Воронежский государственный университет

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Конспект лекций по уравнениям математической физики

6 семестр

Лектор
Ляхов Л. Н.

Конспект подготовили

Харитонов В.
(kharvd@gmail.com)
Нестеров И.
(nesterovilyan@gmail.com)
Клочков С.
(klochkov_s.v@mail.ru)
2015 г.

Содержание

Часть I
Уравнения математической физики

§1. 17.02.2015

1.1. Понятие задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Ly(x) = P_0(x)y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = 0, \tag{1.1}$$

где $P_0(x) \neq 0$ для $\forall x \in [a, b]$. Разделив уравнение на $P_0(x)$, получаем

$$y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = 0.$$

Будем рассматривать случай, когда $c(x) = c, d(x) = d$ — константы. Найдем решение полученного уравнения. Для этого запишем характеристическое уравнение, затем выпишем общее решение.

$$k^2 + ck + d = 0;$$

$$y_c(x) = \begin{cases} C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, k = k_1 \neq k_2; \\ C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}, k = k_1 = k_2; \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), k = \alpha \pm i\beta. \end{cases}$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда любое решение $y(x)$ представимо в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Вспомним, что решением ЛНДУ 2-го порядка $Ly(x) = f(x)$ является $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, где $y_c(x)$ — общее решение однородного уравнения, а $y_p(x)$ — частное решение неоднородного уравнения.

1.2. Двухточечная задача

Пример 1.1.

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(l) = 0.$$

Найдем решение данной задачи.

$$k^2 + \lambda = 0;$$
$$k = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda > 0$. Тогда общее решение будет иметь вид $y_c(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$. Подставим граничные условия:

$$y_c(0) = C_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = 0;$$
$$y_c(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0.$$

Пусть $C_2 \neq 0$, тогда $l\sqrt{\lambda} = \pi n$, отсюда $\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N}$. $\Diamond$

1.3. Понятие сопряженного дифференциального уравнения в $L^2(\Omega)$

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$. Будем рассматривать пространство

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \colon (L)\int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty, \, x \in \Omega, \, f \colon \Omega \to \mathbb{R} \right\}.$$

Скалярное произведение и норма вводятся в этом пространстве следующим образом

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{(u,u)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $H \subseteq L^2(\Omega)$. Задан оператор $A \colon H \to H$. A^* — сопряженный к A в H, т.е. $(Au, v) = (u, A^*v)$. Возьмем $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ и проверим, является ли он самосопряженным. Будем предполагать, что функции u и/или v имеют конечный носитель в Ω.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u, v \right) = \int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x) v(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{u(x)v(x)\big|_a^b}_{0} - \int\limits_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int\limits_a^b u(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)\,\mathrm{d}x = \left(u, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v\right).$$

Таким образом получаем, что $A^* = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \neq A$.

Замечание. Оператор $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ — является самосопряженным оператором в $L^2(\Omega)$ при условии, что функция и её производная имеет конечный носитель на множестве интегрирования. Другой пример самосопряженного оператора — умножение на бесконечно непрерывно-дифференцируемую функцию.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор:

$$L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right].$$

Проверим, является ли он самосопряженным в $L^2(\Omega)$ (при условии, сказанном в замечании):

$$(Lu, v) = \int\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right]v(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{v(x)\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\Big|_a^b}_{0} - \int\limits_a^b \varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\underbrace{u(x)\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)\Big|_a^b}_{0} + \int\limits_a^b u(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)\right]\mathrm{d}x = (u, Lv).$$

Получаем, что L — самосопряженный оператор. В $L^2(\Omega)$ это общий вид самосопряженного оператора. Отвечающее ему уравнение записывается в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y\right] - q(x)y = 0.$$

Рассмотрим общий способ приведения уравнения второго порядка к самосопряженному виду. Домножим обе части уравнения (1.1) на функцию $\rho(x)$, которая не обращается в нуль:

$$\rho(x)P_0(x)y'' + \rho(x)P_1(x)y' + \rho(x)P_2(x)y = 0.$$

Самосопряженное уравнение имеет вид

$$\varphi(x)y'' + \varphi'(x)y' - q(x)y = 0.$$

Тогда, приравнивая множители при соответствующих производных функции y, получаем:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \rho(x)P_0(x)\\ \varphi'(x) &= \rho(x)P_1(x) = \rho'(x)P_0(x) + \rho(x)P_0'(x).\end{aligned}$$

В результате имеем дифференциальное уравнение первого порядка относительно ρ:

$$P_0(x)\rho'(x) = \rho(x)(P_1(x) - P_0'(x)).$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\rho(x) = \frac{C}{P_0(x)} \exp\left\{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}\,\mathrm{d}x\right\}. \tag{1.2}$$

§2. 24.02.2015

2.1. Приведение уравнения Бесселя к самосопряженному виду

Рассмотрим *уравнение Бесселя*, имеющее вид

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.$$

Подставляя коэффициенты уравнения в выражение 1.2, получаем

$$\rho(x) = \frac{1}{x^2}e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}.$$

Тогда поделим уравнение Бесселя на x:

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0,$$

или иначе

$$(xy')' + \left(x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0.$$

Это *уравнение Бесселя в самосопряженной форме.*

Расмотрим *сингулярный оператор Бесселя*:

$$B_\gamma = \frac{1}{x^\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right], \quad \gamma > 0.$$

Такой оператор является самосопряженным в пространстве $L^2_\gamma(\Omega)$ — квадратично-суммируемых с весом γ функций:

$$L^2_\gamma = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon \int\limits_\Omega |f(x)|^2\, x^\gamma \,\mathrm{d}x < \infty \right\},$$

скалярное произведение в котором определяется равенством

$$(u, v)_\gamma = \int\limits_\Omega u(x)v(x)x^\gamma \,\mathrm{d}x.$$

В самом деле, пусть $u, v \in C^2_0(\Omega)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции с конечным носителем. Тогда

$$(B_\gamma u, v)_\gamma = \int \frac{1}{x^\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\gamma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] v(x)x^\gamma \,\mathrm{d}x = -\int x^\gamma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x^\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\gamma \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right] u(x)x^\gamma \,\mathrm{d}x = (u, B_\gamma v)_\gamma\,.$$

2.2. Собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля

$$[\varphi(x)y']' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \tag{2.1}$$

с граничными условиями вида

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ и $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, а функции φ и ρ положительны на отрезке $[a, b]$.

Уравнение (2.1) вместе с граничными условиями (2.2) называются *задачей Штурма-Лиувилля* (Ш.-Л.).

Значения $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых задача Ш.-Л. имеет ненулевое решение, называются *собственными числами задачи Ш.-Л.* Сами же ненулевые решения — *собственными функциями задачи Ш.-Л., соответствующими собственному числу* λ.

Теорема 2.1. *Пусть* u_1 *и* u_2 *— собственные функции, соответствующие собственному числу* λ. *Тогда они линейно зависимы, т. е.* $u_1 = cu_2$, $c \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное: пусть u_1 и u_2 линейно независимы. Тогда, поскольку они оба удовлетворяют ЛДУ II порядка, их определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке (см. курс ОДУ):

$$W(u_1(x), u_2(x)) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Но в точке $x = a$, в соответствии с условиями (2.2) получаем

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) = 0, \\ \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) = 0. \end{cases}$$

Поскольку α_1 и α_2 одновременно не обращаются в нуль, получаем, что система имеет ненулевое решение относительно переменных α_1 и α_2, а значит её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Получили противоречие. □

Определение 2.1. Функции u и v называются *ортогональными с весом* ρ на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b u(x)v(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Теорема 2.2. *Пусть* u_1 *и* u_2 *— собственные функции задачи Ш.-Л. (2.1, 2.2), отвечающие различным собственным числам* λ_1 *и* λ_2 *соответственно. Тогда они ортогональны с весом* ρ *на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство. Поскольку u_1 и u_2 решения, имеем:

$$[\varphi u_1']' - qu_1 + \lambda_1 \rho(x) u_1 = 0,$$
$$[\varphi u_2']' - qu_2 + \lambda_2 \rho(x) u_2 = 0.$$

Домножим первое уравнение на u_2, а второе на u_1:

$$u_2[\varphi u_1']' - qu_1u_2 + \lambda_1\rho(x)u_1u_2 = 0,$$
$$u_1[\varphi u_2']' - qu_1u_2 + \lambda_2\rho(x)u_1u_2 = 0.$$

Вычитая первое из второго, получаем:

$$u_1[\varphi u_2']' - u_2[\varphi u_1']' = (\lambda_1 - \lambda_2)u_1u_2\rho(x).$$

Левая часть этого равенства преобразуется к виду

$$u_1[\varphi u_2']' - u_2[\varphi u_1']' = [\varphi(u_1u_2' - u_2u_1')]' = [\varphi W(u_1(x), u_2(x))]',$$

(это проверяется непосредственно). Тогда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)u_1u_2\rho(x) = [\varphi W(u_1(x), u_2(x))]'.$$

Проинтегрируем обе части равенства по отрезку $[a, b]$ и используем формулу Ньютона-Лейбница:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int\limits_a^b u_1(x)u_2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b [\varphi W(u_1(x), u_2(x))]'\,\mathrm{d}x =$$
$$= \varphi W(u_1(x), u_2(x))\big|_a^b = \varphi(b)W(u_1(b), u_2(b)) - \varphi(a)W(u_1(a), u_2(a)) = 0,$$

где $W(u_1(a), u_2(a)) = W(u_1(b), u_2(b)) = 0$ в силу граничных условий (2.2) (аналогично предыдущей теореме). $\square$

Часть II

Обобщенные функции

§3. 17.02.2015

3.1. δ-функция Дирака

Дирак ввел эту функцию для описания плотностей (масс, зарядов и др.) в столь малом объеме, что его можно принять за точку.

Исходя из того, что если $\delta(x)$ — плотность распределения массы заряда

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\int \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \delta(x) = 0, \qquad x \neq 0;$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \delta(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пусть $f(x)$ — непрерывная в окрестности 0 функция. Рассмотрим

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| > \varepsilon, \\ 0, & |x| \leqslant \varepsilon; \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Поскольку δ — неотрицательная функция, можно воспользоваться I-ой теоремой о среднем и вынести значение в некоторой средней точке за знак интеграла.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} f(\xi_\varepsilon) \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi_\varepsilon) = f(0);$$

Т.о. δ-функция Дирака оказалась функционалом, который на каждой, непрерывной в окрестности 0 функции действует по правилу.

Учитывая, что действие этого функционала прослеживается через предельный переход в интегральных операциях от δ-образной последовательности, это действие записывается следующим образом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0); \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

Задача.
Привести примеры δ-образных последовательностей в $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. При этом использовать не только функции с разрывом 1-го рода, но и бесконечно дифференцируемые.

Решение.
Comming soon. $\square$

3.2. Пространство основных функций D

$D = D(\mathbb{R}^n)$ — функции, имеющие конечный носитель в $\mathbb{R}^n$, бесконечно дифференцируемые. В этом множестве вводится топология следующим образом. Последовательность функций $\varphi_k \to \varphi$ входит в D, если:

1) $\exists R$, $\operatorname{supp} \varphi_k \subset B_R$.

2) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс. $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ в B_R. $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, где $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$.

Задача.
Доказать, что дифференциальные операторы непрерывны в топологии D.

Решение.
Comming soon. $\square$

Задача.
Доказать, что линейная замена переменных $y = Ax + b$ (A — невырожденная матрица и $b \in \mathbb{R}^n$) — непрерывная операция в топологии D.

Решение.
Comming soon. $\square$

Задача.
Доказать, что операция умножения на бесконечно дифференцируемую функцию непрерывна в D.

Решение.
Comming soon. $\square$