1 (). Оцените асимптотику роста функции $f(n) = 1 + c + c^2 + \cdots + c^n$ в зависимости от параметра c.

$\triangleright$ По формуле суммы геометрической прогресси $f(n) = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}, c \neq 1$. При $0 < c < 1$, $f(n)$ — ограниченная, т. е. $f(n) = \Theta(1)$. При $c = 1$, $f(n) = n = \Theta(n)$. При $c > 1$, $f(n) = \Theta(e^n)$. $\triangleleft$

2 (). Покажите, что для рекурренты $T(n) = T(n-1) + 4T(n-3)$ верна оценка $\log T(n) = \Theta(n)$.

$\triangleright$ Если пострить дерево рекурсии для данной задачи, вклад во время выполнения алгоритма будут давать только листовые вершины вида $T(1)$. Необходимо оценить количество таких вершин. $\triangleleft$

3 (). Предложите эффективный алгоритм вычисления наименьшего общего кратного (НОК) двух чисел в битовой модели вычислений (время выполнения операций зависит от длины битовой записи чисел).

$\triangleright$ Задача нахождения НОК по сложности эквивалентна задаче нахождения НОД, т. к. зная НОК достаточно поделить на него произведение чисел, чтобы получить НОД. $\triangleleft$

4 (). Найдите тета-асимптотику для рекурренты $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + T(\frac{n}{6}) + n$.

$\triangleright$ Построим дерево реккуренты. Каждый слой увеличивается в 5 раз. Максимальная глубина дерева — $\log_4 n$. При этом ложность каждого слоя выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} n \\ \frac{3}{4}n + \frac{n}{6} = \frac{11}{12}n \\ \frac{3}{4}(\frac{3}{4}n + \frac{n}{6}) + \frac{\frac{3}{4}n + \frac{n}{6}}{6} = \left(\frac{11}{12}\right)^2 n \\ \vdots \end{gathered}$$

В итоге ассимптотика имеет вид:

$$n \sum_{k=0}^{\log_4 n} \left(\frac{11}{12}\right)^k = n^{\log_4 \frac{11}{12} + 1}$$

$\triangleleft$

5 (). Найдите представление НОД чисел $a = 36$ и $b = 45$ в виде их линейной комбинации, то есть таких чисел x и y, что $ax + by = gcd(a, b)$. Воспользуйтесь расширенным алгоритмом Евклида для решения этой задачи.

$\triangleright$

$$\begin{gathered} 45 - 1 * 36 = 9 \\ 1 - 1 * 0 = 1 \\ 0 - 1 * 1 = -1 \\ 36 - 4 * 9 = 0 \end{gathered}$$

$$45 * 1 + 36 * (-1) = 9.$$

$\triangleleft$

6 (Задача о Ханойской башне). Есть три стержня, на первый из которых нанизано n колец разного радиуса. Чем ниже лежит кольцо, тем больше радиус. Кольца разрешено перекладывать со стержня на стержень, но только при условии, что кольцо меньшего радиуса кладётся на кольцо большего радиуса. Найдите минимальное число перекладываний, требуемое для того, чтобы переложить все кольца с одного стержня на другой, то есть оценку снизу для задачи, и приведите алгоритм, который ее достигает.

$\triangleright$ Без ограничения общности будем считать, что наша задача переложить все диски с первого стержня на третий. Пусть есть алгоритм, решающий задачу для n колец за наименьшее число шагов. Чтобы переложить последний диск на третий стержень, все остальные диски не должны находится на стержнях 1 или 3. Значит, они все лежат на втором, причем в правильном порядке. Это означает, что для того, чтобы переложить последний диск, необходимо решить задачу для $n-1$ диска. Затем, после перекладывания последнего диска на него нужно переложить все остальные. Это снова решение задачи для $n-1$ диска. Обозначим за $T(n)$ количество перекладываний при решении задачи для n дисков. Отметим, что $T(1) = 1$. Из написанного выше получаем следующую реккурентную формулу:

$$T(n) = T(n-1) + 1 + T(n-1) = 2T(n-1) + 1.$$

Докажем по индукции, что $T(n) = 2^n - 1$.

- База: $T(1) = 1 = 2^1 - 1$

- Шаг: $T(n) = 2^n - 1 \Rightarrow T(n+1) = 2 * T(n) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

Итак, алгоритм представляет из себя следующее:

1. Рекурсивно перекладываем все диски, кроме последнего на второй стержень.
2. Перекладываем последний диск на третий стержень.
3. Рекурсивно перекладываем все диски, кроме последнего со второго стержня на третий.

$\triangleleft$

7 (). Дан массив из n чисел. Нужно разбить этот массив на максимальное количество непрерывных подмассивов так, чтобы после сортировки элементов внутри каждого подмассива весь массив стал отсортированным. Предложите $O(n \log n)$ алгоритм для решения этой задачи.

$\triangleright$ Пусть массив разбит на такие подмассивы $M_1, \ldots, M_k$, тогда любой элемент массива M_i не больше любого элемента из массива M_j для любых $i < j$. $\triangleleft$