

Домашнее задание № 1

Оптимизация 1

AI Masters

1. Выпуклые множества

- (1 pts) Докажите, что выпуклость множества равносильна тому, что пересечение этого множества с любой прямой есть выпуклое множество.
- (2 pts) Опишите в максимально простой форме множества $P(C)$, где P — это перспективное отображение, а множества C :
 - гиперплоскость $C = \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + ct = \gamma\}$, \mathbf{a} и c не равны нулю одновременно
 - полупространство $C = \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{a}^\top \mathbf{x} + ct \leq \gamma\}$, \mathbf{a} и c не равны нулю одновременно.
- (0.5 pts) Опишите в максимально простом виде, что представляет из себя коническая оболочка множества $\{\mathbf{X}\mathbf{X}^\top \mid \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times k}, \text{rank}(\mathbf{X}) = k\}$.
Коническая оболочка множества \mathcal{X} — это множество $\{\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \alpha_i \geq 0, \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}\}$.
- (0.5 pts) Докажите, что множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2, \forall \mathbf{y} \in S\}$ выпукло для произвольного $S \subset \mathbb{R}^n$.

2. Двойственные конусы

- (0.5 pts) Покажите, что множество $\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathbf{X} = \mathbf{X}^\top, \mathbf{y}^\top \mathbf{X} \mathbf{y} \geq 0, \forall \mathbf{y} \geq 0\}$ является выпуклым замкнутым конусом и найдите его двойственный. Этот конус называется конусом ко-положительных матриц.
- (1 pts) Покажите, что множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$ выпуклый замкнутый конус и найдите его двойственный.