Modéliser une valeur absolue : un exemple

Un problème bien connu en statistique :

On observe des points $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \quad i = 1, \ldots, n$ et on s'intéresse à trouver une fonction linéaire $y = a \cdot x + b$ qui ref ète l'échantillon

Une manière de faire ceci est de minimiser :

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2, \tag{1}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont les paramètres de la droite qui est cherchée.

$(ax_i + b - y_i)^2$: Carré de la distance verticale du point (x_i, y_i) à la droite $y = a\,x + b$

Au lieu d'utiliser la méthode des moindres carrés on pourrait aussi minimiser la fonction suivante un peu plus robuste face à des valeurs déviantes :

$$\sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|. \tag{2}$$

L'astuce :

Introduire une variable de plus qui modélise la valeur absolue de $ax_i + b - y_i$.

Le programme linéaire

$$\begin{array}{lcr} \min \sum_{i=1}^{n} h_i & & \\ h_i & \geq & ax_i + b - y_i,\ i = 1, \ldots, n \\ h_i & \geq & -(ax_i + b - y_i),\ i = 1, \ldots, n \end{array} \tag{3}$$

Les variables sont h_i, $i = 1, \ldots, n$, a et b. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ fixés, les h_i optimaux seront $h_i = |ax_i + b - y_i|$ vu que la fonction objectif minimise la somme des h_i. Si un des h_i était strictement plus grand que $|ax_i + b - y_i|$ alors la fonction objectif pourrait être améliorée en diminuant ce h_i.

Un exemple

But

Trouver une droite ajustée, comme décrit auparavant, pour les points

$$(1,3), (2.8, 3.3), (4, 2), (5.5, 2.1), (6, 0.2), (7, 1.3), (7.5, 1), (8.5, 0.8).$$

Une droite ajustée optimale qui respecte la mesure de distance (2) est la droite $y = -0.293333 \cdot x + 3.293333$.