Воронежский государственный университет

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Конспект лекций по уравнениям математической физики

6 семестр

Лектор

Ляхов Л. Н.

Конспект подготовили

Харитонов В.
(kharvd@gmail.com)
Нестеров И.
(nesterovilyan@gmail.com)
Клочков С.
(klochkov_s.v@mail.ru)

2015 г.

Оглавление

Часть I

Уравнения математической физики

17.02.2015

Понятие задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Ly(x) = P_0(x)y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = 0, \tag{I.1.1}$$

где $P_0(x) \neq 0$ для $\forall x \in [a, b]$. Разделив уравнение на $P_0(x)$, получаем

$$y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = 0.$$

Будем рассматривать случай, когда $c(x) = c, d(x) = d$ — константы. Найдем решение полученного уравнения. Для этого запишем характеристическое уравнение, затем выпишем общее решение.

$$k^2 + ck + d = 0;$$

$$y_c(x) = \begin{cases} C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, k = k_1 \neq k_2; \\ C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}, k = k_1 = k_2; \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), k = \alpha \pm i\beta. \end{cases}$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда любое решение $y(x)$ представимо в виде

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Вспомним, что решением ЛНДУ 2-го порядка $Ly(x) = f(x)$ является $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, где $y_c(x)$ — общее решение однородного уравнения, а $y_p(x)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Двухточечная задача

Пример I.1.1.

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(l) = 0.$$

Найдем решение данной задачи.

$$k^2 + \lambda = 0;$$
$$k = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda > 0$. Тогда общее решение будет иметь вид $y_c(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$. Подставим граничные условия:

$$y_c(0) = C_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = 0;$$
$$y_c(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0.$$

Пусть $C_2 \neq 0$, тогда $l\sqrt{\lambda} = \pi n$, отсюда $\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N}$. $\diamondsuit$

Понятие сопряженного дифференциального уравнения в $L^2(\Omega)$

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$. Будем рассматривать пространство

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \colon (L) \int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty,\, x \in \Omega,\, f \colon \Omega \to \mathbb{R} \right\}.$$

Скалярное произведение и норма вводятся в этом пространстве следующим образом

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x, \qquad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{(u,u)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $H \subseteq L^2(\Omega)$. Задан оператор $A \colon H \to H$. A^* — сопряженный к A в H, т.е. $(Au, v) = (u, A^* v)$. Возьмем $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ и проверим, является ли он самосопряженным. Будем предполагать, что функции u и/или v имеют конечный носитель в Ω.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u, v \right) = \int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x) v(x)\, \mathrm{d}x = \underbrace{u(x)v(x)\big|_a^b}_{0} - \int\limits_a^b u(x) v'(x)\, \mathrm{d}x =$$
$$= -\int\limits_a^b u(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v(x)\, \mathrm{d}x = \left(u, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v \right).$$

Таким образом получаем, что $A^* = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \neq A$.

Замечание. Оператор $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ — является самосопряженным оператором в $L^2(\Omega)$ при условии, что функция и её производная имеет конечный носитель на множестве интегрирования. Другой пример самосопряженного оператора — умножение на бесконечно непрерывно-дифференцируемую функцию.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор:

$$L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right].$$

Проверим, является ли он самосопряженным в $L^2(\Omega)$ (при условии, сказанном в замечании):

$$\begin{aligned}(Lu, v) = \int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right] v(x)\,\mathrm{d}x = \\ = \underbrace{v(x)\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\Big|_a^b}_{0} - \int\limits_a^b \varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \\ = -\underbrace{u(x)\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)\Big|_a^b}_{0} + \int\limits_a^b u(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)\right]\,\mathrm{d}x = (u, Lv)\,.\end{aligned}$$

Получаем, что L — самосопряженный оператор. В $L^2(\Omega)$ это общий вид самосопряженного оператора. Отвечающее ему уравнение записывается в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\varphi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y\right] - q(x)y = 0.$$

Рассмотрим общий способ приведения уравнения второго порядка к самосопряженному виду. Домножим обе части уравнения (I.1.1) на функцию $\rho(x)$, которая не обращается в нуль:

$$\rho(x)P_0(x)y'' + \rho(x)P_1(x)y' + \rho(x)P_2(x)y = 0.$$

Самосопряженное уравнение имеет вид

$$\varphi(x)y'' + \varphi'(x)y' - q(x)y = 0.$$

Тогда, приравнивая множители при соответствующих производных функции y, получаем:

$$\varphi(x) = \rho(x)P_0(x)$$

$$\varphi'(x) = \rho(x)P_1(x) = \rho'(x)P_0(x) + \rho(x)P_0'(x).$$

В результате имеем дифференциальное уравнение первого порядка относительно ρ:

$$P_0(x)\rho'(x) = \rho(x)(P_1(x) - P_0'(x)).$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\rho(x) = \frac{C}{P_0(x)} \exp\left\{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}\,\mathrm{d}x\right\}. \tag{I.1.2}$$

24.02.2015

Приведение уравнения Бесселя к самосопряженному виду

Рассмотрим *уравнение Бесселя*, имеющее вид

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.$$

Подставляя коэффициенты уравнения в выражение I.1.2, получаем

$$\rho(x) = \frac{1}{x^2}e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}.$$

Тогда поделим уравнение Бесселя на x:

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0,$$

или иначе

$$(xy')' + \left(x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0.$$

Это *уравнение Бесселя в самосопряженной форме.*

Расмотрим *сингулярный оператор Бесселя*:

$$B_\gamma = \frac{1}{x^\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right], \quad \gamma > 0.$$

Такой оператор является самосопряженным в пространстве $L^2_\gamma(\Omega)$ —

квадратично-суммируемых с весом γ функций:

$$L^2_\gamma = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon \int\limits_\Omega |f(x)|^2 \, x^\gamma \, \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

скалярное произведение в котором определяется равенством

$$(u, v)_\gamma = \int\limits_\Omega u(x) v(x) x^\gamma \, \mathrm{d}x.$$

В самом деле, пусть $u, v \in C^2_0(\Omega)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции с конечным носителем. Тогда

$$(B_\gamma u, v)_\gamma = \int \frac{1}{x^\gamma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[x^\gamma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right] v(x) x^\gamma \, \mathrm{d}x = -\int x^\gamma \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x^\gamma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[x^\gamma \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \right] u(x) x^\gamma \, \mathrm{d}x = (u, B_\gamma v)_\gamma \, .$$

Собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля

$$[\varphi(x) y']' - q(x) y + \lambda \rho(x) y = 0 \tag{I.2.1}$$

с граничными условиями вида

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{I.2.2}$$

где $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ и $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, а функции φ и ρ положительны на отрезке $[a, b]$.

Уравнение (I.2.1) вместе с граничными условиями (I.2.2) называются *задачей Штурма-Лиувилля* (Ш.-Л.).

Значения $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых задача Ш.-Л. имеет ненулевое решение, называются *собственными числами задачи Ш.-Л.* Сами же ненулевые решения — *собственными функциями задачи Ш.-Л., соответствующими собственному числу* λ.

Теорема I.2.1. *Пусть u_1 и u_2 — собственные функции, соответствующие собственному числу λ. Тогда они линейно зависимы, т. е. $u_1 = c u_2$,*

$c \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное: пусть u_1 и u_2 линейно независимы. Тогда, поскольку они оба удовлетворяют ЛДУ II порядка, их определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке (см. курс ОДУ):

$$W(u_1(x), u_2(x)) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Но в точке $x = a$, в соответствии с условиями (I.2.2) получаем

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) = 0, \\ \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) = 0. \end{cases}$$

Поскольку α_1 и α_2 одновременно не обращаются в нуль, получаем, что система имеет ненулевое решение относительно переменных α_1 и α_2, а значит её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Получили противоречие. □

Определение I.2.1. Функции u и v называются *ортогональными с весом* ρ на отрезке $[a, b]$, если

$$\int\limits_a^b u(x)v(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Теорема I.2.2. *Пусть u_1 и u_2 — собственные функции задачи Ш.-Л. (I.2.1, I.2.2), отвечающие различным собственным числам λ_1 и λ_2 соответственно. Тогда они ортогональны с весом ρ на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Поскольку u_1 и u_2 решения, имеем:

$$[\varphi u_1']' - qu_1 + \lambda_1 \rho(x) u_1 = 0,$$
$$[\varphi u_2']' - qu_2 + \lambda_2 \rho(x) u_2 = 0.$$

Домножим первое уравнение на u_2, а второе на u_1:

$$u_2[\varphi u_1']' - qu_1u_2 + \lambda_1 \rho(x) u_1 u_2 = 0,$$
$$u_1[\varphi u_2']' - qu_1u_2 + \lambda_2 \rho(x) u_1 u_2 = 0.$$

Вычитая первое из второго, получаем:

$$u_1[\varphi u_2']' - u_2[\varphi u_1']' = (\lambda_1 - \lambda_2)u_1u_2\rho(x).$$

Левая часть этого равенства преобразуется к виду

$$u_1[\varphi u_2']' - u_2[\varphi u_1']' = [\varphi(u_1u_2' - u_2u_1')]' = [\varphi W(u_1(x), u_2(x))]',$$

(это проверяется непосредственно). Тогда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)u_1u_2\rho(x) = [\varphi W(u_1(x), u_2(x))]'.$$

Проинтегрируем обе части равенства по отрезку $[a, b]$ и используем формулу Ньютона-Лейбница:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int\limits_a^b u_1(x)u_2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b [\varphi(x)W(u_1(x), u_2(x))]'\,\mathrm{d}x =$$

$$= \varphi(x)W(u_1(x), u_2(x))\big|_a^b = \varphi(b)W(u_1(b), u_2(b)) - \varphi(a)W(u_1(a), u_2(a)) = 0,$$

где $W(u_1(a), u_2(a)) = W(u_1(b), u_2(b)) = 0$ в силу граничных условий (I.2.2) (аналогично предыдущей теореме). $\square$

Основные уравнения математической физики

Волновое уравнение

TODO

Часть II

Обобщенные функции

17.02.2015

δ-функция Дирака

Дирак ввел эту функцию для описания плотностей (масс, зарядов и др.) в столь малом объеме, что его можно принять за точку.

Исходя из того, что если $\delta(x)$ — плотность распределения массы заряда $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\int \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \delta(x) = 0, \qquad x \neq 0;$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \delta(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пусть $f(x)$ — непрерывная в окрестности 0 функция. Рассмотрим

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| > \varepsilon, \\ 0, & |x| \leqslant \varepsilon; \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Поскольку δ — неотрицательная функция, можно воспользоваться I-ой теоремой о среднем и вынести значение в некоторой средней точке за знак интеграла.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} f(\xi_\varepsilon) \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi_\varepsilon) = f(0);$$

Т.о. δ-функция Дирака оказалась функционалом, который на каждой, непрерывной в окрестности 0 функции действует по правилу.

Учитывая, что действие этого функционала прослеживается через предельный переход в интегральных операциях от δ-образной последовательности, это действие записывается следующим образом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0); \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

Задача. Привести примеры δ-образных последовательностей в $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

При этом использовать не только функции с разрывом 1-го рода, но и бесконечно дифференцируемые.

Решение. Comming soon. $\square$

Пространство основных функций D

$D = D(\mathbb{R}^n)$ — функции, имеющие конечный носитель в $\mathbb{R}^n$, бесконечно дифференцируемые. В этом множестве вводится топология следующим образом. Последовательность функций $\varphi_k \to \varphi$ входит в D, если:

1) $\exists R$, $\operatorname{supp}\varphi_k \subset B_R$.

2) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс. $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ в B_R. $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, где $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$.

Задача. Доказать, что дифференциальные операторы непрерывны в топологии D.

Решение. Comming soon. $\square$

Задача. Доказать, что линейная замена переменных $y = Ax + b$ (A — невырожденная матрица и $b \in \mathbb{R}^n$) — непрерывная операция в топологии D.

Решение. Comming soon. $\square$

Задача. Доказать, что операция умножения на бесконечно дифференцируемую функцию непрерывна в D.

Решение. Comming soon. $\square$

24.02.2015

Пример основной функции

Рассмотрим семейство функций вида

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_{n,\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

где $c_{n,\varepsilon}$ выбираются таким образом, чтобы $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Задача. Доказать, что ω_ε — бесконечно непрерывно дифференцируема.

Решение. Comming soon. $\square$

Элемент объема $\mathrm{d}x$ можно представить в сферических координатах в виде

$$\mathrm{d}x = r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}S,$$

где $\mathrm{d}S$ — элемент $n-1$-мерной единичной сферы, при этом

$$\int\limits_{|x|=1} \mathrm{d}S = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Тогда для любой функции $f(|x|)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{|x|\leqslant R} f(|x|)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^R f(r) r^{n-1}\,\mathrm{d}r \int\limits_{|x|=1} \mathrm{d}S.$$

Отсюда легко получить условия нормировки для параметров $c_{n,\varepsilon}$.

Основная функция, равная 1 на области

Лемма II.4.1. *Для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ найдётся такая бесконечно непрерывно дифференцируемая функция η, что выполняются следующие три условия:*

1) $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$,

2) $\eta(x) = 1$ *для всех* $x \in \Omega_\varepsilon$, *где* Ω_ε — ε-*окрестность области* Ω,

3) $\eta(x) = 0$ *для всех* x *не принадлежащих* 3ε-*окрестности области* Ω.

Доказательство. См. Владимиров-Жаринов (2004), с. 69. □

3.03.2015

Плотность множества основных функций $D(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$

Лемма II.5.1. *Пусть Ω – ограниченное множество, тогда для любой функции $f \in L^2(\Omega)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi \in D(\Omega)$, что выполняется неравенство:*

$$\|f - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon$$

Доказательство. Comming soon. □

Пространство обобщенных функций

Обобщенной функцией называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций D. Если функция $\varphi \in D$, тогда множество функционалов от функции φ обозначим:

$$f(\varphi) = (f, \varphi)$$

где f – линейный непрерывный функционал. Он обладает следующими свойствами:

1) пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in D$ и α_1, α_2 – комплексные числа, тогда

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2);$$

2) если $\varphi_k \to \varphi$ в $D, k \to \infty$, тогда $(f, \varphi_k) \to (f, \varphi), k \to \infty$, в частности, если $\varphi_k \to 0$ в $D, k \to \infty$, тогда $(f, \varphi_k) \to 0, k \to \infty$.
Множество функционалов f будем обозначать D'.

Часто линейный непрерывный функционал рассматривается в виде:

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Линейность этого множества следует из линейности интеграла, а непрерывность для всех локально интегрируемых функций f – из возможности предельного перехода под знаком интеграла. В общем случае пространство обобщенных функций D' будем считать линейным, если линейную комбинацию $\alpha_1 f + \alpha_2 g$ обобщенных функций f и g определить как функционал, действующий по формуле:

$$(\alpha_1 f + \alpha_2 g, \varphi) = \alpha_1 (f, \varphi) + \alpha_2 (g, \varphi), \qquad \varphi \in D.$$

Задача. Доказать, что функционал $\alpha_1 f + \alpha_2 g$ линейный и непрерывный.

Решение. Comming soon. □

Полнота пространства обобщенных функций

Лемма II.5.2. *Пусть есть последовательность $\{f_k\}, f_k \in D'$, такая, что для каждой функции $\varphi \in D$ числовая последовательность (f_k, φ) сходиться при $k \to \infty$, т. е. существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} (f_k, \varphi)$. Тогда функционал f на D определенный равенством:*

$$(f, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f_k, \varphi), \qquad \varphi \in D,$$

также является линейным и непрерывным на D, т. е. $f \in D'$.

Доказательство. Comming soon. □

Носитель обобщенных функций

Будем говорить, что обобщенная функция f *равна нулю в области* Ω, если для любой функции $\varphi \in D(\Omega)$ справедливо равенство: $(f, \varphi) = 0$.

Две обобщенные функции f и g будем называть *равными в области* Ω ($f = g$), если для любой функции $\varphi \in D(\Omega)$ справедливо равенство: $(f, \varphi) = (g, \varphi)$.

Пусть обобщенная функция f равна нулю в области Ω. Тогда она равна равна нулю в любой подобласти области Ω и, следовательно, в окрестности любой точки области Ω. Справедливо и обратное.

Лемма II.5.3. *Если обобщенная функкия f равняется нулю в окрестности каждой точки области Ω, то она равна нулю во всей области Ω.*

Доказательство. См. Владимиров-Жаринов (2004), с. 72. □

Регулярные обобщенные функции

Функция f называется *локально интегрируемой в $\mathbb{R}^n$*, если она интегрируема по любой компактной области в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, где $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ – множество локально интегрируемых функций в $\mathbb{R}^n$. Тогда функционал порождаемый функцией f по формуле:

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in D \tag{II.5.1}$$

является обобщенной функцией.

Обобщенные функции, определяемыми локально интегрированными в $\mathbb{R}^n$ функциями по формуле (II.5.1), называются *регулярными обобщенными функциями.*

Лемма II.5.4 (дю Буа-Реймона). *Пусть обобщенная функция $f = 0$ в области Ω, тогда $f = 0$ почти всюду в Ω.*

Доказательство. Comming soon. □

Сингулярные обобщенные функции

Все обобщенные функции принадлежащие пространству D' и не являющиеся регулярными, называются *сингулярными.*

Основным примером сингулярной обобщенной функцией является δ-функция Дирака. Докажем что δ-функция Дирака является обобщенной функцией. Предположим противное, пусть существует локально интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ функция f, такая что для любой функции $\varphi \in D$

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0). \tag{II.5.2}$$

Так как $x_1\varphi(x) \in D$, если $\varphi \in D$ то из (II.5.2) следует

$$\int f(x)x_1\varphi(x)\,\mathrm{d}x = x_1\varphi(x)|_{x=0} = 0 = (x_1 f, \varphi)$$

при всех $\varphi \in D$; здесь x_1 – первая координата x. Таким образом, локально интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ функция $x_1 f$ равна нулю в смысле обобщенных функций. По лемме дю Буа-Реймона $x_1 f(x) = 0$, а следовательно и $f(x) = 0$ почти всюду. Но это противоречит равенству (II.5.2). Полученное противоречие доказывает сингулярность δ-функции.

Обобщенные производные

Пусть функция $f \in C^1$ и является локально интегрируемой в $\Omega, \varphi \in D$, тогда используя формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{\Omega} f'_{x_i}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} f(x)g(x)\cos(\widehat{\vec{\nu}, \vec{0}_{x_i}})\,\mathrm{d}\Gamma - \int\limits_{\Omega} f(x)g'_{x_i}(x)\,\mathrm{d}x,$$

получаем

$$\left(f, \varphi'_{x_i}\right) = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi'_{x_i}(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} f(x)g(x)\cos(\widehat{\vec{\nu}, \vec{0}_{x_i}})\,\mathrm{d}\Gamma}_{0} - \int\limits_{\Omega} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – произвольный мультииндекс. Пусть $f \in C^{|\alpha|}$, откуда следует, что f – регулярная обобщенная функция. Тогда производную порядка $|\alpha|$ для любой регулярной функции можно определить по формуле:

$$(f, \partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\left(\partial^\alpha f, \varphi\right).$$

Эта формула получается аналогично предыдущей, путем применения формулы интегрирования по частям $|\alpha|$ раз.

В качестве примера найдем производную функции одной переменной, имеющей разрыв первого рода. Обычно такие функции относятся к классу недифференцируемых.

Пример II.5.1. Пусть функция f имеет разрыв первого рода в точке x_0, а во всех остальных точках она является непрерывно дифференцируемой, функция φ такая, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Тогда

$$(f', \varphi) = -\int\limits_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\left(\int\limits_a^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_0}^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Применяя формулу интегрирования по частям к каждому их интегралов, получаем:

$$(f', \varphi) = -\left. f(x)\varphi(x)\right|_a^{x_0-0} + \int\limits_a^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \left. f(x)\varphi(x)\right|_{x_0+0}^b +$$

$$+\int\limits_{x_0}^b f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -f(x_0-0)\varphi(x_0) + \int\limits_a^b \{f'(x)\}\varphi(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ f(x_0+0)\varphi(x_0) = \varphi(x_0)[f]_{x_0} + \int\limits_a^b \{f'(x)\}\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

где $[f]_{x_0}$ – скачок функции f в точке $x_0, \{f'(x)\}$ – производная функции f в тех точках, где она существует. Таким образом в смысле обобщенных функций получаем:

$$f' = [f]_{x_0}\delta(x - x_0) + \{f'(x)\},$$

где $\delta(x - x_0)$ – δ – функция Дирака, сосредоточенная в точке $x_0, \delta(x - x_0) = \ \varphi(x_0)$. $\diamondsuit$

Задача. Найти производную от функции включения Хевисайда.

Решение. Comming soon. $\square$