Курсовая работа

Углы облаков и расстояние Громова–Хаусдорфа между облаками с различными углами

Angles of clouds and the Gromov–Hausdorff distance between clouds with different angles

Нестеров Борис Аркадьевич
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений
Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Тужилин Алексей Августинович

Содержание

1. Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа, впервые введенное в [5] позволяет рассматривать класс метрических пространств как псевдометрический и изучать свойства его геометрии. Традиционно, изучаются свойства компактных метрических пространств, для которых расстояние Громова–Хаусдорфа становится метрикой [6]. Позднее М. Громов рассматривал в [7] класс всех метрических пространств, не обязательно ограниченных. Одним из свойств этого класса оказалось то, что он разбивается на классы пространств, лежащих на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа друг от друга. Эти классы были впоследствии названы **облаками**. Одним из вопросов была стягиваемость облаков. По аналогии со стягиваемостью метрического класса ограниченных метрических пространств было предположено ([6]), что все облака стягиваемы. Для доказательства или опровержения этого факта необходимо было введение дополнительных понятий.

Все компактные метрические пространства образуют множество. При введении на них расстояния Громова–Хаусдорфа это множество становится метрическим пространством. Данное пространство называется **пространством Громова–Хаусдорфа**.

Понятие непрерывного отображения, необходимое для определения стягиваемости, требует топологию образа и прообраза, но так как это отображение действует на собственном классе метрических пространств, возникают затруднения. Собственный класс по своему определению не может быть элементом другого класса, следовательно топологию в привычном смысле ввести нельзя. В [3] авторы используют понятие фильтрации множествами для определения аналога топологии на собственном классе. В случае класса ограниченных метрических пространств В общем случае, это отображение может быть разрывным, например при умножении пространства $\mathbb{Z}$ ([8]), или даже делать расстояние Громова–Хаусдорфа между образом и прообразом бесконечным ([2]). Соответственно, если рассматривать операцию умножения на число, как операцию над облаками, то облако может перейти как в себя, так и в другое облако. В связи с данным свойством, в [1] было введено понятие стационарной группы — мультипликативной группы отображений умножения на число, переводящих облако само в себя. В этой же работе было введено понятие центра облака — пространства, переходящего в себя под действием отображений стационарной группы. В данной работе изучается расстояние Громова–Хаусдорфа между облаками. В предыдущих курсовых работах были доказаны некоторые его свойства, в частности, если стационарные группы двух облаков пересекаются нетривиальным образом, то расстояние Громова–Хаусдорфа между ними или 0 или бесконечно. В настоящей работе введено понятие угла облака и показано, что расстояние Громова–Хаусдорфа между двумя облаками с разными углами равно бесконечности при нетривиальном пересечении их стационарных групп.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, Тужилину А.А. и профессору Иванову А.О. за постановку задачи и плодотворное обсуждение результатов.

2. Предварительные результаты

Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда между ними можно задать расстояние, называемое расстоянием Громова–Хаусдорфа. Введем два его эквивалентных определения [4].

Определение 1. *Пусть X, Y — метрические пространства.* Соответствием *R между этими пространствами называется сюръективное многозначное отображение между ними. Множество всех соответствий между X и Y обозначается $\mathcal{R}(X,Y)$. Также будем отождествлять соответствие и его график.*

Определение 2. *Пусть R — соответствие между X и Y.* Искажением *соответствия*

R является величина

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\}.$$

Тогда расстояние Громова–Хаусдорфа *$d_{GH}(X,Y)$ можно определить следующим образом*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Далее, расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y будет обозначаться $|XY|$ или $|X,Y|$.

Рассмотрим собственный класс всех метрических пространств и отождествим в нем между собой все метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга. Обозначим получившийся класс $\mathcal{GH}_0$. На нем расстояние Громова–Хаусдорфа будет являться обобщенной метрикой.

Определение 3 ([2]). *В классе $\mathcal{GH}_0$ рассмотрим следующее отношение: $X \sim Y \Leftrightarrow d_{GH}(X,Y) < \infty$. Нетрудно убедиться, что оно будет отношением эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются* облаками. *Облако, в котором лежит метрическое пространство X будем обозначать $[X]$.*

Для любого метрического пространства X определена операция умножения его на положительное вещественное число λ: $X \mapsto \lambda X$, а именно расстояние между любыми точками пространства умножается на λ.

Замечание 1. *Пусть метрические пространства X, Y лежат в одном облаке. Тогда $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X,Y) < \infty$, т.е. пространства λX, λY также будут лежать в одном облаке.*

Определение 4. *Определим операцию умножения облака $[X]$ на положительное вещественное число λ как отображение, переводящее все пространства $Y \in [X]$ в пространства λY. По замечанию 1 все полученные пространства будут лежать в облаке $[\lambda X]$.*

При таком отображении облако может как измениться, как было показано в [1], так и перейти в себя. Для последнего случая вводится специальное определение.

Определение 5 ([1]). *Стационарной группой $\operatorname{St}\big([X]\big)$ облака $[X]$ называется подмножество $\mathbb{R}_+$, то есть множества всех положительных вещественных чисел, такое, что для всех $\lambda \in \operatorname{St}\big([X]\big)$, $[X] = [\lambda X]$. Полученное подмножество действительно будет подгруппой в $\mathbb{R}_+$. Тривиальной будем называть стационарную группу, равную $\{1\}$. Пересечение двух стационарных групп называем нетривиальным, если оно не равно $\{1\}$.*

Лемма 1 ([1]). *В каждом облаке с нетривиальной стационарной группой существует единственное пространство X такое, что для любого λ из стационарной группы выполняется $X = \lambda X$.*

Определение 6. *Пространство из леммы 1 будем называть* центром *облака.*

Замечание 2. *В облаке $[\Delta_1]$ для любого пространства X выполняется:*

$$|\lambda X \mu X| = |\lambda - \mu||X\Delta_1|.$$

Замечание 3 (Ультраметрическое неравенство). *В облаке $[\Delta_1]$ для всех пространств X_1, X_2 выполняется неравенство:*

$$|X_1X_2| \leqslant \max\big\{|X_1\Delta_1|, |X_2\Delta_1|\big\}.$$

3. Два определения угла

В данном разделе мы рассмотрим два определения угла облака. Для того, чтобы дать эти определения сначала необходимо определить угол между пространствами.
В дальнейшем будем считать, что у облаков нетривиальная стационарная группа и в обозначении облака $[M]$, M является его центром.

Определение 7. ***Углом*** *между пространствами* $X_1, X_2 \in [M]$ *такими, что* $|X_1M| = r_1, |X_2M| = r_2, |X_1X_2| = d$, *где* $r_1, r_2 \neq 0$ *называется величина* $\arccos\left(\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}\right)$.
Будем обозначать его $\varphi(X_1, X_2)$.

Замечание 4. *Такое определение естественным образом вытекает из евклидовой теоремы косинусов, а именно* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a, b)$.

У угла между пространствами есть следующее свойство.

Лемма 2. *Для любых* $X_1, X_2 \in [M], \lambda \in \mathrm{St}\big([M]\big)$ *выполняется* $\varphi(X_1, X_2) = \varphi(\lambda X_1, \lambda X_2)$.

Доказательство. Как в определении угла, положим

$$|X_1M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1X_2| = d.$$

По определению угла получаем следующую цепочку равенств:

$$\varphi(\lambda X_1, \lambda X_2) = \frac{\lambda^2 r_1^2 + \lambda^2 r_2^2 - \lambda^2 d^2}{2\lambda r_1 \lambda r_2} = \varphi(X_1, X_2).$$

На этом доказательство закончено. □

Рассмотрим теперь два интересующих нас определения угла облака.

Определение 8. ***Углом*** *облака* $[M]$ *называется величина*

$$\varphi\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \colon |X_1, M|, |X_2, M| \neq 0\big\}.$$

Определение 9. ***Равнобедренным углом*** *облака* $[M]$ *называется величина* $\varphi_e\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \bigm| |X_1, M| = |X_2, M| \neq 0\big\}$.

Для этих определений получаем следствие из леммы 2.

Лемма 3. *Углы облаков обладают следующими свойствами:*

- $\varphi\big(\lambda[M]\big) = \varphi\big([M]\big)$,
- $\varphi_e\big(\lambda[M]\big) = \varphi_e\big([M]\big)$,
- $\varphi_e\big([M]\big) \leqslant \varphi\big([M]\big)$,
- $0 \leqslant \varphi([M]) \leqslant \pi$,
- $0 \leqslant \varphi_e([M]) \leqslant \pi$.

Доказательство. 1. Следствие леммы 2.

2. Следствие леммы 2.

3. В определении равнобедренного угла супремум берется по подмножеству пространств из определения угла, следовательно равнобедренный угол не больше.

4. Следует из определения арккосинуса и неравенства треугольника.
5. Аналогично.

□

Приведем примеры углов облаков.

Лемма 4. *Для облаков $[\Delta_1], [\mathbb{R}]$ выполняются следующие равенства:*

1. $\varphi\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{2}$,

2. $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{3}$,

3. $\varphi\big([\mathbb{R}]\big) = \varphi_e\big([\mathbb{R}]\big) = \pi$.

Доказательство. 1. Из ультраметрического неравенства следует, что $\varphi\big([\Delta_1]\big) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Для доказательства обратного неравенства найдем угол между двухточечным симплексом $\Delta_2 = \{x_1, x_2\}$ и трехточечным симплексом $\lambda\Delta_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$. Заметим, что если R — соответствие между $\Delta_2, \lambda\Delta_3$, то в нем найдутся пары точек $(x_i, y_j), (x_i, y_k), j \neq k$. Значит $\operatorname{dis} R \geqslant \big||x_i x_i| - |y_j y_k|\big| = \lambda$. Ясно, что существует R такое, что $\operatorname{dis} R = \lambda$. Отсюда $d_{GH}(\Delta_2, \lambda\Delta_3) = \frac{\lambda}{2}$. Далее, учитывая, что $|\Delta_1\Delta_2| = \frac{1}{2}, |\Delta_1\lambda\Delta_3| = \frac{\lambda}{2}$, найдем угол между $\Delta_2, \lambda\Delta_3$:

$$\cos\big(\varphi(\Delta_2, \lambda\Delta_3)\big) = \frac{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{4}}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{2\lambda} \to 0, \lambda \to \infty.$$

Отсюда, $\varphi\big([\Delta_1]\big) \geqslant \sup \varphi(\Delta_2, \lambda\Delta_3) = \frac{\pi}{2}$.

2. Из ультраметрического неравенства следует, что $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) \leqslant \frac{\pi}{3}$. Для доказательства обратного неравенства достаточно найти пространства одинакового диаметра, расстояние между которыми равно их диаметрам. Этими пространствами являются, например, Δ_2, Δ_3.

3. Достаточно привести пример пространств $X, Y \in [\mathbb{R}]$, таких, что $|X\mathbb{R}| = |Y\mathbb{R}| = \frac{1}{2}|XY|$. Такими пространствами являются $\mathbb{Z}, \mathbb{R} \times [0, 1]$.

□

4. Расстояние между облаками с разными углами

В работе была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в облаке $[Z]$ есть пространства Y_1, Y_2 такие, что $\max\big\{|Y_1 Z|, |Y_2 Z|\big\} = r > 0$, а $|Y_1 Y_2| > r$. Тогда, расстояние между облаками $[\Delta_1]$ и $[Z]$ равно бесконечности.*

Следующая теорема является обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть облака $[M], [N]$ имеют нетривиальное пересечение стационарных групп и их углы $\varphi\big([M]\big), \varphi\big([N]\big)$ различны. Тогда $d_{GH}\big([M], [N]\big) = \infty$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi\big([M]\big) > \varphi\big([N]\big)$. Для доказательства теоремы покажем, что не существует соответствия $R \in \mathcal{R}\big([M], [N]\big)$ с конечным искажением.

Предположим противное, т. е. существует соответствие R с конечным искажением $\operatorname{dis} R = \varepsilon < \infty$ как отображение из облака $[M]$ в облако $[N]$. Построим функцию $f\colon [M] \to [N]$,

$f(X)$ – произвольное пространство из $R(X)$. По определению угла, в облаке $[M]$ найдутся пространства X_1, X_2 для которых выполнено:

$$\varphi\big([N]\big) < \varphi(X_1, X_2) \leqslant \varphi\big([M]\big).$$

Положим $|X_1M| = r_1^X, |X_2M| = r_2^X, |X_1X_2| = d^X$. Также зададим функцию

$$d^N \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, d^N(r_1, r_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\Big(\varphi\big([N]\big)\Big)}.$$

Тогда выполняется следующее неравенство:

$$d^N(r_1^X, r_2^X) < d^X.$$

По определению угла для любых пространств $Y_1, Y_2 \in [N]$ выполняется

$$|Y_1Y_2| \leqslant d^N\big(|Y_1N|, |Y_2N|\big). \tag{1}$$

Итак, наша задача — показать, что найдутся пространства в $[N]$, для которых неравенство (1) не выполняется.

Нетривиальность пересечения стационарных групп означает, что найдется подгруппа

$$\{q^k, k \in \mathbb{Z}, q > 1\} \in \mathrm{St}\,\big([M]\big) \cap \mathrm{St}\,\big([N]\big).$$

Обозначим $|NR(M)| = l$. Будем рассматривать пространства $R(q^kX_1), R(q^kX_2), k \in \mathbb{N}$. Для них выполнены следующие неравенства:

$$\big|R(q^kX_1), R(q^kX_2)\big| \geqslant q^kd^X - \varepsilon,$$

$$q^kr_1^X - \varepsilon \leqslant \big|R(M), R(q^kX_1)\big| \leqslant q^kr_1^X + \varepsilon,$$

$$q^kr_2^X - \varepsilon \leqslant \big|R(M), R(q^kX_2)\big| \leqslant q^kr_2^X + \varepsilon.$$

Из последних двух неравенств по неравенству треугольника получаем следующее:

$$q^kr_1^X - l - \varepsilon \leqslant \big|N, R(q^kX_1)\big| \leqslant q^kr_1^X + l + \varepsilon,$$

$$q^kr_2^X - l - \varepsilon \leqslant \big|N, R(q^kX_2)\big| \leqslant q^kr_2^X + l + \varepsilon.$$

Поделим неравенства на q^k:

$$\big|q^{-k}R(q^kX_1), q^{-k}R(q^kX_2)\big| \geqslant d^X - \frac{\varepsilon}{q^k},$$

$$r_1^X - \frac{l+\varepsilon}{q^k} \leqslant \big|N, q^{-k}R(q^kX_1)\big| \leqslant r_1^X + \frac{l+\varepsilon}{q^k},$$

$$r_2^X - \frac{l+\varepsilon}{q^k} \leqslant \big|N, q^{-k}R(q^kX_2)\big| \leqslant r_2^X + \frac{l+\varepsilon}{q^k}.$$

Функция d^N непрерывная, значит

$$\lim_{k\to\infty} d^N\Big(\big|N, q^{-k}R(q^kX_1)\big|, \big|N, q^{-k}R(q^kX_2)\big|\Big) = d^N(r_1^X, r_2^X).$$

Поэтому существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\big|q^{-k_0}R(q^{k_0}X_1), q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)\big| > d^N\Big(\big|N, q^{-k_0}R(q_0^kX_1)\big|, \big|N, q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)\big|\Big)$$

Пространства $q^{-k_0}R(q^{k_0}X_1), q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)$ — искомые, для которых не выполняется неравенство (1). Противоречие. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. I. Bogataya, S. A. Bogatyy, V. V. Redkozubov, and A. A. Tuzhilin. Clouds in Gromov-Hausdorff Class: their completeness and centers, February 2022. arXiv:2202.07337 [math].

2. Semeon A. Bogaty and Alexey A. Tuzhilin. Gromov-Hausdorff class: its completeness and cloud geometry, October 2021. arXiv:2110.06101 [math].

3. S. I. Borzov, A. O. Ivanov, and A. A. Tuzhilin. Extendability of Metric Segments in Gromov–Hausdorff Distance, August 2020. arXiv:2009.00458 [math].

4. Dmitri Burago, Yuri Dmitrievich Burago, and Sergei Ivanov. *A Course in Metric Geometry*. American Mathematical Soc., 2001. Google-Books-ID: dRmIAwAAQBAJ.

5. David A. Edwards. The Structure of Superspace. In Nick M. Stavrakas and Keith R. Allen, editors, *Studies in Topology*, pages 121–133. Academic Press, January 1975.

6. Mikhael Gromov. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. CEDIC/Fernand Nathan, 1981. Google-Books-ID: TxN0QgAACAAJ.

7. Mikhail Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Springer Science & Business Media, 1991.

8. Ivan N. Mikhailov. New geodesic lines in the Gromov-Hausdorff class lying in the cloud of the real line, April 2025. arXiv:2504.14629 [math].