Постановка задачи (номер 33)

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \frac{\ddot{x}^2}{1+\alpha t^4} dt \to extr, \\ \int\limits_0^1 x dt = 1, \\ x(0) = \dot{x}(1) = 0,\ \dot{x}(0) = 1, \\ \alpha = [0; 0.1; 1; 10] \end{cases}$$

Сведение задачи к задаче Лагранжа

$x = x, \quad y = \dot{x}, \quad u = \dot{y} = \ddot{x}$

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \frac{u^2}{1+\alpha t^4} dt \to extr \\ \int\limits_0^1 (x-1) dt = 0 \\ y = \dot{x}, \quad u = \dot{y} \\ x(0) = y(1) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Система необходимых условий

$\mathcal{L} = \lambda_0 \int\limits_0^1 \frac{u^2}{1+\alpha t^4} dt + \lambda_1 \int\limits_0^1 (x-1) dt + \lambda_2 x(0) + \lambda_3 y(1) + \lambda_4 (y(0)-1) + \int\limits_0^1 p_1(\dot{x} - y) + p_2(\dot{y} - u) dt$

$L = \lambda_0 \frac{u^2}{1+\alpha t^4} + \lambda_1(x-1) + p_1(\dot{x} - y) + p_2(\dot{y} - u)$

$l = \lambda_2 x(0) + \lambda_3 y(1) + \lambda_4 (y(0) - 1)$

1) $\lambda_i \geq 0$ и НЕРОН

2) Условия дополняющей нежестокcти отсутствуют

3) Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \dot{p_1} = \lambda_1 \\ \dot{p_2} = -p_1 \end{cases}$$

4) Условия трансверсальности:

$$\begin{cases} p_1(0) = \lambda_2 \\ p_1(1) = 0 \\ p_2(0) = \lambda_4 \\ p_2(1) = -\lambda_3 \end{cases}$$

5) Стационарность по u:

$\frac{2\lambda_0 u}{1+\alpha t^4} = p_2$

Анализ анормального случая

Пусть $\lambda_0 = 0 \Rightarrow p_2 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = p_1 = 0$ не НЕРОН
Тк $\lambda_0 \neq 0$, положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$

Аналитическое решение при $\alpha = 0$

$$\begin{cases} \dot{p_1} = \lambda_1 \\ \dot{p_2} = -p_1 \\ \dot{y} = p_2 \\ \dot{x} = y \\ p_1(0) = \lambda_2, \quad p_1(1) = 0 \\ p_2(0) = \lambda_4, \quad p_2(1) = -\lambda_3 \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \int\limits_0^1 x dt = 1 \end{cases}$$

Из условий трансверсальности и уравнения Эйлера-Лагранжа получаем, что:

$$\begin{cases} p_1 = \lambda_1 t - \lambda_1 \\ p_2 = -\frac{\lambda_1 t^2}{2} + \lambda_1 t + \lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = -\frac{\lambda_1}{2} - \lambda_4 \end{cases}$$

Из стационарности по u и начальных условий:

$$\begin{cases} y = -\frac{\lambda_1 t^3}{6} + \frac{\lambda_1 t^2}{2} + \lambda_4 t + 1 \\ \lambda_1 = -3\lambda_4 - 3 \\ x = -\frac{\lambda_1 t^4}{6*4} + \frac{\lambda_1 t^3}{6} + \frac{\lambda_4 t^2}{2} + t \end{cases}$$

$$\int\limits_0^1 x dt = -\frac{\lambda_1}{6*5*4} + \frac{\lambda_1 t}{6*4} + \frac{\lambda_4}{6} + \frac{1}{2} = 1$$

$$-\frac{\lambda_1}{5*4} + \frac{\lambda_1}{4} + \lambda_4 = 3$$

$$\frac{\lambda_1}{5} + \lambda_4 = 3$$

$$\frac{\lambda_1}{5} - \frac{\lambda_1}{3} - 1 = 3$$

$$\lambda_1 = -30$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -30, \quad \lambda_2 = 30, \quad \lambda_3 = 6, \quad \lambda_4 = 9 \\ x = \frac{5t^4}{4} - 5t^3 + \frac{9t^2}{2} + t \end{cases}$$

Аналитическое решение в общем случае

$$\begin{cases} \dot{p_1} = \lambda_1 \\ \dot{p_2} = -p_1 \\ \dot{y} = p_2(1+\alpha t^4) \\ \dot{x} = y \\ p_1(0) = \lambda_2, \quad p_1(1) = 0 \\ p_2(0) = \lambda_4, \quad p_2(1) = -\lambda_3 \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \int\limits_0^1 x dt = 1 \end{cases}$$

Из условий трансверсальности и уравнения Эйлера-Лагранжа получаем, что:

$$\begin{cases} p_1 = \lambda_1 t - \lambda_1 \\ p_2 = -\frac{\lambda_1 t^2}{2} + \lambda_1 t + \lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = -\frac{\lambda_1}{2} - \lambda_4 \end{cases}$$

Из стационарности по u и начальных условий:

$$\begin{cases} y = -\frac{\alpha\lambda_1 t^7}{14} + \frac{\alpha\lambda_1 t^6}{6} + \frac{\alpha\lambda_4 t^5}{5} - \frac{\lambda_1 t^3}{6} + \frac{\lambda_1 t^2}{2} + \lambda_4 t + 1 \\ -\frac{\alpha\lambda_1}{14} + \frac{\alpha\lambda_1}{6} + \frac{\alpha\lambda_4}{5} - \frac{\lambda_1}{6} + \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_4 + 1 = 0 \\ x = -\frac{\alpha\lambda_1 t^8}{14*8} + \frac{\alpha\lambda_1 t^7}{6*7} + \frac{\alpha\lambda_4 t^6}{6*5} - \frac{\lambda_1 t^4}{6*4} + \frac{\lambda_1 t^3}{6} + \frac{\lambda_4 t^2}{2} + t \end{cases}$$

$$\int\limits_0^1 x dt = -\frac{\alpha\lambda_1}{14*8*9} + \frac{\alpha\lambda_1}{6*7*8} + \frac{\alpha\lambda_4}{7*6*5} - \frac{\lambda_1}{6*5*4} + \frac{\lambda_1}{6*4} + \frac{\lambda_4}{6} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{840(70+11\alpha)}{1960+777\alpha+5\alpha^2} \\ \lambda_4 = \frac{35(504+125\alpha)}{1960+777\alpha+5\alpha^2} \end{cases}$$

Краевая задача

$$\begin{cases} \dot{p_1} = \lambda_1 \\ \dot{p_2} = -p_1 \\ \dot{y} = (1 + \alpha t^4) p_2 \\ \dot{x} = y \\ p_1(0) = \lambda_2, \quad p_1(1) = 0 \\ p_2(0) = \lambda_4, \quad p_2(1) = -\lambda_3 \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \int\limits_0^1 x dt = 1 \end{cases}$$

Для численного решения задачи введем дополнительную неизвестную: $z = \int\limits_0^t x dt$, таким образом $\dot{z} = x,\ z(0) = 0,\ z(1) = 1$

$$\begin{cases} \dot{p_1} = \lambda_1 \\ \dot{p_2} = -p_1 \\ \dot{y} = (1 + \alpha t^4) p_2 \\ \dot{x} = y \\ \dot{z} = x \\ p_1(0) = \lambda_2, \quad p_1(1) = 0 \\ p_2(0) = \lambda_4, \quad p_2(1) = -\lambda_3 \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \\ x(0) = 0 \\ z(0) = 0, \quad z(1) = 1 \end{cases}$$

Метод Ньютона

Необходимо найти кореь уравнения:

$$F(x) = 0$$

Пусть имеется какое-то приближенное значение x_n, тогда следующее значение вычисляется по следующей формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \gamma_n h_n$$

$$h_n = (F'(x_n))^{-1}F(x_n)$$

$$\gamma_n \in \{1,\ 2^{-1},\ 2^{-2},\ ...\}, \quad \text{т.ч. } \|F(x_n + \gamma_n h_n)\| < \|F(x_n)\|$$

Заметим что вместо вычисления обратной матрицы можно решать систему линейных уравнений $F'(x_n)h_n = F(x_n)$, ее будем решать с помощью метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.
Условия выхода из цикла при выполнения метода Ньютона:
1) $\|F(x_n)\| < \epsilon$ - программа успешно вычисляет значение корня.
2) $\gamma_n < eps$ - значение γ слишком мало, цикл уходит в бесконечность.
3) n>1000 - значение n слишком велико, цикл уходит в бесконечность.
Для решения системы линейных уравнений используем метод Гаусса с выбором главного элемента.

Ход работы

Для численного решения задачи напишем функцию прослойки, связывающую метод Ньютона и метод Рунге-Кутта. А конкретно функцию R(p), которая по парамтрам пристрелки p будет решать систему дифференциальных уравнений и считать невязку $R(p) = (p_1(1), y(1), z(1) - 1)$, эта функция будет использоваться в методе Ньютона для отыскания правильных начальных значений.
Чтобы отыскать решения при всех заданных параметрах α воспользуемся методом продолжения по параметру. При $\alpha = 0$ найдены точные начальные значения $p = (-30, 30, 9)$, поэтому для вычисления в данной точке просто используем метод Рунге-Кутта, далее в цикле прибавляем к α 0.1 и пристреливаемся методом Ньютона, а в необходимых значениях α после пристрелки выписываем полученные начальные парамтеры и используем метод Рунге-Кутты.

Результаты

Все вычисления велись с точностью $\epsilon = 10^{-7}$, p - истинные параметры, p^* - вычисленные.
При $\alpha = 0$, получаем следующие результаты:
$p = (-30, 30, 9),\ p^* = (-30, 30, 9),\ \|p - p^*\| = 0$

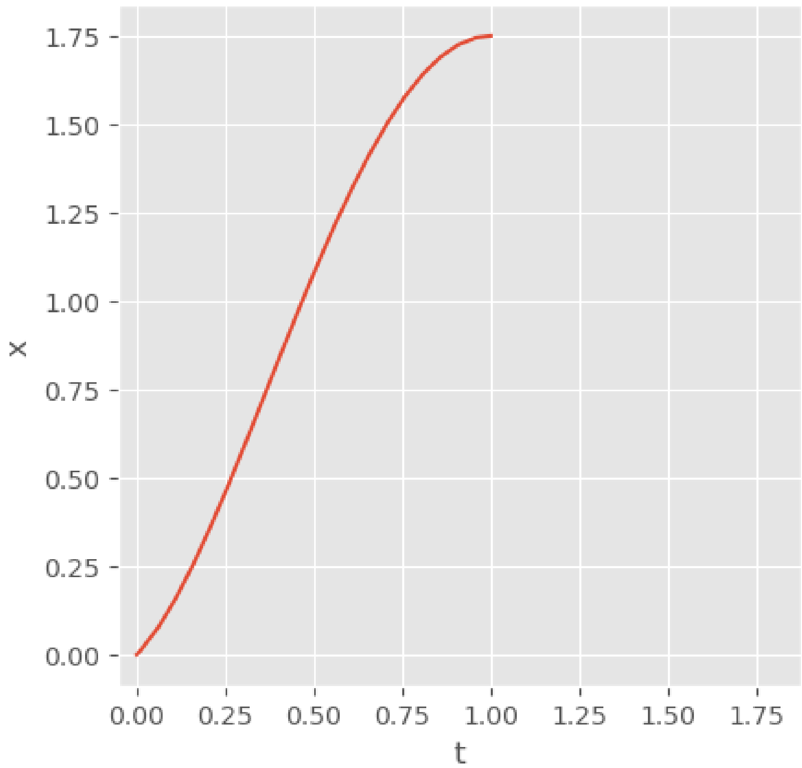

Рис. 1: Экстремаль x(t) при $\alpha = 0$

При $\alpha = 0.1$, получаем следующие результаты:
$p = (-29.3088, 29.3088, 8.8713)$, $p^* = (-29.3088, 29.3088, 8.8713)$, $\|p - p^*\| = 5.15525e - 08$

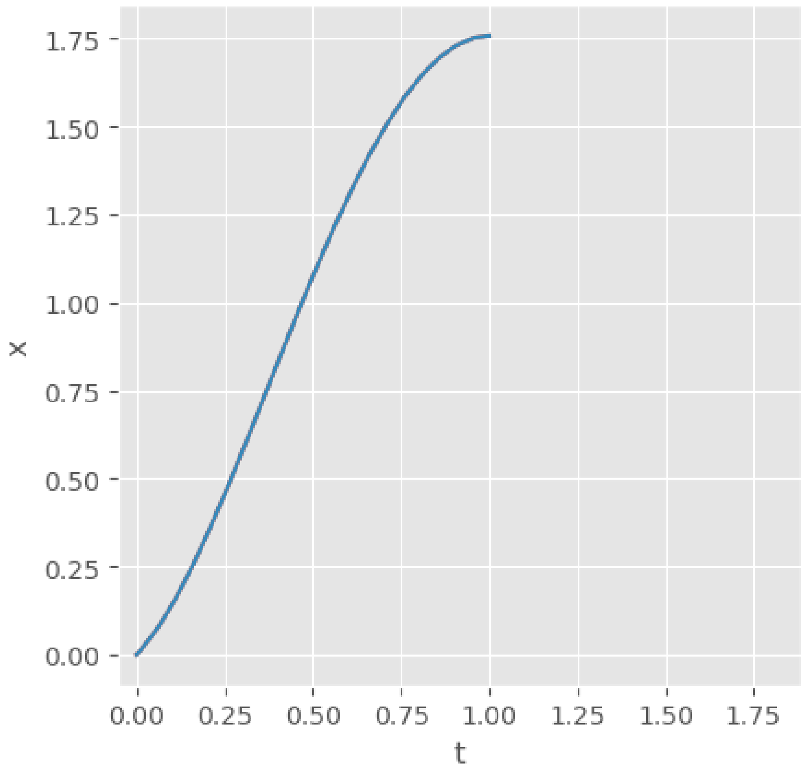

Рис. 2: Экстремаль x(t) при $\alpha = 0.1$

При $\alpha = 1$, получаем следующие результаты:
$p = (-24.814, 24.814, 8.02881)$, $p^* = (-24.814, 24.814, 8.02881)$, $\|p - p^*\| = 2.30079e - 07$

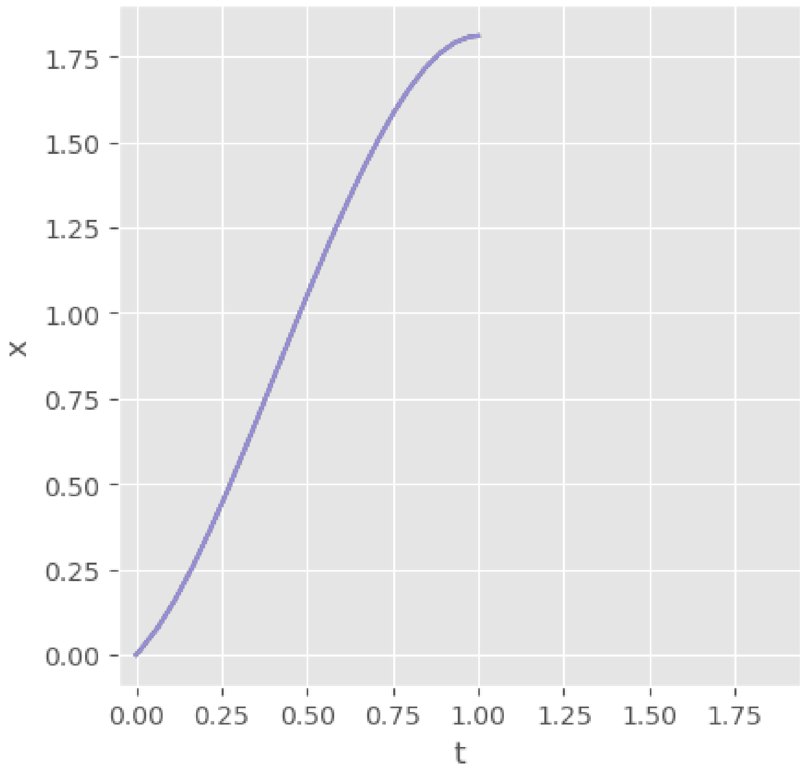

Рис. 3: Экстремаль x(t) при $\alpha = 1$

При $\alpha = 10$, получаем следующие результаты:
$p = (-14.7801, 14.7801, 6.00098)$, $p^* = (-14.7801, 14.7801, 6.00098)$, $\|p - p^*\| = 1.30036e - 07$

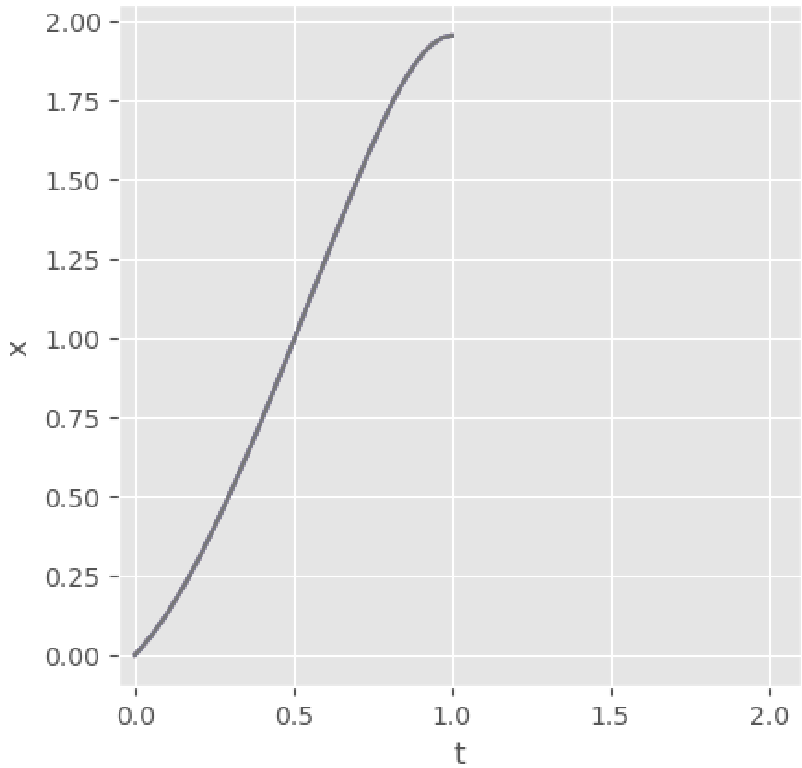

Рис. 4: Экстремаль x(t) при $\alpha = 10$

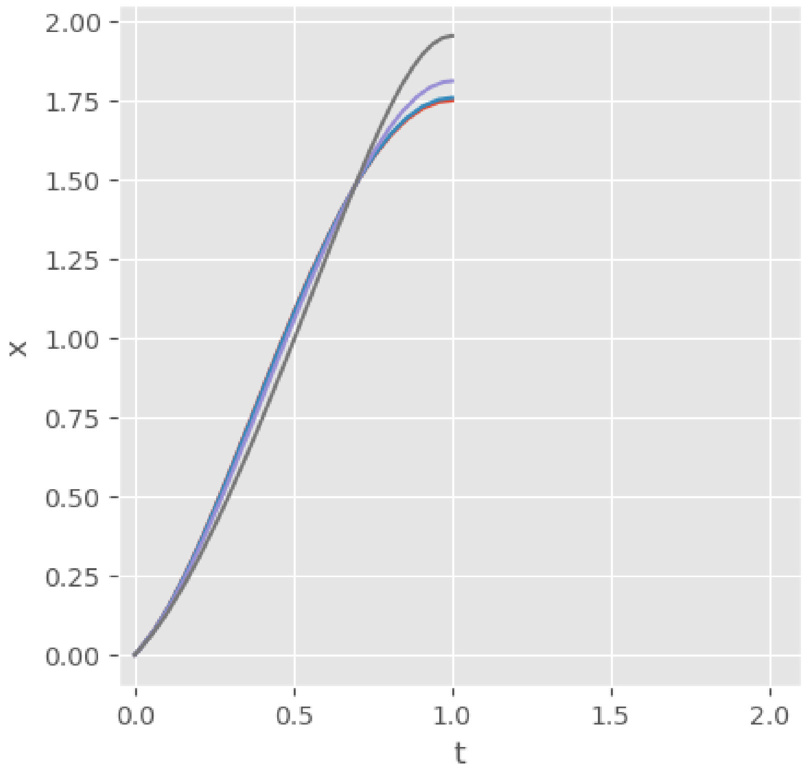

Рис. 5: Экстремали x(t) при различных α