

Воронежский государственный университет

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Конспект лекций по уравнениям математической физики

6 семестр

Лектор
Ляхов Л. Н.

Конспект подготовили

Харитонов В.
(kharvd@gmail.com)
Нестеров И.
(nesterovilyan@gmail.com)
Клочков С.
(klochkov_s.v@mail.ru)

2015 г.

Оглавление

I	Уравнения математической физики	5
I.1	17.02.2015	7
	Понятие задачи Штурма-Лиувилля	7
	Двухточечная задача	7
	Понятие сопряженного дифференциального уравнения в $L^2(\Omega)$	8
I.2	24.02.2015	10
	Приведение уравнения Бесселя к самосопряженному виду	10
	Собственные числа и собственные функции задачи Штурма- Лиувилля	11
	Основные уравнения математической физики	13
II	Обобщенные функции	15
II.3	17.02.2015	17
	δ -функция Дирака	17
	Пространство основных функций D	18
II.4	24.02.2015	18
	Пример основной функции	18
	Основная функция, равная 1 на области	19

Часть I

Уравнения математической
физики

17.02.2015

Понятие задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Ly(x) = P_0(x)y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = 0, \quad (\text{I.1.1})$$

где $P_0(x) \neq 0$ для $\forall x \in [a, b]$. Разделив уравнение на $P_0(x)$, получаем

$$y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = 0.$$

Будем рассматривать случай, когда $c(x) = c, d(x) = d$ — константы. Найдем решение полученного уравнения. Для этого запишем характеристическое уравнение, затем выпишем общее решение.

$$k^2 + ck + d = 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, & k = k_1 \neq k_2; \\ C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}, & k = k_1 = k_2; \\ e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), & k = \alpha \pm i\beta. \end{cases}$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда любое решение $y(x)$ представимо в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Вспомним, что решением ЛНДУ 2-го порядка $Ly(x) = f(x)$ является $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, где $y_c(x)$ — общее решение однородного уравнения, а $y_p(x)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Двухточечная задача

Пример I.1.1.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Найдем решение данной задачи.

$$k^2 + \lambda = 0;$$

$$k = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda > 0$. Тогда общее решение будет иметь вид $y_c(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$. Подставим граничные условия:

$$y_c(0) = C_1 = 0 \implies C_1 = 0;$$

$$y_c(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Пусть $C_2 \neq 0$, тогда $l\sqrt{\lambda} = \pi n$, откуда $\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

◇

Понятие сопряженного дифференциального уравнения в $L^2(\Omega)$

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$. Будем рассматривать пространство

$$L^2(\Omega) = \left\{ f: (L) \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty, x \in \Omega, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \right\}.$$

Скалярное произведение и норма вводятся в этом пространстве следующим образом

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{(u, u)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим $H \subseteq L^2(\Omega)$. Задан оператор $A: H \rightarrow H$. A^* — сопряженный к A в H , т.е. $(Au, v) = (u, A^*v)$. Возьмем $A = \frac{d}{dx}$ и проверим, является ли он самосопряженным. Будем предполагать, что функции u и/или v имеют конечный носитель в Ω .

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} u, v \right) &= \int_{\Omega} \frac{d}{dx} u(x) v(x) dx = \underbrace{u(x) v(x)}_0 \Big|_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx = \\ &= - \int_a^b u(x) \frac{d}{dx} v(x) dx = \left(u, -\frac{d}{dx} v \right). \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что $A^* = -\frac{d}{dx} \neq A$.

Замечание. Оператор $\frac{d^2}{dx^2}$ — является самосопряженным оператором

в $L^2(\Omega)$ при условии, что функция и её производная имеет конечный носитель на множестве интегрирования. Другой пример самосопряженного оператора — умножение на бесконечно непрерывно-дифференцируемую функцию.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор:

$$L = \frac{d}{dx} \left[\varphi(x) \frac{d}{dx} \right].$$

Проверим, является ли он самосопряженным в $L^2(\Omega)$ (при условии, сказанном в замечании):

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= \int_{\Omega} \frac{d}{dx} \left[\varphi(x) \frac{d}{dx} u(x) \right] v(x) dx = \\ &= \underbrace{v(x) \varphi(x) \frac{d}{dx} u(x) \Big|_a^b}_0 - \int_a^b \varphi(x) \frac{d}{dx} u(x) v'(x) dx = \\ &= - \underbrace{u(x) \varphi(x) \frac{d}{dx} v(x) \Big|_a^b}_0 + \int_a^b u(x) \frac{d}{dx} \left[\varphi(x) \frac{d}{dx} v(x) \right] dx = (u, Lv). \end{aligned}$$

Получаем, что L — самосопряженный оператор. В $L^2(\Omega)$ это общий вид самосопряженного оператора. Отвечающее ему уравнение записывается в виде

$$\frac{d}{dx} \left[\varphi(x) \frac{d}{dx} y \right] - q(x)y = 0.$$

Рассмотрим общий способ приведения уравнения второго порядка к самосопряженному виду. Домножим обе части уравнения (I.1.1) на функцию $\rho(x)$, которая не обращается в нуль:

$$\rho(x)P_0(x)y'' + \rho(x)P_1(x)y' + \rho(x)P_2(x)y = 0.$$

Самосопряженное уравнение имеет вид

$$\varphi(x)y'' + \varphi'(x)y' - q(x)y = 0.$$

Тогда, приравнявая множители при соответствующих производных функции y , получаем:

$$\varphi(x) = \rho(x)P_0(x)$$

$$\varphi'(x) = \rho(x)P_1(x) = \rho'(x)P_0(x) + \rho(x)P_0'(x).$$

В результате имеем дифференциальное уравнение первого порядка относительно ρ :

$$P_0(x)\rho'(x) = \rho(x)(P_1(x) - P_0'(x)).$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\rho(x) = \frac{C}{P_0(x)} \exp \left\{ \int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx \right\}. \quad (\text{I.1.2})$$

24.02.2015

Приведение уравнения Бесселя к самосопряженному виду

Рассмотрим *уравнение Бесселя*, имеющее вид

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.$$

Подставляя коэффициенты уравнения в выражение [I.1.2](#), получаем

$$\rho(x) = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}.$$

Тогда поделим уравнение Бесселя на x :

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0,$$

или иначе

$$(xy')' + \left(x - \frac{p^2}{x}\right)y = 0.$$

Это *уравнение Бесселя в самосопряженной форме*.

Рассмотрим *сингулярный оператор Бесселя*:

$$B_\gamma = \frac{1}{x^\gamma} \frac{d}{dx} \left[x^\gamma \frac{d}{dx} \right], \quad \gamma > 0.$$

Такой оператор является самосопряженным в пространстве $L_\gamma^2(\Omega)$ —

квадратично-суммируемых с весом γ функций:

$$L_\gamma^2 = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \int_{\Omega} |f(x)|^2 x^\gamma dx < \infty \right\},$$

скалярное произведение в котором определяется равенством

$$(u, v)_\gamma = \int_{\Omega} u(x)v(x)x^\gamma dx.$$

В самом деле, пусть $u, v \in C_0^2(\Omega)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции с конечным носителем. Тогда

$$\begin{aligned} (B_\gamma u, v)_\gamma &= \int \frac{1}{x^\gamma} \frac{d}{dx} \left[x^\gamma \frac{du}{dx} \right] v(x) x^\gamma dx = - \int x^\gamma \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \\ &= \int \frac{1}{x^\gamma} \frac{d}{dx} \left[x^\gamma \frac{dv}{dx} \right] u(x) x^\gamma dx = (u, B_\gamma v)_\gamma. \end{aligned}$$

Собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля

$$[\varphi(x)y']' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \quad (I.2.1)$$

с граничными условиями вида

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (I.2.2)$$

где $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ и $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$, а функции φ и ρ положительны на отрезке $[a, b]$.

Уравнение (I.2.1) вместе с граничными условиями (I.2.2) называются *задачей Штурма-Лиувилля* (Ш.-Л.).

Значения $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых задача Ш.-Л. имеет ненулевое решение, называются *собственными числами задачи Ш.-Л.* Сами же ненулевые решения — *собственными функциями задачи Ш.-Л., соответствующими собственному числу λ .*

Теорема I.2.1. Пусть u_1 и u_2 — собственные функции, соответствующие собственному числу λ . Тогда они линейно зависимы, т. е. $u_1 = cu_2$,

$c \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное: пусть u_1 и u_2 линейно независимы. Тогда, поскольку они оба удовлетворяют ЛДУ II порядка, их определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке (см. курс ОДУ):

$$W(u_1(x), u_2(x)) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Но в точке $x = a$, в соответствии с условиями (I.2.2) получаем

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) = 0, \\ \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) = 0. \end{cases}$$

Поскольку α_1 и α_2 одновременно не обращаются в нуль, получаем, что система имеет ненулевое решение относительно переменных α_1 и α_2 , а значит её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Получили противоречие. □

Определение I.2.1. Функции u и v называются *ортгональными с весом ρ* на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b u(x)v(x)\rho(x) \, dx = 0.$$

Теорема I.2.2. Пусть u_1 и u_2 — собственные функции задачи Ш.-Л. (I.2.1, I.2.2), отвечающие различным собственным числам λ_1 и λ_2 соответственно. Тогда они ортгональны с весом ρ на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Поскольку u_1 и u_2 решения, имеем:

$$\begin{aligned} [\varphi u_1']' - qu_1 + \lambda_1 \rho(x) u_1 &= 0, \\ [\varphi u_2']' - qu_2 + \lambda_2 \rho(x) u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Домножим первое уравнение на u_2 , а второе на u_1 :

$$\begin{aligned} u_2[\varphi u_1']' - qu_1 u_2 + \lambda_1 \rho(x) u_1 u_2 &= 0, \\ u_1[\varphi u_2']' - qu_1 u_2 + \lambda_2 \rho(x) u_1 u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Вычитая первое из второго, получаем:

$$u_1[\varphi u_2']' - u_2[\varphi u_1']' = (\lambda_1 - \lambda_2)u_1 u_2 \rho(x).$$

Левая часть этого равенства преобразуется к виду

$$u_1[\varphi u_2']' - u_2[\varphi u_1']' = [\varphi(u_1 u_2' - u_2 u_1')] = [\varphi W(u_1(x), u_2(x))]',$$

(это проверяется непосредственно). Тогда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)u_1 u_2 \rho(x) = [\varphi W(u_1(x), u_2(x))]'.$$

Проинтегрируем обе части равенства по отрезку $[a, b]$ и используем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b u_1(x) u_2(x) \rho(x) dx &= \int_a^b [\varphi(x) W(u_1(x), u_2(x))]' dx = \\ &= \varphi(x) W(u_1(x), u_2(x)) \Big|_a^b = \varphi(b) W(u_1(b), u_2(b)) - \varphi(a) W(u_1(a), u_2(a)) = 0, \end{aligned}$$

где $W(u_1(a), u_2(a)) = W(u_1(b), u_2(b)) = 0$ в силу граничных условий (I.2.2) (аналогично предыдущей теореме). \square

Основные уравнения математической физики

Волновое уравнение

TODO

Часть II

Обобщенные функции

17.02.2015

δ -функция Дирака

Дирак ввел эту функцию для описания плотностей (масс, зарядов и др.) в столь малом объеме, что его можно принять за точку.

Исходя из того, что если $\delta(x)$ — плотность распределения массы заряда $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\int \delta(x) dx = 1, \quad \delta(x) = 0, \quad x \neq 0;$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \delta(x) dx.$$

Пусть $f(x)$ — непрерывная в окрестности 0 функция. Рассмотрим

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| > \varepsilon, \\ 0, & |x| \leq \varepsilon; \end{cases} \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \delta_\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{1}{2\varepsilon} f(x) dx.$$

Поскольку δ — неотрицательная функция, можно воспользоваться I-ой теоремой о среднем и вынести значение в некоторой средней точке за знак интеграла.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} f(\xi_\varepsilon) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\xi_\varepsilon) = f(0);$$

Т.о. δ -функция Дирака оказалась функционалом, который на каждой, непрерывной в окрестности 0 функции действует по правилу.

Учитывая, что действие этого функционала прослеживается через предельный переход в интегральных операциях от δ -образной последовательности, это действие записывается следующим образом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0); \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Задача. Привести примеры δ -образных последовательностей в $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

При этом использовать не только функции с разрывом 1-го рода, но и бесконечно дифференцируемые.

Решение. Comming soon. □

Пространство основных функций D

$D = D(\mathbb{R}^n)$ — функции, имеющие конечный носитель в \mathbb{R}^n , бесконечно дифференцируемые. В этом множестве вводится топология следующим образом. Последовательность функций $\varphi_k \rightarrow \varphi$ входит в D , если:

1) $\exists R, \text{supp } \varphi_k \subset B_R$.

2) $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - мультииндекс. $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ в B_R . $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$,

где $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$.

Задача. Доказать, что дифференциальные операторы непрерывны в топологии D .

Решение. Comming soon. □

Задача. Доказать, что линейная замена переменных $y = Ax + b$ (A — невырожденная матрица и $b \in \mathbb{R}^n$) — непрерывная операция в топологии D .

Решение. Comming soon. □

Задача. Доказать, что операция умножения на бесконечно дифференцируемую функцию непрерывна в D .

Решение. Comming soon. □

24.02.2015

Пример основной функции

Рассмотрим семейство функций вида

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_{n,\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

где $c_{n,\varepsilon}$ выбираются таким образом, чтобы $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) dx = 1$.

Задача. Доказать, что ω_ε — бесконечно непрерывно дифференцируема.

Решение. Comming soon. □

Элемент объема dx можно представить в сферических координатах в виде

$$dx = r^{n-1} dr dS,$$

где dS — элемент $n - 1$ -мерной единичной сферы, при этом

$$\int_{|x|=1} dS = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Тогда для любой функции $f(|x|)$ справедливо равенство

$$\int_{|x| \leq R} f(|x|) dx = \int_0^R f(r) r^{n-1} dr \int_{|x|=1} dS.$$

Отсюда легко получить условия нормировки для параметров $c_{n,\varepsilon}$.

Основная функция, равная 1 на области

Лемма II.4.1. *Для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ найдётся такая бесконечно непрерывно дифференцируемая функция η , что выполняются следующие три условия:*

- 1) $0 \leq \eta(x) \leq 1$,
- 2) $\eta(x) = 1$ для всех $x \in \Omega_\varepsilon$, где Ω_ε — ε -окрестность области Ω ,
- 3) $\eta(x) = 0$ для всех x не принадлежащих 3ε -окрестности области Ω .

Доказательство. См. Владимиров-Жаринов (2004), с. 69. \square