Домашнее задание № 4

Оптимизация 1

AI Masters

Условия оптимальности

1. (2 pts) TEX использует модель механической пружины для определения интервала до и после каждого символа в каждой строке документа. Строка состоит из n символов, каждый из которых имеет ширину $w_i, i = 1, \dots, n$ и $n+1$ пробелов до и после каждого символа. Пробелы имеют ширину $s_i, i = 1, \dots, n+1$. Мы предположим, что $\sum_{i=1}^{n} w_i + \sum_{i=1}^{n+1} s_i = W$, т. е. символы и пробелы заполняют всю строку. Мы должны определить ширину s_i с учетом ограничения на заполнение строк. В TEX пробелы моделируются как пружины, которые могут сжиматься или растягиваться от их естественной длины (или в данном контексте ширины). Это выражается энергией, связанной с шириной s_i, заданной как
$$E_i(s_i) = \begin{cases} \frac{k_i^{ext}}{2}(s_i - N_i)^2 & s_i > N_i \\ \frac{k_i^{comp}}{2}(s_i - N_i)^2 & s_i \leq N_i, \end{cases}$$
где k^{ext}, N_i и k^{comp} — заданные положительные параметры.

   Мы можем интерпретировать параметры следующим образом. Параметр N_i — это естественная величина пробела, т. е. размер пробела, который минимизирует энергию. Параметры k^{ext} и k^{comp} — это жесткость пробелов при операции растяжения и сжатия соответственно. Размер пробелов s_i выбирается так, чтобы минимизировать общую энергию
$$E(s_1, ..., s_{n+1}) = E_1(s_1) + \ldots + E_{n+1}(s_{n+1})$$
с учетом ограничения на заполнение строки.

   Поставьте задачу выпуклой оптимизации для поиска оптимальных размеров пробелов s_i и с помощью условиий ККТ найдите аналитическое решение поставленной задачи. Требование неотрицательности s_i не накладывается.

2. (2 pts) Решите следующую задачу:
$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}} \operatorname{trace}(\mathbf{X}) - \log\det \mathbf{X}$$
$$\text{s.t. } \mathbf{X}\mathbf{z} = \mathbf{y},$$
где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y}^\top \mathbf{z} = 1$.

3. (3 pts) Приведите алгоритм получения решения следующей задачи на основе условий ККТ и оцените его асимптотическую сложность.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \\
\text{s.t. } &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
&x_i \geq 0.
\end{aligned}
$$

Двойственные задачи

1. (4 pts) Найдите двойственную задачу к задаче бинарного линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &x_i(1 - x_i) = 0, \; i = 1, \ldots, n \\
&\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Метод поиска приближённых решений в задачах дискретной оптимизации, основанный на построении двойственной задачи уже в непрерывном пространстве называется *релаксацией Лагранжа.*

Докажите, что нижняя оценка, которую даёт релаксация Лагранжа, совпадает с оценкой, которую даёт решение непрерывной релаксации исходной задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{s.t. } &0 \leq x_i \leq 1, \; i = 1, \ldots, n \\
&\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Также покажите, что решение этой задачи действительно даёт оценку снизу на решение задачи (1).

2. (1 pts) Постройте двойственную задачу для задачи

$$
\min_{\mathbf{x}} \max_{i=1,\ldots,k} (\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + b_i)
$$

3. (2 pts) Постройте двойственную задачу для задачи

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}} -\log\det \mathbf{X} \\
\text{s.t. } &\mathbf{a}_i^\top \mathbf{X} \mathbf{a}_i \leq 1, \; i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

4. (2 pts) Рассмотрите задачу

$$
\begin{aligned}
&\min -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3) \\
\text{s.t. } &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1
\end{aligned}
$$

(a) Решите задачу, используя условия ККТ, при необходимости воспользуйтесь алгоритмами численного решения нелинейных уравнений

(b) Является ли задача выпуклой?

(c) Сформулируйте двойственую задачу и решите её. Выполняется ли сильная двойственность?

5. (2 pts) Постройте двойственную задачу для следующей задачи

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_2^2 + \sum_{i=1}^{p} \|\mathbf{A}_i\mathbf{x}+\mathbf{b}_i\|_2,$$

где $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m_i\times n}$.