Нестеров Борис Аркадьевич

Исследование расстояния Громова-Хаусдорфа между облаками

Механико–Математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии
и приложений
Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Тужилин Алексей Августинович

Москва, 2024

Оглавление

Введение

Понятие облаков метрических пространств является частью теории расстояния Громова–Хаусдорфа. Так как облака сами по себе являются метрическими классами, естественно ввести на собственном классе облаков обобщенную псевдометрику, являющуюся аналогом расстояния Громова-Хаусдорфа. В данной работе приведены некоторые результаты изучения ее свойств, а также поднимается вопрос об изометрическом изоморфизме различных облаков, тесно связанный с вопросом расстояния между ними.

1. Основные определения и предварительные результаты

Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда между ними можно задать расстояние, называемое расстоянием Громова–Хаусдорфа. Введем два? его эквивалентных ([1]) определения.

Определение 1.1. Пусть X, Y — метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y . *Соответствием* R между этими пространствами называется подмножество декартового произведения $X \times Y$ такое, что проекторы $\pi_X\colon (x, y) \mapsto x$, $\pi_Y\colon (x, y) \mapsto y$ являются сюрьективными. Множество всех соответствий между X и Y обозначается $\mathcal{R}(X, Y)$.

Определение 1.2. Пусть R — соответствие между X и Y. *Искажением* соответствия R, $\operatorname{dis} R$ является величина

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y), (x', y') \in R\Big\}.$$

Тогда *расстояние Громова–Хаусдорфа* $d_{GH}(X, Y)$ можно определить следующим образом

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Определение 1.3. *Реализацией* пары метрических пространств (X, Y) назовем тройку метрических пространств (X', Y', Z) таких, что $X' \subset Z$, $Y' \subset Z$, X' изометрично X, Y' изометрично Y. *Расстоянием Громова-Хаусдорфа*

$d_{GH}(X,Y)$ между метрическими пространствами X,Y является точная нижняя грань чисел r таких, что существует реализация (X',Y',Z) и $d_H(X',Y') \leqslant r$, где d_H — расстояние Хаусдорфа.

Рассмотрим собственный класс всех метрических пространств и отождествим в нем между собой все метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга. Обозначим получившийся класс $\mathcal{GH}_0$. На нем расстояние Громова – Хаусдорфа будет являться обобщенной метрикой.

Определение 1.4. ([2]) В классе GH рассмотрим следующее отношение: $X \sim Y \Leftrightarrow d_{GH}(X,Y) < \infty$. Нетрудно убедиться, что оно будет отношением эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются *облаками*. Облако, в котором лежит метрическое пространство X будем обозначать $[X]$.

Теорема 1.1. *Все облака представляют собой собственные классы.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в любом облаке лежат пространства сколь угодно большой мощности. Пусть X – метрическое пространство мощности α. Расширим это пространство до пространства большей мощности. Обозначим Δ_1^β — симплекс мощности β, где $\beta > \alpha$. Обозначим $X^\beta = X \cup \Delta_1^\beta$. Зафиксируем произвольную точку x пространства X и положим расстояние от нее до любой точки симплекса равным 1. Для точек $x' \in X$, $y \in \Delta_1^\beta$ определим $\rho_{X_\beta}(x',y) := \rho_X(x',x) + 1$. Расстояния между другими парами точек оставим без изменений. Для того, чтобы полученное расстояние являлось метрикой достаточно проверить выполнение неравенства треугольника $\rho_{X_\beta}(x',z') \leqslant \rho_{X_\beta}(x',y') + \rho_{X_\beta}(y',z')$ только в том случае, если точки x', y', z' не лежат одновременно в Δ_1^β или в X. Случаи $x',z' \in \Delta_1^\beta$ и $x',z' \in X$ очевидны. Разберем подробнее случаи, когда $x' \in X, z' \in \Delta_1^\beta$:

$$y' \in X : \rho_{X_\beta}(x',z') = \rho_X(x,x')+1 \leqslant \rho_X(x,y')+\rho_X(y',x')+1 = \rho_X(x',y')+\rho_X(y',z')$$

$$y' \in \Delta_1^\beta : \rho_{X_\beta}(x',z') = \rho_X(x,x') + 1 \leqslant \rho_X(x',x) + 2 = \rho_X(x',y') + \rho_X(y',z')$$

Итак, полученное пространство действительно будет метрическим. Осталось заметить, что если вложить X в X^β, то X^β будет лежать в замкнутой окрестности X радиуса 1, что означает конечность расстояния между ними. □

Замечание 1.1. Поскольку все облака являются собственными классами, между любыми двумя облаками существует биекция.

Определение 1.5. Пусть $\mathcal{R}\big([X],[Y]\big)$ — класс всех биекций между облаками $[X]$ и $[Y]$. Определим *искажение* соответствия $\operatorname{dis} R$ аналогично определению 1.2. *Расстоянием Громова–Хаусдорфа* между облаками будем называть величину $d_{GH}\big([X],[Y]\big) = \frac{1}{2}\inf\Big(\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}\big([X],[Y]\big)\Big)$.

Для любого метрического пространства X определена операция умножения его на положительное вещественное число λ: $X \mapsto \lambda X$, а именно $(X,\rho) \mapsto (X,\lambda\rho)$, расстояние между любыми точками пространства изменяется в λ раз.

Замечание 1.2. Пусть метрические пространства X, Y лежат в одном облаке. Тогда $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X,Y) < \infty$, т.е. пространства λX, λY также будут лежать в одном облаке.

Определение 1.6. Определим операцию умножения облака $[X]$ на положительное вещественное число λ как отображение, переводящее все пространства $Y \in [X]$ в пространства λY. По замечанию 2.1 все полученные пространства будут лежать в облаке $[\lambda X]$.

Особый интерес представляет случай, когда такое отображение оказывается тождественным, в связи с чем вводится следующее определение.

Определение 1.7. *Стационарной группой* $\operatorname{St}\big([X]\big)$ облака $[X]$ называется подмножество $\mathbb{R}_+$ такое, что для всех $\lambda \in \operatorname{St}\big([X]\big)$, $[X] = [\lambda X]$. Полученное подмножество действительно будет подгруппой в $\mathbb{R}_+$ ([3]).

Приведем несколько примеров облаков и их стационарных групп.

- Пусть Δ_1 — одноточечное метрическое пространство. Тогда $\operatorname{St}\big([\Delta_1]\big) = \mathbb{R}_+$.
- $\operatorname{St}\big([\mathbb{R}]\big) = \mathbb{R}_+$.

Определение 1.8. ([3]) Если стационарная группа некоторого облака $[X]$ нетривиальна, то у него существует единственный *центр* $Z\big([X]\big)$ – это такое метрическое пространство $Y \in [X]$, что $d_{GH}(Y, \lambda Y) = 0$ для любых $\lambda \in \operatorname{St}\big([X]\big)$.

2. Теорема о пересекающихся стационарах.

Следующие теоремы значительно упрощают задачу по поиску расстояний между конкретными облаками.

Теорема 2.1. *Для любых облаков* $[X], [Y]$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$d_{GH}([\lambda X], [\lambda Y]) = \lambda d_{GH}([X], [Y]).$$

Доказательство. Пусть R — соответствие между $[X]$ и $[Y]$, а R_λ – соответствие между $[\lambda X]$ и $[\lambda Y]$ такие, что $(X, Y) \in R \Leftrightarrow (\lambda X, \lambda Y) \in R_\lambda$. Тогда

$$\operatorname{dis} R_\lambda = \sup\Big(\big||\lambda X_1 \lambda X_2| - |\lambda Y_1 \lambda Y_2|\big| : (\lambda X_1, \lambda Y_1), (\lambda X_2, \lambda Y_2) \in R_\lambda\Big) =$$
$$= \lambda \sup\Big(\big||X_1 X_2| - |Y_1 Y_2|\big| : (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in R\Big) = \lambda \operatorname{dis} R.$$

□

Следствие 1. *Если* $\mathrm{St}([X]), \mathrm{St}([Y])$ *имеют нетривиальное пересечение, т.е.* $\mathrm{St}([X]) \cap \mathrm{St}([Y]) \neq \{1\}$*, то* $d_{GH}([X], [Y]) = 0$ *или* ∞.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathrm{St}([X]) \cap \mathrm{St}([Y]), \lambda \neq 1$. Тогда $[\lambda X] = [X]$, $[\lambda Y] = [Y]$ и $d_{GH}([X], [Y]) = d_{GH}([\lambda X], [\lambda Y]) = \lambda d_{GH}([X], [Y])$. Следовательно, $d_{GH}([X], [Y])$ может быть равно либо 0, либо ∞. □

3. Случай $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$

Вопрос об установлении точного расстояния Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами часто сопровождается вопросом об изометрии между этими пространствами. Известно, что изометричные пространства лежат на нулевом расстоянии друг от друга. Обратное вообще говоря не верно.

Мы рассмотрим вопрос изометрии конкретных облаков, а именно $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$, так как эти пространства обладают рядом свойств, позволяющих значительно упростить задачу по поиску изометрии между ними.

Замечание 3.1. Центром облака $[\Delta_1]$ является одноточечный симплекс Δ_1. Пусть $d_{GH}(\Delta_1, X) < l$, $d_{GH}(\Delta_1, Y) < l$, равносильно $\operatorname{diam} X < 2l$, $\operatorname{diam} Y < 2l$. Тогда $d_{GH}(X, Y) < l$ ([1]). Это означает, что шар радиуса l с центром в Δ_1 имеет диаметр l.

Открытый шар с центром в x радиуса d будем обозначать $B(x, d)$.

Лемма 3.1. *Пусть X — подмножество $\mathbb{R}$ такое, что в $\mathbb{R}\backslash X$ лежит интервал длиной $2d$. Тогда пространство X лежит от $\mathbb{R}$ на расстоянии не меньшем, чем d.*

Доказательство. В $\mathbb{R}\backslash X$ лежит интервал $(a-d, a+d)$. Предположим, что $d_{GH}(\mathbb{R}, X) < d$. Пусть $(\mathbb{R}', X', Y)$ — реализация $(\mathbb{R}, X)$ такая, что $d_H(\mathbb{R}', X') = d' < d$. Обозначим $U_1 := \cup_{x\in X', x\leqslant a-d} B(x, d' + \frac{d-d'}{2})$, $U_2 := \cup_{x\in X', x\geqslant a+d} B(x, d' + \frac{d-d'}{2})$. Получаем, что U_1, U_2 — два открытых непересекающихся множества, но также $\mathbb{R}' \in U_1 \cup U_2$, что противоречит связности прямой. □

Теорема 3.1. *Образ Δ_1 при изометрии не может равняться $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно предъявить два метрических пространства, лежащих друг от друга на расстоянии большем, чем максимум их расстояний до $\mathbb{R}$. Рассмотрим $\mathbb{R}$ как подмножество $\mathbb{R}^2$ и добавим к нему точку $(0, 1)$, расстояние до которой будет соответствовать манхэттенской метрике в $\mathbb{R}^2$. Обозначим это пространство $\widetilde{\mathbb{R}}$, тогда $d_{GH}(\mathbb{R}, \widetilde{\mathbb{R}}) \leqslant \frac{1}{2}$. Также $d_{GH}(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) \leqslant \frac{1}{2}$. Пусть R — соответствие между $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\operatorname{dis} R < 1 + \varepsilon$ и $\big(i, (0, 1)\big) \in R$. Тогда, если $x \in \mathbb{R}\backslash(-\varepsilon, \varepsilon)$, то $(i, x) \notin R$. Обозначим за $\mathcal{N}$ множество всех $k \in \mathbb{Z}$ таких, что для всех $x \in \mathbb{R}\backslash(-\varepsilon, \varepsilon)$, $(k, x) \notin R$. $\mathcal{N}$ не пусто и не равно $\mathbb{Z}$, следовательно, по лемме 3.1, расстояние от $\mathbb{Z}\backslash\mathcal{N}$ до $\mathbb{R}$ будет не меньше 1. Рассмотрим подмножество соответствия R, $R' := R\backslash\{(k, x) : x \in (-\varepsilon, \varepsilon), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\big(i, (0, 1)\big)\}$. Так как все точки из $\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon, \varepsilon)$ лежат в R только в паре с точками из $\mathbb{Z}\backslash\mathcal{N}$ и наоборот, множество R' будет соответствием между $\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon, \varepsilon)$ и $\mathbb{Z}\backslash\mathcal{N}$ Тогда, $\operatorname{dis} R \geqslant \operatorname{dis} R' \geqslant 2d_{GH}(\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{Z}\backslash\mathcal{N})$ По неравенству треугольника $2d_{GH}(\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{Z}\backslash\mathcal{N}) \geqslant 2|d_{GH}(\mathbb{R}, \mathbb{Z}\backslash\mathcal{N}) - d_{GH}(\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R})| \geqslant 2 - 2\varepsilon$, что при малых ε больше, чем $1 + \varepsilon$. Получаем, что $d_{GH}(\widetilde{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}) > \frac{1}{2}$. □

Следствие 3.1. *Облака $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$ не изометричны.*

Доказательство. Предположим, что существует изометрия $F\colon [\Delta_1] \mapsto [\mathbb{R}]$. По предыдущей теореме получили, что $F(\Delta_1) = X \neq \mathbb{R}$. Рассмотрим пространство λX, которое будет являться образом пространства $\widetilde{X}$ из $[\Delta_1]$, отличного от Δ_1. Через $\widetilde{X}$ в облаке $[\Delta_1]$ проходит геодезическая, а значит через λX проходит образ этой геодезической. Это означает, что найдутся пространства

Y_1, Y_2 такие, что $d_{GH}(\lambda X, Y_1) = d_{GH}(\lambda X, Y_2) = d$ и $d_{GH}(Y_1, Y_2) = 2d$. Поделим эти равенства на λ : $d_{GH}(X, \frac{1}{\lambda}Y_1) = d_{GH}(X, \frac{1}{\lambda}Y_2) = \frac{d}{\lambda}$ и $d_{GH}(\frac{1}{\lambda}Y_1, \frac{1}{\lambda}Y_2) = \frac{2d}{\lambda}$. Теперь, если мы рассмотрим прообразы пространств $X, \frac{1}{\lambda}Y_1, \frac{1}{\lambda}Y_2$ при изометрии F, то получим противоречие с замечанием 3.1. □

4. Подсчет расстояния между облаками $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$

Далее за $R(X)$ будем обозначать образ пространства X из $[\Delta_1]$ при соответствии R между$[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$, то есть $R(X) = \{Y \in [\mathbb{R}] | (X, Y) \in R\}$. Под образом пространства будет иметься ввиду именно образ при соответствии. Аналогично определим $R^{-1}(Y)$.

Для любых пространств $Y_1, Y_2 \in R(X)$ выполнено неравенство $|Y_1, Y_2| = \big||Y_1, Y_2| - |X, X|\big| \leqslant \operatorname{dis} R$, откуда следует, что диаметр $R(X)$ не превосходит $\operatorname{dis} R$. Из этого, в частности, следует, что пространства, лежащие на расстоянии большем, чем искажение соответствия, не могут принадлежать образу или прообразу одного пространства.

По определению искажения, если расстояние между пространствами X_1, X_2 равно ρ, то расстояние между пространствами в их образах будет отличаться от ρ не более чем на $\operatorname{dis} R$. Это же верно и для пространств в прообразах.

Теорема 4.1. *Расстояние между облаками* $[\Delta_1]$ *и* $[\mathbb{R}]$ *равно бесконечности.*

Доказательство. У облаков $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$ стационарные группы имеют нетривиальное пересечение, и, по следствию 1, расстояние между ними может быть равно либо 0, либо ∞.

Для доказательства утверждения теоремы достаточно будет показать, что расстояние между ними не равно 0. Для этого необходимо установить, что между ними не может существовать соответствия со сколь угодно малым искажением. Итак, пусть R — соответствие между $[\Delta_1]$ и $[\mathbb{R}]$, $\operatorname{dis} R = \varepsilon < \infty$.

Лемма 4.1. *Если Y лежит в образе Δ_1, то Y лежит от $\mathbb{R}$ на расстоянии, не большем* 15ε.

Доказательство. При $|\mathbb{R}, Y| \leqslant \varepsilon$ утверждение леммы выполняется. Предположим, что $|\mathbb{R}, Y| = d > \varepsilon$. Обозначим $|Y, 2Y| = \rho$, по неравенству треугольника $\rho + d \geqslant 2d$, откуда $\rho \geqslant d > \varepsilon$. Тогда $2Y$ лежит в образе $X \neq \Delta_1$. При этом,

$\rho - \varepsilon \leqslant |X, \Delta_1| \leqslant \rho + \varepsilon$.

В облаке $[\Delta_1]$ для любого пространства X выполняется:

$$|\lambda X, \mu X| = |\lambda - \mu||X, \Delta_1|.$$

Для $\frac{3}{2}X$, $\frac{1}{2}X$ получаем следующие неравенства:

$$|X, \frac{1}{2}X| = \frac{1}{2}|X, \Delta_1| \leqslant \frac{\rho + \varepsilon}{2},$$

$$|X, \frac{3}{2}X| = \frac{1}{2}|X, \Delta_1| \leqslant \frac{\rho + \varepsilon}{2},$$

$$\left|\frac{1}{2}X, \frac{3}{2}X\right| = |X, \Delta_1| \geqslant \rho - \varepsilon$$

Существуют $Y_1, Y_2 \in [\mathbb{R}]$ такие, что $2Y_1 \in R(\frac{1}{2}X)$, $2Y_2 \in R(\frac{3}{2}X)$, и для них выполняются следующие неравенства:

$$|2Y, 2Y_1| \leqslant |X, \frac{1}{2}X| + \varepsilon \leqslant \frac{\rho}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon,$$

$$|2Y, 2Y_2| \leqslant |X, \frac{3}{2}X| + \varepsilon \leqslant \frac{\rho}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon,$$

$$|2Y_1, 2Y_2| \geqslant \left|\frac{1}{2}X, \frac{3}{2}X\right| - \varepsilon \geqslant \rho - 2\varepsilon$$

Поделим эти неравенства на 2:

$$|Y, Y_1| \leqslant \frac{\rho}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon,$$

$$|Y, Y_2| \leqslant \frac{\rho}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon,$$

$$|Y_1, Y_2| \geqslant \frac{\rho}{2} - \varepsilon$$

и возьмем прообразы пространств Y, Y_1, Y_2:

$$|\Delta_1, X_1| \leqslant |Y, Y_1| + \varepsilon \leqslant \frac{\rho}{4} + \frac{7}{4}\varepsilon,$$

$$|\Delta_1, X_2| \leqslant |Y, Y_2| + \varepsilon \leqslant \frac{\rho}{4} + \frac{7}{4}\varepsilon,$$

$$|X_1, X_2| \geqslant |Y_1, Y_2| - \varepsilon \geqslant \frac{\rho}{2} - 2\varepsilon$$

Итак ,по замечанию 3.1 необходимо выполнение следующего неравенства

$$\frac{\rho}{4} + \frac{7}{4}\varepsilon \geqslant \frac{\rho}{2} - 2\varepsilon,$$

что равносильно

$$\rho \leqslant 15\varepsilon,$$

откуда получаем $15\varepsilon \geqslant \rho \geqslant |\mathbb{R}, Y|$ □

Продолжим доказательство теоремы.

Зафиксируем Y из $R(\Delta_1)$. В доказательстве теоремы 3.1 были построены пространства $\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbb{R}}$ в облаке $[\mathbb{R}]$, лежащие от $\mathbb{R}$ на расстоянии не большем, чем $\frac{1}{2}$. При этом, расстояние между этими пространствами строго больше $\frac{1}{2}$. Обозначим за r максимум из расстояний от этих пространств до $\mathbb{R}$:

$$r = \max\left\{|\mathbb{Z}, \mathbb{R}|, |\widetilde{\mathbb{R}}, \mathbb{R}|\right\} \leqslant \frac{1}{2} < |\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbb{R}}|$$

Неравенство означает, что существует $c > 0$ такое, что $|\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbb{R}}| = (1 + c)r$
Вместе с $\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}$ рассмотрим их прообразы $X_1 \in R^{-1}(\mathbb{Z})$, $X_2 \in R^{-1}(\widetilde{\mathbb{R}})$.
Получаем следующую цепочку неравенств:

$$|X_1, \Delta_1| \leqslant |\mathbb{Z}, Y| + \varepsilon \leqslant |\mathbb{Z}, \mathbb{R}| + |\mathbb{R}, Y| + \varepsilon \leqslant r + 15\varepsilon + \varepsilon = r + 16\varepsilon$$

Аналогичное неравенство имеет место для X_2, при этом

$$|X_1, X_2| \geqslant |\mathbb{Z}, \widetilde{\mathbb{R}}| - \varepsilon = (1 + c)r - \varepsilon$$

По замечанию 3.1:

$$|X_1, X_2| \leqslant \max\left\{|X_1, \Delta_1|, |X_2, \Delta_1|\right\}$$

$$(1 + c)r - \varepsilon \leqslant r + 16\varepsilon$$

$$\varepsilon \geqslant \frac{cr}{17}$$

Мы получаем оценку снизу для $\varepsilon = \operatorname{dis} R$. Это означает, что искажение не может быть произвольно малым, и следовательно расстояние между пространствами не может быть равно 0. Значит оно равно бесконечности.

□

Замечание 4.1. В доказательстве леммы 4.1 из свойств облака $[\mathbb{R}]$ используется только вид его стационарной группы. Нетрудно заметить, что утверждение леммы без труда переносится на другие облака со стационарной группой $\mathbb{R}^+$, в частности на $[\mathbb{R}^n]$.

Замечание 4.2. В доказательстве леммы 4.1 выбор коэффициентов при пространствах X и Y является произвольным, и представленная оценка может оказаться грубой. В следующей лемме эта оценка уточняется.

Лемма 4.2. *Если Y лежит в образе Δ_1, то Y лежит от $\mathbb{R}$ на расстоянии, не большем 2ε.*

Доказательство. Предположим, что $|\mathbb{R}, Y| = d > \varepsilon$. Обозначим $|Y, kY| = \rho$, $k \geqslant 2$. По неравенству треугольника $\rho + d \geqslant kd$, откуда $\rho \geqslant (k-1)d > (k-1)\varepsilon$. Тогда kY лежит в образе $X \neq \Delta_1$. При этом, $\rho - \varepsilon \leqslant |X, \Delta_1| \leqslant \rho + \varepsilon$.
Для $(1+\alpha)X, (1-\beta)X$ получаем следующие неравенства:

$$|X, (1+\alpha)X| = \alpha|X, \Delta_1| \leqslant \alpha\rho + \alpha\varepsilon,$$

$$|X, (1-\beta)X| = \beta|X, \Delta_1| \leqslant \beta\rho + \beta\varepsilon,$$

$$|(1+\alpha)X, (1-\beta)X| = (\alpha+\beta)|X, \Delta_1| \geqslant (\alpha+\beta)\rho - (\alpha+\beta)\varepsilon$$

Отметим, что α может принимать любые положительные значения, а β лежит в интервале $(0, 1)$.
Существуют $Y_\alpha, Y_\beta \in [\mathbb{R}]$ такие, что $kY_\alpha \in R\big((1+\alpha)X\big)$, $kY_\beta \in R\big((1-\beta)X\big)$, и для них выполняются следующие неравенства:

$$|kY, kY_\alpha| \leqslant |X, (1+\alpha)X| + \varepsilon \leqslant \alpha\rho + (\alpha+1)\varepsilon,$$

$$|kY, kY_\beta| \leqslant |X, (1+\beta)X| + \varepsilon \leqslant \beta\rho + (\beta+1)\varepsilon,$$

$$|kY_\alpha, kY_\beta| \geqslant |(1+\alpha)X, (1-\beta)X| - \varepsilon \geqslant (\alpha+\beta)\rho - (\alpha+\beta+1)\varepsilon$$

Поделим эти неравенства на k:

$$|Y, Y_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \frac{\alpha+1}{k}\varepsilon,$$

$$|Y, Y_\beta| \leqslant \frac{\beta}{k}\rho + \frac{\beta+1}{k}\varepsilon,$$

$$|Y_\alpha, Y_\beta| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \frac{\alpha+\beta+1}{k}\varepsilon$$

и возьмем прообразы этих пространств:

$$|\Delta_1, X_\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \left(\frac{\alpha+1}{k}+1\right)\varepsilon,$$

$$|\Delta, X_\beta| \leqslant \frac{\beta}{k}\rho + \left(\frac{\beta+1}{k}+1\right)\varepsilon,$$

$$|X_\alpha, X_\beta| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \left(\frac{\alpha+\beta+1}{k}+1\right)\varepsilon$$

Считая, что $\alpha > \beta$ получаем неравенство:

$$\frac{\alpha+\beta}{k}\rho - \left(\frac{\alpha+\beta+1}{k}+1\right)\varepsilon \leqslant \frac{\alpha}{k}\rho + \left(\frac{\alpha+1}{k}+1\right)\varepsilon$$

$$\rho \leqslant \frac{k}{\beta}\left(\frac{2\alpha+\beta+2}{k}+2\right)\varepsilon$$

$$\rho \leqslant \left(1 + \frac{2\alpha+2}{\beta} + 2\frac{k}{\beta}\right)\varepsilon$$

Нас интересует оценка сверху для d:

$$d \leqslant \frac{\rho}{k-1} \leqslant \left(\frac{1}{k-1} + \frac{2\alpha+2}{\beta(k-1)} + 2\frac{k}{\beta(k-1)}\right)\varepsilon$$

Нетрудно заметить, что последнее слагаемое в скобках строго больше 2 при любых k, α, $\beta \in (0, 1)$, а остальные слагаемые с ростом k стремятся к 0. Устремив β к 1, а k к бесконечности получаем оценку:

$$|Y, \mathbb{R}| \leqslant 2\varepsilon$$

$\square$

Список литературы

1. *Иванов А. О.*, *Тужилин А. А.* Лекции по геометрии расстояния Громова–Хаусдорфа. — 2021.
2. *Bogaty S. A.*, *Tuzhilin A. A.* Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry. — 2021.
3. *Bogataya S. I.*, *Bogatyy S. A.*, *Redkozubov V. V. Tuzhilin A. A.* Clouds in Gromov–Hausdorff Class: their completeness and centers. — 2022.