2.10日 题目解析

预期难度

B < E < CAF < D

B. Naive Problem

题意：

找一个不超过 m 的数 p ，使得 $p \oplus n$ 最大

题解：

按位枚举贪心即可

E. The Elder's High Belt

题意：

- 给出 n 个人和 m 条裤子，问你 $n \times m$ 中组合中，能组合出最高的裤腰高度是多少？
- 每个人的参数， $D1, D2, H$
- 每个裤子的参数， $d1, d2, h1, h2$
- 能穿上裤子， $D1 \leq d1, D2 \leq d2$
- 裤腰高度， $H + h2 - h1$

题解：

线段树套路题，按照裤子第一维的顺序加入下标为第二维的线段树，然后求个后缀最大值就好了。

C. N-Divide

题意：

将 k 拆分为 n 个数，使得最大公约数为 1

题解：

可以发现，拆分 n 个数，使得最大公约数为 p 的倍数这个计算非常轻松。然后大力容斥或者无脑莫比乌斯反演就好了。

A. MX's RPG Game

题意：

给一个 n 个点 m 个带权无向图，从起点到终点选一条路径，可以让其中 k 条路径置为无效，使得边权范围最小，问最小的边权差值为多大?

题解：

边权从大到小排序，然后进行尺取法（滑动窗口？），每个窗口跑一下spfa，在窗口内的边置为 0，窗口外的边置为 1，如果最短路径 $\le k$，那么窗口的范围就可以更新答案了~

F. Mistaken Food

题意：

有 n 个盒子，从里面取出 p 个，有 q 个肉盒子，现在取出第 $p+1$ 个，问是肉盒子的概率是多大?

题解：

$P(A_i) = n$ 个盒饭里面有 i 个肉 $= 1/(n+1)$

$P(B) = p$ 个盒饭里面有 q 个肉 $= 1/(p+1)$

$P(B|A_i) = (C_i^q \times C_{N-i}^{p-q})/C_N^q$

根据贝叶斯公式 $P(A_i) \times P(B|A_i) = P(B) \times P(A_i|B)$ 可以算出来 $P(A_i|B)$

然后答案就是 $\sum P(A_i|B) \times (i-q)/(N-p)$

用力推一推，发现答案就是 $(q+1)/(p+2)$ （如果你擅长打表，也许可以不用推~）

可能有人不理解 $P(B)$ 的概率，还是根据贝叶斯公式，
$P(A_i|B) = (P(A_i) \times P(B|A_i))/P(B)$

$\sum P(A_i|B) = 1$

$P(A_i|B) = k \times (C_i^q \times C_{N-i}^{p-q})/C_N^q$

对后面求个和，就可以知道 $k = (p+1)/(N+1)$

D. Carrot Gathering

题意：

给定 n 个点和 m 条边的无向图，每次询问从某个点出发经过所有权值不超过 x 的边所能到达的权值之和，点权可能被修改。强制在线。

题解：

- 性质：所有可到达点集合互不相交，只会包含或者相离
- 按照边从小到大的顺序，自底向上通过并查集合并区间建树，将图转化为树形结构，再根据树上叶子节点的DFS序转化为链。（每次并查集合并，就在树上建立一个新的结点，这样保证自底向上，边的权值是单调递增的）
- 查询点和区间的转化可以用树上倍增处理
- 用树状数组或线段树处理查询

Treasure Hunting

题意

- 给出平面上 N 个整点 (xi,yi)，现在要求从这 N 个点中取出若干个点，满足下面条件，并且权值和最大。一个点 (x,y) 的权值为 x XOR y 。
- 条件：任取两个选出来的点 (xi,yi), (xj,yj) i≠j ，要求 gcd(xi XOR yi XOR xj XOR yj, p)>1 ，其中 p=a*2^b(a>=1, b>=1)
- 数据规模： N<=1000, 0<=xi, yi<=10^9, 任取 (xi,yi), (xj,yj) i≠j ， xi XOR yi XOR xj XOR yj>0

Treasure Hunting

- 先讲几个图论的知识点
- 1. 独立集

  独立集是指图的顶点集的一个子集，该子集的导出子图不含边. 如果一个独立集不是任何一个独立集的子集，那么称这个独立集是一个极大独立集. 一个图中包含顶点数目最多的独立集称为最大独立集。最大独立集一定是极大独立集，但是极大独立集不一定是最大的独立集。
- 2. 最大团

  图 G 的顶点的子集，设 D 是最大团，则 D 中任意两点相邻。若 u，v 是最大团，则 u,v 有边相连，其补图 u,v 没有边相连，所以图 G 的最大团 = 其补图的最大独立集。

- 然后根据题意，如果 gcd(xi XOR yi XOR xj XOR yj, p)>1，我们给 i 和 j 连一条边，得到一个图 G。然后这道题目就是求这个图 G 的最大团。也就是求补图 GB 的最大独立集。
- 对于一般图来说，这两个问题都比较困难，但是对于二分图，我们有很好的算法。
- 然后根据这道题目给出的条件，我们得到的图 G 恰好是二分图的补图，也就是说他的补图 GB 是二分图。下面来证明 GB 是二分图。

Treasure Hunting

- GB 是这样构造的。如果 gcd(xi XOR yi XOR xj XOR yj, p)=1， i 和 j 连一条边。
- 显然 (xi,yi), (xj,yj) i≠j 满足 gcd(xi XOR yi XOR xj XOR yj, p)=1，就不能在一起。由于 p 为偶数，那么 xi XOR yi XOR xj XOR yj 必为奇数
- 首先奇数 XOR 偶数 = 奇数， 偶数 XOR 偶数 =偶数， 奇数 XOR 奇数 = 偶数

Treasure Hunting

- 考虑 xi,yi,xj,yj 的奇偶性，偶数为 0 奇数为 1，然后有 16 种情况，这里就不列出来了。
- 最后符合情况的有以下几种
- 0 1 1 1 奇数，符合
- 1 0 1 1 奇数，符合
- 1 1 0 1 奇数，符合
- 1 1 1 0 奇数，符合
- 0 0 0 1 奇数，符合
- 0 0 1 0 奇数，符合
- 0 1 0 0 奇数，符合
- 1 0 0 0 奇数，符合

Treasure Hunting

- 观察后发现要么 xi,yi 奇偶性相同， xj,yj 奇偶性不同，要么 xi,yi 奇偶性不同， xj,yj 奇偶性相同
- 根据这个我们把点分成两类
- 1.xi,yi 奇偶性相同
- 2.xi,yi 奇偶性不同
- 如果满足 gcd(xi XOR yi XOR xj XOR yj, p)=1 ，那么 i,j 连一条边，最后得出来的图应该是一个二分图
- 然后这个图就是二分图了，问题就转化为求二分图的最大点权独立集。
- 用最大流最小割定理可以解决。
- 具体建模方法可以参考胡伯涛的论文 http://wenku.baidu.com/view/87ecda38376baf1ffc4fad25.html