

Задание 4. Рекурренты.

1 Обозначим v_n — двумерный вектор-столбец равный $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$. Из соотношения $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ необходимо получить матрицу перехода от v_n к v_{n+1} , т. е.

$$v_{n+1} = Av_n$$

$$\begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Получаем, что $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$. Столбцы матрицы A равны v_2, v_1 , из чего получаем формулу:

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Так, соотношения верны и для отрицательных n , для нахождения F_{-n} достаточно посчитать

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n.$$

Искомое число будет лежать в левом нижнем (или правом верхнем) углу матрицы.

2 Найдите асимптотическую оценку функции $T(n)$. Примените мастер-теорему в тех случаях, когда ее можно использовать, и посчитайте асимптотику иначе, когда нельзя. Варианты есть следующие. Можно выписать рекурренту в виде суммы и найти, чему она равна. Можно подставить рекурренту саму в себя и посмотреть, что получается. Можно обратиться к литературе (учебник Кормена, учебник Даагупты)

1. $T(n) = 25T\left(\frac{n}{5}\right) + n^2$
2. $T(n) = 16T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$
3. $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$
4. $T(n) = T(n-1) + 3n$
5. $T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n$
6. $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n^2$
7. $T(n) = T(n-1) + n^2$
8. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{16}\right) + \sqrt{n}$
9. $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3$
10. $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

Решение

1. $\log_b a = 2, c = 2, k = 0 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2 \log n)$
2. $\log_b a = 4, c = 3 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^4)$
3. $\log_b a = 2, c = 3 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^3)$
4. $T(n)$ — сумма линейных слагаемых, значит $T(n) = \Theta(n^2)$
5. —
6. —
7. $T(n)$ — сумма квадратичных слагаемых, значит $T(n) = \Theta(n^3)$
8. $\log_b a = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}, k = 0 \Rightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n} \log n)$
9. Это пункт 3
10. $\log_b a = 2, c = 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$