1 (). Сколько натуральных чисел, делящихся на 4 и меньший 1000, не содержат в десятичной записи ни одной из цифр 3, 4, 5, 7 и 9?

Ответ: 49.

$\triangleright$ 1. Искомые трёхзначные числа, кратные 4 , записываются только цифрами $0, 1, 2, 6, 8$ и могут заканчиваться следующими 10 комбинациями цифр: $00, 08, 12, 16, 20, 28, 60, 68, 80, 88$. При этом на первом месте в каждом из этих 10 вариантов может стоять любая из четырёх цифр $1, 2, 6, 8$. Кроме того, все варианты, кроме первого, дают ещё и требуемые числа из первой сотни. Значит, всего таких чисел $10 \cdot 4 + 8 + 1 = 49$. $\triangleleft$

2 (). Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + a^2 - a - 2 = 0$$

имеет решения.

Ответ: $a \in (-\infty, 0]$.

$\triangleright$ Несложно заметить, что уравнение можно привести к виду

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2(a-1)\log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + a^2 - 3a = 0$$

сделав замену переменных

$$t = \log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),$$

приходим к уравнению

$$t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 3a = 0$$

Определим область изменения t. В силу того что функция $y = \frac{2x}{1+x^2}$ при положительном x меняется в пределах от нуля до единицы, подучим, что t меняется в пределах $t \in (-\infty, 0]$. Тогда исходная задача может быть сформулирована в терминах переменной t. «Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 3a = 0$$

ммеет решения при $t \in (-\infty, 0]$ ». Это возможно, если 1) корни разного знака; 2) хотя бы один из корней равен нулю; 3) оба корня отрицательны. Первый и второй сууаи имеют место при выполнении условия $a(a-3) \leqslant 0$. Третий Тучай равносилен системе неравенств

$$\begin{cases} (a-1)^2 - a(a-3) \geqslant 0, \\ 1 - a \leqslant 0, \\ a(a-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant -1, \\ a \geqslant 1, \\ a \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty). \end{cases}$$

$\triangleleft$

3 (). Обозначим через $\max(A, B, C)$ наибольшее из чисел A, B, C. Найдите наимеьшее значение величины $\max\Big(x^2 + |y|, (x +$

Ответ: 1.5.

$\triangleright$ Заметим, что $x^2 = (x+2)^2 = 1$, если $x = -1$. Если $x \neq -1$, то какая-то одна из величин x^2 и $(x+2)^2$ больше чем 1 . Аналогично $|y| = |y-1| = \frac{1}{2}$ при $y = \frac{1}{2}$, а при $y \neq \frac{1}{2}$ какая-то одна из величин $|y|$ и $|y-1|$ больше чем $\frac{1}{2}$. Значит, минимум достигается при $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$. $\triangleleft$

4 (). Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x+2017}+\sqrt{x+2018}} = 42$$

Ответ: 7.

$$\triangleright \quad \begin{aligned} 42 = & \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x+2017}+\sqrt{x+2018}} = \\ = & (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}) + (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3}) + \ldots + \\ & + (\sqrt{x+2018} - \sqrt{x+2017}) = \sqrt{x+2018} - \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 42(\sqrt{x+2018} + \sqrt{x+2}) = 2018 - 2 \Leftrightarrow x = 7. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

5 (). В окружность с центром O вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке M, причём $AM = 4$, $AB = 6$. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали BD, если известно, что стороны AB и AD равноудалены от точки O.

Ответ: $4\sqrt{5}$.

$\triangleright$ $\triangleleft$

6 (). Найдите сумму всех лежащих на отрезке $[-75; 5]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1} \geqslant \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right) - \frac{x}{10}.$$

Ответ: -12.

$\triangleright$ $\triangleleft$

7 (). Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α по часовой стрелке едет автомобиль A, по трассе β против часовой стрелки едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы α, причём эта прямая касается трассы β. После старта автомобили начинают приближаться к точке касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за один час (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этого часа расстояние между автомобилями будет не меньше диаметра каждой трассы?

Ответ: $\frac{1}{2}$ часа $= 30$ минут.

$\triangleright$ Пусть радиус кольцевой трассы равен 1. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке старта автомобиля B, осью Ox, проходящей через центр трассы β, и осью Oy, проходящей через центр трассы α. Тогда координаты центров трасс α и β соответственно равны $(0; -\sqrt{3})$ и $(1; 0)$. Если $t-$ время движения автомобилей от точки старта (в часах) и $\varphi = 2\pi t$, то через t часов после старта автомобили будут иметь координаты: $A(\sin\varphi; -\sqrt{3} + \cos\varphi), B(1 - \cos\varphi; -\sin\varphi)$. Тогда

$$AB^2 = (\sin\varphi + \cos\varphi - 1)^2 + (\sin\varphi + \cos\varphi - \sqrt{3})^2 = 4\cos^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + 4$$

Требуется найти время, в течение которого

$$AB \geqslant 2 \Leftrightarrow AB^2 \geqslant 4 \Leftrightarrow 2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\left(2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}(1+\sqrt{3})\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0$$

(последняя равносильность следует из того, что второй сомножитель в предпоследнем неравенстве всегда отрицателен). Решения последнего неравенства заполняют половину тригонометрической окружности, поэтому указанное условие будет выполняться половину времени движения автомобилей. $\triangleleft$

8 (). В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если площадь грани BCD равна s и $AB = CD$, $AD = BC$.

Ответ: $4s$.

$\triangleright$ Докажем, что грани пирамиды - равные треугольники. Для этого рассмотрим развёртку $AD'''BD'CD''$ пирамиды $ABCD$, где $AD'' = AD''' = AD, BD''' = BD' = BD, CD'' = CD' = CD$.

Пусть $\angle BAC = \alpha, \angle BAD''' = \beta, \angle CAD'' = \gamma$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то точки D'', A, D''' лежат на одной прямой. Так как $AD'' = BC, AB = D''C$, то $ABCD''$ - параллелограмм и $BC \| AD''$. Аналогично $AD'''BC$ - тоже параллелограмм. Треугольник ACD'' равен треугольнику BCD'. Значит, грани пирамиды - равные треугольники. $\triangleleft$

1. Сколько натуральных чисел, делящихся на 4 и меньший 1000, не содержат в десятичной записи ни одной из цифр 3, 4, 5, 7 и 9?

2. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+a^2-a-2=0$$

имеет решения.

3. Обозначим через $\max(A,B,C)$ наибольшее из чисел A,B,C. Найдите наимеьшее значение величины $\max\Big(x^2+|y|,(x+2)^2+|y|,x^2+|y-1|\Big)$.

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2017}+\sqrt{x+2018}}=42$$

5. В окружность с центром O вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке M, причём $AM=4$, $AB=6$. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали BD, если известно, что стороны AB и AD равноудалены от точки O.

6. Найдите сумму всех лежащих на отрезке $[-75;5]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1}\geqslant\sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right)-\frac{x}{10}.$$

7. Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α по часовой стрелке едет автомобиль A, по трассе β против часовой стрелки едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы α, причём эта прямая касается трассы β. После старта автомобили начинают приближаться к точке касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за один час (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этого часа расстояние между автомобилями будет не меньше диаметра каждой трассы?

8. В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна 180°. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если площадь грани BCD равна s и $AB=CD$, $AD=BC$.