achsensymmetrie liegt dann und nur dann vor, wenn nur gerade Exponenten in der Funktion vorkommen.

Die unteren Beispiele sollten Ihnen diese Regeln klarer machen.



Beispiel 7.2.4 Wenn wir den Grafen in der Mitte "teilen" und eine Hälfte um 180° drehen, erhalten wir die andere Hälfte. Das bedeutet punktsymmetrisch zum Ursprung. Daraus können wir schließen, dass im Funktionsterm nur ungerade Exponenten enthalten sein müssen.



Beispiel 7.2.5 Wenn wir den Grafen in der Mitte "teilen" und eine Hälfte an der y-Achse spiegeln, erhalten wir die andere Hälfte. Das bedeutet achsensymmetrisch zur y-Achse.

Wenn Sie nun eine der beiden Symmetriearten mathematisch nachweisen sollen, müssen Sie die Definition **??** benutzen: Setzen Sie für jedes x den Term $-x$ ein, vereinfachen Sie so weit wie möglich und vergleichen Sie den entstandenen Term mit dem ursprünglichen Term.

1. Ist der entstandene Term gleich dem ursprünglichen Term, so ist die Funktion achsensymmetrisch.

2. Sind die Vorzeichen des ursprünglichen Terms umgekehrt, so ist die Funktion punktsymmetrisch.

Ist keins von Beidem der Fall, dann hat die Funktion tatsächlich keinerlei Symmetrie.

Beispiel 7.2.6 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -4x^4 + 2x^2 - 4$. Um die Symmetrien zu überprüfen, setzen wir $-x$ ein:

$$\begin{aligned} f(-x) = & \quad -4(-x)^4 + 2(-x)^2 - 4 \\ = & \quad -4x^4 + 2x^2 - 4 \qquad | \text{ Weil } (-x)^n = x^n \text{ Für alle geraden } n \\ = & \quad f(x) \end{aligned}$$

Da hier $f(-x) = f(x)$ ist, haben wir hier Achsensymmetrie nachgewiesen.

Beispiel 7.2.7 Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2.5x^3 - 5x - 1$. Um die Symmetrien zu überprüfen, setzen wir $-x$ ein:

$$\begin{aligned} f(-x) = & \quad 2.5(-x)^3 - 5(-x) - 1 \\ = & \quad -2.5x^3 + 5x - 1 \\ = & \quad -f(x) \qquad | \text{ Weil die Vorzeichen umgekehrt sind} \end{aligned}$$

Da hier $f(-x) = -f(x)$ ist, haben wir hier Punktsymmetrie nachgewiesen.

Beispiel 7.2.8 Gegeben ist die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = 0.75x^5 - 2x^2 - 1$. Um die Symmetrien zu überprüfen, setzen wir $-x$ ein:

$$\begin{aligned} f(-x) = & \quad 0.75(-x)^5 - 2(-x)^2 - 1 \\ = & \quad -0.75x^5 - 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

In diesem Fall trifft nichts von Beidem zu; deshalb gibt es keine Symmetrien.

Skizzieren

Mithilfe der oben gegebenen Tabelle sind Sie nun in der Lage, beliebige Grafen einer gegebenen Funktion zu skizzieren. Dafür schauen Sie sich den Leitkoeffizienten und den Grad des Polynoms and und gleichen die beiden Werte mit obiger Tabelle ab. Dann wissen Sie, wie der Graf verläuft und können ihn zeichnen.

7.3 Nullstellen

Die Nullstellen (auch “Lösungen” oder “Wurzeln”) von linearen und quadratischen Polynomfunktionen haben Sie bereits mittels einfachen Gleichungssystemen sowie mit Hilfe der Mitternachts- bzw. pq-Formel bestimmt. Für Polynome existieren leider nicht Äquivalente der Mitternachtsformel um Nullstellen zu ermitteln, wir können uns aber mit Tricks und anderen Verfahren behelfen. Dass keine handlichen Formeln für Polynome existieren hängt mit der Anzahl der Lösungen zusammen; eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat maximal n-Nullstellen. Das bedeutet, dass eine Funktion sechsten Grades bis zu sechs Nullstellen haben kann! Außerdem kann es keine Formeln für Polynome höher als den fünften Grad geben. In diesem Abschnitt lernen Sie einige Verfahren kennen, mit welchen Sie diese bestimmen können.

7.3.1 Ablesen

In Definition **??** haben Sie bereits gelesen, dass aus der *Produktform* die Nullstellen direkt abgelesen werden können. Dafür betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 7.3.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem Funktionsterm

$$f(x) = 2(x+3)(x-2.67).$$

Um die Nullstellen abzulesen, nehmen wir die Zahlen innerhalb der Klammern und drehen die Vorzeichen um. Das bedeutet:

- Aus $(x+3)$ entnehmen wir $+3$, wenn wir das Vorzeichen umkehren erhalten wir die erste Nullstelle: $x_1 = -3$.
- Das Ablesen der zweiten Nullstelle wird Ihnen überlassen.

7.3.2 Ausklammern

Betrachten wir den Funktionsterm

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das direkte Ablesen der Lösungen ist hier leider nicht möglich; wir können uns aber eines Tricks behelfen, um dies möglich zu machen. Da in jedem Glied des Funktionsterms mindestens ein x vorhanden ist, können wir dies ausklammern:

$$\begin{aligned} f(x) = &\quad ax^3 + bx^2 + cx \\ = &\quad x(ax^2 + bx + c). \end{aligned}$$

Merken Sie sich:

Dies funktioniert nur, wenn in jedem Glied mindestens ein x vorhanden ist.

Um nun die Lösungen herauszufinden, müssen wir uns überlegen, wann das Produkt $x(ax^2+bx+c)$ gleich Null ist. Dies ist erreicht, wenn $x = 0$ ist, da dann natürlich das x vor der Klammer ebenfalls Null ist. Die restlichen Nullstellen erhalten wir, wenn wir die Nullstellen des Terms in der Klammer herausfinden. In diesem Fall können wir dafür die Mitternachtsformel benutzen, es ist allerdings auch möglich, andere Verfahren aus 7.3.x zu verwenden.
Es folgt ein Beispiel für besseres Verständnis.

Beispiel 7.3.2 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2.2x^3 + 5x^2 + 1.2x$. Da in jedem Glied des Funktionsterms mindestens ein x vorkommt, können wir dies ausklammern:

$$\begin{aligned} f(x) = &\quad 2.2x^3 + 5x^2 + 1.2x \\ = &\quad x(2.2x^2 + 5x + 1.2) \end{aligned}$$

Wie Sie sicherlich sehen können, ist die Nullstelle $x_0 = 0$, da alles mit 0 multipliziert gleich Null ist. Die Lösungen des Terms $2.2x^2+5x+1.2$ sind mithilfe der Mitternachtsformel einfach zu bestimmen.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_{1,2} &= \tfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2.2\cdot 1.2}}{2\cdot 2.22} \\ x_1 &\approx -0.2727 \\ x_2 &= -2. \end{aligned}$$

7.3.3 Substitution

Substitution (von lat. "Austausch") ist eine denkbar einfache Methode, um Nullstellen von Polynomen zu bestimmen.
Betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$, von der wir die Nullstellen berechnen wollen, wir setzen also gleich 0. Uns fällt auf, dass $x^4 = (x^2)^2$ wegen den Rechengesetzen von Potenzen ist:

$$\begin{aligned} 0 &= ax^4 + bx^2 + c \\ &= a(x^2)^2 + bx^2 + c. \end{aligned}$$

Nun haben wir zwei mal ein x^2 an unterschiedlichen Stellen. In der Mathematik können wir dieselben Ausdrücke (in diesem Fall x^2) mit einer Variable ersetzen, in der Substitution häufig u. Machen wir dies, bekommen wir den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} 0 &= a(u)^2 + bu + c \\ &= au^2 + bu + c \end{aligned}$$

So einfach haben wir aus einer Polynomfunktion 4. Grades eine quadratische Funktion "gemacht". Nun lösen wir diese Gleichung nach u mittels der Mitternachtsformel auf:

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Da uns aber mit dem Ersetzen ein wenig Information "verlorengegangen" ist, müssen wir nach der Substitution wieder *resubstituieren*, unsere Ersetzung also rückgängig machen. Dies machen wir, indem wir $u_{1,2}$ mit x^2 gleichsetzen:

$$\begin{aligned} u_1 &= x^2, \\ u_2 &= x^2. \end{aligned}$$

Nun lösen wir diese Gleichungen nach x auf:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{u_1} &= x_{1,2}, \text{ und} \\ \pm\sqrt{u_2} &= x_{3,4}. \end{aligned}$$

So einfach haben wir alle Lösungen des Polynoms bestimmt.
Dabei ist eines wichtig:

Substitution lässt sich dann und nur dann anwenden, wenn in jedem Polynomglied (mit Ausnahme des konstanten Glieds) ein x^2 vorkommt.

Denn: Sie müssen jedes x^n so schreiben können, dass es zu einem Glied der Form $(x^2)^z$ mit $z \in \mathbb{N}$ wird. Dann können Sie x^2 ersetzen.

Beispiel 7.3.3 Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^4 + 2.5x^2 - 3$ gegeben und wir möchten die Nullstellen bestimmen. Als erstes setzen wir mit 0 gleich und wenden die Substitution durch u an:

$$0 = 2x^4 + 2.5x^2 - 3.$$

$x^2 = u$:

$$\begin{aligned} 0 = &\quad 2(x^2)^2 + 2.5x^2 - 3 \\ = &\quad 2u^2 + 2.5u - 3 \end{aligned}$$

Anwenden der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \tfrac{-2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \\ u_1 &= -2, \\ u_2 &= 0.75. \end{aligned}$$

Resubstitution ($u_{1,2} = x^2$):

$$\begin{aligned} -2 &= x^2, \\ 0.75 &= x^2. \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{-2} \\ \Longrightarrow x_{1,2} &\notin \mathbb{R}, \\ x_{3,4} &= \pm\sqrt{0.75}. \end{aligned}$$

Die reellen Lösungen von f sind $x_{3,4} = \pm\sqrt{0.75}$.

7.3.4 Polynomdivision

Diese Methode, Nullstellen zu bestimmen, ist die langwierigste Methode und deshalb das letzte Mittel. Um Polynomdivision zu verstehen, müssen wir zurück in die Grundschule: Schriftliche Division.

Schriftliche Division ganzer Zahlen

Wir fangen an, den Dividend und den Divisor klassich nebeneinander zu schreiben; nun suchen wir das größte Vielfache des Dividenden, welches in den Divisor passt:

$$\begin{array}{l} 22 \div 7 = 3 \text{ R } 1 \\ \underline{21} \\ 1 \end{array}$$

Wie Sie sehen können, ist das größte Vielfache von 7, welches in 22 passt, die 21 ($= 3 \cdot 7$). Also schreiben wir diese unter den Divisor, die 3 wird hinter das = geschrieben. Da wir durch die Subtraktion $22 - 21$ die 1 erhalten, ist dies unser sogenannter Rest. Wir notieren das mit "R 1". Allerdings arbeiten wir nicht mehr mit Resten, oder? Deshalb können wir das gleiche Prinzip ebenfalls verwenden, um Dezimalzahlen auszurechnen:

$$\begin{array}{l} 22 \div 7 = 3 \\ \underline{21} \\ 1 \end{array}$$

Nun sind wir also am gleichen Punkt wie gerade; Das Ergebnis ist eine Dezimalzahl mit dem ganzzahligen Anteil 3. Aber wie machen wir nun weiter? Es ist eigentlich recht simpel:
Wir schreiben mehr Nachkommastellen der 22 auf und holen nach jeder Subtraktion eine Null herunter, suchen erneut das größte Vielfache der letzten Zahl (Hier 10, $1 \cdot 7 = 7$) und schreiben alles auf, in etwa so:

$$\begin{array}{l} 22.0 \div 7 = 3.1 \\ \underline{21} \\ 1\,0 \\ \underline{7} \\ 3 \end{array}$$

Nun ist es nurnoch ein “rinse and repeat”, also so lange wiederholen, bis die Division vollständig ist oder eine periodische Wiederholung auftaucht. Der letzte Schritt, den wir gemeinsam durchführen werden, sieht so aus:

$$\begin{array}{l} 22.00 \div 7 = 3.14 \\ \underline{21} \\ 1\,0 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 2 \end{array}$$

Dies lässt sich natürlich beliebig weiter führen.

Schriftliche Division von Funktionen

Um Polynomdivision nun durchzuführen, benötigen wir zwei Dinge:

- Eine Funktion (Wir nennen sie f), sowie
- Eine Nullstelle x_0.

Doch wie wollen wir eine Nullstelle der Funktion haben, wenn wir diese erst bestimmen wollen? Die Antwort ist recht stupide: Raten.
Wenn man nun diese Nullstelle hat, schreiben wir dies wiefolgt auf.

Beispiel 7.3.4 Gegeben sei das Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$. Desweiteren sei die Nullstelle $x = 2$ bekannt. Die Aufgabe sei es nun, die Nullstellen dieses Polynoms zu finden.
Da wir weder die Nullstellen ablesen, substituieren oder ausklammern können, müssen wir Polynomdivision anwenden.
Um dieses Polynom nun durch seine Nullstelle zu dividieren, schreiben wir folgendes auf:

$$\big(\quad x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \big) \div \big(x - 2\big) =$$

Nun suchen wir, analog zu oben, einen Wert, mit dem wir multiplizieren müssen, damit das Ergebnis weiterhin “in den Divisor passt”. Diesen Faktor schreiben wir neben das Ist-gleich:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \big) \div \big(x - 2\big) = x^2 \\ \underline{\;-x^3 + 2x^2\;} \end{array}$$

Wir subtrahieren nun und holen das nächste Glied herunter:

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \right) \div \left(x - 2 \right) = x^2 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad -x^2 - 10x
\end{array}
$$

Da nun der Leitkoeffizient im Zwischenergebnis negativ ist, wird unser Ergebnis an dieser Stelle ebenfalls ein Minus an dieser Stelle besitzen.

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \right) \div \left(x - 2 \right) = x^2 - x \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad -x^2 - 10x \\
\qquad\quad \underline{\quad x^2 - 2x}
\end{array}
$$

Nun kommt der letzte Schritt, also wieder subtrahieren, herunterholen und erneut den Faktor suchen.

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \right) \div \left(x - 2 \right) = x^2 - x - 12 \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad -x^2 - 10x \\
\qquad\quad \underline{\quad x^2 - 2x} \\
\qquad\qquad\qquad -12x + 24 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\quad 12x - 24} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Die Nullstellen dieses neuen Polynoms sind die restlichen Nullstellen des ursprünglichen Polynoms, mithilfe der Mitternachtsformel kommen wir auf die beiden Nullstellen

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -3, \\
x_2 &= 4.
\end{aligned}
$$

Die letzte Nullstelle ist in der Aufgabenstellung bereits gegeben, es ist nämlich $x_3 = 2$.

7.3.5 Vielfachheit von Nullstellen

Die Vielfachheit von Nullstellen ist äußerst trivial.

Definition 7.3.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ganzrationale Funktion. Die Nullstelle x_0 ist eine n-fache Nullstelle, wobei n die Anzahl des Nullstellenwertes ist.

Beispiel 7.3.5 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ hat eine 2-fache Nullstelle bei $x = 0$, da wir mithilfe der Mitternachtsformel die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ bekommen.

7.4 Übungen

1. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen mittels Ausklammern.
   (a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x$
   (b) $g(t) = 3.5t^2 + 7t$
   (c) $h(r) = 6x^3 + x^2$

2. Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Vielfachheit folgender Funktionen.
   (a) $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + x - 1$
   (b) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 7$
3. Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Funktionen mit korrekten Nullstellen.
   (a) $h(x) = 3$
   (b) $g(x) = 0.2x + 1.5$
   (c) $f(x) = x^3 - 7.3x$
   (d) $f(x) = 1.4x^4 + 2.7x^3 - 0.73x$
4. Bestimmen Sie das Globalverhalten dieser Funktionen.
   (a) $f(x) = -2x^3 + 24x - 3.1415$
   (b) $f(x) = 0.345x^4 - 2.71828x^3 + 2x$
   (c) $f(x) = 3.5x^3 + 9.1259x^4 - 4x^2 + 3$

8. Differenzialrechnung

Die Differenzialrechnung wird überall benötigt; in der Physik, natürlich der Mathematik und der Technologie, aber auch in der Biologie.

8.1 Änderungsrate

Die Rate der Veränderung eines Grafen ist die Antwort auf die Frage: "Wie stark verändert sich der Graf an einem gegebenen Punkt?". Um diese Frage wahrheitsgemäß zu beantworten, müssen wir einen Weg finden, diese lokale Veränderung zu messen.
Dafür stellen wir uns einmal einen Wanderweg in den Bergen vor. Zuerst ist der Anstieg recht flach, wird dann allerdings immer steiler.
Bleiben wir stehen, merken wir sofort, ob der Punkt flach oder steil ist. Doch was bedeutet flach bzw. steil? Philosophiert man ein wenig darüber, kommt man irgendwann auf den Gedanken, dass der Berg steil ist, wenn schnell viele Höhenmeter gewonnen oder verloren werden können. Oder um es mathematisch exakter auszudrücken: Wenn jeder Schritt in x-Richtung eine vergleichsweise große Änderung der y-Koordinate zur Folge hat. Unten folgen zwei stilisierte Beispiele.

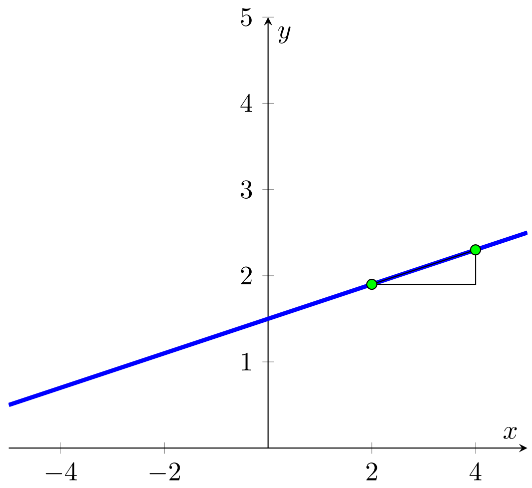


Abbildung 8.1: Ein flacher Berg. Wenig Änderung in y-Richtung trotz großem Schritt in x-Richtung.

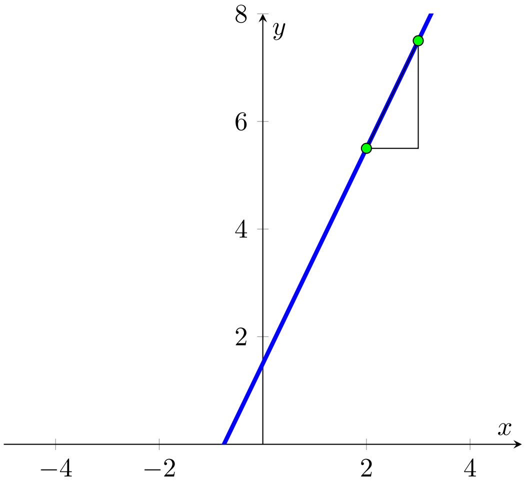


Abbildung 8.2: Ein steiler Berg. Große Änderung in y-Richtung, jedoch nur ein kleiner Schritt in x-Richtung.

Doch wie ist es nun mit Polynomen?
Die Steigung an einem bestimmten Punkt können wir mithilfe einer sogenannten "Tangente" bestimmen, also einer Gerade welche die Funktion an nur einem Punkt berührt; ein Beispiel folgt.

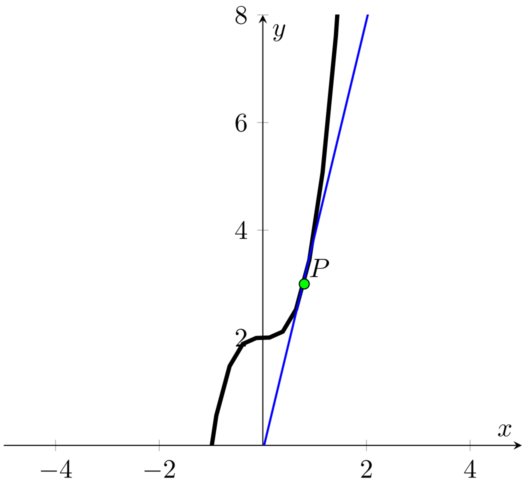


Abbildung 8.3: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^3 + 2$ mit der Tangente des Punktes P.

Hier ist die Steigung des Punktes P die Steigung der Tangenten (in blau gekennzeichnet).
Wenn wir uns nun also der tatsächlichen Tangente nähern wollen, müssen wir 2 Punkte des Grafen haben, welche wir mit einer Geraden verbinden. Dies gibt uns die durchschnittliche Steigung zwischen den beiden Punkten:

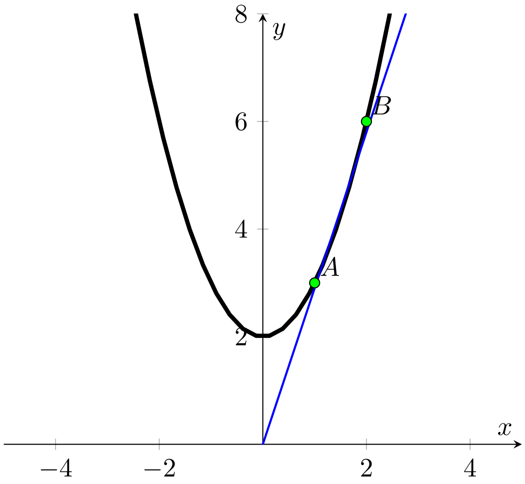


Abbildung 8.4: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2$.

In der oberen Abbildung können Sie erkennen, dass die durchschnittliche Steigung der Punkte A und B durch die Steigung der blauen Geraden gegeben ist.
Wollen wir uns nun der tatsächlichen Steigung des Punktes A nähern, lassen wir dem Punkt B sich A nähern:

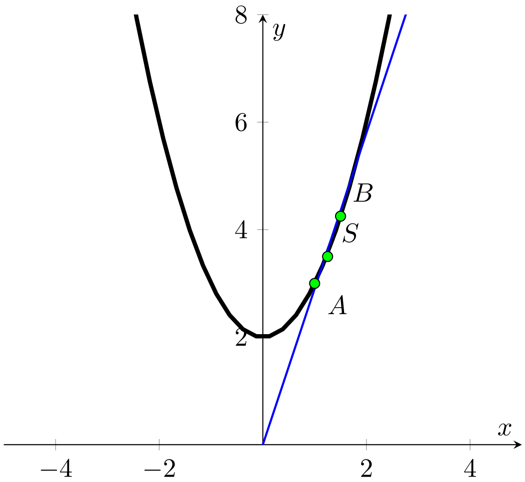


Abbildung 8.5: Die Beiden Punkte A und B nähern sich S. Je näher sich B an A befindet, desto näher ist die Steigung der blauen Gerade an der tatsächlichen Steigung des Punktes A.

Nun sollte es klar sein, dass sobald sich die Punkte A und B unendlich nahe beieinander befinden, die Steigung der blauen Geraden gleich der Steigung am Punkt A ist. Probieren Sie es selbst aus! Um dies nun mathematisch exakt zu formulieren, benötigen wir ein wenig Vorwissen:

- Die x-Koordinate des Punktes B ist um h Einheiten größer als der von A: $B(x_0 + h \mid f(x_0 + h))$.
- Da wir die Punkte unendlich nahe gegeneinander laufen lassen (indem wir h verkleinern),

benötigen wir einen Grenzwert.

Mithilfe dieses Wissens können wir folgende Definition aufstellen:

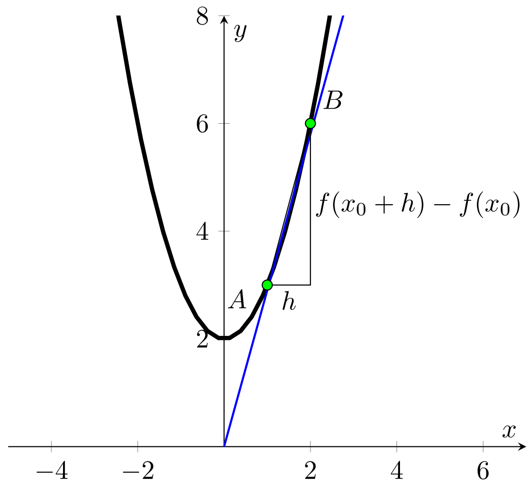
Definition 8.1.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $P(x_0 \mid f(x_0))$ ein Punkt von f. Die Steigung von P ist dann gegeben durch

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

oder durch die alternative Form

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Das sieht erstmal sehr komplex und theoretisch aus, doch wenn man sich diese Definition genauer ansieht, ergibt sie Sinn:
$f(x_0 + h)$ ist die y-Koordinate von B (vgl. Oben). $f(x_0)$ hingegen ist die y-Koordinate unseres Punktes A. Von diesen beiden Werten bilden wir die Differenz.
h ist der Abstand der beiden x-Koordinaten. Da wird den Grenzwert $h \to 0$ bilden, betrachten wir, was passiert, wenn sich der Abstand der beiden Punkte gegen 0 bewegt.
Dieser Quotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ist im Grunde nichts anderes als ein Steigungsdreieck:



Dadurch, dass wir den Limes bilden, betrachten wir einfach was passiert, wenn sich A und B unendlich nähern.

8.2 Die Ableitung als Funktion

Von der Ableitung eines bestimmten Punktes zur Ableitung als Funktion ist es nur ein kleiner Schritt.

Beispiel 8.2.1 Wir haben die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ gegeben und wollen dessen Ableitung bestimmen.

Dafür benutzen wir die Definition ??:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Durch einsetzen der Funktion erhalten wir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}.$$

Durch Anwendung der dritten binomischen Formel auf den Zähler erhalten wir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0}.$$

Nun können wir kürzen und erhalten die Form

$$\lim_{x \to x_0} (x + x_0).$$

Da wir davon ausgehen, dass sich x dem Wert x_0 nähert, setzen wir x_0 ein und bekommen die Ableitung:

$$\lim_{x \to x_0} (x + x_0) = (x_0 + x_0) = 2x_0.$$

Im Klartext bedeutet dieses Ergebnis, dass es egal ist, welchen Wert wir einsetzen; die Ableitung wird immer $2x_0$, also zwei mal dem Wert, betragen.
Die Herleitungen der Ableitungsregeln erspare ich Ihnen an dieser Stelle, da dies sehr trocken und unnötig ist.

Notationen

Es gibt einige unterschiedliche Schreibweisen von Ableitungen bzw. Differenzierungen. Die populärsten sind:

- Die Lagrange-Notation: $f'(x)$ ist die Ableitung von $f(x)$.
- Die Leibniz-Notation: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ ist die Ableitung von $f(x)$.
- Die Newton-Notation: $\dot{f}(x)$ ist die Ableitung von $f(x)$.

8.3 Ableitungsregeln

Konstantenregel

Eine Konstante abgeleitet ist 0.

$$f(x) = c, \text{ wobei } c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0.$$

Beispiel 8.3.1

$$f(x) = -2.35 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0.$$

Potenzregel

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Beispiel 8.3.2

$$f(x) = x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4.$$

Faktorregel

Ein Faktor bleibt bestehen.

$$f(x) = c \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x).$$

Beispiel 8.3.3

$$f(x) = -2x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2 \cdot 5x^4 = -10x^4.$$

Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Beispiel 8.3.4

$$f(x) = (-2x^5)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3(-2x^5)^2 \cdot (-10x^4).$$

Summenregel/Differenzregel

Eine Summe (Differenz) von Funktionen wird abgeleitet, indem man jede einzelne Funktion ableitet und addiert (subtrahiert).

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

Beispiele

Beispiel 8.3.5

$$f(x) = x^5 + x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4 + 3x^2.$$

Beispiel 8.3.6

$$f(x) = x^4 + x^2 + x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4 + 2x + 1.$$

Beispiel 8.3.7

$$f(x) = x^2 - x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 1.$$

Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Beispiel 8.3.8

$$f(x) = x^5 \cdot x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4 \cdot x^3 + x^5 \cdot 3x^2.$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$$

Eselsbrücke: Naz-Zan (Nenner · Ableitung Zähler - Zähler · Ableitung Nenner)

Beispiel 8.3.9

$$f(x) = \frac{x^5}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^3 \cdot 5x^4 - x^5 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x^7}{x^6} = 2x.$$

8.4 Steigung eines Punktes mit den Ableitungsregeln bestimmen

Definition 8.4.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige, ableitbare Funktion. Die Steigung des Punktes $A(x_A \mid y_A) \in f$ ist dann $f'(x_A)$.

Beispiel 8.4.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -9x^2 + 2.5x - 3$ eine Funktion und $A(2 \mid -34) \in f$. Durch das Ableiten erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\,9x^2 && +2.5x && -\,3 \\ f'(x) &= -\,9 \cdot 2x^{2-1} && +2.5 \cdot 1x^{1-1} \\ f'(x) &= -\,18x^1 && +2.5x^0 \\ f'(x) &= -\,18x && +2.5. \end{aligned}$$

Durch einsetzen des Punktes A erhalten wir seine Steigung:

$$f'(2) = -11.$$

Hinweis: Sie müssen den Weg der Ableitung nicht so ausführlich angeben. Dies wurde hier ausschließlich zur Verdeutlichung getan.

8.5 Übungen

1. Leiten Sie folgende Funktionen ab.
   (a) $f(x) = -2.73x^3 - 2x^2 + x + 1$
   (b) $h(t) = 5x^5$
   (c) $z(x) = \frac{2x^2}{x^3}$
2. Bestimmen Sie die Steigung am Punkt $x = -3.25$ bei folgenden Funktionen.
   (a) $f(t) = 3.142x^2 + 2.718x + x^3$

(b) $h(x) = 10x + 2$

(c) $l(x) = 2.3$

Anhänge

A. Das Griechische Alphabet

In diesem Anhang finden Sie eine vollständige Liste des griechischen Alphabets mit Majuskeln (Großbuchstaben), Minuskeln (Kleinbuchstaben) und den dazugehörigen Namen.

Majuskel	**Minuskel**	**Name**
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ, ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	$\kappa, \varkappa$	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π, ϖ	Pi
P	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ, ς	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

B. Mathematische Symbole

Im Folgenden finden Sie gängige mathematische Symbole und ihre dazugehörige Bedeutung. Dabei gilt im Allgemeinen: Die durchgestrichene Variante des Symbols bedeutet *nicht*.

B.1 Numerik & Allgemeines

Symbol	Bedeutung
$a \sim b$	a ist direkt proportional zu b.
$a \approx b$	a ist ungefähr gleich b.
$a = b$	a ist gleich b.
$a < b$	a ist kleiner als b.
$a \leqq (\leq) b$	a ist kleiner oder gleich b.
$a > b$	a ist größer als b.
$a \geqq (\geq) b$	a ist größer oder gleich b.
Δx	Entfernung der Werte x_1 und x_2.
$\|x\|$	Der Betrag von x.

B.2 Logik

Symbol	**Bedeutung**
$A \implies B$	Aus A folgt B.
$A \iff B$	A ist äquivalent zu B.
$A \vee B$	A oder auch B.
$A \wedge B$	A und B.
$\neg A$	Nicht A.

B.3 Geometrie

Symbol	**Bedeutung**
$a \parallel b$	a ist Parallel zu b.
$a \perp b$	a ist senkrecht zu b.
$\sin\theta$	Sinus des Winkels θ.
$\arcsin\theta, \sin^{-1}\theta$	Umkehrfunktion von $\sin\theta$.
$\cos\theta$	Kosinus des Winkels θ.
$\arccos\theta, \cos^{-1}\theta$	Umkehrfunktion von $\cos\theta$.
$\tan\theta$	Tangens des Winkels θ.
$\arctan\theta, \tan^{-1}\theta$	Umkehrfunktion von $\tan\theta$.

B.4 Mengenlehre

Symbol	**Bedeutung**
$A \subset B$	A ist (echte) Teilmenge von B.
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B.
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B.
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B.
$A \setminus B$	A ohne B.
$x \in A$	x ist ein Element der Menge A.
$A = \{x \| \dots\}$	Für alle x in A gilt $\dots$.

B.5 Analysis

Symbol	**Bedeutung**
$f : A \to B$	f ist eine Funktion von A nach B.
$f(x)$	Der Funktionsterm von f.
$f'(x)$	Die Ableitung von f.
$f(x_0) = 0$	f hat eine Nullstelle bei x_0.
$\lim_{x \to p} f(x)$	Der Limes von $f(x)$ für x gegen p.

C. Kleine Formelsammlung

In diesem Anhang finden Sie einige wichtige Formeln und Konstanten, welche Sie benötigen.

C.1 Lineare Funktionen

Allgemeine Form

Benötigt: Steigung $m \in \mathbb{R}$ und y-Achsenabschniit $t \in \mathbb{R}$.

$$y = mx + t$$

Punktsteigungsform

Benötigt: Punkt $P(x_1|y_1)$ mit $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ auf der Gerade.

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Steigung

Benötigt: Zwei Punkte $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ auf der Geraden.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Lösung

Benötigt: y-Achsenabschnitt $t \in \mathbb{R}$ und Steigung $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$x_1 = -\frac{t}{m}$$

C.2 Quadratische Funktionen

Allgemeine Form

Benötigt: Streckungsfaktor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Koeffizienten $b, c \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Scheitelpunktform

Benötigt: Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ mit $x_S, y_S \in \mathbb{R}$, Streckungsfaktor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

Lösungen

Mitternachtsformel / abc-Formel

Benötigt: Streckungsfaktor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Koeffizienten $b, c \in \mathbb{R}$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta < 0$: Keine reellen Lösungen.
- $\Delta = 0$: Eine reelle Lösung.
- $\Delta > 0$: Zwei reelle Lösungen.

pq-Formel

Benötigt: Koeffizienten $b, c \in \mathbb{R}$, $a = 1$.

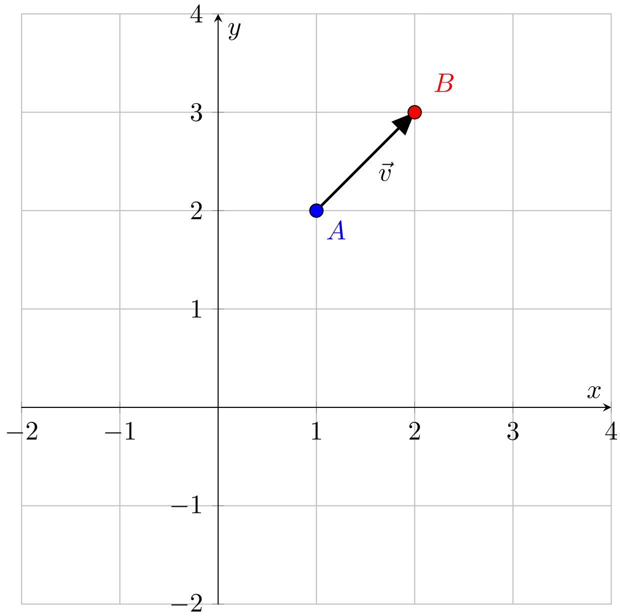
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

C.3 Vektoren

Vektoren bestimmen

Benötigt: Zwei Punkte $A(x_A|y_A)$ und $A(x_B|y_B)$.
Es gilt: Spitze (Kopf des Vektors) minus Fuß.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$



Betrag (Länge)

Benötigt: Vektor $\vec{v}$ mit den Werten a_1 bis a_n.

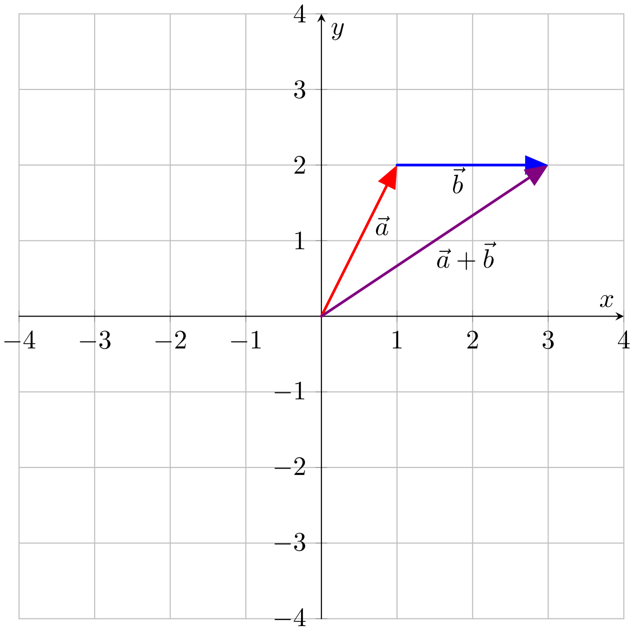
$$|\vec{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Addition und Subtraktion

Benötigt: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit den Werten $a_1 - a_n$ und $b_1 - b_n$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Grafisch gilt: Fuß des einen Vektors an die Spitze des Anderen.

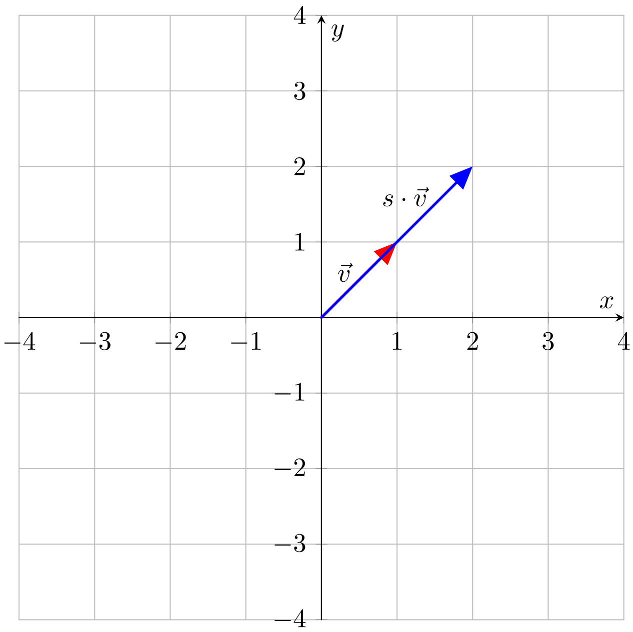


Skalarmultiplikation

Benötigt: Skalar s und Vektor v mit den Werten $a_1 - a_n$.

$$s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ \cdots \\ s \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Die Skalarmultiplikation ist die Möglichkeit, die Länge des Vektors zu verändern.



Skalarprodukt von zwei Vektoren

Ohne Winkel

Benötigt: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit den Werten $a_1 - a_n$ und $b_1 - b_n$.

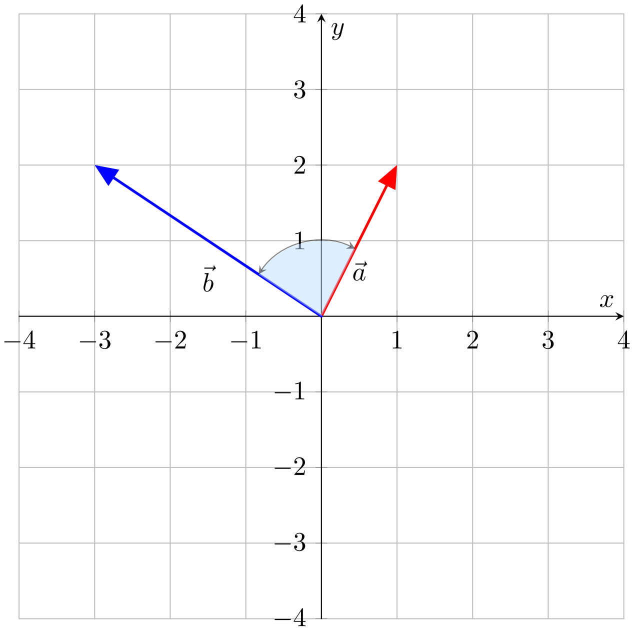
$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

Mit Winkel

Benötigt: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Winkel $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$, dann sind sie senkrecht (orthogonal) zueinander.

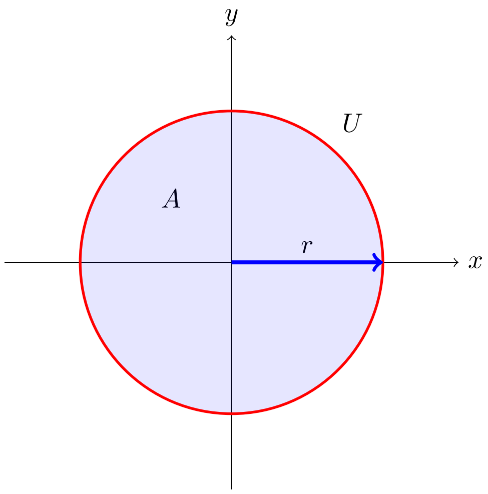


Linearkombination

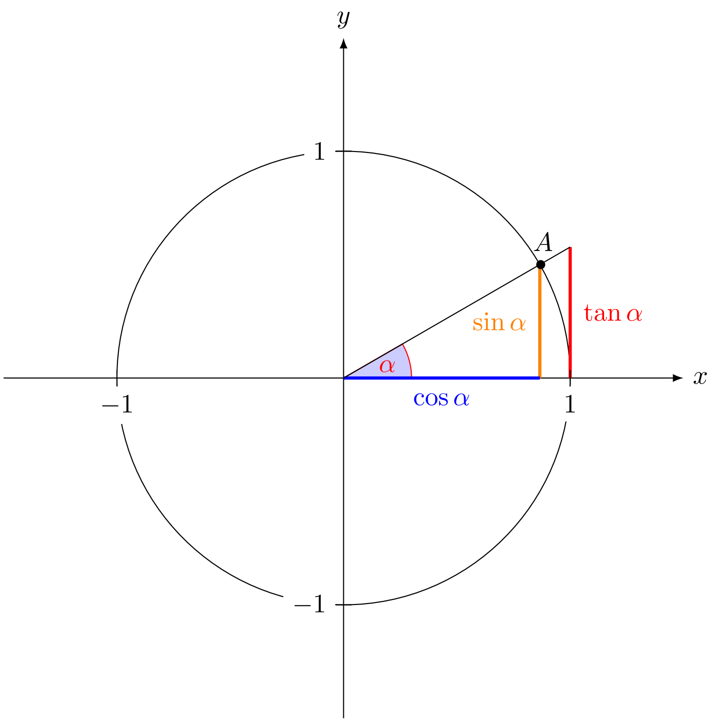
C.4 Kreise

$$U = 2\pi r = \tau r$$

$$A = \pi r^2$$



C.5 Trigonometrie



$$\sin\alpha = y\text{-Koordinate von } A$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = x\text{-Koordinate von } A$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \text{Strecke auf der Tangente zu } (1|0)$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

C.6 Intervalle

Abgeschlossene Intervalle

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

"Alle Zahlen zwischen a und b, sowie a und b selbst."

Beispiel

$$2 \in [2;4]$$
$$4 \in [2;4]$$
$$2.1 \in [2;4]$$

Offene Intervalle

$$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

"Alle Zahlen zwischen a und b, jedoch nicht a und b."

Beispiel

$$2 \notin]2;4[$$
$$4 \notin]2;4[$$
$$2.1 \in]2;4[$$

Unten offene Intervalle

$$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

"Alle Zahlen zwischen a und b, sowie b selbst."

Beispiel

$$2 \notin]2;4]$$
$$4 \in]2;4]$$
$$2.1 \in]2;4]$$

Oben offene Intervalle

$$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

"Alle Zahlen zwischen a und b, sowie a selbst."

Beispiel

$$2 \in [2;4[$$
$$4 \notin [2;4[$$
$$3.9 \in [2;4[$$

C.7 Konstanten und Werte

C.7.1 Numerische Konstanten

Konstante	**Näherungswert**
π	3.141592653589793
τ	6.283185307179586
e	2.718281828459045
ϕ	1.618033988749894
$\sqrt{2}$	1.414213562373095
$\sqrt{3}$	1.732050807568877
$\sqrt{5}$	2.236067977499789
$\cos(x) = x$	0.739085133215160

C.7.2 Werte von trigonometrischen Funktionen

$\boldsymbol{\alpha}$	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin $\boldsymbol{\alpha}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos $\boldsymbol{\alpha}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan $\boldsymbol{\alpha}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-/-

$\boldsymbol{\alpha}$	**120°**	**135°**	**150°**	**165°**	**180°**
sin $\boldsymbol{\alpha}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	0
cos $\boldsymbol{\alpha}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	-1
tan $\boldsymbol{\alpha}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-2$	0

$\boldsymbol{\alpha}$	**210°**	**225°**	**240°**	**270°**	**360°**
sin $\boldsymbol{\alpha}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0
cos $\boldsymbol{\alpha}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
tan $\boldsymbol{\alpha}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-/-	0