1 Условие.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\dot{x}^2 - x^2\cos(\alpha x)\big)dx \to ext$$

$$x(0) = 0$$

$$x(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\alpha \in \{0; 0.01; 0.5; 1.5; 10.5\}$$

2 Система необходимых условий оптимальности

$$L = \lambda_0\big(\dot{x}^2 - x^2\cos(\alpha x)\big)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\ddot{x} = \frac{\alpha}{2}x^2\sin\alpha x - x\cos\alpha x$$

3 Краевая задача.

Итак, получили краевую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x_2} = \frac{\alpha}{2}x_1^2\sin\alpha x_1 - x_1\cos\alpha x_1 \\ x_1(0) = 0 \\ x(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

4 Аналитическое решение при $\lambda = 0$

При $\alpha = 0$ получаем $\ddot{x} = -x$, откуда из граничных условий:

$$x = \sin t$$

Отсюда в частности получаем, что точное решение при $\alpha = 0$ начинается в $(0, 1)$.

5 Численное решение в общем виде

Зададим функцию ошибок как функцию от $x_2(0)$, возвращающую $x_1(\frac{\pi}{2} - 1)$ — ошибка. Для $\alpha = 0$ известно, что она равна нулю в 1. Для малых α достаточно искать нули методом Ньютона, начиная из 1. Для $\alpha = 10.5$ метод

Ньютона не сходится. Воспользуемся методом случайного поиска, и получим, например, что один из нулей функции ошибок лежит на интервале $(1.7, 1.9)$. Метод Ньютона из точки 1.8 сходится. Также из значений функции ошибок на интервале $(0, 5)$ ясно, что нулей несколько, т. е. допустимых экстремалей несколько при $\alpha = 10.5$.

6 Оценки точности решений.

Матрица Якоби системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha x_1 \sin \alpha x_1 + (\frac{\alpha}{2} x_1^2 - 1) \cos \alpha x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения ее логарифмической нормы необходимо найти максимальное по модулю собственное значение матрицы:

$$\frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha x_1 \sin \alpha x_1 + (\frac{\alpha}{4} x_1^2 - \frac{1}{2}) \cos \alpha x_1 + \frac{1}{2} \\ \alpha x_1 \sin \alpha x_1 + (\frac{\alpha}{4} x_1^2 - \frac{1}{2}) \cos \alpha x_1 + \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Им будет $\lambda(x) = |\alpha x_1 \sin \alpha x_1 + (\frac{\alpha}{4} x_1^2 - \frac{1}{2}) \cos \alpha x_1|$. Ошибка расчитывалась по формуле $\delta(x_{i+1}) = r_i + \delta(x_i) * e^{L_i}$, где

- $\delta(x_N)$ – глобольная ошибка
- r_i – ошибка на шаге, равная 10^{-11}
- $L_i = h \max(\lambda(x_i), \lambda(x_{i-1}))$

7 Исследование оптимальности экстремалей

Отметим, что $L_{\dot{x}\dot{x}} = 2 > 0$, значит выполняется усиленное условие Лежандра

$$L_{\dot{x}x} = 0$$
$$L_{xx} = 2\alpha x_1 \sin \alpha x_1 + (\frac{\alpha}{2} x_1^2 - 1) \cos \alpha x_1$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dot{h}^2 + \alpha \hat{x} (\sin \alpha \hat{x} + (\frac{\alpha}{4} \hat{x}^2 - \frac{1}{2}) \cos \alpha \hat{x}) h^2$$

Уравнение Якоди имеет вид:

$$\ddot{h} = \alpha \hat{x} (\sin \alpha \hat{x} + (\frac{\alpha}{4} \hat{x}^2 - \frac{1}{2}) \cos \alpha \hat{x}) h$$

$$h(0) = 0.$$

Условие Якоби выполнено, если не существует не равного 0 h, такого что $h(\tau) = 0$, $\tau \in (0, \frac{\pi}{2})$. Для усиленного условия таких τ должно не быть в $(0, \frac{\pi}{2}]$.

При $\alpha = 0$, уравнение Якоби приобретает вид

$$\ddot{h} = -h$$
$$h(0) = 0$$

Решением этого уравнения является $C \sin t$, у которого нет сопряженных точек на $(0, \frac{\pi}{2}]$, т. е. выполнено усилонное условие Якоби.

Функция Вейерштрасса будет иметь вид $(u + v)^2 \geq 0$, т. е. выполнено усиленное условие Вейерштрасса.

Итак, при $\alpha = 0$ экстремаль является сильным локальным минимумом. Так как задача квадратичная, минимум будет глобальным.

8 Результаты вычислений.

В таблице приведены α, начальные параметры и векторы ошибок:

α	$x_2(0)$	$x_1(1) - 1$	Ошибка
0	1	$2e - 10$	$5e - 11$
0.01	0.999963	$4e - 11$	$5e - 11$
0.5	0.923263	$9e - 10$	$3e - 11$
1.5	0.682993	$3e - 09$	$6e - 11$
10.5	1.797965	$-4e - 09$	$2e - 6$