Домашнее задание

Решения задач

AI Masters 25

Задача 1

Решение:
Оценка $\hat{\alpha}$ несмещённая: $E[\hat{\alpha}] = \alpha$.

Оценка эффективная когда ее дисперсия совпадает с нижней оценкой в неравенстве Крамера-Рао, которая равна 1 делить на информацию Фишера.

- **Дисперсия:** $D\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_1\right] = \frac{\sigma^2}{n}$
- **Информация Фишера:** Надо найти информацию Фишера одного наблюдения.
$$I_i(\alpha) = E\left[\frac{\partial \ln f(\alpha, X_i)}{\partial \alpha}\right],$$
где $f(\alpha, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right)$. В итоге получаем
$$I(\alpha) = nI_i(\alpha) = nE\left[\frac{(X_i - \alpha)^2}{\sigma^4}\right] = \frac{n}{\sigma^2}$$

Следовательно, $\hat{\alpha}$ — эффективная оценка.

Задача 2

Решение:
Оценка $\hat{\sigma}^2$ несмещённая:
$$E[\hat{\sigma}^2] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \sigma^2.$$

Аналогично предыдущей задаче ищем информацию Фишера и дисперсию.

- **Информация Фишера:** для σ^2 в $N(0, \sigma^2)$:
$$I(\sigma^2) = nI_i(\sigma^2).$$

Здесь

$$I_i(\sigma^2) = E\left[\frac{\partial \ln f(\sigma^2, X_i)}{\partial \sigma^2}\right],$$

где $f(\sigma^2, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right)$.
Получаем $I_i(\sigma) = \frac{1}{2\sigma^4}$.

$$I(\sigma^2) = \frac{n}{2\sigma^4}$$

- **Дисперсия оценки**:

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \frac{1}{n}\left(E\left[X^4\right] - E^2\left[X^2\right]\right) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

Таким образом, $\hat{\sigma}^2$ — эффективная оценка.

Задача 3

Решение:
Достаточная статистика для θ — $T = \max(X_1, ..., X_n)$.
Функция распределения расчитывается следующим образом:

$$P(\max(X_1, \ldots, X_n) < t) = P(X_1 < t, \ldots, X_n < t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < t) = \frac{t^n}{\theta^n}, 0 < t < \theta.$$

Отсюда получаем вид для плотности распределения T:

$$f_T(t) = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 \le t \le \theta.$$

Найдем мат. ожидание T:

$$E[T] = \int_0^\theta \frac{nt^n}{\theta^n} dt = \frac{n}{n+1}\theta$$

Оценка $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n}T$ является несмещённой:

$$E[T] = \frac{n}{n+1}\theta \implies E[\hat{\theta}] = \theta.$$

Так как T — полная и достаточная статистика, то $\hat{\theta}$ — оптимальная оценка.

Задача 4

Решение:
(a) Метод моментов:
$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ — оценка для $E[X]$ (первый момент).
$\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ — оценка для $E\left[X^2\right]$(второй момент).

$$\begin{cases} E[X_1] = \frac{a+b}{2} \\ \widehat{E} = \overline{X} \\ D[X_1] = \frac{(b-a)^2}{12} \\ \widehat{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\hat{a}+\hat{b}}{2} = \overline{X} \\ \frac{\hat{b}-\hat{a}}{2} = \sqrt{3\left(\overline{X^2} - \overline{X}^2\right)} \end{cases}$$

Отсюда получем оценки:

$$\begin{cases} \hat{a} = \overline{X} - \sqrt{3\left(\overline{X^2} - \overline{X}^2\right)} \\ \hat{b} = \overline{X} + \sqrt{3\left(\overline{X^2} - \overline{X}^2\right)} \end{cases}$$

(b) Пример кода на Python:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a_true, b_true = 1, 4
n_values = range(10, 1000, 10)
a_errors, b_errors = [], []

for n in n_values:
    sample = np.random.uniform(a_true, b_true, n)
    a_hat = np.mean(sample) - np.sqrt(3 * (np.var(sample)))
    b_hat = np.mean(sample) + np.sqrt(3 * (np.var(sample)))
    a_errors.append((a_hat - a_true)**2)
    b_errors.append((b_hat - b_true)**2)

plt.plot(n_values, a_errors, label='a_error')
plt.plot(n_values, b_errors, label='b_error')
plt.legend()
plt.show()
```

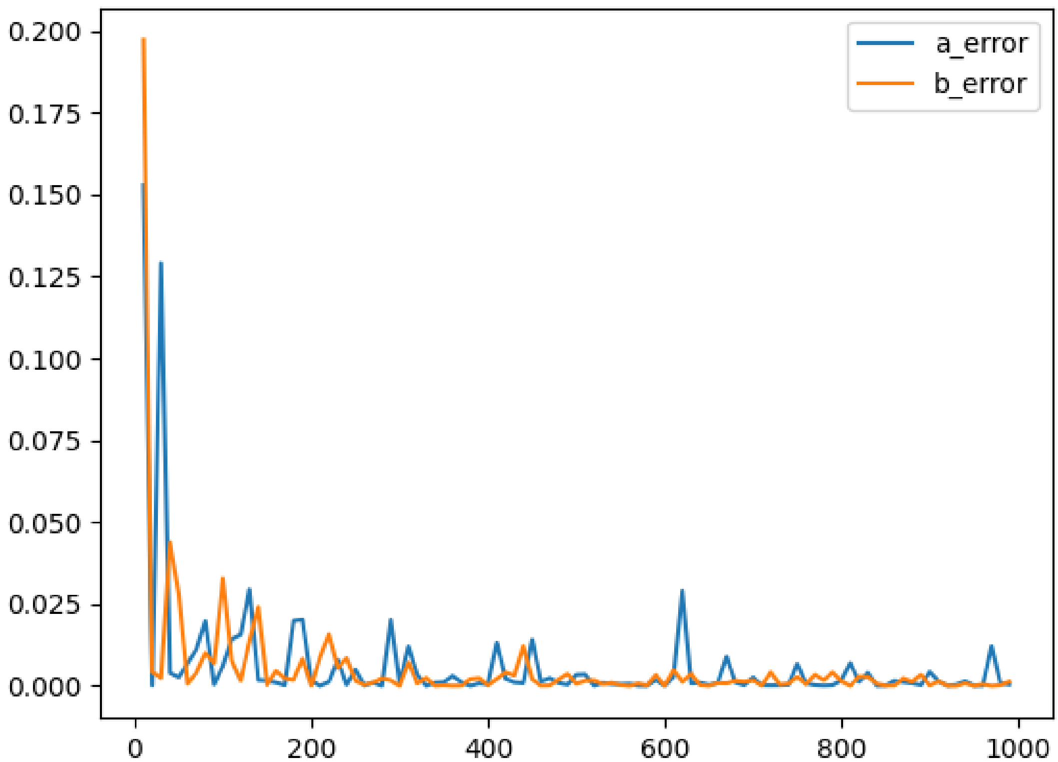

Рис. 1: Результат работы

Задача 5

Решение:
Функция правдоподобия:

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i) = \alpha^n \exp\left(\alpha \sum (X_i - \beta)\right).$$

Логарифмируем:

$$\ln L(\alpha) = n \ln \alpha + \alpha \sum (X_i - \beta).$$

Условие максимума:

$$\frac{d}{d\alpha} \ln L(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \sum (X_i - \beta) = 0 \implies \hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum (X_i - \beta)}.$$

Задача 6

Решение:
Функция правдоподобия:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{5} \cdot I_{\theta \le X_i \le \theta + 5}.$$

Максимум достигается, когда все индикаторные функции равны 1. Таким образом:

$$\hat{\theta} = \min(X_i) \quad \text{или} \quad \hat{\theta} = \max(X_i) - 5.$$