

## Домашнее задание 4.

### 1. Условия оптимальности

1. Формулировка задачи. Положим  $\widetilde{W} = W - \sum w_i$  и будем обозначать  $E_i(s_i)$  — функции энергии из условия. Нетрудно заметить, что все эти функции выпуклые, т.к. их графиками являются левая и правая ветви парабол, склеенные в нуле. Получаем следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \min \sum E_i(s_i) \\ \text{s.t. } \text{aaa} \\ \sum s_i = \widetilde{W} \end{aligned}$$

Условий типа неравенство нет, следовательно из условий ККТ остаются только два:

$$\begin{aligned} \sum s_i &= \widetilde{W} \\ \text{grad} \sum (E_i(s_i)) + \lambda \sum s_i - \lambda \widetilde{W} &= 0 \end{aligned}$$

Условие на градиент распадается на  $n$  уравнений

$$\frac{dE_i(s_i)}{ds_i} = -\lambda. \quad (1)$$

При этом,

$$\frac{dE_i(s_i)}{ds_i} = \begin{cases} k_i^{\text{ext}}(s_i - N_i), & \text{if } s_i \geq N_i, \\ k_i^{\text{comp}}(s_i - N_i), & \text{if } s_i < N_i. \end{cases}$$

Разберем два случая:

1)  $-\lambda \geq 0 \iff \lambda \leq 0$ . Тогда уравнение 1 принимает вид:

$$k_i^{\text{ext}}(s_i - N_i) = -\lambda.$$

Получаем  $s_i = -\frac{\lambda}{k_i^{\text{ext}}} + N_i$ . Отсюда

$$\widetilde{W} = \sum s_i = -\lambda \sum \frac{1}{k_i^{\text{ext}}} + \sum N_i.$$

2)  $-\lambda < 0 \iff \lambda > 0$ . Тогда уравнение 1 принимает вид:

$$k_i^{\text{comp}}(s_i - N_i) = -\lambda.$$

Получаем  $s_i = -\frac{\lambda}{k_i^{\text{comp}}} + N_i$ . Отсюда

$$\widetilde{W} = \sum s_i = -\lambda \sum \frac{1}{k_i^{\text{comp}}} + \sum N_i.$$

Если  $\widetilde{W} - \sum N_i \geq 0$  то попадаем в случай 1. Тогда

$$\lambda = \frac{\sum N_i - \widetilde{W}}{\sum \frac{1}{k_i^{\text{ext}}}}.$$

Отсюда

$$s_i = \frac{\widetilde{W} - \sum N_j}{k_i^{\text{ext}} \sum \frac{1}{k_j^{\text{ext}}}} + N_i.$$

Иначе, попали в случай 2. Аналогично

$$s_i = \frac{\widetilde{W} - \sum N_j}{k_i^{\text{comp}} \sum \frac{1}{k_j^{\text{comp}}}} + N_i.$$

**3.** Запишем условия ККТ:

- (1)  $\sum_{i=1}^n x_i = 1,$
- (2)  $-x_i \leq 0,$
- (3)  $\mu_i \geq 0,$
- (4)  $\mu_i x_i = 0,$
- (5)  $\text{grad}_x \|x - y\|^2 + \lambda \sum x_i - \sum \mu_i x_i = 0.$

Последнее уравнение является системой из  $n$  уравнений:

$$2x_i - 2y_i + \lambda - \mu_i = 0$$

Получаем, что

$$x_i = y_i - \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu_i}{2}.$$

Рассмотрим два случая:

- (1)  $y_i - \frac{\lambda}{2} \geq 0.$  Тогда из условий 2, 3, 4,  $x_i = y_i - \frac{\lambda}{2}, \mu_i = 0.$
- (2)  $y_i - \frac{\lambda}{2} < 0.$  Тогда из условий 2, 3, 4,  $x_i = 0, \mu_i = \lambda - 2y_i.$

Итак, получили, что

$$x_i = \max \left\{ 0, y_i - \frac{\lambda}{2} \right\} \quad (2)$$

Положим  $(y_{(1)}, \dots, y_{(n)})$  — отсортированный по возрастанию вектор  $y$ . Положим

$$S(\lambda) = \sum_i x_i = \sum_i \max \left\{ 0, y_i - \frac{\lambda}{2} \right\}$$

Пусть  $\frac{\lambda_0}{2} \in [y_{(k-1)}, y_{(k)}]$ . Тогда

$$S(\lambda_0) = \sum_{i=k}^n \left( y_{(i)} - \frac{\lambda_0}{2} \right) = \sum_{i=k}^n y_{(i)} - (n - k + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (3)$$

Видно, что каждое слагаемое  $> 0$ , с ростом  $\lambda$  каждое слагаемое становится меньше, и самих слагаемых становится меньше. Поэтому функция  $S(\lambda)$  строго убывает.

**Алгоритм решения.**

- (1) Сортируем  $y$ , получаем  $(y_{(1)}, \dots, y_{(n)}) = O(n \log n).$
- (2) Считаем  $S(2y_{(i)})$  до первого  $i$  такого, что  $S(2y_{(i-1)}) \leq 1 < S(2y_{(i)}) = O(n).$
- (3) Вычисляем  $\lambda$  из уравнения  $3 = O(n).$
- (4) Вычисляем  $x_i$  из уравнений  $2 = O(n).$

Итого,  $O(n \log n).$

## 2. Двойственные задачи

2. Перепишем задачу в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \min t, \\ \text{s.t.} \\ \max_i (a_i^T x + b_i) \leq t. \end{aligned}$$

Условие  $\max_i (a_i^T x + b_i) \leq t$  эквивалентно системе неравенств  $a_i^T x + b_i \leq t$ .  
Итак, получили задачу:

$$\begin{aligned} \min at, \\ \text{s.t.} \\ a_i^T x + b_i \leq t. \end{aligned}$$

**Двойственная задача**

$$L(x, t, \mu) = t + \sum_i \mu_i (a_i^T x + b_i - t)$$

Рассмотрим  $\text{grad}_x L(x, t, \mu)$ . Он равен  $\sum_i \mu_i a_i^T$ . Далее,  $\frac{\delta L(x, t, \mu)}{\delta t} = 1 - \sum_i \mu_i$ . Положим  $A$  — матрица, столбцами которой являются вектор  $a_i$ . Получаем условия на  $\text{dom} g$ :

$$\begin{aligned} A\mu &= 0, \\ \sum_i \mu_i &= 1. \end{aligned}$$

Действительно, если хотя бы одно из этих условий не выполняется, можно подобрать последовательность  $x_k, t_k$ , на которой достигается  $\inf = -\infty$ . При этих условиях

$$L(x, t, \mu) = \sum_i \mu_i b_i = \inf_{x, t} L(x, t, \mu) = L(\mu).$$

**Двойственная задача:**

$$\begin{aligned} \max_{\mu} \sum_i \mu_i b_i, \\ \text{s.t.} \\ A\mu &= 0, \\ \sum_i \mu_i &= 1. \end{aligned}$$