**Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова**

Механико-математический факультет
Кафедра дифференциальной геометрии и приложений

КУРСОВАЯ РАБОТА

Углы облаков и расстояние Громова–Хаусдорфа между облаками с различными углами

Angles of clouds and the Gromov–Hausdorff distance between clouds with different angles

Выполнил студент 5 курса
Нестеров Б. А.

Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. А.А. Тужилин

Москва 2024

Содержание

1. Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа, впервые введенное в [1] позволяет рассматривать класс метрических пространств с точностью до изометрии как псевдометрический и изучать свойства его геометрии. Псевдометрический означает, что расстояние между различными элементами может быть равно 0. Также, расстояние Громова–Хаусдорфа между пространствами может быть равно ∞. В дальнейшем мы будем считать, что все метрические пространства рассматриваются с точностью до нулевого расстояния Громова–Хаусдорфа. Традиционно, изучаются свойства компактных метрических пространств, для которых расстояние Громова–Хаусдорфа становится метрикой ([2]).

Все компактные метрические пространства образуют множество. При введении на них расстояния Громова–Хаусдорфа это множество становится метрическим пространством. Данное пространство называется **пространством Громова–Хаусдорфа**. Пространство Громова–Хаусдорфа стягиваемо, так как операция умножения метрического пространства на $\lambda \in \mathbb{R}^+$, как функция от двух аргументов является непрерывной. Это означает, что она является гомотопией в пространство Δ_1, т. е. в пространство, состоящее из одной точки.

Позднее М. Громов рассматривал в [3] класс всех метрических пространств, не обязательно ограниченных. Одним из свойств этого класса оказалось то, что он разбивается на классы пространств, лежащих на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа друг от друга. Эти классы были впоследствии названы **облаками**. Одним из вопросов была стягиваемость облаков. По аналогии со стягиваемостью метрического класса ограниченных метрических пространств было предположено ([2]), что все облака стягиваемы. Для доказательства или опровержения этого факта необходимо было введение дополнительных понятий.

Понятие непрерывного отображения, необходимое для определения стягиваемости, требует топологию образа и прообраза, но так как это отображение действует на собственном классе метрических пространств, возникают затруднения. Собственный класс по своему определению не может быть элементом другого класса, следовательно топологию в привычном смысле ввести нельзя. В [4] авторы используют понятие фильтрации множествами для определения аналога топологии на собственном классе.

При помощи данной конструкции можно доказать стягиваемость облака ограниченных метрических пространств по аналогии со случаем пространства Громова–Хаусдорфа. В данном случае под стягиваемостью понимается непрерывность отображения умножения пространства на положительное вещественное число. В общем случае, это отображение может быть разрывным, например при умножении пространства $\mathbb{Z}$ ([5]). Также, при умножении пространства на λ, оно может перейти в пространство на бесконечном расстоянии от изначального ([6]). Соответственно, если рассматривать операцию умножения на число, как операцию над облаками, то облако может перейти как в себя, так и в другое облако. В связи с данным свойством, в [7] было введено понятие стационарной группы — мультипликативной группы отображений умножения на число, переводящих облако само в себя. В этой же работе было введено понятие центра облака — пространства, переходящего в себя под действием отображений стационарной группы. В [7] авторы доказали, что у любого облака со стационарной группой не равной $\{1\}$ существует единственный центр.

Одним из способов задания расстояния Громова–Хаусдорфа является конструкция соответствий. При этом, для задания соответствия не обязательно, чтобы классы, между которыми оно определяется были множествами. Это позволяет перенести эту конструкцию на облака и определить для них расстояние Громова–Хаусдорфа. В данной работе изучается расстояние Громова–Хаусдорфа между облаками. В предыдущих курсовых работах были доказаны некоторые его свойства, в частности, если стационарные группы двух облаков пересекаются нетривиальным образом, то расстояние Громова–Хаусдорфа между ними или 0 или бесконечно. В настоящей работе введено понятие угла облака и показано, что расстояние Громова–

Хаусдорфа между двумя облаками с разными углами равно бесконечности при нетривиальном пересечении их стационарных групп.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору Тужилину А.А. и профессору Иванову А.О. за постановку задачи и плодотворное обсуждение результатов.

2. Предварительные результаты

Пусть X и Y — метрические пространства. Расстояние между точками метрического пространства x, x' будем обозначать $|xx'|$. Между метрическими пространствами можно задать расстояние, называемое расстоянием Громова–Хаусдорфа. Введем два его эквивалентных определения [8].

Определение 2.1. Пусть X, Y — метрические пространства. *Соответствием* R между этими пространствами называется сюръективное многозначное отображение между ними. Множество всех соответствий между X и Y обозначается $\mathcal{R}(X, Y)$. Также будем отождествлять соответствие и его график.

Определение 2.2. Пусть R — соответствие между X и Y. *Искажением* соответствия R является величина

$$\operatorname{dis} R = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y), (x', y') \in R\Big\}.$$

Тогда *расстояние Громова–Хаусдорфа* $d_{GH}(X, Y)$ можно определить следующим образом

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Далее, расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y будет обозначаться $|XY|$ или $|X, Y|$.

Рассмотрим собственный класс всех метрических пространств и отождествим в нем между собой все метрические пространства, находящиеся на нулевом расстоянии друг от друга. Обозначим получившийся класс $\mathcal{GH}_0$. На нем расстояние Громова–Хаусдорфа будет являться обобщенной метрикой. Здесь «обобщенная», означает, что расстояние между метрическими пространствами может быть равно бесконечности.

Определение 2.3 ([6])**.** В классе $\mathcal{GH}_0$ рассмотрим следующее отношение: $X \sim Y \Leftrightarrow d_{GH}(X, Y) < \infty$. Нетрудно убедиться, что оно будет отношением эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются *облаками.* Облако, в котором лежит метрическое пространство X будем обозначать $[X]$.

Для любого метрического пространства X определена операция умножения его на положительное вещественное число λ: $X \mapsto \lambda X$, а именно расстояние между любыми точками пространства умножается на λ.

Замечание 2.4. Пусть метрические пространства X, Y лежат в одном облаке. Тогда $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y) < \infty$, т.е. пространства λX, λY также будут лежать в одном облаке.

Определение 2.5. Определим операцию умножения облака $[X]$ на положительное вещественное число λ как отображение, переводящее все пространства $Y \in [X]$ в пространства λY. По замечанию 2.4 все полученные пространства будут лежать в облаке $[\lambda X]$.

При таком отображении облако может как измениться, как было показано в [7], так и перейти в себя. Для последнего случая вводится специальное определение.

Определение 2.6 ([7]). *Стационарной группой* $\mathrm{St}\big([X]\big)$ облака $[X]$ называется подмножество $\mathbb{R}_+$, то есть множества всех положительных вещественных чисел, такое, что для всех $\lambda \in \mathrm{St}\big([X]\big)$, $[X] = [\lambda X]$. Полученное подмножество действительно будет подгруппой в $\mathbb{R}_+$. Тривиальной будем называть стационарную группу, равную $\{1\}$. Пересечение двух стационарных групп называем нетривиальным, если оно не равно $\{1\}$.

Лемма 2.7 ([7]). *В каждом облаке с нетривиальной стационарной группой существует единственное пространство X такое, что для любого λ из стационарной группы выполняется $X = \lambda X$.*

Определение 2.8. Пространство из леммы 2.7 будем называть *центром* облака.

Определение 2.9. Пространство мощности n, в котором все расстояния между неравными точками равны 1 называется *симплексом* мощности n и обозначается Δ_n. Так, например, Δ_1 — одноточечное пространство.

Замечание 2.10. В облаке $[\Delta_1]$ для любого пространства X выполняется:

$$|\lambda X \mu X| = |\lambda - \mu||X\Delta_1|.$$

Замечание 2.11 (Ультраметрическое неравенство)**.** В облаке $[\Delta_1]$ для всех пространств X_1, X_2 выполняется неравенство:

$$|X_1X_2| \leqslant \max\big\{|X_1\Delta_1|, |X_2\Delta_1|\big\}.$$

3. Два определения угла

В данном разделе мы рассмотрим два определения угла облака. Для того, чтобы дать эти определения сначала необходимо определить угол между пространствами.
В дальнейшем будем считать, что у облаков нетривиальная стационарная группа и в обозначении облака $[M]$, M является его центром.

Определение 3.1. *Углом* между пространствами $X_1, X_2 \in [M]$ такими, что $|X_1M| = r_1, |X_2M| = r_2, |X_1X_2| = d$, где $r_1, r_2 \neq 0$ называется величина $\arccos\left(\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}\right)$.
Будем обозначать его $\varphi(X_1, X_2)$.

Замечание 3.2. Такое определение естественным образом вытекает из евклидовой теоремы косинусов, а именно $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a, b)$.

Прежде, чем формулировать свойство угла, нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 3.3. *Для любого облака $[M]$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$ выполняются следующие свойства*:

(1) $\mathrm{St}\left(\lambda[M]\right) = \mathrm{St}\left([M]\right)$,

(2) $\lambda[M] = [\lambda M]$.

Доказательство. (1) Пусть $\mu \in \mathrm{St}\big([M]\big)$. Тогда $\mu \cdot \lambda[M] = \lambda \cdot \mu[M] = \lambda[M]$, т. е. $\mu \in \mathrm{St}\big(\lambda[M]\big)$. Отсюда $\mathrm{St}\big([M]\big) \subseteq \mathrm{St}\big(\lambda[M]\big)$. Обратное включение получается если рассмотреть облако $[M]$ как $\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda[M]$.

(2) Так как стационарные группы совпадают, для любого $\mu \in \mathrm{St}\big(\lambda[M]\big)$ выполняется $\mu \cdot \lambda M = \lambda \cdot \mu M = \lambda M$. Значит, λM — центр облака $\lambda[M]$. □

У угла между пространствами есть следующее свойство.

Лемма 3.4. *Для любых* $X_1, X_2 \in [M], \lambda \in \mathbb{R}^+$ *выполняется* $\varphi(X_1, X_2) = \varphi(\lambda X_1, \lambda X_2)$.

Доказательство. По лемме 3.3 пространство λM будет центром $\lambda[M]$. Как в определении угла, положим

$$|X_1 M| = r_1, |X_2, M| = r_2, |X_1 X_2| = d.$$

По определению угла получаем следующую цепочку равенств:

$$\varphi(\lambda X_1, \lambda X_2) = \frac{\lambda^2 r_1^2 + \lambda^2 r_2^2 - \lambda^2 d^2}{2\lambda r_1 \lambda r_2} = \varphi(X_1, X_2).$$

На этом доказательство закончено. □

Рассмотрим теперь два интересующих нас определения угла облака.

Определение 3.5. *Углом* облака $[M]$ называется величина

$$\varphi\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2)\colon |X_1, M|, |X_2, M| \neq 0\big\}.$$

Определение 3.6. *Равнобедренным углом* облака $[M]$ называется величина $\varphi_e\big([M]\big) = \sup\big\{\varphi(X_1, X_2)\colon |X_1, M| = |X_2, M| \neq 0\big\}$.

Для этих определений получаем следствие из леммы 3.4.

Лемма 3.7. *Для любого облака* $[M]$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *выполняется*:

(1) $\varphi\big(\lambda[M]\big) = \varphi\big([M]\big)$,

(2) $\varphi_e\big(\lambda[M]\big) = \varphi_e\big([M]\big)$,

(3) $\varphi_e\big([M]\big) \leqslant \varphi\big([M]\big)$,

(4) $0 \leqslant \varphi([M]) \leqslant \pi$,

(5) $0 \leqslant \varphi_e([M]) \leqslant \pi$.

Доказательство. (1) Следствие леммы 3.4.

(2) Следствие леммы 3.4.

(3) В определении равнобедренного угла супремум берется по подмножеству пространств из определения угла, следовательно равнобедренный угол не больше.

(4) Следует из определения арккосинуса и неравенства треугольника.

(5) Аналогично. □

Приведем примеры углов облаков.

Лемма 3.8. *Для облаков* $[\Delta_1], [\mathbb{R}]$ *выполняются следующие равенства:*

(1) $\varphi\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{2}$,

(2) $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) = \frac{\pi}{3}$,

(3) $\varphi\big([\mathbb{R}]\big) = \varphi_e\big([\mathbb{R}]\big) = \pi$.

Доказательство. (1) Из ультраметрического неравенства следует, что $\varphi\big([\Delta_1]\big) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Для доказательства обратного неравенства найдем угол между двухточечным симплексом $\Delta_2 = \{x_1, x_2\}$ и трехточечным симплексом $\lambda\Delta_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$. Воспользуемся формулой, доказанной в [9] для нахождения расстояния Громова–Хаусдорфа между двумя трехточечными пространствами:

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\max\big\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|, |c_1 - c_2|\big\}.$$

Здесь $a_1 \leqslant b_1 \leqslant c_1$ — расстояния между точками в пространстве X, $a_2 \leqslant b_2 \leqslant c_2$ — расстояния между точками в пространстве Y. В нашем случае это $0, 1, 1$ и $\lambda, \lambda, \lambda$. Соответственно,

$$d_{GH}(\Delta_2, \lambda\Delta_3) = \frac{1}{2}\max\big\{|\lambda|, |\lambda - 1|, |\lambda - 1|\big\},$$

что при $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ равно $\frac{\lambda}{2}$. Итак, $d_{GH}(\Delta_2, \lambda\Delta_3) = \frac{\lambda}{2}$. Далее, учитывая, что $|\Delta_1\Delta_2| = \frac{1}{2}, |\Delta_1\lambda\Delta_3| = \frac{\lambda}{2}$, найдем угол между $\Delta_2, \lambda\Delta_3$:

$$\cos\big(\varphi(\Delta_2, \lambda\Delta_3)\big) = \frac{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\lambda^2}{4}}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{2\lambda} \to 0, \lambda \to \infty.$$

Отсюда, $\varphi\big([\Delta_1]\big) \geqslant \sup\varphi(\Delta_2, \lambda\Delta_3) = \frac{\pi}{2}$.

(2) Из ультраметрического неравенства следует, что $\varphi_e\big([\Delta_1]\big) \leqslant \frac{\pi}{3}$. Для доказательства обратного неравенства достаточно найти пространства одинакового диаметра, расстояние между которыми равно их диаметрам. Этими пространствами являются, например, Δ_2, Δ_3.

(3) Достаточно привести пример пространств $X, Y \in [\mathbb{R}]$, таких, что $|X\mathbb{R}| = |Y\mathbb{R}| = \frac{1}{2}|XY|$. В [10] было доказано, что такими пространствами являются $\mathbb{Z}, \mathbb{R} \times [0, 1]$.

□

4. Расстояние между облаками с разными углами

В работе [11] была доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть в облаке $[Z]$ есть пространства Y_1, Y_2 такие, что $\max\big\{|Y_1Z|, |Y_2Z|\big\} = r > 0$, а $|Y_1Y_2| > r$. Тогда, расстояние между облаками $[\Delta_1]$ и $[Z]$ равно бесконечности.*

Следующая теорема является обобщением теоремы 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть облака $[M], [N]$ имеют нетривиальное пересечение стационарных групп и их углы $\varphi\big([M]\big), \varphi\big([N]\big)$ различны. Тогда $d_{GH}\big([M], [N]\big) = \infty$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi\big([M]\big) > \varphi\big([N]\big)$. Для доказательства теоремы покажем, что не существует соответствия $R \in \mathcal{R}\big([M], [N]\big)$ с конечным искажением.

Предположим противное, т. е. существует соответствие R с конечным искажением $\operatorname{dis} R = \varepsilon < \infty$ как отображение из облака $[M]$ в облако $[N]$. Построим функцию $f\colon [M] \to [N]$, $f(X)$ – произвольное пространство из $R(X)$. По определению угла, в облаке $[M]$ найдутся пространства X_1, X_2, для которых выполнено

$$\varphi\big([N]\big) < \varphi(X_1, X_2) \leqslant \varphi\big([M]\big).$$

Положим $|X_1M| = r_1^X, |X_2M| = r_2^X, |X_1X_2| = d^X$. Также зададим функцию

$$d^N\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, d^N(r_1, r_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\Big(\varphi\big([N]\big)\Big)}.$$

Тогда выполняется следующее неравенство:

$$d^N(r_1^X, r_2^X) < d^X. \tag{1}$$

По определению угла для любых пространств $Y_1, Y_2 \in [N]$ выполняется

$$|Y_1Y_2| \leqslant d^N\big(|Y_1N|, |Y_2N|\big). \tag{2}$$

Итак, наша задача — показать, что найдутся пространства в $[N]$, для которых неравенство (2) не выполняется.

Нетривиальность пересечения стационарных групп означает, что найдется подгруппа

$$\{q^k\colon k \in \mathbb{Z}, q > 1\} \in \mathrm{St}\,\big([M]\big) \cap \mathrm{St}\,\big([N]\big).$$

Положим $|NR(M)| = l$. Будем рассматривать пространства $R(q^kX_1), R(q^kX_2), k \in \mathbb{N}$. Для них выполнены следующие неравенства:

$$\big|R(q^kX_1), R(q^kX_2)\big| \geqslant q^kd^X - \varepsilon, \tag{3}$$

$$q^kr_1^X - \varepsilon \leqslant \big|R(M), R(q^kX_1)\big| \leqslant q^kr_1^X + \varepsilon,$$

$$q^kr_2^X - \varepsilon \leqslant \big|R(M), R(q^kX_2)\big| \leqslant q^kr_2^X + \varepsilon.$$

Из последних двух неравенств по неравенству треугольника получаем следующее:

$$q^kr_1^X - l - \varepsilon \leqslant \big|N, R(q^kX_1)\big| \leqslant q^kr_1^X + l + \varepsilon, \tag{4}$$

$$q^kr_2^X - l - \varepsilon \leqslant \big|N, R(q^kX_2)\big| \leqslant q^kr_2^X + l + \varepsilon. \tag{5}$$

Поделим неравенства (3), (4), (5) на q^k:

$$\big|q^{-k}R(q^kX_1), q^{-k}R(q^kX_2)\big| \geqslant d^X - \frac{\varepsilon}{q^k},$$

$$r_1^X - \frac{l+\varepsilon}{q^k} \leqslant \big|N, q^{-k}R(q^kX_1)\big| \leqslant r_1^X + \frac{l+\varepsilon}{q^k},$$

$$r_2^X - \frac{l+\varepsilon}{q^k} \leqslant \big|N, q^{-k}R(q^kX_2)\big| \leqslant r_2^X + \frac{l+\varepsilon}{q^k}.$$

Функция d^N непрерывная, значит

$$\lim_{k\to\infty} d^N\Big(\big|N, q^{-k}R(q^kX_1)\big|, \big|N, q^{-k}R(q^kX_2)\big|\Big) = d^N(r_1^X, r_2^X).$$

Из неравенства (1) следует, что найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $d^N(r_1^X, r_2^X) < d^N(r_1^X, r_2^X) + \delta_1 < d^X - \delta_2 < d^X$. Выберем такое k_1, чтобы для всех $k > k_1$ выполнялось

$$d^N\Big(\big|N, q^{-k}R(q^kX_1)\big|, \big|N, q^{-k}R(q^kX_2)\big|\Big) \in \big(d^N(r_1^X, r_2^X) - \delta_1, d^N(r_1^X, r_2^X) + \delta_1\big).$$

Также выберем k_2, такое что $\big|q^{-k}R(q^kX_1), q^{-k}R(q^kX_2)\big| > d^X - \delta_2$. Теперь, если взять $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, то

$$\big|q^{-k_0}R(q^{k_0}X_1), q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)\big| > d^N\Big(\big|N, q^{-k_0}R(q_0^kX_1)\big|, \big|N, q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)\big|\Big)$$

Пространства $q^{-k_0}R(q^{k_0}X_1), q^{-k_0}R(q^{k_0}X_2)$ — искомые, для которых не выполняется неравенство (2). Противоречие. □

Список литературы

[1] D. A. Edwards, «The Structure of Superspace,» в *Studies in Topology*, N. M. Stavrakas и K. R. Allen, ред., Academic Press, янв. 1975, с. 121—133, ISBN: 978-0-12-663450-1. DOI: `10.1016/B978-0-12-663450-1.50017-7`.

[2] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, fr. CEDIC/Fernand Nathan, 1981, Google-Books-ID: TxN0QgAACAAJ, ISBN: 978-2-7124-0714-8.

[3] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, en. Springer Science & Business Media, 1991, ISBN: 978-0-8176-3898-6.

[4] S. I. Borzov, A. O. Ivanov и A. A. Tuzhilin, *Extendability of Metric Segments in Gromov–Hausdorff Distance*, 2020. arXiv: `2009.00458 [math.MG]`.

[5] I. N. Mikhailov, *New geodesic lines in the Gromov-Hausdorff class lying in the cloud of the real line*, 2025. arXiv: `2504.14629 [math.MG]`.

[6] S. A. Bogaty и A. A. Tuzhilin, *Gromov-Hausdorff class: its completeness and cloud geometry*, 2021. arXiv: `2110.06101 [math.MG]`.

[7] S. I. Bogataya, S. A. Bogatyy, V. V. Redkozubov и A. A. Tuzhilin, *Clouds in Gromov-Hausdorff Class: their completeness and centers*, 2022. arXiv: `2202.07337 [math.MG]`.

[8] D. Burago, Y. D. Burago и S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, en. American Mathematical Soc., 2001, Google-Books-ID: dRmIAwAAQBAJ, ISBN: 978-0-8218-2129-9.

[9] A. Ivanov и A. Tuzhilin, *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings*, 2016. arXiv: `1604.06116 [math.MG]`.

[10] I. N. Mikhailov, *Расстояния Громова–Хаусдорфа между неограниченными метрическими пространствами*, 2025.

[11] B. A. Nesterov, *On the Gromov-Hausdorff distance between the cloud of bounded metric spaces and a cloud with nontrivial stabilizer*, 2025. arXiv: `2505.23563 [math.MG]`.