Курсовая работа

Углы облаков и расстояние Громова–Хаусдорфа между облаками с различными углами

Angles of clouds and the Gromov–Hausdorff distance between clouds with different angles

Нестеров Борис Аркадьевич
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений
Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Тужилин Алексей Августинович

Содержание

1. Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа, впервые введенное в [5] позволяет рассматривать класс метрических пространств, как псевдометрический и изучать свойства его геометрии. Традиционно, изучаются свойства компактных метрических пространств, для которых расстояние Громова–Хаусдорфа становится метрикой [6].

Позднее М. Громов рассматривал в [7] класс всех метрических пространств, не обязательно ограниченных. Одним из свойств этого класса оказалось то, что он разбивается на классы пространств, лежащих на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа друг от друга. Эти классы были впоследствии названы **облаками**. Одним из вопросов была стягиваемость облаков, по аналогии со стягиваемостью метрического класса компактных метрических пространств ([6]) было предположено, что все облака стягиваемы. Для доказательства или опровержения этого факта необходимо было введение дополнительных понятий.

Понятие непрерывного отображения, необходимое для определения стягиваемости, требует топологию образа и прообраза, но так как это отображение действует на собственном классе метрических пространств, возникают затруднения. Собственный класс по своему определению не может быть элементом другого класса, следовательно топологию в привычном смысле ввести нельзя. В [3] авторы использую понятие фильтрации множествами для определения аналога топологии на собственном классе.

Далее встает вопрос о непосредственно стягиваемости, то есть о непрерывности отображения умножения метрического пространства на произвольное положительное вещественное число. В общем случае, это отображение может быть разрывным, например при умножении пространства $\mathbb{Z}$ ([8]), или даже делать расстояние Громова–Хаусдорфа между образом и прообразом бесконечным ([2]). Соответственно, если рассматривать операцию умножения на число, как операцию над облаками, то облако может перейти как в себя, так и в другое облако. В связи с данным свойством, в [1] было введено понятие стационарной группу — мультипликативной группы отображений умножения на число, переводящих облако само в себя. В этой же работе было введено понятие центра облака — пространства переходящего в себя под действием отображений стационарной группы.

В данной работе рассматривается вопрос расстояния Громова–Хаусдорфа между облаками. В предыдущих работах были доказаны некоторые его свойства, в частности, если стационарные группы двух облаков пересекаются нетривиальным образом, то расстояние Громова–Хаусдорфа между ними или 0 или бесконечно. В настоящей работе введено понятие угла облака, и показано, что расстояние Громова–Хаусдорфа между двумя облаками с разными углами равно бесконечности при нетривиальном пересечении их стационарных групп.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, Тужилину А.А. и профессору Иванову А.О. за постановку задачи и плодотворное обсуждение результатов.

2. Предварительные результаты

Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда между ними можно задать расстояние, называемое расстоянием Громова–Хаусдорфа. Введем два его эквивалентных определения [4].

Определение 1. *Пусть X, Y — метрические пространства.* Соответствием *R между этими пространствами называется сюръективное многозначное отображение между ними. Множество всех соответствий между X и Y обозначается $\mathcal{R}(X,Y)$. Также будем отождествлять соответствие и его график.*

Определение 2. *Пусть R — соответствие между X и Y.* Искажением *соответствия*

R является величина

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),(x',y') \in R\Big\}.$$

Тогда расстояние Громова–Хаусдорфа $d_{GH}(X,Y)$ *можно определить следующим образом*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Определение 3. Реализацией *пары метрических пространств (X,Y) назовем тройку метрических пространств (X',Y',Z) таких, что $X' \subset Z$, $Y' \subset Z$, X' изометрично X, Y' изометрично Y.* Расстоянием Громова–Хаусдорфа $d_{GH}(X,Y)$ *между метрическими пространствами X,Y является точная нижняя грань чисел r таких, что существует реализация (X',Y',Z) и $d_H(X',Y') \leqslant r$, где d_H — расстояние Хаусдорфа.*

Далее, расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y будет обозначаться $|XY|$ или $|X,Y|$.

Рассмотрим собственный класс всех метрических пространств и отождествим в нем между собой все метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга. Обозначим получившийся класс $\mathcal{GH}_0$. На нем расстояние Громова – Хаусдорфа будет являться обобщенной метрикой.

Определение 4 ([2]). *В классе $\mathcal{GH}_0$ рассмотрим следующее отношение: $X \sim Y \Leftrightarrow d_{GH}(X,Y) < \infty$. Нетрудно убедиться, что оно будет отношением эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются* облаками. *Облако, в котором лежит метрическое пространство X будем обозначать $[X]$.*

Для любого метрического пространства X определена операция умножения его на положительное вещественное число λ: $X \mapsto \lambda X$, а именно $(X,\rho) \mapsto (X,\lambda\rho)$, расстояние между любыми точками пространства изменяется в λ раз.

Замечание 1. *Пусть метрические пространства X, Y лежат в одном облаке. Тогда $d_{GH}(\lambda X,\lambda Y) = \lambda d_{GH}(X,Y) < \infty$, т.е. пространства λX, λY также будут лежать в одном облаке.*

Определение 5. *Определим операцию умножения облака $[X]$ на положительное вещественное число λ как отображение, переводящее все пространства $Y \in [X]$ в пространства λY. По замечанию 1 все полученные пространства будут лежать в облаке $[\lambda X]$.*

При таком отображении облако может как измениться, так и перейти в себя. Для последнего случая вводится специальное определение.

Определение 6 ([1]). *Стационарной группой $\operatorname{St}\big([X]\big)$ облака $[X]$ называется подмножество $\mathbb{R}_+$ такое, что для всех $\lambda \in \operatorname{St}\big([X]\big)$, $[X] = [\lambda X]$. Полученное подмножество действительно будет подгруппой в $\mathbb{R}_+$. Тривиальной будем называть стационарную группу равную $\{1\}$.*

Лемма 1 ([1]). *В каждом облаке с нетривиальной стационарной группой существует единственное пространство X такое, что для любого λ из стационарной группы выполняется $X = \lambda X$.*

Определение 7. *Пространство из леммы 1 будем называть* центром *облака.*

Замечание 2. *В облаке $[\Delta_1]$ для любого пространства X выполняется:*

$$|\lambda X \mu X| = |\lambda - \mu||X\Delta_1|.$$

Замечание 3 (Ультраметрическое неравенство). *В облаке $[\Delta_1]$ для всех пространств X_1, X_2 выполняется неравенство:*

$$|X_1X_2| \leqslant \max\big\{|X_1\Delta_1|, |X_2\Delta_1|\big\}$$

3. Два определения угла

В данной секции мы рассмотрим два определения угла облака. Для того, чтобы дать эти определения сначала необходимо определить угол между пространствами.
Далее, будем считать, что у облаков нетривиальная стационарная группа и будем обозначать $[M]$ - облако с центром m.

Определение 8. *Пусть у облака $[M]$ нетривиальная стационарная группа и его центром является M. **Углом** между пространствами X_1, X_2, $|X_1M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1X_2| = d$, где $r_1, r_2 \neq 0$ называется величина* $\arccos\left(\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}\right)$.
Будем обозначать его $\varphi(X_1, X_2)$.

Замечание 4. *Такое определение естественным образом вытекает из теоремы косинусов, а именно $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a, b)$.*

У угла между пространствами есть следующее свойство.

Лемма 2. *Для любых $X_1, X_2 \in [M], \lambda \in \mathrm{St}([M])$ выполняется $\varphi(X_1, X_2) = \varphi(\lambda X_1, \lambda X_2)$.*

Доказательство. Как в определении угла, будем обозначать

$$|X_1M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1X_2| = d.$$

По определению угла получаем следующую цепочку равенств:

$$\varphi(\lambda X_1, \lambda X_2) = \frac{\lambda^2r_1^2 + \lambda^2r_2^2 - \lambda^2d^2}{2\lambda r_1\lambda r_2} = \varphi(X_1, X_2).$$

□

Рассмотрим теперь два интересующих нас определения угла облака.

Определение 9. ***Углом** облака $[M]$ называется величина*

$$\varphi\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \bigm| |X_1, M|, |X_2, M| \neq 0\big\}.$$

Определение 10. ***Равнобедренным углом** облака $[M]$ называется величина $\varphi_e\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2) \bigm| |X_1, M| = |X_2, M| \neq 0\big\}$.*

Для этих определений получаем следствие из леммы 2.

Лемма 3. *Углы облаков обладают следующими свойствами:*

1. $\varphi\big(\lambda[M]\big) = \varphi\big([M]\big)$,

2. $\varphi_e\big(\lambda[M]\big) = \varphi_e\big([M]\big)$,

3. $\varphi_e\big([M]\big) \leqslant \varphi\big([M]\big)$,

4. $0 \leqslant \varphi([M]) \leqslant \pi$,

5. $0 \leqslant \varphi_e([M]) \leqslant \pi$.

Доказательство. 1. Следствие леммы 2.

2. Следствие леммы 2.

3. В определении равнобедренного угла супремум берется по подмножеству пространств из определения угла, следовательно равнобедренный угол не больше.

4. Следует из определения арккосинуса и неравенства треугольника.

5. Аналогично.

$\square$

Приведем известные примеры углов облаков.

Лемма 4. *Для облаков $[\Delta_1], [\mathbb{R}]$ известно следующее:*

1. $\varphi\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{2}$,

2. $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{3}$,

3. $\varphi\big([\mathbb{R}]\big) = \varphi_e\big([\mathbb{R}]\big) = \pi$.

Доказательство. 1. Из ультраметрического неравенства следует, что $\varphi\big([\Delta_1]\big) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Для доказательства обратного неравенства найдем угол между двухточечным симплексом $\Delta_2 = \{x_1, x_2\}$ и трехточечным симплексом $\lambda\Delta_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$. Заметим, что если R — соответствие между $\Delta_2, \lambda\Delta_3$, то в нем найдутся пары точек $(x_i, y_j), (x_i, y_k), j \neq k$. Значит $\operatorname{dis} R \geqslant \big||x_i x_i| - |y_j y_k|\big| = \lambda$. Ясно, что существует R такое, что $\operatorname{dis} R = \lambda$. Отсюда $d_{GH}(\Delta_2, \lambda\Delta_3) = \frac{\lambda}{2}$. Далее, учитывая, что $|\Delta_1\Delta_2| = \frac{1}{2}, |\Delta_1\lambda\Delta_3| = \frac{\lambda}{2}$, найдем угол между $\Delta_2, \lambda\delta_3$:

$$\cos\big(\varphi(\Delta_2, \lambda\Delta_3)\big) = \frac{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{4}}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{2\lambda} \to 0, \lambda \to \infty.$$

Отсюда, $\varphi\big([\Delta_1]\big) \geqslant \sup \varphi(\Delta_2, \lambda\Delta_3) = \frac{\pi}{2}$.

2. Из ультраметрического неравенства следует, что $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) \leqslant \frac{\pi}{3}$. Для доказательства обратного неравенства достаточно найти пространства одинакового диаметра, расстояние между которыми равно их диаметрам. Этими пространствами являются, например, Δ_2, Δ_3.

3. Достаточно привести пример пространств $X, Y \in [\mathbb{R}]$, таких, что $|X\mathbb{R}| = |Y\mathbb{R}| = \frac{1}{2}|XY|$. Такими пространствами являются $\mathbb{Z}, \mathbb{R} \times [0, 1]$.

$\square$

4. Расстояние между облаками с разными углами бесконечно

В предыдущей работе была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть у облака $[Z]$ нетривиальная стационарная группа, и Z является его центром. Также, пусть в этом облаке есть пространства Y_1, Y_2 такие, что $\max\{|Y_1, Z|, |Y_2, Z|\} = r > 0$, а $|Y_1, Y_2| > r$. Тогда, расстояние между облаками $[\Delta_1]$ и $[Z]$ равно бесконечности.*

Следующая теорема является обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть облака $[M], [N]$ имеют нетривиальное пересечение стационарных групп и их углы $\varphi([M]), \varphi([N])$ различны. Тогда $d_{GH}([M], [N]) = \infty$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi([M]) > \varphi([N])$. Для доказательства теоремы покажем, что не существует соответствия $R \in \mathcal{R}([M], [N])$ с конечным искажением.

Рассмотрим соответствие R с конечным искажением $\operatorname{dis} R = \varepsilon < \infty$ как отображение из облака $[M]$ в облако $[N]$. За $R(X)$ будем обозначать каком-либо одно пространство из образа X при соответствии.

По определению угла, в облаке $[M]$ найдутся пространства X_1, X_2 для которых выполнено:

$$\varphi([N]) < \varphi(X_1, X_2) \leqslant \varphi([M]).$$

Обозначим $|X_1 M| = r_1^X, |X_2 M| = r_2^X, |X_1 X_2| = d^X$. Также зададим функцию

$$d^N : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, d^N(r_1, r_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\Big(\varphi([N])\Big)}.$$

Тогда выполняется следующее неравенство:

$$d^N(r_1^X, r_2^X) < d^X.$$

По определению угла для любых пространств $Y_1, Y_2 \in [N]$ выполняется

$$|Y_1 Y_2| \leqslant d^N(|Y_1 N|, |Y_2 N|). \tag{1}$$

Итак, наша задача - показать, что найдутся пространства в $[N]$, для которых неравенство выше не выполняется.

Нетривиальность пересечения стационарных групп означает, что найдется подгруппа

$$\{q^k, k \in \mathbb{Z}, q > 1\} \in \operatorname{St}([M]) \cap \operatorname{St}([N]).$$

Обозначим $|NR(M)| = l$. Будем рассматривать пространства $R(q^k X_1), R(q^k X_2), k \in \mathbb{N}$. Для них выполнены следующие неравенства:

$$\big|R(q^k X_1), R(q^k X_2)\big| \geqslant q^k d^X - \varepsilon,$$

$$q^k r_1^X - \varepsilon \leqslant \big|R(M), R(q^k X_1)\big| \leqslant q^k r_1^X + \varepsilon,$$
$$q^k r_2^X - \varepsilon \leqslant \big|R(M), R(q^k X_2)\big| \leqslant q^k r_2^X + \varepsilon.$$

Из последних двух неравенств по неравенству треугольника получаем следующее:

$$q^k r_1^X - l - \varepsilon \leqslant \big|N, R(q^k X_1)\big| \leqslant q^k r_1^X + l + \varepsilon,$$

$$q^k r_2^X - l - \varepsilon \leqslant \big|N, R(q^k X_2)\big| \leqslant q^k r_2^X + l + \varepsilon.$$

Если поделить на q^k получаем неравенства:

$$\big|q^{-k}R(q^k X_1), q^{-k}R(q^k X_2)\big| \geqslant d^X - \frac{\varepsilon}{q^k},$$

$$r_1^X - \frac{l+\varepsilon}{q^k} \leqslant \big|N, q^{-k}R(q^k X_1)\big| \leqslant r_1^X + \frac{l+\varepsilon}{q^k},$$

$$r_2^X - \frac{l+\varepsilon}{q^k} \leqslant \big|N, q^{-k}R(q^k X_2)\big| \leqslant r_2^X + \frac{l+\varepsilon}{q^k}.$$

Функция d^N непрерывная, значит

$$\lim_{k\to\infty} d^N\Big(\big|N, q^{-k}R(q^k X_1)\big|, \big|N, q^{-k}R(q^k X_2)\big|\Big) = d^N(r_1^X, r_2^X).$$

Значит, существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\big|q^{-k_0}R(q^{k_0} X_1), q^{-k_0}R(q^{k_0} X_2)\big| > d^N\Big(\big|N, q^{-k_0}R(q_0^k X_1)\big|, \big|N, q^{-k_0}R(q^{k_0} X_2)\big|\Big)$$

Пространства $q^{-k_0}R(q^{k_0}X_1), q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)$ — искомые, для которых не выполняется неравенство 1. Противоречие. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. I. Bogataya, S. A. Bogatyy, V. V. Redkozubov, and A. A. Tuzhilin. Clouds in Gromov-Hausdorff Class: their completeness and centers, February 2022. arXiv:2202.07337 [math].

2. Semeon A. Bogaty and Alexey A. Tuzhilin. Gromov-Hausdorff class: its completeness and cloud geometry, October 2021. arXiv:2110.06101 [math].

3. S. I. Borzov, A. O. Ivanov, and A. A. Tuzhilin. Extendability of Metric Segments in Gromov–Hausdorff Distance, August 2020. arXiv:2009.00458 [math].

4. Dmitri Burago, Yuri Dmitrievich Burago, and Sergei Ivanov. *A Course in Metric Geometry.* American Mathematical Soc., 2001. Google-Books-ID: dRmIAwAAQBAJ.

5. David A. Edwards. The Structure of Superspace. In Nick M. Stavrakas and Keith R. Allen, editors, *Studies in Topology*, pages 121–133. Academic Press, January 1975.

6. Mikhael Gromov. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* CEDIC/Fernand Nathan, 1981. Google-Books-ID: TxN0QgAACAAJ.

7. Mikhail Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces.* Springer Science & Business Media, 1991.

8. Ivan N. Mikhailov. New geodesic lines in the Gromov-Hausdorff class lying in the cloud of the real line, April 2025. arXiv:2504.14629 [math].