ОЦЕНКА СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.Н. Нестеров[1] (Воронеж)

nesterovilyan@gmail.com

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End} \mathrm{X}$, где X – банахово пространство, являющееся прямой суммой $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2$ двух замкнутых подпространств $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$, где $\dim \mathrm{X}_1 = 1$ и $\operatorname{End} \mathrm{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов. Предполагается, что оператор $\mathbb{A}$ задается операторной матрицей

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix},$$

т.е. $\mathbb{A}x = (Ax_1 + Cx_2, Dx_1 + Bx_2)$, где $x = x_1 + x_2,\ Ax_1 = ax_1$, $a \in \mathbb{C},\ x_1 \in \mathrm{X}_1,\ x_2 \in \mathrm{X}_2$.

Представим оператор $\mathbb{A}$ в виде $\mathbb{A} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$, где оператор $\mathcal{A} \in \operatorname{End} \mathrm{X}$ задается матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, а оператор $\mathcal{B} \in \operatorname{End} \mathrm{X}$ матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -C \\ -D & 0 \end{pmatrix}$. Всюду далее считаем что выполняется условие $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing$ для спектров $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ операторов A и B.

Символом U обозначим пространство $\operatorname{End} \mathrm{X}$. Для любого оператора $X \in \mathrm{U}$ рассмотрим операторы $P_i X P_j \in \mathrm{U},\ i, j \in 1, 2$. Таким образом, оператор X задается матрицей:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

где оператор X_{ij} – сужение оператора $P_i X P_j$ на подпространство X_i с областью значений $\mathrm{X}_j, i, j \in 1, 2$.

В соответствии с заданным разложением пространства X будем рассматривать два трансформатора: $\mathcal{J} \in \operatorname{End} \mathrm{U}, \Gamma \in \operatorname{End} \mathrm{U}$ [1].

Применив метод подобных операторов [1] получаем нелинейное уравнение

$$X = \mathcal{B}\Gamma X - \Gamma X \mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X) - \mathcal{B} = \Phi(X), \tag{1}$$

к которому применим указанные выше проекторы. Блоки X_{ij}, $i, j = 1, 2$, оператора X удовлетворяют уравнениям:

$$X_{11} = \mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}; \tag{2}$$

$$X_{21} = -(\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + \mathcal{B}_{21} = \Phi_1(X_{21}); \tag{3}$$

$$X_{22} = \mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}; \tag{4}$$

$$X_{12} = -(\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + \mathcal{B}_{12} = \Phi_2(X_{12}). \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$\gamma \left\|\mathcal{B}\right\| < \frac{1}{2},$$

где $\gamma = \left\|(aI - \mathcal{B})^{-1}\right\|$. *Тогда нелинейные уравнения* (5) *и* (3) *имеют единственные решения* X_{12}^0, X_{21}^0 *в шаре с центром в точке* $\mathcal{B}$ *и радиусом* $\|\mathcal{B}\|$. X_{12}^0 *и* X_{21}^0 *можно найти методом простых итераций.*

Теорема 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$d = 2\gamma^2(b_{12}b_{21})^{\frac{1}{2}} < 1,$$

а также выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда для решений X_{11}^0 *и* X_{21}^0 *нелинейных уравнений* (2), (3) *имеют место следующие оценки:*

$$\left\|X_{11}^0\right\| \le \frac{2\gamma b_{12}b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}}, \quad \left\|X_{21}^0\right\| \le \frac{2b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}},$$

где $\|\mathcal{B}_{ij}\| = b_{ij},\ i, j = 1, 2$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда оператор* $\mathbb{A}$ *имеет собственное значение* $\lambda_1^0 = a - x_{11}^0$, *где* x_{11}^0 *определяется из* $X_{11}^0 x_1 = x_{11}^0 x_1,\ x_1 \in \mathrm{X}_1$, *причем имеет место оценка:*

$$\left|x_{11}^0\right| = \left\|X_{11}^0\right\| \le \frac{2\gamma b_{12}b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{2\gamma} - \frac{1 - (1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}}{4\gamma^2 b_{21}b_{12}},$$

где $\gamma = \left\|(aI - \mathcal{B})^{-1}\right\|, b_{ij} = \left\|\mathcal{B}_{ij}\right\|, i, j = 1, 2.$

Литература

1. Баскаков А. Г. Расщепление возмущённого дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков // Фундамент. и прикл. матем., 8:1 (2002), 4–7