Нестеров Борис Аркадьевич

Подсчет расстояния Громова-Хаусдорфа между облаком ограниченных пространств и облаком с действительной прямой

Calculating the Gromov-Hausdorff distance between the cloud of bounded metric spaces and the cloud containing the real line

Механико–Математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии
и приложений
Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Тужилин Алексей Августинович

Москва, 2024

Contents

Введение

Данная работа посвящена исследованию расстояния Громова-Хаусдорфа, определенному для облаков в классе Громова-Хаусдорфа. Расстояние Громова-Хаусдорфа традиционно рассматривается на пространстве компактных метрических пространств с точностью до изометрии. Ограниченное на это пространство, данное расстояние становится метрикой. Для того, чтобы перенести это свойство на все метрические пространства, необходимы две конструкции. Рассматривается собственный класс всех метрических пространств с точностью до нулевого расстояния между пространствами, обозначаемый $\mathcal{GH}_0$. Это позволяет превратить расстояние Громова-Хаусдорфа в псевдометрику. Затем, для того, чтобы избежать бесконечных расстояний, собственный класс $\mathcal{GH}_0$ разбивают на классы эквивалентности, называемые облаками. Отношением эквивалентности между метрическими пространствами в данном случае служит конечность расстояния между ними. Тот факт, что это именно отношение эквивалентности, следует из определения псевдометрики. Итак, внутри каждого облака расстояние Громова-Хаусдорфа становится метрикой.

В работе показано, что облака не являются, при этом, метрическими пространствами, так как являются собственными классами, а не множествами. Несмотря на это, конструкция расстояния Громова-Хаусдорфа переносится на них успешно.

В данной работе были получены некоторые свойства этого расстояния, в частности, основное внимание уделено связи между расстоянием между облаками и их стационарными группами. Особую роль здесь играет облако ограниченных метрических пространств, для которого можно посчитать расстояние до некоторых облаков специального вида. В данной работе представлен подсчет расстояния до облака, содержащего действительную прямую.

1. Основные определения и предварительные результаты

Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда между ними можно задать расстояние, называемое расстоянием Громова–Хаусдорфа. Введем два его эквивалентных ([1]) определения.

Определение 1.1. Пусть X, Y — метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y. *Соответствием* R между этими пространствами называется сюръективное многозначное отображение между ними. Множество всех соответствий между X и Y обозначается $\mathcal{R}(X, Y)$. Также будем отождествлять соответствие и его график.

Определение 1.2. Пусть R — соответствие между X и Y. *Искажением* соответствия R является величина

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y), (x', y') \in R\Big\}.$$

Тогда *расстояние Громова–Хаусдорфа* $d_{GH}(X, Y)$ можно определить следующим образом

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Определение 1.3. *Реализацией* пары метрических пространств (X, Y) назовем тройку метрических пространств (X', Y', Z) таких, что $X' \subset Z$, $Y' \subset Z$, X' изометрично X, Y' изометрично Y. *Расстоянием Громова–Хаусдорфа* $d_{GH}(X, Y)$ между метрическими пространствами X, Y является точная нижняя грань чисел r таких, что существует реализация (X', Y', Z) и $d_H(X', Y') \leqslant r$, где d_H — расстояние Хаусдорфа.

Далее, расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y будет обозначаться $|X, Y|$.

Рассмотрим собственный класс всех метрических пространств и отождествим в нем между собой все метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга. Обозначим получившийся класс $\mathcal{GH}_0$. На нем расстояние Громова – Хаусдорфа будет являться обобщенной метрикой.

Определение 1.4. ([2]) В классе $\mathcal{GH}_0$ рассмотрим следующее отношение: $X \sim Y \Leftrightarrow d_{GH}(X, Y) < \infty$. Нетрудно убедиться, что оно будет отношением эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются *облаками*. Облако, в котором лежит метрическое пространство X будем обозначать $[X]$.

Для любого метрического пространства X определена операция умножения его на положительное вещественное число λ: $X \mapsto \lambda X$, а именно $(X, \rho) \mapsto (X, \lambda\rho)$, расстояние между любыми точками пространства изменяется в λ раз.

Замечание 1.5. Пусть метрические пространства X, Y лежат в одном облаке. Тогда $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y) < \infty$, т.е. пространства λX, λY также будут лежать в одном облаке.

Определение 1.6. Определим операцию умножения облака $[X]$ на положительное вещественное число λ как отображение, переводящее все пространства $Y \in [X]$ в пространства λY. По 1.5 все полученные пространства будут лежать в облаке $[\lambda X]$.

При таком отображении облако может как измениться, так и перейти в себя. Для последнего случая вводится специальное определение.

Определение 1.7. *Стационарной группой* $\mathrm{St}\big([X]\big)$ облака $[X]$ называется подмножество $\mathbb{R}_+$ такое, что для всех $\lambda \in \mathrm{St}\big([X]\big)$, $[X] = [\lambda X]$. Полученное подмножество действительно будет подгруппой в $\mathbb{R}_+$ ([3]). Тривиальной будем называть стационарную группу равную $\{1\}$.

Приведем несколько примеров облаков и их стационарных групп.

- Пусть Δ_1 — одноточечное метрическое пространство. Тогда $\mathrm{St}\big([\Delta_1]\big) = \mathbb{R}_+$.
- $\mathrm{St}\big([\mathbb{R}]\big) = \mathbb{R}_+$.

Лемма 1.8. *[3]В каждом облаке с нетривиальной стационарной группой существует единственное пространство X такое, что для любого λ из стационарной группы выполняется $|X, \lambda X| = 0$.*

Определение 1.9. Пространство из 1.8 будем называть *центром* облака.

Замечание 1.10. В облаке $[\Delta_1]$ для любого пространства X выполняется:

$$|\lambda X, \mu X| = |\lambda - \mu||X, \Delta_1|.$$

Замечание 1.11 (Ультраметрическое неравенство)**.** В облаке $[\Delta_1]$ для всех пространств X_1, X_2 выполняется неравенство:

$$|X_1, X_2| \leqslant \max\{|X_1, \Delta_1|, |X_2, \Delta_1|\}$$

2. Мощность облаков

Метрические пространства по своему определению являются множествами. Соответственно для переноса конструкции расстояния Громова-Хаусдорфа на облака, необходимо либо установить, что они — множества, либо соответствующим образом изменить определение расстояния.

Теорема 2.1. *Все облака представляют собой собственные классы.*

Proof. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в любом облаке лежат пространства сколь угодно большой мощности. Пусть X – метрическое пространство мощности α. Расширим это пространство до пространства большей мощности. Обозначим Δ_β — симплекс мощности β, где $\beta > \alpha$. Обозначим $X_\beta = X \cup \Delta_\beta$. Зафиксируем произвольную точку x пространства X и положим расстояние от нее до любой точки симплекса равным 1. Для точек $x' \in X$, $y \in \Delta_\beta$ определим

$$\rho_{X_\beta}(y, x') = \rho_{X_\beta}(x', y) := \rho_X(x', x) + 1.$$

Расстояния между другими парами точек оставим без изменений. Симметричность и неотрцательность расстояния ρ_{X_β} очевидны. Для того, чтобы полученное расстояние являлось метрикой достаточно проверить выполнение неравенства треугольника $\rho_{X_\beta}(x', z') \leqslant \rho_{X_\beta}(x', y') + \rho_{X_\beta}(y', z')$ только в том случае, если точки x', y', z' не лежат одновременно в Δ_β или в X. Случаи $x', z' \in \Delta_\beta$ и $x', z' \in X$ очевидны. Разберем подробнее случаи, когда $x' \in X, z' \in \Delta_\beta$:

$$y' \in X : \rho_{X_\beta}(x', z') = \rho_X(x, x')+1 \leqslant \rho_X(x, y')+\rho_X(y', x')+1 = \rho_X(x', y')+\rho_X(y', z')$$

$$y' \in \Delta_\beta : \rho_{X_\beta}(x', z') = \rho_X(x, x') + 1 \leqslant \rho_X(x', x) + 2 = \rho_X(x', y') + \rho_X(y', z')$$

Итак, полученное пространство действительно будет метрическим. Осталось заметить, что если вложить X в X_β, то X_β будет лежать в замкнутой окрестности X радиуса 1, что означает конечность расстояния между ними. □

Замечание 2.2. Поскольку все облака являются собственными классами, между любыми двумя облаками существует биекция. Это означает, в частности, что класс соответствий между любыми двумя облаками не пуст.

Определение 2.3. Пусть $\mathcal{R}([X], [Y])$ — класс всех соответствий между облаками $[X]$ и $[Y]$. Определим *искажение* соответствия $\operatorname{dis} R$ аналогично 1.2. *Расстоянием*

Громова–Хаусдорфа между облаками будем называть величину $d_{GH}\big([X],[Y]\big) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}\big([X],[Y]\big)\big\}$.

Теорема 2.4. *Набор всех облаков не является множеством.*

Proof. Пусть $n\Delta_\alpha$ — симплекс мощности α, умноженный на n. Рассмотрим дизъюнктное объединение симплексов $A_\alpha = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} n\Delta_\alpha$. Зададим расстояние между точками A_α следующим образом:

- Если a, b лежат в одном симплексе $k\Delta_\alpha$, то $|ab| = k$.
- Если a_k лежит в симплексе $k\Delta_\alpha$, а a_l — в $l\Delta_\alpha$, то $|a_k a_l| = \max(k, l)$.

Полученное расстояние будет метрикой и A_α — метрическим пространством мощности α. Рассмотрим A_α, A_β, $\beta > \alpha$ и соответствие R между ними. Для любого натурального N мощность $|n\Delta_\beta|$ больше мощности $|A_\alpha|$. Это означает, что найдутся $a, b \in n\Delta_\beta$ и $x \in A_\alpha$такие, что (x, a), (x, b) лежат в соответствии R, и $\big||xx| - |ab|\big| = n$. Следовательно $disR > n$ для всех натуральных n, откуда $d_{GH}(A_\alpha, A_\beta) = \infty$ для любых α, β, не равных друг другу. Это означает, что облака $[A_\alpha]$ и $[A_\alpha]$ различны, следовательно облаков не меньше, чем кардинальных чисел, которые не являются множеством. $\square$

3. Теорема об образе центра

Прежде, чем сформулировать теорему, приведем некоторые полезные утверждения о соответствиях.

Лемма 3.1. *Диаметр образа пространства не превосходит искажение соответств*

Proof. Если пространства Y_1, Y_2 лежат в образе X, то

$$disR \geqslant \Big|\,|Y_1, Y_2| - |X, X|\Big| = |Y_1, Y_2|,$$

откуда $\operatorname{diam} R(X) \leqslant disR$. $\square$

Следствие 3.2. *Если пространства лежат на расстоянии большем, чем искажение соответствия, то они не могут лежать в образе одного пространства.*

Теорема 3.3. *Пусть M – центр облака $[M]$, имеющего нетривиальную стационарную группу. R – соответствие между $[\Delta_1]$ и $[M]$ с конечным искажением ε. Тогда образ пространства Δ_1 лежит от M на расстоянии не большем 2ε.*

Proof. Нетривиальность стационарной группы $[M]$ означает, что найдется число $l > 1$ такое, что $\{l^j | j \in \mathbb{Z}\}$ является подгруппой в $\mathrm{St}\,[M]$.
Зафиксируем Y из образа Δ_1. Предположим, что $|M, Y| = d > \varepsilon$. Обозначим $|Y, kY| = \rho$, $k \geqslant 2$, $k = l^{j_1}$. По неравенству треугольника $\rho + d \geqslant kd$, откуда $\rho \geqslant (k-1)d > (k-1)\varepsilon$. Тогда kY лежит в образе $X \neq \Delta_1$. При этом, $\rho - \varepsilon \leqslant |X, \Delta_1| \leqslant \rho + \varepsilon$.
Возьмем произвольные $\alpha > 0$ и $\beta \in (0, 1)$. Для пространств $(1+\alpha)X$, $(1-\beta)X$ будут выполняться неравенства:

$$|X, (1+\alpha)X| = \alpha|X, \Delta_1| \leqslant \alpha\rho + \alpha\varepsilon,$$

$$|X, (1-\beta)X| = \beta|X, \Delta_1| \leqslant \beta\rho + \beta\varepsilon,$$

$$|(1+\alpha)X, (1-\beta)X| = (\alpha+\beta)|X, \Delta_1| \geqslant (\alpha+\beta)\rho - (\alpha+\beta)\varepsilon.$$

Существуют $Y_\alpha, Y_\beta \in [M]$ такие, что $kY_\alpha \in R\big((1+\alpha)X\big)$, $kY_\beta \in R\big((1-\beta)X\big)$, и для них выполняются следующие неравенства:

$$|kY, kY_\alpha| \leqslant |X, (1+\alpha)X| + \varepsilon \leqslant \alpha\rho + (\alpha+1)\varepsilon,$$

$$|kY, kY_\beta| \leqslant |X, (1-\beta)X| + \varepsilon \leqslant \beta\rho + (\beta+1)\varepsilon,$$

$$|kY_\alpha, kY_\beta| \geqslant |(1+\alpha)X, (1-\beta)X| - \varepsilon \geqslant (\alpha+\beta)\rho - (\alpha+\beta+1)\varepsilon.$$

Поделим эти неравенства на k:

$$|Y, Y_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \frac{\alpha+1}{k}\varepsilon,$$

$$|Y, Y_\beta| \leqslant \frac{\beta}{k}\rho + \frac{\beta+1}{k}\varepsilon,$$

$$|Y_\alpha, Y_\beta| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \frac{\alpha+\beta+1}{k}\varepsilon.$$

и возьмем прообразы пространств Y, Y_α, Y_β:

$$|\Delta_1, X_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \Big(\frac{\alpha+1}{k} + 1\Big)\varepsilon,$$

$$|\Delta, X_\beta| \leqslant \frac{\beta}{k}\rho + \big(\frac{\beta+1}{k} + 1\big)\varepsilon,$$
$$|X_\alpha, X_\beta| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \big(\frac{\alpha+\beta+1}{k} + 1\big)\varepsilon.$$

Считая, что $\alpha > \beta$ получаем неравенство:

$$\frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \big(\frac{\alpha+\beta+1}{k} + 1\big)\varepsilon \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \big(\frac{\alpha+1}{k} + 1\big)\varepsilon,$$
$$\Updownarrow$$
$$\rho \leqslant \frac{k}{\beta}\left(\frac{2\alpha+\beta+2}{k} + 2\right)\varepsilon,$$
$$\Updownarrow$$
$$\rho \leqslant \left(1 + \frac{2\alpha+2}{\beta} + 2\frac{k}{\beta}\right)\varepsilon.$$

Нас интересует оценка сверху для d:

$$d \leqslant \frac{\rho}{k-1} \leqslant \left(\frac{1}{k-1} + \frac{2\alpha+2}{\beta(k-1)} + 2\frac{k}{\beta(k-1)}\right)\varepsilon.$$

Последнее слагаемое в скобках строго больше 2 при любых $k > 2$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1)$, а остальные слагаемые с ростом k стремятся к 0. Так как стационарная группа нетривиальна, в ней есть последовательности чисел стремящихся к 0 и к ∞. Устремив β к 1, а k к бесконечности получаем оценку:

$$|Y, M| \leqslant 2\varepsilon,$$

которая завершает доказательство.

□

4. Невыполнение ультраметрического неравенства

Для облака $[\Delta_1]$, по 1.11 справедливо ультраметрическое неравенство. Следующая лемма показывает, что для облака $[\mathbb{R}]$ это неравенство может не выполняться.

Рассмотрим $\mathbb{R}$ как подмножество $\mathbb{R}^2$ и добавим к нему точку $(0, 1)$, расстояние до которой будет соответствовать метрике L_1 в $\mathbb{R}^2$. Обозначим это пространство $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Теорема 4.1. *Для пространств $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ выполняются следующие утверждения:*

1) *Пространства $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ находятся от $\mathbb{R}$ на расстоянии не большем $\frac{1}{2}$.*

2) *Расстояние между $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ строго больше $\frac{1}{2}$.*

Proof. Вложением целых чисел в вещественную прямую получается реализация $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ с расстоянием Хаусдорфа равным $\frac{1}{2}$. Если вложить $\widetilde{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{R}^2$ естественным образом, а $\mathbb{R}$ вложить как подмножество равное $\{(x, \frac{1}{2})|x \in \mathbb{R}\}$, расстояние Хаусдорфа между ними также будет равно $\frac{1}{2}$. Таким образом, доказано 1.

Пусть R — соответствие между $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$, с искажением, равным $1 + \varepsilon$ и в образе точки i из $\mathbb{Z}$ лежит $(0, 1)$. По 3.1 диаметр образа точки не может быть больше искажения соответствия, следователь образ i лежит в $(-\varepsilon, \varepsilon) \cup \big\{(0, 1)\big\}$. Это означает, что для x не лежащих в $(-\varepsilon, \varepsilon)$, пара (i, x) не лежит в R. Обозначим за $\mathcal{N}$ множество всех целых чисел таких, что их образ лежит в $(-\varepsilon, \varepsilon) \cup \big\{(0, 1)\big\}$. $\mathcal{N}$ не пусто и не равно $\mathbb{Z}$, следовательно, по лемме 3.1, расстояние от $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}$ до $\mathbb{R}$ будет не меньше 1. Из соответствия R уберем пару $\big(i, (0, 1)\big)$, а также все пары (k, x) такие, что $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Получившееся множество обозначим R'. Так как все точки из $\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ лежат в R только в паре с точками из $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}$ и наоборот, множество R' будет соответствием между $\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}$. Искажение подмножества сответствия по определению не больше искажения самого соответствия. Получаем цепочку неравенств:

$$1 + \varepsilon = \operatorname{dis} R \geqslant \operatorname{dis} R' \geqslant 2d_{GH}\big(\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}\big).$$

По неравенству треугольника

$$2d_{GH}\big(\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}\big) \geqslant 2\Big|d_{GH}\big(\mathbb{R}, \mathbb{Z} \setminus \mathcal{N}\big) - d_{GH}\big(\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}\big)\Big| \geqslant 2 - 2\varepsilon.$$

Получили неравество : $1 + \varepsilon \geqslant 2 - 2\varepsilon$. Из него получаем нижнюю оценку на ε:

$$\varepsilon \geqslant \frac{1}{3},$$

откуда $\operatorname{dis} R \geqslant \frac{4}{3}$ и $d_{GH}\left(\widetilde{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}\right) \geqslant \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, что доказывает 2. □

5. Подсчет расстояния между облаками $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$

Приведем лемму о расстоянии между облаками с пересекающимися стационарными группами.

Лемма 5.1. *Если два облака имеют нетривиальное пересечение стационарных групп, то расстояние между ними может быть равно* 0 *или* ∞.

Proof. Для любых облаков $[X]$, $[Y]$ и любого из $\mathbb{R}^+$ верно

$$\big|\lambda[X], \lambda[Y]\big| = \lambda\big|[X], [Y]\big|.$$

Отсюда, если $\lambda \neq 1$ лежит в стационарных группах обоих облаков, то

$$\big|[X], [Y]\big| = \big|\lambda[X], \lambda[Y]\big| = \lambda\big|[X], [Y]\big|.$$

Так как $\lambda \neq 1$, величина $\big|[X], [Y]\big|$ может быть равна только 0 или бесконечности. $\square$

Теорема 5.2. *Пусть у облака* $[Z]$ *нетривиальная стационарная группа, и* Z *является его центром. Также, пусть в этом облаке есть пространства* Y_1, Y_2 *такие, что* $\max\big\{|Y_1, Z|, |Y_2, Z|\big\} = r > 0$, *а* $|Y_1, Y_2| > r$. *Тогда, расстояние между облаками* $[\Delta_1]$ *и* $[Z]$ *равно бесконечности.*

Proof. У облаков $[\Delta_1]$ и $[Z]$ стационарные группы имеют нетривиальное пересечение, и, по лемме 5.1, расстояние между ними может быть равно либо 0, либо ∞.

Для доказательства утверждения теоремы достаточно будет показать, что расстояние между ними не равно 0. Для этого необходимо установить, что между ними не может существовать соответствия со сколь угодно малым искажением. Итак, пусть R — соответствие между $[\Delta_1]$ и $[Z]$, $\operatorname{dis} R = \varepsilon < \infty$. Зафиксируем Y из $R(\Delta_1)$. По теореме 3.3 расстояние между Y и Z не больше 2ε.

По условию теоремы выполнено неравенство:

$$\max\big\{|Y_1, Z|, |Y_2, Z|\big\} = r < |Y_1, Y_2|$$

Неравенство означает, что существует $c > 0$ такое, что $|Y_1, Y_2| = (1 + c)r$. Вместе с Y_1 и Y_2 рассмотрим их прообразы $X_1 \in R^{-1}(Y_1)$, $X_2 \in R^{-1}(Y_2)$. Получаем следующую цепочку неравенств:

$$|X_1, \Delta_1| \leqslant |Y_1, Y| + \varepsilon \leqslant |Y_1, \mathbb{R}| + |\mathbb{R}, Y| + \varepsilon \leqslant r + 2\varepsilon + \varepsilon = r + 3\varepsilon.$$

Аналогичное неравенство имеет место для X_2, при этом

$$|X_1, X_2| \geqslant |Y_1, Y_2| - \varepsilon = (1 + c)r - \varepsilon.$$

По замечанию 1.11:

$$|X_1, X_2| \leqslant \max\left\{|X_1, \Delta_1|, |X_2, \Delta_1|\right\},$$

$$\Updownarrow$$

$$(1 + c)r - \varepsilon \leqslant r + 3\varepsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\varepsilon \geqslant \frac{cr}{4}.$$

Мы получаем оценку снизу для $\varepsilon = \operatorname{dis} R$. Это означает, что искажение не может быть произвольно малым, и следовательно расстояние между пространствами не может быть равно 0. Значит, оно равно бесконечности.

□

Тем самым получаем следующее: любое облако с нетривиальной стационарной подгруппой и не выполняющимся ультраметрическим неравенством для центра лежит на бесконечном расстоянии от $[\Delta_1]$. В частности это верно для облака $[\mathbb{R}]$.

Следствие 5.3. *В облаке $[\mathbb{R}]$ в качестве пространств Y_1, Y_2 можно взять $\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbb{R}}$. Для них, по теореме 4.1 будет выполнено неравенство из условия теоремы 5.2 с $r = \frac{1}{2}$. Стационарная группа облака $[\mathbb{R}]$ равна $\mathbb{R}^+$, то есть нетривиальна. Получаем, что расстояние между облаками $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$ равно бесконечности.*

1. *Иванов А. О.*, *Тужилин А. А.* Лекции по геометрии расстояния Громова–Хаусдорфа. — 2021.
2. *Bogaty S. A.*, *Tuzhilin A. A.* Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry. — 2021.
3. *Bogataya S. I.*, *Bogatyy S. A.*, *Redkozubov V. V. Tuzhilin A. A.* Clouds in Gromov–Hausdorff Class: their completeness and centers. — 2022.