1 (). Найдите $7^{13} \mod 167$ с помощью быстрого возведения в степень. Нужно привести последовательность умножений и промежуточные результаты.

Ответ: 98.

$\triangleright$

$$13 = 8 + 4 + 1 = 1101_2$$
$$7^2 \equiv 49 \pmod 167$$
$$7^4 \equiv 49^2 \equiv 2501 - 100 \equiv 163 - 100 \equiv 63 \pmod{167}$$
$$7^8 \equiv 63^2 \equiv 3600 + 9 + 360 \equiv 3969 \equiv 629 \equiv 128 \pmod{167}$$
$$7^{13} \equiv 7 \cdot 63 \cdot 128 \equiv 441 \cdot 128 \equiv 98 \pmod{167}$$

$\triangleleft$

2 (). Злодей Анти-человек придумал последовательность чисел Анти-начи. Она продолжает последовательность чисел Фибоначчи влево. Например, поскольку $F_0 = 0, F_1 = 1$ и $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, выполняется равенство $1 = 0 + F_{-1}$, из чего следует, что $F_{-1} = 1$. Дальнейшие числа Анти-начи определяются аналогично.
Анти-человек умеет быстро возводить матрицы в степень. Подскажите, как ему находить F_k для отрицательных k.

$\triangleright$ Обозначим v_n — двумерный вектор-столбец равный $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$. Из соотношения $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ необходимо получить матрицу перехода от v_n к v_{n+1}, т. е.

$$v_{n+1} = Av_n$$
$$\begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Получаем, что $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$. Столбцы матрицы A равны v_2, v_1, из чего получаем формулу:

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Так, соотношения верны и для отрицаетльных n, для нахождения F_{-n} достаточно посчитать

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n.$$

Искомое число будет лежать в левом нижнем (или правом верхнем) углу матрицы. $\triangleleft$

3 (). На вход поступает n котов целочисленной массы от 2 до k килограммов. Для каждого кота известна масса и кличка. Известно, что сначала накормить требуется наиболее худосочных. Предложите алгоритм, выводящий порядок, в котором нужно кормить котов, докажите его корректность и оцените асимптотику.

$\triangleright$ Вначале выделим память под два массива: m длиной $k-1$, ord длиной n. Эти операции в общей сложности $\Theta(n)$. Затем, пройдем один раз по исходному массиву и на i-е место в массиве m запишем, сколько котов имеют массу не более $i+2$(нумерация массивов с 0). Это также займет $\Theta(n)$. Далее, пройдем исходный массив заново, совершая следующте действия:
Допустим, что кот с кличкой i имеет массу j. Также допустим, что до этого мы встретили p котов той же массы. Тогда мы сделаем запись $ord\big[m[j-3]+p\big] = i$(если $j = 2, ord[p] = i$). Получается, что мы разбили массив индексов на последовательные ячейки, каждая из которых содержит клички котов определенной массы, при этом эти ячейки стоят по возрастанию массы. Последняя операция также линейна по n. В итоге, алгоритм работает за $\Theta(n)$. $\triangleleft$

4 (). Найдите Θ-асимптотику функции $f(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Ответ: $\Theta(2^n)$.

$\triangleright$ Найдем функцию $f(n)$ явно. Заметим, что $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{k} = f(n)$ $\triangleleft$

5 (). Оцените асимптотически, сколько раз будет напечатана строка "heh" при вызове функции f.

Ответ: $\Theta(n^3)$.

$\triangleright$ Можно считать в первом цикле n степенью двойки(например, можно снизу и сверху ограничить ближайшими).

$$\sum_{i=1}^{\log n} 2^{3i} = \sum_{i=1}^{\log n} 8^i$$

Известно следующее:

$$a\sum_{i=1}^{m} a^i = \sum_{i=1}^{m} a^i + a^{m+1} - a$$

$$\sum_{i=1}^{m} a^i = \frac{a^{m+1} - a}{a - 1}$$

Подставляя $a = 8, m = \log n$, получаем $\frac{8}{7} \cdot 2^{3\log n} - \frac{8}{7} = \Theta(n^3)$. Из ДЗ1 известно, что сумма второго цикла $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (2i)^2$равна $\Theta(n^3)$. Итого, получаем $\Theta(n^3)$. $\triangleleft$