1 Условие.

Найти периодическое решение системы ДУ
$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \alpha\left(1-x^2\right)y - x, \end{cases} \\ \alpha \in \{0.1, 10.0\}. \end{cases}$$

2 Решение.

Система уравнений является частным случаем уравнения Ван-дер-Поля, записанного как система. Существование у этой системы предельного цикла и его единственность уже доказаны. Так же известно, что любое решение, не проходящее через критические точки будет сходиться к предельному циклу. Единственной критической точкой данного уравнения является $(0,0)$, так как из первого уравнения получаем $y = 0$, подставив это во 2 уравнение получим, что $x = 0$. Итак, если решение не начинается в $(0,0)$, оно будет сходиться к предельному циклу.

Будем рассматривать решение, начинающееся из точки $(1,0)$, и методом хорд искать точку его третьего пересечения прямой $y = 0$. Эти точки сходятся к точке предельного цикла, следовательно, можем взять достаточно близкую.

3 Метод Рунге-Кутты.

При решении был использован классический метод Рунге-Кутты 4 порядка
$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$
Для определения ошибки на шаге делается один просчет с удвоенной длинной шага и 2 просчета с обычной (обозначим результаты u_{2h} и u_h соответственно). Далее, ошибка по каждой переменной считается по правилу Рунге с использовнием масштабирующего множителя. Окончательная формула для подсчета ошибки выглядит следующим образом:
$$d = \left|u_h + \frac{u_h - u_{2h}}{2^4 - 1}\right|$$
$$\mathrm{err} = \left|\frac{1}{2^4 - 1}\frac{u_h - u_{2h}}{d}\right|$$
Затем, ошибкой на шаге принимается максимум из ошибок по каждой переменной.

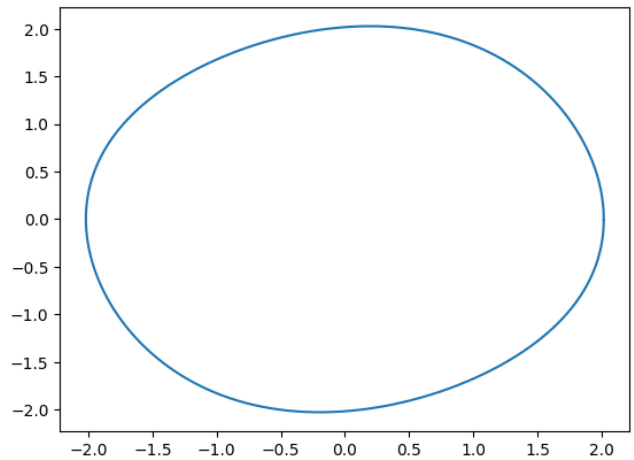
4 Выбор шага.

Новый шаг рассчитывается по формуле $h_{\text{new}} = h \cdot \min(\text{facmax}, \max(\text{facmin}, \text{fac}(\frac{\text{tol}}{\text{err}})^{(\frac{1}{p+1})}))$, где $p = 4, \text{facmax} = 3, \text{facmin} = 0.00001, \text{fac} = 0.8$, а tol - это максимальная ошибка, при различных значениях которой делаются расчеты.

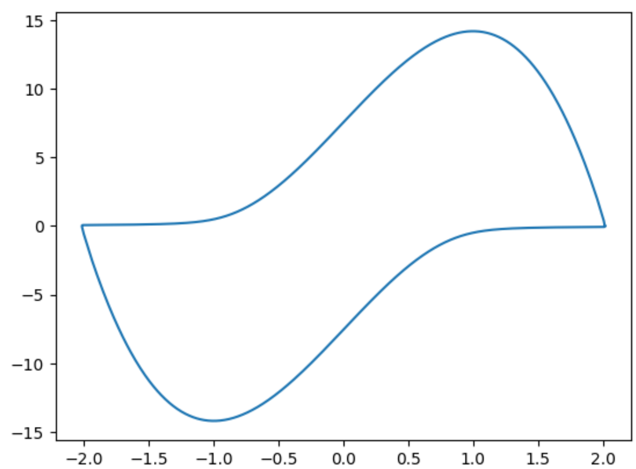
Если ошибка на шаге не превышает максимальной, полученное значение принимается, иначе производится пересчет с новым шагом.

5 Результаты.

Цикл при $\alpha = 0.1$



Цикл при $\alpha = 10$



В таблицах приведены результаты расчетов при различных значениях максимальной ошибки

$\alpha = 0.1$		
tol	Количество точек	Суммарная ошибка
$1e-7$	118	$1.374860e-06$
$1e-9$	280	$4.913808e-08$
$1e-11$	708	$1.166902e-09$

$\alpha = 10$		
tol	Количество точек	Суммарная ошибка
$1e-7$	1094	$1.828893e-05$
$1e-9$	2744	$4.532883e-07$
$1e-11$	6892	$1.131785e-08$

Для всех расчетов должно выполняться

$$\frac{n_{i+2}}{n_i} = \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i+2}}\right)^{1/5} \approx 2.5119, \quad \frac{err_i}{err_{i+2}} = \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i+2}}\right)^{4/5} \approx 39.8107$$

$\alpha = 0.1$
$\frac{n_9}{n_7} = 2.372$
$\frac{n_{11}}{n_9} = 2.528$
$\frac{errSum_7}{errSum_9} = 27.979$
$\frac{errSum_9}{errSum_{11}} = 42.109$
$\alpha = 10$
$\frac{n_9}{n_7} = 2.508$
$\frac{n_{11}}{n_9} = 2.512$
$\frac{errSum_7}{errSum_9} = 40.347$
$\frac{errSum_9}{errSum_{11}} = 40.0507$

6 Оценка глобальной ошибки.

Для оценки глобальной ошибки была использована следующая формула:

$$\delta\left(x_{i+1}\right) = r_i + \delta\left(x_i\right) \cdot \exp\left(L_i\right),$$

в которой L_i было оценено максимум нормы матрицы Якоби на отрезке $\big((x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})\big)$, умноженный на длину этого отрезка, которую обозначим за d_i. В качестве нормы матрицы была выбрана логарифмическая норма, так как она приводила к меньшей оценке. Матрица Якоби системы имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(2\alpha xy\right) - 1 & \alpha\left(1 - x^2\right) \end{pmatrix}.$$

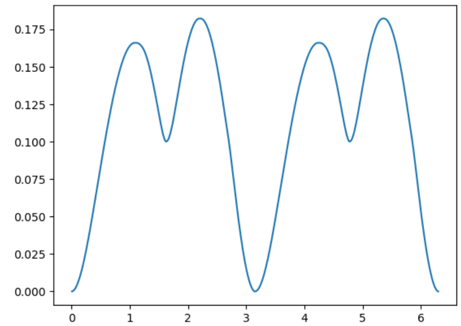


Рис. 1: $\alpha = 0.1$

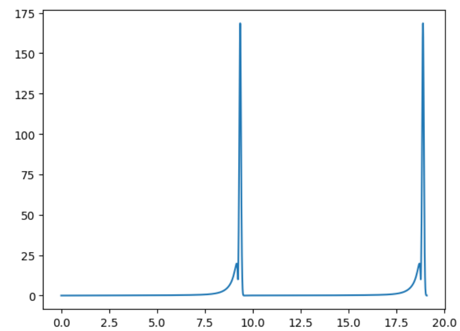


Рис. 2: $\alpha = 10$

Для того, чтобы найти ее логарифмическую норму, необходимо найти максимальное по модулю собственное значение матрицы

$$\frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\alpha x y\right) \\ -\left(\alpha x y\right) & \alpha\left(1 - x^2\right) \end{pmatrix}.$$

Выше приведены графики логарифмической нормы матрицы Якоби для $\alpha = 0,1$ и $\alpha = 10$. Итоговая формула для расчета глобальной ошибки:

$$\delta\left(x_{i+1}\right) = r_i + \delta\left(x_i\right) \cdot \exp\left(d_i l_i\right)$$

$$l_i = \max\Big(\mu\big(A(x_i, y_i)\big), \mu\big(A(x_{i+1}, y_{i+1})\big)\Big)$$

Значения оценки глобалбной ошибки приведены в таблице:

α	$\delta(x_N)$
0.1	$1.709299e-09$