Нестеров Борис Аркадьевич

Подсчет расстояния Громова-Хаусдорфа между облаком ограниченных пространств и облаком с действительной прямой

Calculating the Gromov-Hausdorff distance between the cloud of bounded metric spaces and the cloud containing the real line

Механико–Математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии
и приложений
Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Тужилин Алексей Августинович

Москва, 2024

Оглавление

Введение

Данная работа посвящена исследованию расстояния Громова-Хаусдорфа, определенному для облаков в классе Громова-Хаусдорфа. Расстояние Громова-Хаусдорфа традиционно рассматривается на пространстве компактных метрических пространств с точностью до изометрии. Ограниченное на это пространство, данное расстояние становится метрикой. Для того, чтобы перенести это свойство на все метрические пространства, необходимы две конструкции. Рассматривается собственный класс всех метрических пространств с точностью до нулевого расстояния между пространствами, обозначаемый $\mathcal{GH}_0$. Это позволяет превратить расстояние Громова-Хаусдорфа в псевдометрику. Затем, для того, чтобы избежать бесконечных расстояний, собственный класс $\mathcal{GH}_0$ разбивают на классы эквивалентности, называемые облаками. Отношением эквивалентности между метрическими пространствами в данном случае служит конечность расстояния между ними. Тот факт, что это именно отношение эквивалентности, следует из определения псевдометрики. Итак, внутри каждого облака расстояние Громова-Хаусдорфа становится метрикой.

В работе показано, что облака не является, при этом, метрическими пространствами, так как являются собственными классами, а не множествами. Несмотря на это, конструкция расстояния Громова-Хаусдорфа переносится на них успешно.

В данной работе были получены некоторые свойства этого расстояния, в частности, основное внимание уделено связи между расстоянием между облаками и их стационарными группами. Особую роль здесь играет облако ограниченных метрических пространств, для которого можно посчитать расстояние до некоторых облаков специального вида. В данной работе представлен подсчет расстояния до облака, содержащего действительную прямую.

1. Основные определения и предварительные результаты

Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда между ними можно задать расстояние, называемое расстоянием Громова–Хаусдорфа. Введем два его эквивалентных ([1]) определения.

Определение 1.1. Пусть X, Y — метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y. *Соответствием* R между этими пространствами называется подмножество декартового произведения $X \times Y$ такое, что проекторы $\pi_X : (x, y) \mapsto x$, $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$ являются сюрьективными. Множество всех соответствий между X и Y обозначается $\mathcal{R}(X, Y)$.

Определение 1.2. Пусть R — соответствие между X и Y. *Искажением* соответствия R, $\operatorname{dis} R$ является величина

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y), (x', y') \in R\Big\}.$$

Тогда *расстояние Громова–Хаусдорфа* $d_{GH}(X, Y)$ можно определить следующим образом

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Определение 1.3. *Реализацией* пары метрических пространств (X, Y) назовем тройку метрических пространств (X', Y', Z) таких, что $X' \subset Z$, $Y' \subset Z$, X' изометрично X, Y' изометрично Y. *Расстоянием Громова-Хаусдорфа* $d_{GH}(X, Y)$ между метрическими пространствами X, Y является точная нижняя грань чисел r таких, что существует реализация (X', Y', Z) и $d_H(X', Y') \leqslant r$, где d_H — расстояние Хаусдорфа.

Рассмотрим собственный класс всех метрических пространств и отождествим в нем между собой все метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга. Обозначим получившийся класс $\mathcal{GH}_0$. На нем расстояние Громова – Хаусдорфа будет являться обобщенной метрикой.

Определение 1.4. ([2]) В классе GH рассмотрим следующее отношение: $X \sim Y \Leftrightarrow d_{GH}(X, Y) < \infty$. Нетрудно убедиться, что оно будет отношением эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются *облаками*. Облако, в котором лежит метрическое пространство X будем обозначать $[X]$.

Теорема 1.1. *Все облака представляют собой собственные классы.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в любом облаке лежат пространства сколь угодно большой мощности. Пусть

X – метрическое пространство мощности α. Расширим это пространство до пространства большей мощности. Обозначим Δ_1^β — симплекс мощности β, где $\beta > \alpha$. Обозначим $X^\beta = X \cup \Delta_1^\beta$. Зафиксируем произвольную точку x пространства X и положим расстояние от нее до любой точки симплекса равным 1. Для точек $x' \in X$, $y \in \Delta_1^\beta$ определим $\rho_{X_\beta}(x', y) := \rho_X(x', x) + 1$. Расстояния между другими парами точек оставим без изменений. Для того, чтобы полученное расстояние являлось метрикой достаточно проверить выполнение неравенства треугольника $\rho_{X_\beta}(x', z') \leqslant \rho_{X_\beta}(x', y') + \rho_{X_\beta}(y', z')$ только в том случае, если точки x', y', z' не лежат одновременно в Δ_1^β или в X. Случаи $x', z' \in \Delta_1^\beta$ и $x', z' \in X$ очевидны. Разберем подробнее случаи, когда $x' \in X, z' \in \Delta_1^\beta$:

$$y' \in X : \rho_{X_\beta}(x', z') = \rho_X(x, x') + 1 \leqslant \rho_X(x, y') + \rho_X(y', x') + 1 = \rho_X(x', y') + \rho_X(y', z')$$

$$y' \in \Delta_1^\beta : \rho_{X_\beta}(x', z') = \rho_X(x, x') + 1 \leqslant \rho_X(x', x) + 2 = \rho_X(x', y') + \rho_X(y', z')$$

Итак, полученное пространство действительно будет метрическим. Осталось заметить, что если вложить X в X^β, то X^β будет лежать в замкнутой окрестности X радиуса 1, что означает конечность расстояния между ними. $\square$

Замечание 1.1. Поскольку все облака являются собственными классами, между любыми двумя облаками существует биекция. Это означает, в частности, что класс соответствий между любыми двумя облаками не пуст.

Определение 1.5. Пусть $\mathcal{R}\big([X], [Y]\big)$ — класс всех соответствий между облаками $[X]$ и $[Y]$. Определим *искажение* соответствия $\operatorname{dis} R$ аналогично определению 1.2. *Расстоянием Громова–Хаусдорфа* между облаками будем называть величину $d_{GH}\big([X], [Y]\big) = \frac{1}{2} \inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}\big([X], [Y]\big)\big\}$.

Для любого метрического пространства X определена операция умножения его на положительное вещественное число λ: $X \mapsto \lambda X$, а именно $(X, \rho) \mapsto (X, \lambda\rho)$, расстояние между любыми точками пространства изменяется в λ раз.

Замечание 1.2. Пусть метрические пространства X, Y лежат в одном облаке. Тогда $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y) < \infty$, т.е. пространства λX, λY также будут лежать в одном облаке.

Определение 1.6. Определим операцию умножения облака $[X]$ на положительное вещественное число λ как отображение, переводящее все пространства $Y \in [X]$ в пространства λY. По замечанию 1.2 все полученные пространства будут лежать в облаке $[\lambda X]$.

При таком отображении облако может как измениться, так и перейти в себя. Для последнего случая вводится специальное определение.

Определение 1.7. *Стационарной группой* $\mathrm{St}\big([X]\big)$ облака $[X]$ называется подмножество $\mathbb{R}_+$ такое, что для всех $\lambda \in \mathrm{St}\big([X]\big)$, $[X] = [\lambda X]$. Полученное подмножество действительно будет подгруппой в $\mathbb{R}_+$ ([3]).

Приведем несколько примеров облаков и их стационарных групп.

- Пусть Δ_1 — одноточечное метрическое пространство. Тогда $\mathrm{St}\big([\Delta_1]\big) = \mathbb{R}_+$.
- $\mathrm{St}\big([\mathbb{R}]\big) = \mathbb{R}_+$.

Определение 1.8. ([3]) Если стационарная группа некоторого облака $[X]$ нетривиальна, то у него существует единственный *центр* $Z\big([X]\big)$ – это такое метрическое пространство $Y \in [X]$, что $d_{GH}(Y, \lambda Y) = 0$ для любых $\lambda \in \mathrm{St}\big([X]\big)$.

Далее за $R(X)$ будем обозначать образ пространства X при соответствии R, то есть $R(X) = \{Y \in [\mathbb{R}] | (X, Y) \in R\}$. Под образом пространства будет иметься ввиду именно образ при соответствии. Аналогично определим $R^{-1}(Y)$.
Для любых пространств $Y_1, Y_2 \in R(X)$ выполнено неравенство $|Y_1, Y_2| = \big||Y_1, Y_2| - |X, X|\big| \leqslant \operatorname{dis} R$, откуда следует, что диаметр $R(X)$ не превосходит $\operatorname{dis} R$. Из этого, в частности, следует, что пространства, лежащие на расстоянии большем, чем искажение соответствия, не могут принадлежать образу или прообразу одного пространства.
По определению искажения, если расстояние между пространствами X_1, X_2 равно ρ, то расстояние между пространствами в их образах будет отличаться от ρ не более чем на $\operatorname{dis} R$. Это же верно и для пространств в прообразах.

Замечание 1.3. В облаке $[\Delta_1]$ для любого пространства X выполняется:

$$|\lambda X, \mu X| = |\lambda - \mu||X, \Delta_1|.$$

Замечание 1.4 (Ультраметрическое неравенство)**.** В облаке $[\Delta_1]$ для всех пространств X_1, X_2 выполняется неравенство:

$$|X_1, X_2| \leqslant \max\{|X_1, \Delta_1|, |X_2, \Delta_1|\}$$

2. Теорема об образе центра

Теорема 2.1. *Пусть M – центр облака $[M]$, имеющего нетривиальную стационарную группу. R – соответствие между $[\Delta_1]$ и $[M]$ с конечным искажением ε. Тогда образ пространства Δ_1 лежит от M на расстоянии не большем 2ε.*

Доказательство. Нетривиальность стационарной группы $[M]$ означает, что найдется число $l > 1$ такое, что $\{l^j | j \in \mathbb{Z}\}$ является подгруппой в $\mathrm{St}\,[M]$.
Зафиксируем Y из образа Δ_1. Предположим, что $|M, Y| = d > \varepsilon$. Обозначим $|Y, kY| = \rho$, $k \geqslant 2$, $k = l^{j_1}$. По неравенству треугольника $\rho + d \geqslant kd$, откуда $\rho \geqslant (k-1)d > (k-1)\varepsilon$. Тогда kY лежит в образе $X \neq \Delta_1$. При этом, $\rho - \varepsilon \leqslant |X, \Delta_1| \leqslant \rho + \varepsilon$.
Возьмем произвольные $\alpha > 0$ и $\beta \in (0,1)$. Для пространств $(1+\alpha)X$, $(1-\beta)X$ будут выполняться неравенства:

$$|X, (1+\alpha)X| = \alpha|X, \Delta_1| \leqslant \alpha\rho + \alpha\varepsilon,$$

$$|X, (1-\beta)X| = \beta|X, \Delta_1| \leqslant \beta\rho + \beta\varepsilon,$$

$$|(1+\alpha)X, (1-\beta)X| = (\alpha+\beta)|X, \Delta_1| \geqslant (\alpha+\beta)\rho - (\alpha+\beta)\varepsilon.$$

Существуют $Y_\alpha, Y_\beta \in [M]$ такие, что $kY_\alpha \in R\big((1+\alpha)X\big)$, $kY_\beta \in R\big((1-\beta)X\big)$, и для них выполняются следующие неравенства:

$$|kY, kY_\alpha| \leqslant |X, (1+\alpha)X| + \varepsilon \leqslant \alpha\rho + (\alpha+1)\varepsilon,$$

$$|kY, kY_\beta| \leqslant |X, (1-\beta)X| + \varepsilon \leqslant \beta\rho + (\beta+1)\varepsilon,$$

$$|kY_\alpha, kY_\beta| \geqslant |(1+\alpha)X, (1-\beta)X| - \varepsilon \geqslant (\alpha+\beta)\rho - (\alpha+\beta+1)\varepsilon.$$

Поделим эти неравенства на k:

$$|Y, Y_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \frac{\alpha+1}{k}\varepsilon,$$

$$|Y, Y_\beta| \leqslant \frac{\beta}{k}\rho + \frac{\beta+1}{k}\varepsilon,$$

$$|Y_\alpha, Y_\beta| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \frac{\alpha+\beta+1}{k}\varepsilon.$$

и возьмем прообразы пространств Y, Y_α, Y_β:

$$|\Delta_1, X_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \big(\frac{\alpha+1}{k} + 1\big)\varepsilon,$$

$$|\Delta, X_\beta| \leqslant \frac{\beta}{k}\rho + \big(\frac{\beta+1}{k} + 1\big)\varepsilon,$$

$$|X_\alpha, X_\beta| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \big(\frac{\alpha+\beta+1}{k} + 1\big)\varepsilon.$$

Считая, что $\alpha > \beta$ получаем неравенство:

$$\frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \big(\frac{\alpha+\beta+1}{k} + 1\big)\varepsilon \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \big(\frac{\alpha+1}{k} + 1\big)\varepsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho \leqslant \frac{k}{\beta}\left(\frac{2\alpha+\beta+2}{k} + 2\right)\varepsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho \leqslant \left(1 + \frac{2\alpha+2}{\beta} + 2\frac{k}{\beta}\right)\varepsilon.$$

Нас интересует оценка сверху для d:

$$d \leqslant \frac{\rho}{k-1} \leqslant \left(\frac{1}{k-1} + \frac{2\alpha+2}{\beta(k-1)} + 2\frac{k}{\beta(k-1)}\right)\varepsilon$$

Последнее слагаемое в скобках строго больше 2 при любых $k > 2$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0,1)$, а остальные слагаемые с ростом k стремятся к 0. Так как стационарная группа нетривиальна, в ней есть последовательности чисел стремящихся к 0 и к ∞. Устремив β к 1, а k к бесконечности получаем оценку:

$$|Y, M| \leqslant 2\varepsilon.$$

$\square$

3. Невыполнение ультраметрического неравенства

Для облака $[\Delta_1]$ справедливо ультраметрическое неравенство(Замечание 1.4). Следующая лемма показывает, что для облака $[R]]$ это неравенство может не выполняться.
Рассмотрим $\mathbb{R}$ как подмножество $\mathbb{R}^2$ и добавим к нему точку $(0,1)$, расстояние до которой будет соответствовать манхэттенской метрике в $\mathbb{R}^2$. Обозначим это пространство $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Теорема 3.1. *1) Пространства $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ находятся от $\mathbb{R}$ на расстоянии не большем $\frac{1}{2}$.*

2) Расстояние между $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ строго больше $\frac{1}{2}$.

Доказательство. Вложением целых чисел в вещественную прямую получается реализация $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ с расстоянием Хаусдорфа равным $\frac{1}{2}$. Если вложить $\widetilde{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{R}^2$ естественным образом, а $\mathbb{R}$ вложить как подмножество равное $\{(x, \frac{1}{2}) | x \in \mathbb{R}\}$, расстояние Хаусдорфа между ними также будет равно $\frac{1}{2}$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.
Пусть R — соответствие между $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\operatorname{dis} R < 1+\varepsilon$ и $\big(i,(0,1)\big) \in R$. Тогда, если $x \in \mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)$, то $(i,x) \notin R$. Обозначим за $\mathcal{N}$ множество всех $k \in \mathbb{Z}$ таких, что для всех $x \in \mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)$, $(k,x) \notin R$. $\mathcal{N}$ не пусто и не равно $\mathbb{Z}$, следовательно, по лемме 3.1, расстояние от $\mathbb{Z}\backslash\mathcal{N}$ до $\mathbb{R}$ будет не меньше 1. Рассмотрим подмножество соответствия R, $R' := R\backslash\{(k,x) : x \in (-\varepsilon,\varepsilon), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\big(i,(0,1)\big)\}$. Так как все точки из $\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)$ лежат в R только в паре с точками из $\mathbb{Z}\backslash\mathcal{N}$ и наоборот, множество R' будет соответствием между $\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)$ и $\mathbb{Z}\backslash\mathcal{N}$ Тогда, $\operatorname{dis} R \geqslant \operatorname{dis} R' \geqslant 2d_{GH}(\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon), \mathbb{Z}\backslash\mathcal{N})$ По неравенству треугольника $2d_{GH}(\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon), \mathbb{Z}\backslash\mathcal{N}) \geqslant 2|d_{GH}(\mathbb{R}, \mathbb{Z}\backslash\mathcal{N}) - d_{GH}(\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon), \mathbb{R})| \geqslant 2-2\varepsilon$, что при малых ε больше, чем $1+\varepsilon$. Получаем, что $d_{GH}(\widetilde{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}) > \frac{1}{2}$. □

4. Подсчет расстояния между облаками $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$

Теорема 4.1. *Расстояние между облаками $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$ равно бесконечности.*

Доказательство. У облаков $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$ стационарные группы имеют нетривиальное пересечение, и, по следствию 1, расстояние между ними может быть равно либо 0, либо ∞.

Для доказательства утверждения теоремы достаточно будет показать, что расстояние между ними не равно 0. Для этого необходимо установить, что между ними не может существовать соответствия со сколь угодно малым искажением. Итак, пусть R — соответствие между $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$, $\operatorname{dis} R = \varepsilon < \infty$. Зафиксируем Y из $R(\Delta_1)$. По теореме 2.1 расстояние между Y и $\mathbb{R}$ не больше 2ε.

По теореме 3.1 пространства $\mathbb{Z}$, $\widetilde{\mathbb{R}}$ лежат от $\mathbb{R}$ на расстоянии не большем, чем $\frac{1}{2}$. При этом, расстояние между этими пространствами строго больше $\frac{1}{2}$. Обозначим за r максимум из расстояний от этих пространств до $\mathbb{R}$:

$$r = \max\left\{|\mathbb{Z},\mathbb{R}|, |\widetilde{\mathbb{R}},\mathbb{R}|\right\} \leqslant \frac{1}{2} < |\mathbb{Z},\widetilde{\mathbb{R}}|.$$

Неравенство означает, что существует $c > 0$ такое, что $|\mathbb{Z},\widetilde{\mathbb{R}}| = (1+c)r$.

Вместе с $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ рассмотрим их прообразы $X_1 \in R^{-1}(\mathbb{Z})$, $X_2 \in R^{-1}(\widetilde{\mathbb{R}})$.

Получаем следующую цепочку неравенств:

$$|X_1,\Delta_1| \leqslant |\mathbb{Z},Y| + \varepsilon \leqslant |\mathbb{Z},\mathbb{R}| + |\mathbb{R},Y| + \varepsilon \leqslant r + 2\varepsilon + \varepsilon = r + 3\varepsilon.$$

Аналогичное неравенство имеет место для X_2, при этом

$$|X_1,X_2| \geqslant |\mathbb{Z},\widetilde{\mathbb{R}}| - \varepsilon = (1+c)r - \varepsilon.$$

По замечанию 1.4:

$$|X_1,X_2| \leqslant \max\left\{|X_1,\Delta_1|, |X_2,\Delta_1|\right\},$$

$$\Updownarrow$$

$$(1+c)r - \varepsilon \leqslant r + 3\varepsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\varepsilon \geqslant \frac{cr}{4}.$$

Мы получаем оценку снизу для $\varepsilon = \operatorname{dis} R$. Это означает, что искажение не может быть произвольно малым, и следовательно расстояние между пространствами не может быть равно 0. Значит, оно равно бесконечности.

$\square$

Список литературы

1. *Иванов А. О.*, *Тужилин А. А.* Лекции по геометрии расстояния Громова–Хаусдорфа. — 2021.
2. *Bogaty S. A.*, *Tuzhilin A. A.* Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry. — 2021.
3. *Bogataya S. I.*, *Bogatyy S. A.*, *Redkozubov V. V. Tuzhilin A. A.* Clouds in Gromov–Hausdorff Class: their completeness and centers. — 2022.