Домашнее задание 1.

1. Выпуклые множества

1. а) Выпуклость $\Rightarrow$ Пересечение с любой прямой выпукло.
Очевидно, т.к. прямая — тоже выпуклое множество.
б) Пересечение с любой прямой выпукло $\Rightarrow$ Выпуклость.
Пусть наше множество — X. Если оно состоит из одной точки, оно выпукло. Далее, в нем лежат две различные точки x_1, x_2. Проведем через эти точки прямую. По условию, пересечение прямой с X выпукло. Это означает, что в пересечении лежат все точки вида $tx_1 + (1-t)x_2$, $t \in [0,1]$. Значит эти точки лежат и в X. Получили, что вместе с каждой парой точек во множестве X лежит отрезок, их соединяющий. Это определение выпуклости.

2.

3.

4. Докажем, что множество $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 \leqslant \|x - y_0\|_2\right\}$ выпукло. Тогда исходное будет выпукло, как пересечение выпуклых по S.

2. Двойственные конусы

2. Далее $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0\}$. Замкнутость и выпуклость следуют из того, что это множество является пересечением полупространств вида $x_i \geqslant x_{i+1}$ и полупространства $x_n \geqslant 0$. Каждое из них является выпуклым и замкнутым, значит и пересечение выпукло и замкнуто. Рассмотрим $x^1, x^2 \in X$, $x^i = (x^i_1, \ldots, x^i_n)$ и возьмем линейную комбинацию $t_1x^1 + t_2x^2$, $t_1, t_2 \geqslant 0$. Очевидно, что если $x^1_i \geqslant x^1_{i+1}$ и $x^2_i \geqslant x^2_{i+1}$, то $t_1x^1_i + t_2x^2_i \geqslant t_1x^1_{i+1} + t_2x^2_{i+1}$. Также $t_1x^1_n + t_2x^2_n \geqslant 0$. Значит $t_1x^1 + t_2x^2 \in X$. X равен своей конической оболочке, т.е. он — конус.