Eléments Logiciels pour le Traitement des Données Massives

Méthode de Monte-Carlo pour le pricing d'options vanille, parallélisée avec CUDA

Axel DURAND

Yannick LY

2019 – 2020

Introduction

Notre projet consiste à implémenter la méthode de Monte-Carlo pour déterminer le prix des options vanilles. Dans un premier temps, l'utilisateur devrait renseigner le type d'option (option d'achat ou de vente) qu'il souhaite évaluer et la valeur des paramètres d'entrée dans le terminal. En fonction des paramètres entrés, nous utilisons la méthode de Monte-Carlo pour simuler l'évolution des prix du sous-jacent au cours du temps. Grâce aux prix simulés, nous calculons le payoff de l'option et finalement nous affichons les résultats dans le terminal. Pour accélérer les calculs, nous avons recours à CUDA afin d'optimiser les temps de calculs.

Dans ce rapport, nous présentons tout d'abord le fonctionnement de notre outil. Puis, nous faisons une analyse des temps d'exécution en séquentiel, puis en parallélisé sur le GPU, grâce à CUDA. Enfin en annexe, nous expliquons en brief la théorie des options et les simulations par méthode de Monte-Carlo.

Guide de l’utilisateur

Au lancement de l’outil, l’utilisateur doit entrer les paramètres demandés dans le terminal. Ces paramètres permettront de calibrer les simulations de Monte-Carlo ainsi que les payoffs calculés par le pricer.

```
Veuillez choisir le type d'option que vous souhaitez pricer :

1. Option d'achat.
2. Option de vente.

Votre choix 1-2 : 1

Vous avez choisi l'option d'achat.

Nombre de trajectoires a simuler (mettre 100 000 par defaut) : 100000
Nombre de pas par trajectoire (mettre 365 par defaut) : 365
Prix du sous-jacent (mettre 100 par defaut) : 100
Strike (mettre 110 par defaut) : 90
Taux sans risque (mettre 0.01 par defaut) : 0.01
Volatilite (mettre 0.2 par defaut) : 0.2
Maturite en annees (mettre 1 par defaut) : 1
Drift annuel : (mettre 0.1 par defaut) : 0.1
```

Les paramètres renseignés par l’utilisateur sont :

1 - Nombre de trajectoires simulées : Il s’agit du nombre de trajectoires de prix qui seront simulées par la méthode de Monte-Carlo. Plus le nombre de trajectoires simulées est élevé, plus le pricing sera précis car la destruction de l’échantillon sera celui d’une loi gaussienne.

2 - Nombre de pas par trajectoire : Il s’agit du nombre de fois où le prix est simulé dans chaque trajectoire. Il est notamment important pour le pricing de l’option asiatique qui utilise l’ensemble des observations pour le calcul de la moyenne des spots. Augmenter ce paramètre permet à l’utilisateur d’obtenir des trajectoires de prix plus variées, car à chaque pas on effectue la prochaine simulation sur le spot précédent. Dans le cas extrême où le nombre de pas vaudrait 1, toutes les simulations seraient effectuées à partir du spot initial, ce qui renverrait des trajectoires de prix moins diversifiées.

3 - Prix spot du sous-jacent : Il s’agit du prix initial du sous-jacent de l’option. Il est utilisé comme point de départ pour les simulations de Monte-Carlo.

4 - Strike : Il s’agit du prix d’exercice de l’option, c’est-à-dire le prix auquel le client achètera (resp. vendra) le sous-jacent s’il choisit d’exercer son option d’achat (call) (resp. option de vente (put)). Il est utilisé dans le calcul des payoffs des options.

5 - Taux sans risque : Il s’agit du taux d’intérêt qui rémunère la monnaie, en pourcentage. Il est utilisé afin d’actualiser le prix de l’option. En effet, dans le pricer nous calculons le prix de l’option en effectuant la moyenne des payoffs à maturité des options. Néanmoins, il est nécessaire d’actualiser ce prix au taux sans risque afin d’obtenir sa valeur à la date d’émission.

6 - Volatilité : Il s'agit de la volatilité 1 an du sous-jacent, en pourcentage. Ce paramètre nous permet de calibrer correctement nos simulations de Monte-Carlo afin que les simulations soient les plus réalistes possibles et que leurs volatilités correspondent à la réalité de la volatilité des prix du sous-jacent.

7 - Maturité : Il s'agit du nombre d'années restant avant la maturité de l'option. Cette donnée est notamment utile afin d'effectuer l'actualisation du prix de l'option.

Attention, le paramètre est exprimé en nombre d'années. Par exemple, si la maturité de l'option vaut 1 mois, il devra indiquer 1/12.

Présentation des résultats

Affichage des résultats

Les résultats renvoyés par notre outil sont : les informations sur l'option selon les paramètres saisis par l'utilisateur ainsi que le prix de l'option en CPU (séquentiel) et GPU (parallélisé). Il renvoie également le temps d'exécution du pricing en CPU et GPU.

Les résultats ainsi que les paramètres choisis sont affichés dans le terminal de la manière suivante :

```
********************* INFO *********************
Nombre de trajectoires a simuler : 100000
Nombre de pas par trajectoire : 365
Prix du sous-jacent : 100
Strike  : 110
Taux sans risque : 0.01
Volatilite : 0.2
Maturite en annees : 1
Drift annuel : 0.1
********************* PRICE *********************
Prix de l'option (GPU) : 8.95933
Prix de l'option (CPU) : 8.9438
********************* TEMPS D'EXECUTION *********************
GPU Monte Carlo Computation : 25 ms
CPU Monte Carlo Computation : 8313 ms
```

Analyse des résultats

Nous observons une nette amélioration du temps d’exécution avec la parallélisation en GPU. Voici le tableau du temps d’exécution comparant CPU et GPU, avec différents nombres de trajectoires :

Nombre de trajectoires	Temps d'exécution (ms) GPU	Temps d'exécution (en ms) CPU
1 000	0	84
10 000	2	834
50 000	13	4 155
100 000	24	8 329
300 000	74	25 308
500 000	125	43 375
700 000	176	60 194
1 000 000	243	83 427

On observe qu’en moyenne que le programme met 340 fois plus de temps à s’exécuter sur le CPU que sur le GPU.

Annexes

Options

En finance, une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (prix d'exercice, « *strike price* » en anglais), pendant un temps donné ou à une date fixée (l'échéance, dite « *maturity* » en anglais). Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation sur le prix futur de l'actif sous-jacent (appelé « *spot* »), ou d'assurance contre une évolution défavorable de ce prix. L'actif sous-jacent peut par exemple être une action, une obligation, un taux de change entre deux devises, une matière première ou encore un contrat à terme sur n'importe lequel de ces produits.

On distingue deux types d'options :

- Le call qui est un contrat donnant le droit, mais non l'obligation d'acheter un actif à un prix fixé à l'avance, à une période prédéterminée.
- Le put qui est un contrat donnant le droit, mais non l'obligation de vendre un actif à un prix fixé à l'avance, à une période prédéterminée.

Les prix fixés à l'avance et la durée de validité de l'option sont définis dans le contrat. Le vendeur s'engage à respecter les termes du contrat si l'acheteur décide d'exercer son option, en contrepartie, l'acheteur paie une prime. Si l'option n'est pas exercée, le vendeur a gagné un montant égal au prix de l'option. L'évaluation d'une option est l'estimation de la prime à débourser pour l'acquérir, ce qui représente la probabilité d'exercice de celle-ci : plus l'exercice est probable, plus l'option sera chère.

Options vanilles

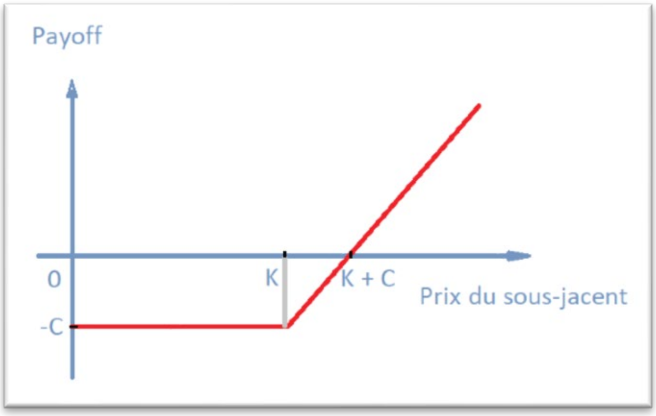
Les options standards, dites « options vanilles » ont toujours un seul sous-jacent, donc le prix de l'option dépend uniquement du prix du sous-jacent à l'échéance. Qu'il s'agisse d'un call ou d'un put, le remboursement (appelé couramment « *payoff* ») est toujours la différence entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice. Pour un call, il est égal au maximum entre 0 et le prix du sous-jacent diminué du prix d'exercice. Pour un put, il est égal au maximum entre 0 et le prix d'exercice diminué du prix du sous-jacent.

Les remboursements à la date d'exercice pour les acheteurs et les vendeurs sont comme suivants :

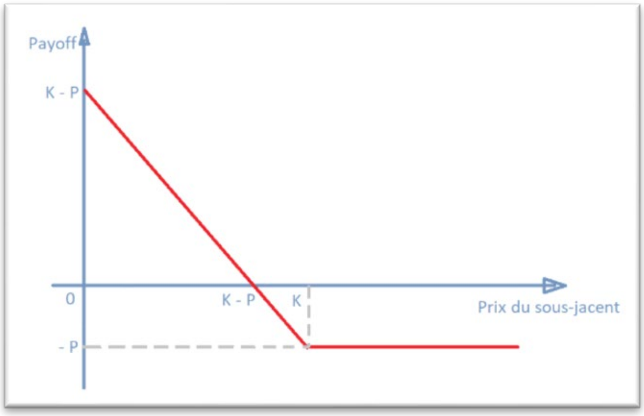
	Call	**Put**
Payoff d'un acheteur	$\max(S_t - K, 0) - C$	$\max(K - S_t, 0) - P$
Payoff d'un vendeur	$-\max(S_t - K, 0) + C$	$-\max(K - S_t, 0) + P$

Avec :

S_t : Prix du sous-jacent à l'exercice
K : Prix d'exercice
C : Prix du call
P : Prix du put



Payoff d’un acheteur du call



Payoff d’un acheteur du put

Les options standards peuvent être divisées en deux sous-familles :

- Les options dites « européennes » permet d’exercer le droit uniquement à l'échéance. Pour ce type d’option, il existe une formule fermée pour calculer le prix d’option, la fameuse formule de Black Scholes.
- Les options dites « américaines » permettent d'exercer le droit attenant à l'option, n'importe quand jusqu'à l'échéance.

Simulations de Monte-Carlo

L’utilisation de la simulation Monte Carlo pour calculer le prix d’une option est une technique utile lorsque le prix de l’option dépend du chemin du prix de l’actif sous-jacent.

En théorique, l'évaluation de Monte Carlo repose sur une évaluation risque neutre. Ici, le prix de l’option est sa valeur espérée actualisée. La simulation Monte-Carlo consiste à générer un grand nombre de chemins de prix possibles, mais aléatoires, pour le sous-jacent (ou les sous-jacents), et à calculer ensuite la valeur d’exercice associée de l'option pour chaque chemin. Ces gains sont ensuite moyennés et actualisés à ce jour. Ce résultat est la valeur de l'option.

Ici, le prix du sous-jacent S_t est généralement modélisé par un processus stochastique de manière à suivre un mouvement brownien géométrique à dérive constante μ et la volatilité σ. Donc, $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ où dW_t est un aléa à partir d'une distribution normale. Étant donné que le processus aléatoire sous-jacent est le même, pour un nombre suffisant de chemins de prix, la valeur d'une option européenne devrait ici être la même que sous Black Scholes. Plus généralement, la simulation est utilisée pour les dérivés exotiques dépendant du chemin, tels que les options asiatiques.

Supposons que le prix du sous-jacent dans un monde risque neutre admet une volatilité constante, il peut être modélisé par le processus stochastique $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dZ_t$ où r est le taux d’intérêt sans risque, σ est la volatilité du prix et dZ_t est un processus de Wiener.

$$\left(r-\frac{\sigma}{2}\right)\Delta t+\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$