Курсовая работа

О расстоянии Громова–Хаусдорфа между облаком ограниченных метрических пространств и облаком с нетривиальной стационарной группой

On the Gromov–Hausdorff distance between the cloud of bounded metric spaces and a cloud with nontrivial stabilizer

Нестеров Борис Аркадьевич
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений
Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Тужилин Алексей Августинович

1. Введение

Привет!

2. Два определения угла

В данной секции мы рассмотрим два определения угла облака. Для того, чтобы дать эти определения сначала необходимо определить угол между пространствами.
Далее, будем считать, что у облаков нетривиальная стационарная группа и будем обозначать $[M]$ - облако с центром m.

Определение 1. *Пусть у облака $[M]$ нетривиальная стационарная группа и его центром является M.* ***Углом*** *между пространствами X_1, X_2, $|X_1 M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1 X_2| = d$, где $r_1, r_2 \neq 0$ называется величина $\arccos\left(\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1 r_2}\right)$.*
Будем обозначать его $\varphi(X_1, X_2)$.

Замечание 1. *Такое определение естественным образом вытекает из теоремы косинусов, а именно $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a, b)$.*

У угла между пространствами есть следующее свойство.

Лемма 1. *Для любых $X_1, X_2 \in [M], \lambda \in \mathrm{St}([M])$ выполняется $\varphi(X_1, X_2) = \varphi(\lambda X_1, \lambda X_2)$.*

Доказательство. Как в определении угла, будем обозначать

$$|X_1 M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1 X_2| = d.$$

По определению угла получаем следующую цепочку равенств:

$$\varphi(\lambda X_1, \lambda X_2) = \frac{\lambda^2 r_1^2 + \lambda^2 r_2^2 - \lambda^2 d^2}{2\lambda r_1 \lambda r_2} = \varphi(X_1, X_2)$$

□

Рассмотрим теперь два интересующих нас определения угла облака.

Определение 2. ***Углом*** *облака $[M]$ называется величина*

$$\varphi\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \bigm| |X_1, M|, |X_2, M| \neq 0\big\}.$$

Определение 3. ***Равнобедренным углом*** *облака $[M]$ называется величина $\varphi_e\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \bigm| |X_1, M| = |X_2, M| \neq 0\big\}$.*

Для этих определений получаем следствие из леммы 1.

Лемма 2. *Углы облаков обладают следующими свойствами:*

1. $\varphi\big(\lambda[M]\big) = \varphi\big([M]\big)$,
2. $\varphi_e\big(\lambda[M]\big) = \varphi_e\big([M]\big)$,
3. $\varphi_e\big([M]\big) \leqslant \varphi\big([M]\big)$,
4. $0 \leqslant \varphi([M]) \leqslant \pi$,
5. $0 \leqslant \varphi_e([M]) \leqslant \pi$.

Доказательство. 1. Следствие леммы 1.

2. Следствие леммы 1.
3. В определении равнобедренного угла супремум берется по подмножеству пространств из определения угла, следовательно равнобедренный угол не больше.
4. Следует из определения арккосинуса и неравенства треугольника.
5. Аналогично.

□

Приведем известные примеры углов облаков.

Гипотеза. *Для облаков* $[\Delta_1], [\mathbb{R}]$ *известно следующее:*

- $\varphi\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{2}$,
- $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{3}$,
- $\varphi\big([\mathbb{R}]\big) = \varphi_e\big([\mathbb{R}]\big) = \pi$.

3. Теорема об образе центра

В предыдущей работе была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть M – центр облака $[M]$, имеющего нетривиальную стационарную группу. R – соответствие между $[\Delta_1]$ и $[M]$ с конечным искажением ε. Тогда образ пространства Δ_1 лежит от M на расстоянии не большем 2ε.*

В ее доказательстве используется следующий факт об облаке $[\Delta_1]$.

Теорема 2. *Для всякого ограниченного пространства X луч λX, $\lambda \in [0, \infty)$ является геодезической. Иначе говоря, для всяких $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty)$ выполняется $|\lambda_1 X, \lambda_2 X| = |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot |X, \Delta_1|$.*

В общем случае это неверно, в частности, в облаке $[\mathbb{R}]$ луч $\lambda\mathbb{Z}$ не является геодезической ([1]).

4. Расстояние между облаками с разными углами бесконечно

В предыдущей работе была доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть у облака $[Z]$ нетривиальная стационарная группа, и Z является его центром. Также, пусть в этом облаке есть пространства Y_1, Y_2 такие, что $\max\big\{|Y_1, Z|, |Y_2, Z|\big\} = r > 0$, а $|Y_1, Y_2| > r$. Тогда, расстояние между облаками $[\Delta_1]$ и $[Z]$ равно бесконечности.*

Для ее доказательства было использована вспомогательная теорема о близости образа центра к центру облака при соответствии. Доказательство следующей теоремы, являющейся обобщением теоремы 3 не основывается на каком-либо обобщении теоремы об образе центра.

Теорема 4. *Пусть облака $[M], [N]$ имеют нетривиальное пересечение стационарных групп и их углы $\varphi\big([M]\big), \varphi\big([N]\big)$ различны. Тогда $d_{GH}\big([M], [N]\big) = \infty$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi\big([M]\big) > \varphi\big([N]\big)$. Для доказательства теоремы покажем, что не существует соответствия $R \in \mathcal{R}\big([M],[N]\big)$ с конечным искажением.

Рассмотрим соответствие R с конечным искажением $\operatorname{dis} R = \varepsilon < \infty$ как отображение из облака $[M]$ в облако $[N]$. За $R(X)$ будем обозначать каком-либо одно пространство из образа X при соответствии.

По определению угла, в облаке $[M]$ найдутся пространства X_1, X_2 для которых выполнено:

$$\varphi\big([N]\big) < \varphi(X_1, X_2) \leqslant \varphi\big([M]\big).$$

Обозначим $|X_1M| = r_1^X, |X_2M| = r_2^X, |X_1X_2| = d^X$. Также зададим функцию

$$d^N\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, d^N(r_1, r_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\Big(\varphi\big([N]\big)\Big)}.$$

Тогда выполняется следующее неравенство:

$$d^N(r_1^X, r_2^X) < d^X.$$

По определению угла для любых пространств $Y_1, Y_2 \in [N]$ выполняется

$$|Y_1Y_2| \leqslant d^N\big(|Y_1N|, |Y_2N|\big). \tag{1}$$

Итак, наша задача - показать, что найдутся пространства в $[N]$, для которых неравенство выше не выполняется.

Нетривиальность пересечения стационарных групп означает, что найдется подгруппа

$$\{q^k, k \in \mathbb{Z}, q > 1\} \in \operatorname{St}\big([M]\big) \cap \operatorname{St}\big([N]\big).$$

Обозначим $|NR(M)| = l$. Будем рассматривать пространства $R(q^kX_1), R(q^kX_2), k \in \mathbb{N}$. Для них выполнены следующие неравенства:

$$\big|R(q^kX_1)R(q^kX_2)\big| \geqslant q^kd^X - \varepsilon,$$
$$q^kr_1^X - \varepsilon \leqslant \big|R(M)R(q^kX_1)\big| \leqslant q^kr_1^X + \varepsilon,$$
$$q^kr_2^X - \varepsilon \leqslant \big|R(M)R(q^kX_2)\big| \leqslant q^kr_2^X + \varepsilon.$$

Из последних двух неравенств по неравенству треугольника получаем следующее:

$$q^kr_1^X - l - \varepsilon \leqslant \big|NR(q^kX_1)\big| \leqslant q^kr_1^X + l + \varepsilon,$$
$$q^kr_2^X - l - \varepsilon \leqslant \big|NR(q^kX_2)\big| \leqslant q^kr_2^X + l + \varepsilon.$$

Если поделить на q^k получаем неравенства:

$$\big|q^{-k}R(q^kX_1)q^{-k}R(q^kX_2)\big| \geqslant d^X - \frac{\varepsilon}{q^k},$$
$$r_1^X - \frac{l+\varepsilon}{q^k} \leqslant \big|Nq^{-k}R(q^kX_1)\big| \leqslant r_1^X + \frac{l+\varepsilon}{q^k},$$
$$r_2^X - \frac{l+\varepsilon}{q^k} \leqslant \big|Nq^{-k}R(q^kX_2)\big| \leqslant r_2^X + \frac{l+\varepsilon}{q^k}.$$

Функция d^N непрерывная, значит

$$\lim_{k\to\infty} d^N\Big(\big|Nq^{-k}R(q^kX_1)\big|, \big|Nq^{-k}R(q^kX_2)\big|\Big) = d^N(r_1^X, r_2^X).$$

Значит, существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\big|q^{-k_0}R(q^{k_0}X_1)q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)\big| > d^N\Big(\big|Nq^{-k_0}R(q_0^kX_1)\big|, \big|Nq^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)\big|\Big)$$

Пространства $q^{-k_0}R(q^{k_0}X_1), q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)$ — искомые, для которых не выполняется неравенство 1. Противоречие. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ivan N. Mikhailov. New geodesic lines in the gromov-hausdorff class lying in the cloud of the real line, 2025.