Воронежский государственный
университет

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Конспект лекций по уравнениям математической физики

6 семестр

Лектор

Ляхов Л. Н.

Конспект подготовили

Харитонов В.
(kharvd@gmail.com)
Нестеров И.
(nesterovilyan@gmail.com)
Клочков С.
(klochkov_s.v@mail.ru)

2015 г.

Содержание

Часть I
Уравнения математической физики

§1. 17.02.2015

1.1. Понятие задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Ly(x) = P_0(x)y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = 0,$$

где $P_0(x) \neq 0$ для $\forall x \in [a, b]$. Разделив уравнение на $P_0(x)$, получаем

$$y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = 0.$$

Будем рассматривать случай, когда $c(x) = c, d(x) = d$ — константы. Найдем решение полученного уравнения. Для этого запишем характеристическое уравнение, затем выпишем общее решение.

$$k^2 + ck + d = 0;$$

$$y_c(x) = \begin{cases} C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, k = k_1 \neq k_2; \\ C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}, k = k_1 = k_2; \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), k = \alpha \pm i\beta. \end{cases}$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда любое решение $y(x)$ представимо в виде

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Вспомним, что решением ЛНДУ 2-го порядка $Ly(x) = f(x)$ является $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, где $y_c(x)$ — общее решение однородного уравнения, а $y_p(x)$ — частное решение неоднородного уравнения.

1.2. Двухточечная задача

Пример 1.1.

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(l) = 0.$$

Найдем решение данной задачи.

$$k^2 + \lambda = 0;$$
$$k = \pm i\sqrt{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda > 0$. Тогда общее решение будет иметь вид $y_c(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$. Подставим граничные условия:

$$y_c(0) = C_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = 0;$$
$$y_c(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0.$$

Пусть $C_2 \neq 0$, тогда $l\sqrt{\lambda} = \pi n$, отсюда $\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N}$. ♢

1.3. Понятие сопряженного дифференциального уравнения в $L_2(\Omega)$

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$. Будем рассматривать пространство

$$L_2(\Omega) = \left\{ f \colon (L) \int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty,\ x \in \Omega,\ f \colon \Omega \to \mathbb{R} \right\}.$$

Скалярное произведение и норма вводятся в этом пространстве следующим образом

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x, \qquad \forall u, v \in L_2(\Omega),$$

$$\|u\|_{L_2} = \sqrt{(u, u)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $H \subseteq L_2(\Omega)$. Задан оператор $A \colon H \to H$. A^* — сопряженный к A в H, т.е. $(Au, v) = (u, A^*v)$. Возьмем $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ и проверим, является ли он самосопряженным. Будем предполагать, что функции u и/или v имеют конечный носитель в Ω.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u, v\right) = \int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{u(x)v(x)|_a^b}_{0} - \int\limits_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int\limits_a^b u(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)\,\mathrm{d}x = \left(u, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v\right).$$

Таким образом получаем, что $A^* = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \neq A$.

Замечание. Оператор $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ — является самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)$ при условии, что функция и её производная имеет конечный носитель на множестве интегрирования. Другой пример самосопряженного оператора — умножение на бесконечно непрерывно-дифференцируемую функцию.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор:

$$L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right].$$

Проверим, является ли он самосопряженным в $L_2(\Omega)$ (при условии, сказанном в замечании):

$$(Lu, v) = \int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right]v(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{v(x)\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\Big|_a^b}_{0} - \int\limits_a^b \varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\underbrace{u(x)\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)\Big|_a^b}_{0} + \int\limits_a^b u(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)\right]\mathrm{d}x = (u, Lv).$$

Получаем, что L — самосопряженный оператор. В $L_2(\Omega)$ это общий вид самосопряженного оператора. Отвечающее ему уравнение записывается в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y\right] - q(x)y = 0.$$

Часть II

Обобщенные функции

§2. 17.02.2015

2.1. δ-функция Дирака

Дирак ввел эту функцию для описания плотностей (масс, зарядов и др.) в столь малом объеме, что его можно принять за точку.

Исходя из того, что если $\delta(x)$ — плотность распределения массы заряда $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\int \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \delta(x) = 0, \qquad x \neq 0;$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}^{3} \delta(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \delta(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пусть $f(x)$ — непрерывная в окрестности 0 функция. Рассмотрим

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| > \varepsilon, \\ 0, & |x| \leqslant \varepsilon; \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Поскольку δ — неотрицательная функция, можно воспользоваться I-ой теоремой о среднем и вынести значение в некоторой средней точке за знак интеграла.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} f(\xi_\varepsilon) \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi_\varepsilon) = f(0);$$

Т.о. δ-функция Дирака оказалась функционалом, который на каждой, непрерывной в окрестности 0 функции действует по правилу.

Учитывая, что действие этого функционала прослеживается через предельный переход в интегральных операциях от δ-образной последовательности, это действие записывается следующим образом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0); \qquad \int\limits_{\mathbb{R}}^{n} \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

Задача.
Привести примеры δ-образных последовательностей в $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. При этом использовать не только функции с разрывом 1-го рода, но и бесконечно дифференцируемые.
Решение.
Comming soon. □

2.2. Пространство основных функций D

$D = D(\mathbb{R}^n)$ — функции, имеющие конечный носитель в $\mathbb{R}^n$, бесконечно дифференцируемые. В этом множестве вводится топология следующим образом. Последовательность функций $\varphi_k \to \varphi$ входит в D, если:

1) $\exists R$, $\operatorname{supp} \varphi_k \subset B_R$.

2) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс. $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ в B_R. $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, где $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$.

Задача.
Доказать, что дифференциальные операторы непрерывны в топологии D.
Решение.
Comming soon. □
Задача.
Доказать, что линейная замена переменных $y = Ax + b$ (A — невырожденная матрица и $b \in \mathbb{R}^n$) — непрерывная операция в топологии D.
Решение.
Comming soon. □
Задача.
Доказать, что операция умножения на бесконечно дифференцируемую функцию непрерывна в D.
Решение.
Comming soon. □