

1. При любом переходе из комнаты в комнату будем оставлять монеты в начале и в конце коридора. Таким образом, при нахождении в комнате точно знаем, в каких из соседних уже были.

Алгоритм:

- (1) Посещаем произвольную непосещенную комнату.
- (2) Если нет непосещенных комнат, возвращаемся назад.
- (3) Повторяем шаги 1,2 пока не посетим все комнаты.

Это алгоритм поиска в глубину, он обходит все вершины графа (в нашем случае комнаты).

Асимптотика: Каждый коридор посещается 2 раза, поэтому $O(m)$.

2. Воспользуемся алгоритмом покраски графа в 2 цвета с лекции.

Алгоритм.

Выберем произвольную вершину, покрасим ее в синий. Затем красим в красный все вершины, которые ей смежны. Далее на произвольном шаге красим в цвет, отличный от цвета вершины все непокрашенные смежные ей вершины. Повторяем этот шаг для всех смежных ей вершин. Алгоритм заканчивается, когда все вершины покрашены. Таким образом, каждая вершина будет покрашена в синий или красный.

Корректность.

Теорема 0.1. В графе есть цикл нечетной длины \iff после окончания алгоритма в графе есть смежные вершины одного цвета.

Доказательство. \Rightarrow Пусть соседние вершины имеют разные цвета. Сопоставим вершинам в цикле нечетной длины числа от 1 до $2k + 1$ по порядку. По предположению, если вершина с четным номером покрашена в синий, то вершина с нечетным — красная. Но тогда смежные вершины 1 и $2k + 1$ красные — противоречие.

\Leftarrow По построению алгоритма, если вершины одного цвета, то между ними есть путь четной длины. Если две соседние вершины одного цвета, то есть путь четной длины их соединяющий. Вместе с ребром, которым они уже соединены получаем цикл нечетной длины. \square

Асимптотика.

Каждая вершина обрабатывается один раз, при этом каждое ребро проверяется 2 раза. $\Theta(|V| + |E|)$