Домашнее задание 1.

1. Выпуклые множества

1. а) Выпуклость $\Rightarrow$ Пересечение с любой прямой выпукло.
Очевидно, т.к. прямая — тоже выпуклое множество.
б) Пересечение с любой прямой выпукло $\Rightarrow$ Выпуклость.
Пусть наше множество — X. Если оно состоит из одной точки, оно выпукло. Далее, в нем лежат две различные точки x_1, x_2. Проведем через эти точки прямую. По условию, пересечение прямой с X выпукло. Это означает, что в пересечении лежат все точки вида $tx_1 + (1-t)x_2$, $t \in [0, 1]$. Значит эти точки лежат и в X. Получили, что вместе с каждой парой точек во множестве X лежит отрезок, их соединяющий. Это определение выпуклости.

2.а) Перспективное отображение: $P\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$, $P\big((x,t)\big) = \frac{x}{t}$. Гиперплоскость $a^T x + ct = \gamma$ принимает вид $a^T \frac{x}{t} = -c + \frac{\gamma}{t}$. Обозначим $y = \frac{x}{t}$. Получаем семейство параллельных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$ вида $a^T y = b$, где b лежит на отрезке $[-c, -c+\gamma]$ (или наоборот, если $\gamma < 0$). Это аналог двумерной полосы в $\mathbb{R}^n$.

3.

4. Докажем, что множество $\big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 \leqslant \|x - y_0\|_2\big\}$ выпукло. Тогда исходное будет выпукло, как пересечение выпуклых по S. Видно, что в обеих частях неравенства стоят выражения вида $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + Ax + b$. Поэтому, если перенести все на одну сторону, останется линейное неравенство на x. Множество, соответствующее такому неравенству — полупространство, которое *выпукло.*

2. Двойственные конусы

1. Выражения $X = X^T$ и $y^T X y \geqslant 0$ линейны по X, т.е. выполняются для линейных комбинаций X_1, X_2 с положительными коэффициентами. Следовательно это выпуклый конус. Также заметим, что это множество — пересечение множеств вида $\{X \mid X = X^T, y_0^T X y_0 \geqslant 0\}$ по всем $y_0 \geqslant 0$. Каждое из таких множеств замкнуто, значит и исходное замкнуто.

2. Далее $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0\}$. Замкнутость и выпуклость следуют из того, что это множество является пересечением полупространств вида $x_i \geqslant x_{i+1}$ и полупространства $x_n \geqslant 0$. Каждое из них является выпуклым и замкнутым, значит и пересечение выпукло и замкнуто. Рассмотрим $x^1, x^2 \in X$, $x^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$ и возьмем линейную комбинацию $t_1 x^1 + t_2 x^2$, $t_1, t_2 \geqslant 0$. Очевидно, что если $x_i^1 \geqslant x_{i+1}^1$ и $x_i^2 \geqslant x_{i+1}^2$, то $t_1 x_i^1 + t_2 x_i^2 \geqslant t_1 x_{i+1}^1 + t_2 x_{i+1}^2$. Также $t_1 x_n^1 + t_2 x_n^2 \geqslant 0$. Значит $t_1 x^1 + t_2 x^2 \in X$. X равен своей конической оболочке, т.е. он — конус.

Докажем общий факт:

Теорема 2.1. *Если конус является полупространством $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (a, x) \geqslant 0\}$, то сопряженный конус равен $K^* = \{ta \mid t \geqslant 0\}$.*

Доказательство. Очевидно, $\{ta \mid t \geqslant 0\}$ лежит в K^*. Теперь, предположим, что $a + b \in K^*$, $b \neq ta$. Тогда в гиперплоскости $(a, x) = 0$ лежит вектор y такой, что $(b, y) \neq 0$. Там же лежит $-y$, так что будем считать, что $(a + b, y) < 0$. Отсюда $(a + b, y) = (b, y) < 0$. Противоречие. $\square$

Неравенства $x_i \geqslant x_{i+1}, x_n \geqslant 0$ имеют именно такой вид. В первом случае вектор a равен $(0, \ldots, 0, 1, -1, 0, \ldots, 0)$,где $1, -1$ стоят на i-м и $i+1$-м местах, во втором — $(0, \ldots, 0, 1)$. Далее лемма.

Лемма 2.2. *Пусть K_1, K_2 - выпуклые замкнутые конусы. Тогда $C(K_1^* \cup K_2^*) \subset (K_1 \cap K_2)^*$. Здесь C — коническая оболочка.*

Доказательство. Пусть $a_1 u + a_2 v$ — элемент $C(K_1^* \cup K_2^*)$, где $u \in K_1^*, v \in K_2^*$, и $x \in K_1 \cap K_2$. Тогда $(u, x) \geqslant 0$ и $(v, x) \geqslant 0$. Отсюда $(a_1 u + a_2 v, x) \geqslant 0$. Значит $C(K_1^* \cup K_2^*) \subset (K_1 \cap K_2)^*$. $\square$

Коническая оболочка полученных векторов имеет вид

$$(t_1, t_2 - t_1, t_3 - t_2, \ldots, t_{n-1} - t_{n-1}, t_n - t_{n-1}), t_i \geqslant 0.$$