Курсовая работа

О расстоянии Громова–Хаусдорфа между облаком ограниченных метрических пространств и облаком с нетривиальной стационарной группой

On the Gromov–Hausdorff distance between the cloud of bounded metric spaces and a cloud with nontrivial stabilizer

Нестеров Борис Аркадьевич
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений
Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Тужилин Алексей Августинович

1. Введение

Привет!

2. Два определения угла

В данной секции мы рассмотрим два определения угла облака. Для того, чтобы дать эти определения сначала необходимо определить угол между пространствами.
Далее, будем считать, что у облаков нетривиальная стационарная группа и будем обозначать $[M]$ - облако с центром m.

Определение 1. *Пусть у облака $[M]$ нетривиальная стационарная группа и его центром является M.* ***Углом*** *между пространствами X_1, X_2, $|X_1 M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1 X_2| = d$, где $r_1, r_2 \neq 0$ называется величина $\arccos\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2 r_1 r_2}\right)$.*
Будем обозначать его $\varphi(X_1, X_2)$.

Замечание 1. *Такое определение естественным образом вытекает из теоремы косинусов, а именно $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a, b)$.*

У угла между пространствами есть следующее свойство.

Лемма 1. *Для любых $X_1, X_2 \in [M], \lambda \in \mathrm{St}([M])$ выполняется $\varphi(X_1, X_2) = \varphi(\lambda X_1, X_2)$.*

Доказательство. Как в определении угла, будем обозначать

$$|X_1 M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1 X_2| = d.$$

□

Рассмотрим теперь два интересующих нас определения угла облака.

Определение 2. ***Углом*** *облака $[M]$ называется величина*

$$\varphi\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \mid |X_1, M|, |X_2, M| \neq 0\big\}.$$

Определение 3. ***Равнобедренным углом*** *облака $[M]$ называется величина*

$$\varphi_e\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \mid |X_1, M| = |X_2, M| \neq 0\big\}.$$

Приведем известные примеры углов облаков.

Лемма 2. *Для облаков $[\Delta_1], [\mathbb{R}]$ известно следующее:*

- $\varphi\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{2}$,
- $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{3}$,
- $\varphi\big([\mathbb{R}]\big) = \varphi_e\big([\mathbb{R}]\big) = \pi$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Edwards D. *The Structure of Superspace. In: Studies in Topology*, ed. by Stavrakas N.M. and Allen K.R.//1975, New York, London, San Francisco, Academic Press, Inc.
2. Gromov M. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, edited by Lafontaine and Pierre Pansu// 1981.
3. Gromov M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*// Birkhäuser, 1999. ISBN 0-8176-3898-9 (translation with additional content).
4. Mémoli F., Gromov-Hausdorff distances in Euclidean spaces // 2008 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops, Anchorage, AK, USA, 2008, pp. 1-8
5. Bogatyy S.A., Tuzhilin A.A. Gromov–Hausdorff class: its completeness and cloud geometry //2021, ArXiv e-prints, arXiv:2110.06101, [math.MG]
6. von Neumann J., "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre"//1925, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik
7. Bernays P., "A System of Axiomatic Set Theory—Part I"//1937, The Journal of Symbolic Logic, doi:10.2307/2268862, JSTOR 2268862
8. Gödel K. The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory (Revised ed.)//1940, Princeton University Press, ISBN 978-0-691-07927-1
9. Borzov S.I., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., Extendability of Metric Segments in Gromov–Hausdorff Distance // 2020, ArXiv e-prints, arXiv:2009.00458, [math.MG]
10. Bogataya S.I., Bogatyy S.A., Redkozubov V.V. Tuzhilin A.A. Clouds in Gromov–Hausdorff Class: their completeness and centers//2022, ArXiv e-prints, arXiv:2202.07337, [math.MG]
11. Бураго Д., Бураго Ю., Иванов С.А. Курс метрической геометрии//2004, Ин-т компьютерных исслед.
12. Bogataya S.I., Bogatyy S.A. Isometric Cloud Stabilizer//2023, Topology and its Applications, Volume 329
13. Levy A. Basic set theory. Perspectives in mathematical logic//1979, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York