1 Условие.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to \inf$$
$$\ddot{x} + \frac{x}{1+\alpha t^2} = u$$
$$x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 0$$
$$\dot{x}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\alpha \in \{0; 0.01; 1.02; 10.02\}$$

2 Сведение к задаче Лагранжа.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to \inf$$
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u - \frac{x_1}{1+\alpha t^2}$$
$$x_1(0) = x_1(\frac{\pi}{2}) = 0$$
$$x_2(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\alpha \in \{0; 0.01; 1.02; 10.02\}$$

3 Система необходимых условий оптимальности

$$L = \lambda_0 \left(u^2\right) + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2 \left(\dot{x}_2 - u + \frac{x_1}{1+\alpha t^2}\right)$$
$$l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_1 \left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_3 \left(x_2(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\dot{p}_1 = \frac{p_2}{1+\alpha t^2}$$
$$\dot{p}_2 = -p_1$$

Принцип максимума:

$$2\lambda_0 u = p_2$$

Условия трансверсальности:

$$p_1(0) = \lambda_1$$
$$p_2(0) = 0$$
$$p_1(\frac{\pi}{2}) = -\lambda_2$$
$$p_2(\frac{\pi}{2}) = -\lambda_3$$

Условие НЕРОН и $\lambda_0 \geq 0$

Заметим, что из $\lambda_0 = 0$ следует $p_1 \equiv 0, p_2 \equiv 0$, и из условий трансверсальности $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, что противоречит НЕРОН. Далее считаем $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, чтобы $u = p_2$.

4 Краевая задача.

Итак, получили краевую задачу:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \frac{p_2}{1+\alpha t^2} \\ \dot{p}_2 = -p_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = p_2 - \frac{x_1}{1+\alpha t^2} \\ p_2(0) = 0 \\ x_1(0) = 0 \\ x_1(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ x_2(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

5 Аналитическое решение при $\alpha = 0$

При $\alpha = 0$ система приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 \\ \dot{p}_2 = -p_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = p_2 - x_1 \\ p_2(0) = 0 \\ x_1(0) = 0 \\ x_1(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ x_2(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Первые два уравнения, с учетом условия $p_2(0) = 0$ решаются в виде

$$p_1(t) = C_1 \cos(t)$$
$$p_2(t) = -C_1 \sin(t)$$

Третье и четвертое уравнения приобретают вид:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - C_1 \sin(t)$$

Подставляя первое уравнение во второе, получаем $\ddot{x}_1 + x_1 = -C_1 \sin(t)$. Общее однородного: $x_1 = C_2 \cos(t) + C_3 \sin(t)$, частное решение: $x_1 = \frac{C_1}{2} t \cos(t)$. Общее решение:

$$x_1(t) = \frac{C_1}{2} t \cos(t) + C_2 \cos(t) + C_3 \sin(t)$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1 = \frac{C_1}{2}\big(\cos(t) - t\sin(t)\big) + C_3 \cos(t) - C_2 \sin(t)$$

Далее из граничных условий:

$$x_1(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$
$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$
$$x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{C_1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_1 = 2$$

Итак, решение краевой задачи при $\alpha = 0$ имеет вид:

$$p_1 = 2\cos(t)$$
$$p_2 = -2\sin(t)$$
$$x_1 = t\cos(t)$$
$$x_2 = \cos(t) - t\sin(t)$$

Отсюда в частности получаем, что точное решение при $\alpha = 0$ начинается в $(2, 0, 0, 1)$.

6 Численное решение в общем виде

Зададим функцию ошибок как функцию от $\big(p_1(0), x_2(0)\big)$, возвращающую $\Big(x_1\left(\frac{\pi}{2}\right), x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\Big)$ — вектор ошибки. Обозначим ее $R_\alpha(x)$.

Итак, задача свелась к поиску нуля функции $R_\alpha(x)$ при различных α. Из вида аналитического решения $R_0(2, 1) = 0$. Искать нуль при произвольном α будем при помощи метода Ньютона для систем уравнений. Если есть какое-то приближение нуля x_k, следующее приближение x_{k+1} ищется по алгоритму:

1. Считаем матрицу Якоби $R'(x_k)$.
2. Считаем $x_{k+1} = x_k - 2^{-n}\Big(R'(x_k)\Big)^{-1} R(x_k)$, $n = 0, 1, \ldots$, пока норма $F(x_{k+1})$ не станет меньше нормы $F(x_k)$.

Условий выхода из алгоритма три:

1. $||F(x_k)|| < \epsilon$, это означает, что искомый нуль найден.
2. $n > N$, это означает, что значение на следующем шаге не может быть уменьшено.
3. $k > K$, это означает, что алгоритм не может найти нуль и уходит в бесконечность.

Для $\alpha = 0$ известно точное значение нуля. Для каждого следующего необходимого значения α будем искать начальные условия применяя метод Ньютона для поиска нуля функции ошибок.

7 Оценки точности решений.

Матрица Якоби системы:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+\alpha t^2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{1+\alpha t^2} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения ее логарифмической нормы необходимо найти максимальное по модулю собственное значение матрицы:

$$\frac{J+J^T}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+\alpha t^2} - 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1+\alpha t^2} - 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{1+\alpha t^2} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A = \frac{1}{1+\alpha t^2}$. Получаем, что $A \in [\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\pi^2}, 1]$. Характеристический многочлен матрицы $J + J^T$ принимает вид:

$$\lambda^4 + 2A\lambda^3 + \left(-A^2 + 2A - 3\right)\lambda^2 + \left(-2A^3 + 4A^2 - 2A\right)\lambda + A^2 - 2A + 1.$$

Максимальный корень будем при каждом t искать методом Ньютона, начиная из 2, получим $2 * l(t)$. Сначала оценим глобальную ошибку при решении задачи Коши по формуле $\delta_K(t_{i+1}) = r_i + \delta_K(t_i) * e^{l\left(\frac{l(t_{i+1})+l(t_i)}{2} * h_i\right)}$, $t_N = \frac{\pi}{2}$. Затем оцениваем точность задания начальных условий по формуле

$$\Delta\beta = \frac{||A^{-1}|| \left(\delta_K\left(\frac{\pi}{2}\right) + ||R(\beta)||\right)}{1 - ||A^{-1}|| \times ||\Delta A||}$$

Норма $||A^{-1}|| = \frac{\sum\limits_{i,j} |A_{ij}|}{\det A}$, норма $||\Delta A|| = \frac{12\delta_K(\pi 2)}{\Delta} + \frac{R_i(\gamma+\Delta_j) + R_i(\gamma) + R_i(\gamma-\Delta_j)}{2 * \Delta_j}$, а $||R(\beta)||$ оценивалось сверху 10^{-9}.

8 Исследование оптимальности экстремалей

Отметим, что $L_{uu} = 2 > 0$, значит выполняется усиленное условие Лежандра и условие квазирегулярности. Для выполнения условия Якоби нобходимо нетривиальное решение следуещей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dot{\delta x}_1 = \delta x_2 \\ \dot{\delta x}_2 = \delta u - \frac{\delta x_2}{1+\alpha t^2} \\ \dot{q}_1 = \frac{q_2}{1+\alpha t^2} \\ \dot{q}_2 = -q_1 \\ \delta u = q_2 \\ \delta x_1(0) = 0 \\ q_2(0) = 0 \\ \delta x_1(\tau) = 0 \\ \delta x_2(\tau) = 0 \end{cases}$$

Ее решение может быть найдено как линейная комбинация решений задачи коши с начальными условиями $q_1^1(0) = 1, \delta x_2^1(0) = 0$ и $q_1^2(0) = 0, \delta x_2^2(0) = 1$. τ будет сопряженной точкой, если для нее будет выполнено

$$\det \begin{pmatrix} \delta x_1^1(\tau) & \delta x_2^1(\tau) \\ \delta x_1^2(\tau) & \delta x_2^2(\tau) \end{pmatrix} = 0.$$

Для $\alpha = 0$ можно аналитически получить две системы решений:

$$\begin{cases} q_1^1 = \cos t \\ q_2^1 = -\sin t \\ \delta x_1^1 = -\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2} t \cos t \\ \delta x_2^1 = \frac{-t \sin t}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1^2 = 0 \\ q_2^2 = 0 \\ \delta x_1^2 = \sin t \\ \delta x_2^2 = \cos t \end{cases}$$

Искомый определитель имеет вид:

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin\tau + \frac{1}{2}\tau\cos t & \frac{-t\sin t}{2} \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} = \frac{-\sin\tau\cos\tau}{2} + \frac{\tau\cos^2\tau}{2} + \frac{\tau\sin^2\tau}{2} = \frac{\tau - \frac{\sin(2\tau)}{2}}{2}$$

Итак, τ является корнем уравнения $2\tau - \sin(2\tau) = 0$, которое имеет единственный корень $\tau = 0$. Это означает, что выполнено усиленное условие Якоби Итак, при $\alpha = 0$ экстремаль является глобальным минимумом.

Численные исследования показывают, что при остальных α сопряженных точек также нет.

9 Результаты вычислений.

В таблице приведены α, начальные параметры и векторы ошибок:

α	$p_1(0), x_2(0)$	$x_1(\frac{\pi}{2}), x_2(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}$	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt$
0	$2, 1$	$2 \times 10^{-10}, 7 \times 10^{-10}$	3.121412
0.01	$2.002290, 0.999522$	$4 \times 10^{-11}, 2 \times 10^{-10}$	3.136704
1.02	$2.063073, 0.951506$	$-2 \times 10^{-9}, -1 \times 10^{-9}$	3.845041
10.01	$2.003069, 0.851357$	$1 \times 10^{-9}, 2 \times 10^{-10}$	4.509533

В таблице приведены значения ошибок для различных α.

α	$\delta_K(\frac{\pi}{2})$	$\Delta\beta$
0	7×10^{-11}	4×10^{-10}
0.01	7×10^{-11}	5×10^{-10}
1.02	4×10^{-11}	6×10^{-10}
10.01	4×10^{-11}	4×10^{-10}