

Домашнее задание 4.

1. Условия оптимальности

1. Формулировка задачи. Положим $\widetilde{W} = W - \sum w_i$ и будем обозначать $E_i(s_i)$ — функции энергии из условия. Нетрудно заметить, что все эти функции выпуклые, т.к. их графиками являются левая и правая ветви парабол, склеенные в нуле. Получаем следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} & \min \sum E_i(s_i) \\ & \text{s.t. ааа} \\ & \sum s_i = \widetilde{W} \end{aligned}$$

Условий типа неравенство нет, следовательно из условий ККТ остаются только два:

$$\begin{aligned} & \sum s_i = \widetilde{W} \\ & \text{grad} \sum (E_i(s_i)) + \lambda \sum s_i - \lambda \widetilde{W} = 0 \end{aligned}$$

Условие на градиент распадается на n уравнений

$$\frac{dE_i(s_i)}{ds_i} = -\lambda. \quad (1)$$

При этом,

$$\frac{dE_i(s_i)}{ds_i} = \begin{cases} k_i^{\text{ext}}(s_i - N_i), & \text{if } s_i \geq N_i, \\ k_i^{\text{comp}}(s_i - N_i), & \text{if } s_i < N_i. \end{cases}$$

Разберем два случая:

1) $-\lambda \geq 0 \iff \lambda \leq 0$. Тогда уравнение 1 принимает вид:

$$k_i^{\text{ext}}(s_i - N_i) = -\lambda.$$

Получаем $s_i = -\frac{\lambda}{k_i^{\text{ext}}} + N_i$. Отсюда

$$\widetilde{W} = \sum s_i = -\lambda \sum \frac{1}{k_i^{\text{ext}}} + \sum N_i.$$

2) $-\lambda < 0 \iff \lambda > 0$. Тогда уравнение 1 принимает вид:

$$k_i^{\text{comp}}(s_i - N_i) = -\lambda.$$

Получаем $s_i = -\frac{\lambda}{k_i^{\text{comp}}} + N_i$. Отсюда

$$\widetilde{W} = \sum s_i = -\lambda \sum \frac{1}{k_i^{\text{comp}}} + \sum N_i.$$

Если $\widetilde{W} - \sum n_i \geq 0$ то попадаем в случай 1. Тогда

$$\lambda = \frac{\sum N_i - \widetilde{W}}{\sum \frac{1}{k_i^{\text{ext}}}}.$$

Отсюда

$$s_i = \frac{\widetilde{W} - \sum N_j}{k_i^{\text{ext}} \sum \frac{1}{k_j^{\text{ext}}}} + N_i.$$

Иначе, попали в случай 2. Аналогично

$$s_i = \frac{\widetilde{W} - \sum N_j}{k_i^{\text{comp}} \sum \frac{1}{k_j^{\text{comp}}}} + N_i.$$

3. Запишем условия ККТ:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

$$(2) \quad -x_i \leq 0,$$

$$(3) \quad \mu_i \geq 0,$$

$$(4) \quad \mu_i x_i = 0,$$

$$(5) \quad \text{grad}_x \|x - y\|^2 + \lambda \sum x_i - \sum \mu_i x_i = 0.$$

Последнее уравнение является системой из n уравнений:

$$2x_i - 2y_i + \lambda - \mu_i = 0$$

Получаем, что

$$x_i = y_i - \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu_i}{2}.$$

Рассмотрим два случая:

$$(1) \quad y_i - \frac{\lambda}{2} \geq 0. \text{ Тогда из условий 2, 3, 4, } x_i = y_i - \frac{\lambda}{2}, \mu_i = 0.$$

$$(2) \quad y_i - \frac{\lambda}{2} < 0. \text{ Тогда из условий 2, 3, 4, } x_i = 0, \mu_i = \lambda - 2y_i.$$

Итак, получили, что

$$x_i = \max \left\{ 0, y_i - \frac{\lambda}{2} \right\} \quad (2)$$

Положим $(y_{(1)}, \dots, y_{(n)})$ — отсортированный по возрастанию вектор y . Положим

$$S(\lambda) = \sum_i x_i = \sum_i \max \left\{ 0, y_i - \frac{\lambda}{2} \right\}$$

Пусть $\frac{\lambda_0}{2} \in [y_{(k-1)}, y_{(k)}]$. Тогда

$$S(\lambda_0) = \sum_{i=k}^n \left(y_{(i)} - \frac{\lambda_0}{2} \right) = \sum_{i=k}^n y_{(i)} - (n-k+1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (3)$$

Видно, что каждое слагаемое > 0 , с ростом λ каждое слагаемое становится меньше, и самих слагаемых становится меньше. Поэтому функция $S(\lambda)$ строго убывает.

Алгоритм решения.

- (1) Сортируем y , получаем $(y_{(1)}, \dots, y_{(n)}) = O(n \log n)$.
- (2) Считаем $S(2y_{(i)})$ до первого i такого, что $S(2y_{(i-1)}) \leq 1 < S(2y_{(i)}) = O(n)$.
- (3) Вычисляем λ из уравнения 3 — $O(n)$.
- (4) Вычисляем x_i из уравнений 2 — $O(n)$.

Итого, $O(n \log n)$.

2. Двойственные задачи

2. Перепишем задачу в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} & \min t, \\ & \text{s.t.} \\ & \max_i(a_i^T x + b_i) \leq t. \end{aligned}$$

Условие $\max_i(a_i^T x + b_i) \leq t$ эквивалентно системе неравенств $a_i^T x + b_i \leq t$. Итак, получили задачу:

$$\begin{aligned} & \min at, \\ & \text{s.t.} \\ & a_i^T x + b_i \leq t. \end{aligned}$$

Двойственная задача

$$L(x, t, \mu) = t + \sum_i \mu_i (a_i^T x + b_i - t)$$

Рассмотрим $\text{grad}_x L(x, t, \mu)$. Он равен $\sum_i \mu_i a_i^T$. Далее, $\frac{\delta L(x, t, \mu)}{\delta t} = 1 - \sum_i \mu_i$. Положим A — матрица, столбцами которой являются вектор a_i . Получаем условия на $\text{dom} g$:

$$\begin{aligned} & A\mu = 0, \\ & \sum_i \mu_i = 1. \end{aligned}$$

Действительно, если хотя бы одно из этих условий не выполняется, можно подобрать последовательность x_k, t_k , на которой достигается $\inf = -\infty$. При этих условиях

$$L(x, t, \mu) = \sum_i \mu_i b_i = \inf_{x, t} L(x, t, \mu) = L(\mu).$$

Двойственная задача:

$$\begin{aligned} & \max_{\mu} \sum_i \mu_i b_i, \\ & \text{s.t.} \\ & A\mu = 0, \\ & \sum_i \mu_i = 1. \end{aligned}$$