Курсовая работа

О расстоянии Громова–Хаусдорфа между облаком ограниченных метрических пространств и облаком с нетривиальной стационарной группой

On the Gromov–Hausdorff distance between the cloud of bounded metric spaces and a cloud with nontrivial stabilizer

Нестеров Борис Аркадьевич
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений
Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Тужилин Алексей Августинович

1. Введение

Привет!

2. Два определения угла

В данной секции мы рассмотрим два определения угла облака. Для того, чтобы дать эти определения сначала необходимо определить угол между пространствами.
Далее, будем считать, что у облаков нетривиальная стационарная группа и будем обозначать $[M]$ - облако с центром m.

Определение 1. *Пусть у облака $[M]$ нетривиальная стационарная группа и его центром является M.* ***Углом*** *между пространствами X_1, X_2, $|X_1M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1X_2| = d$, где $r_1, r_2 \neq 0$ называется величина $\arccos\left(\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}\right)$.*
Будем обозначать его $\varphi(X_1, X_2)$.

Замечание 1. *Такое определение естественным образом вытекает из теоремы косинусов, а именно $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a, b)$.*

У угла между пространствами есть следующее свойство.

Лемма 1. *Для любых $X_1, X_2 \in [M], \lambda \in \mathrm{St}([M])$ выполняется $\varphi(X_1, X_2) = \varphi(\lambda X_1, \lambda X_2)$.*

Доказательство. Как в определении угла, будем обозначать

$$|X_1M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1X_2| = d.$$

По определению угла получаем следующую цепочку равенств:

$$\varphi(\lambda X_1, \lambda X_2) = \frac{\lambda^2r_1^2 + \lambda^2r_2^2 - \lambda^2d^2}{2\lambda r_1\lambda r_2} = \varphi(X_1, X_2)$$

□

Рассмотрим теперь два интересующих нас определения угла облака.

Определение 2. ***Углом*** *облака $[M]$ называется величина*

$$\varphi\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \;\big|\; |X_1, M|, |X_2, M| \neq 0\big\}.$$

Определение 3. ***Равнобедренным углом*** *облака $[M]$ называется величина $\varphi_e\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \;\big|\; |X_1, M| = |X_2, M| \neq 0\big\}$.*

Для этих определений получаем следствие из леммы 1.

Лемма 2. *Углы облаков обладают следующими свойствами:*

1. $\varphi\big(\lambda[M]\big) = \varphi\big([M]\big)$,
2. $\varphi_e\big(\lambda[M]\big) = \varphi_e\big([M]\big)$,
3. $\varphi_e\big([M]\big) \leqslant \varphi\big([M]\big)$,
4. $0 \leqslant \varphi([M]) \leqslant \pi$,
5. $0 \leqslant \varphi_e([M]) \leqslant \pi$.

Доказательство.

1. Следствие леммы 1.
2. Следствие леммы 1.
3. В определении равнобедренного угла супремум берется по подмножеству пространств из определения угла, следовательно равнобедренный угол не больше.
4. Следует из определения арккосинуса и неравенства треугольника.
5. Аналогично.

□

Приведем известные примеры углов облаков.

Гипотеза. *Для облаков* $[\Delta_1], [\mathbb{R}]$ *известно следующее:*

- $\varphi\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{2}$,
- $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{3}$,
- $\varphi\big([\mathbb{R}]\big) = \varphi_e\big([\mathbb{R}]\big) = \pi$.

3. Теорема об образе центра

В предыдущей работе была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть M – центр облака $[M]$, имеющего нетривиальную стационарную группу. R – соответствие между $[\Delta_1]$ и $[M]$ с конечным искажением ε. Тогда образ пространства Δ_1 лежит от M на расстоянии не большем 2ε.*

В ее доказательстве используется следующий факт об облаке $[\Delta_1]$.

Теорема 2. *Для всякого ограниченного пространства X луч λX, $\lambda \in [0, \infty)$ является геодезической. Иначе говоря, для всяких $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty)$ выполняется $|\lambda_1 X, \lambda_2 X| = |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot |X, \Delta_1|$.*

В общем случае это неверно, в частности, в облаке $[\mathbb{R}]$ луч $\lambda\mathbb{Z}$ не является геодезической ([1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ivan N. Mikhailov. New geodesic lines in the gromov-hausdorff class lying in the cloud of the real line, 2025.