Нестеров Борис Аркадьевич

Задание 1. Асимптотические сложности.

1 Известно, что $f(n) = O(n^2),\ g(n) = \Omega(1),\ g(n) = O(n)$. Положим

$$h(n) = \frac{f(n)}{g(n)}.$$

1. Возможно ли, что **а)** $h(n) = \Theta(n \log n)$; **б)** $h(n) = \Theta(n^3)$?

Из условия задачи следует, что $f(n)$ растет не быстрее Cn^2, $g(n)$ отделена от 0 и растет не быстрее Cn. Далее будем пользоваться эквивалентым определением O большого, а именно:

Далее предполагаем, что функции не равны 0 ни при каких n, кроме конечного количеста n. $f(n) = O(g(n))$, если $\frac{f(n)}{g(n)}$ — ограниченная функция. В частности, очевидно, $f(n) = O(fn)$. Отслюда также вытекает, что если $f(n) = O(g(n))$, то $f(n)h(n) = O(g(n)h(n))$.

а) Возьмем $f(n) = n^2, g(n) = \frac{n}{\log n}$, $n^2 = O(n^2)$ – очевидно, $\frac{\frac{n}{\log n}}{n} = \frac{1}{\log n}$ – ограниченная функция. Итак, $h(n) = \frac{f(n)}{g(n)} = n \log n$ **Ответ:** да.

б) Если $h(n) = \Theta(n^3)$, то это означает, что существует константа C_1 такая, что $\frac{f(n)}{g(n)} > C_1 n^3$. Это неравенсто эквивалентно $g(n) < \frac{f(n)}{C_1 n^3} = O(\frac{1}{n})$. Это означает, что $g(n) = O(\frac{1}{n})$. Это противоречит отделимости $g(n)$ от 0. **Ответ:** нет.

2. Приведите наилучшие (из возможных) верхние и нижние оценки на функцию $h(n)$ и приведите пример функций $f(n)$ и $g(n)$ для которых ваши оценки на $h(n)$ достигаются.

$g(n)$ ограничено снизу константой, $f(n)$ ограничено сверху Cn^2

Перед решением следующих задач, докажем вспомогательное утверждение.

Теорема 1. *Пусть задана положительная монотонная функция $f(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Обозначим $\sum_{k=1}^n f(k) = F(n)$. Для неубывающих f получим $G(n) + C \le F(n) \le G(n+1)$, а для невозрастающих – $G(n+1) \le F(n) \le G(n) + C$ где $G(x) = \int_1^x f(t)dt$*

Доказательство. Рассмотрим случай монотонно возрастающей функции $f(x)$, случай убывающей полностью аналогичен. На полуинтервале $[k, k+1), f([x]) = f(k) \le f(x)$. Получаем

$$\sum_1^n f(k) = \int_1^{n+1} f([x])dx \le \int_1^{n+1} f(x)dx = G(n+1)$$

$$\sum_1^n f(k) = \int_1^{n+1} f([x])dx \ge \int_1^{n+1} f(x-1)dx = G(n) + \int_0^1 f(x)dx$$

Для убывающих функций, например $\frac{1}{n}$, может возникнуть проблема с определением их интеграла в 0. В таком случае будем рассматривать сумму начиная с 2, что не изменит ассимптотику суммы. □

Следствие 0.1. *Для функций f вида $n^k \log^l n, k \ge -1$ и e^{an} из теоремы следует $F(n) = \Theta(G(n))$.*

2 Найдите Θ-асимптотику $\sum\limits_{i=1}^n \sqrt{i^3 + 2i + 5}$.

$$f(k) = \sqrt{k^3 + 2k + 5}$$

Начиная с некоторого k_0, а именно с наибольшего корня ур-я $3k^3 = 2k + 5$,

$$k^{\frac{3}{2}} < f(k) < 2k^{\frac{3}{2}}.$$

Это означает, что

$$\sum_1^n k^{\frac{3}{2}} < \sum_1^n f(k) < \sum_1^n 2k^{\frac{3}{2}}.$$

$$\int x^{\frac{3}{2}} dx = x^{\frac{5}{2}} + C.$$

Получааем, что в неравенстве слева и справа стоят функции $\Theta(n^{\frac{5}{2}})$ $\sum\limits_{i=1}^n \sqrt{i^3 + 2i + 5} = \Theta(n^{\frac{5}{2}})$.

3 Докажите, что асимптотика $\sum_{i=1}^{n} i^\alpha = \Theta(n^{1+\alpha})$, если $\alpha > 0$.

$$\int x^\alpha dx = x^{\alpha+1} + C$$

. Далее см. Следствие 1.

4 Найдите Θ-асимптотику функции $g(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$;

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$

. Тогда, по следствию 1,

$$g(n) = \Theta(\ln n)$$