Оценка собственного значения возмущенного линейного оператора

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Дан линейный оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$ со своей матрицей $\mathscr{A} = (a_{ij})$, внедиагональные элементы которой малы по сравнению с диагональными. Представим оператор $\mathbb{A}$ в виде разности $\mathbb{A} = A - B$ двух линейных операторов
$A, B \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$, заданных матрицами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор A будем называть *невозмущенным* оператором, оператор B *возмущением* оператора A, а $\mathbb{A}$ — возмущенным линейным оператором. Как уже говорилось, элементы матрицы возмущения $\mathcal{B}$ малы по сравнению с элементами невозмущенной матрицы $\mathcal{A}$.

Требуется получить оценку одного определенного собственного значения (далее всюду будем делать вывод для первого собственного значения). Знаем, что это оцениваемое собственное значение отлично от других.

Разложим пространство $\operatorname{End}\mathbb{C}^n$ в прямую сумму $\mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$ инвариантных относительно невозмущенного оператора A подпространств $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$, где $\mathfrak{X}_1 = \mathbb{C}, \mathfrak{X}_2 = \mathbb{C}^{n-1}$. При этом потребуем, чтобы множества $\sigma_i = \sigma(A_i)$,
$i = 1, 2$ взаимно не пересекались ($A_i = A|_{\mathfrak{X}_i}, i = 1, 2$ — сужение A на $\mathfrak{X}_i$ и $A = A_1 \oplus A_2$). Как уже было сказано, будем искать оценку первого собственного значения, поэтому пусть $\mathfrak{X}_1 = \mathcal{L}(e_1)$ — линейная оболочка, натянутая на базисный вектор $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, а $\mathfrak{X}_2 = \mathcal{L}(e_2, \dots, e_n)$.

В соответствии с заданным разложением пространства $\mathbb{C}^n$ будем рассматривать два трансформатора: $\mathcal{J}\colon \operatorname{End}\mathbb{C}^n \to \operatorname{End}\mathbb{C}^n, \Gamma\colon \operatorname{End}\mathbb{C}^n \to \operatorname{End}\mathbb{C}^n$, таких что:

1. $\forall X \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$ матрица оператора $\mathcal{J}X$ имеет вид:

$$\mathcal{J}X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix};$$

2. ΓX определяется как решение уравнения:

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - \mathcal{J}X, \qquad \forall X \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Определим вид матрицы оператора ΓX. Для этого запишем равенство (1) для элемента (i,j):

$$(A\Gamma X)_{ij} - (\Gamma X A)_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & i = 1 \text{ и } j = 2 \dots n; \\ x_{ij}, & j = 1 \text{ и } i = 2 \dots n; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $\Gamma X = Y$. Заметим, что $(AY)_{ij} = a_{ii} y_{ij}$. Подставим полученный результат в формулу (2):

$$a_{ii} y_{ij} - a_{jj} y_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & i = 1 \text{ и } j = 2 \dots n; \\ x_{ij}, & j = 1 \text{ и } i = 2 \dots n; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим за Ω множество $\{(i,j)\colon i = 1 \text{ и } j = 2 \dots n, \text{ или } j = 1 \text{ и }$
$i = 2 \dots n\}$. Тогда

$$y_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}, & (i,j) \in \Omega \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом мы получили, что матрица оператора ΓX имеет вид:

$$\Gamma X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_{12}}{a_{11} - a_{22}} & \dots & \frac{x_{1n}}{a_{11} - a_{nn}} \\ \frac{x_{21}}{a_{22} - a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_{n1}}{a_{nn} - a_{11}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что $\|\Gamma X\| \leqslant \gamma \|X\|$, где $\gamma = \frac{1}{\min\limits_{\Omega} |a_{ii} - a_{jj}|}$.

Будем искать такой оператор $X_0 \in \operatorname{End} \mathbb{C}^n$, чтобы выполнялось равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(A - \mathcal{J} X_0). \tag{5}$$

При условии $\|\Gamma X_0\| \leqslant 1$ (тогда оператор $I + \Gamma X_0$ обратим) равенство (5) означает подобие операторов $A - B$ и $A - \mathcal{J} X_0$. Таким образом задача оценки первого собственного значения возмущенного оператора $A - B$ сводится к задаче оценки первого собственного значения оператора $A - \mathcal{J} X_0$, равного $a_{11} - x_{11}^0$ в силу указанного разложения пространства $\mathbb{C}^n$. Необходимо получить оценку x_{11}^0 матрицы оператора X_0. Для этого сначала преобразуем равенство (5):

$$\begin{gathered} A + A\Gamma X - B - B\Gamma X = A - \mathcal{J} X + \Gamma X A - \Gamma X \mathcal{J} X; \\ A\Gamma X - \Gamma X A - B\Gamma X + \mathcal{J} X + \Gamma X \mathcal{J} X - B = 0; \\ X - \mathcal{J} X - B\Gamma X + \mathcal{J} X + \Gamma X \mathcal{J} X - B = 0; \\ X = B\Gamma X - \Gamma X \mathcal{J} X + B. \end{gathered} \tag{6}$$

Применим к уравнению (6) трансформатор $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J} X = \mathcal{J} B \Gamma X + \mathcal{J} B,$$

и подставим $\mathcal{J} X$ в уравнение (6). Получаем нелинейное уравнение

$$X = B\Gamma X - \Gamma X \mathcal{J}(B\Gamma X) - \Gamma X \mathcal{J} B - B = \Phi(X). \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$\gamma\,\|B\| < \frac{1}{4},$$

тогда нелинейное уравнение (7) *имеет единственное решение* X_0 *в шаре с центром в нуле и радиусом* $4\,\|B\|$*, на котором достигается равенство* (5). X_0 *можно найти методом простых итераций, если в качестве первого приближения взять* $X = 0$.

Доказательство. Найдем такой шар с центром в точке 0, который отображение Φ переводит сам в себя, т.е. если $\|X\| < r\|B\|$, то и $\|\Phi(X)\| < r\|B\|$.

$$\begin{aligned}\|\Phi(X)\| &\le \|B(\Gamma X) - (\Gamma X)(\mathcal{J}B) - (\Gamma X)\mathcal{J}(B\Gamma X) + B\| \le \\ &\le \gamma\|B\|\;\|X\| + \gamma\|B\|\;\|X\| + \gamma^2\|B\|\;\|X\|^2 + \|B\| \le \\ &\le \gamma r\|B\|^2 + \gamma r\|B\|^2 + \gamma^2\|B\|^3 r^2 + \|B\| \le r\|B\|.\end{aligned}$$

Получили квадратное уравнение относительно r:

$$r^2\gamma^2\|B\|^2 + r(2\gamma\|B\| - 1) + 1 \le 0.$$

Пусть $\varepsilon = \gamma\|B\|$, тогда:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2 r^2 + (2\varepsilon - 1)r + 1 \le 0,\\ &\mathcal{D} = (2\varepsilon - 1)^2 - 4\varepsilon^2 = 4\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1 - 4\varepsilon^2 = 1 - 4\varepsilon,\end{aligned}$$

для существования корней необходимо выполнение условия $\mathcal{D} > 0$, откуда $1 - 4\varepsilon > 0$, т.е. $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

Найдем оценку на радиус шара r:

$$r = \frac{1 - 2\varepsilon \mp \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon^2};$$

при $\varepsilon = \frac{1}{4}, r = 4$. Проверим сжимаемость отображения Φ в этом шаре:

$$\begin{aligned}\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| &= \|B\Gamma X - \Gamma X\mathcal{J}B - \Gamma X\mathcal{J}(B\Gamma X) + B - B\Gamma Y + \\ &\quad + \Gamma Y\mathcal{J}B + \Gamma Y\mathcal{J}(B\Gamma Y) - B\| = \|B\Gamma(X - Y) - \Gamma(X - Y)\mathcal{J}B - \\ &\quad - \Gamma X\mathcal{J}(B\Gamma X) + \Gamma Y\mathcal{J}(B\Gamma Y) - \Gamma Y\mathcal{J}(B\Gamma X) + \Gamma Y\mathcal{J}(B\Gamma X)\| = \\ &= \|B\Gamma(X - Y) - \Gamma(X - Y)\mathcal{J}B - \Gamma(X - Y)\mathcal{J}(B\Gamma X) - \\ &\quad - \Gamma Y\mathcal{J}(B\Gamma(X - Y))\| \leqslant 2\varepsilon\|X - Y\| + 2\varepsilon^2 r\|X - Y\| = \\ &= (2\varepsilon + 2\varepsilon^2 r)\|X - Y\|\end{aligned}$$

Возьмем $r = 4$. Покажем, что $2\varepsilon + 2\varepsilon^2 r < 1$.

$$2\varepsilon + 2\varepsilon^2 4 < 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{16}4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}4 = 1.$$

Тогда получаем, что отображение отображение Φ переводит шар с центром в нуле и радиусом $4\|B\|$ в себя и является на этом шаре сжимающим отображением, следовательно, существует внутри шара неподвижная точка отображения Φ , являющаяся единственным решением уравнения (7) и ее можно найти по методу простых итераций, используя в качестве нулевого приближения нулевой оператор. Теорема доказана.

Пусть P_1, P_2 — проекторы, ассоциированные с указанным в начале разложением пространства $\mathbb{C}^n$. Заметим, что $\forall X \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$ выполняется:

1. $\mathcal{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$;

2. $P_i(\Gamma X)P_j = \Gamma(P_iXP_j),\ i,j = 1,2,$ и $P_i(\Gamma X)P_i = 0,\ i = 1,2.$

Таким образом пространство $\mathbb{C}^n$ можно представить в виде прямой суммы $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{11} \oplus \mathfrak{X}_{12} \oplus \mathfrak{X}_{21} \oplus \mathfrak{X}_{22}$ подпространств, где $\mathfrak{X}_{ij} = \{P_i\mathfrak{X}P_j, X \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n\}$, $i,j = 1,2$. Через X_{ij} будем обозначать оператор $P_iXP_j,\ i,j = 1,2$, таким образом $X = (P_1 + P_2)X(P_1 + P_2) = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22},\ X \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$. Применим операторы P_1 и P_2 к обеим частям уравнения (7).

1. Применим справа и слева проектор P_1:

$$\begin{aligned} P_1XP_1 &= P_1B\Gamma XP_1 - P_1\Gamma X\mathcal{J}(B\Gamma X)P_1 - P_1\Gamma X\mathcal{J}BP_1 - P_1BP_1;\\ X_{11} &= (B_{11} + B_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21}) -\\ &- (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})\mathcal{J}((B_{11} + B_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21})) -\\ &- (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})(\mathcal{J}B_{11} + \mathcal{J}B_{21}) + B_{11}; \end{aligned}$$

Будем учитывать, что $\mathcal{J}X_{12} = \mathcal{J}X_{21} = 0$ и $\Gamma X_{11} = \Gamma X_{22} = 0$.

$$\begin{aligned} X_{11} &= (B_{11} + B_{12})\Gamma X_{21} - \Gamma X_{12}\mathcal{J}((B_{11} + B_{12})\Gamma X_{21}) -\\ &- \Gamma X_{12}\mathcal{J}B_{11} + B_{11};\\ X_{11} &= B_{12}\Gamma X_{21} + B_{11}; \end{aligned} \tag{8}$$

2. Применим справа проектор P_1, а слева P_2:

$$\begin{aligned} P_2XP_1 &= P_2B\Gamma XP_1 - P_2\Gamma X\mathcal{J}(B\Gamma X)P_1 - P_2\Gamma X\mathcal{J}BP_1 - P_2BP_1;\\ X_{21} &= (B_{11} + B_{22})\Gamma X_{21} - \Gamma X_{21}\mathcal{J}(B_{12}\Gamma X_{21}) - \Gamma X_{21}B_{11} + B_{21};\\ X_{21} &= B_{22}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{11} + B_{21}; \end{aligned} \tag{9}$$

Искомую оценку элемента x_{11} оператора X, являющегося решением нелинейного уравнения (7) мы получим, получив оценку $\|X_{11}\|$. Для оценки $\|X_{11}\|$ в свою очередь требуется оценка $\|X_{21}\|$ и разрешимость уравнения (9). Потому сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$d = \gamma b_{22} + \gamma b_{11} + 2\gamma^2(b_{12}b_{21})^{\frac{1}{2}} < 1. \tag{10}$$

Тогда нелинейное уравнение (9) *имеет единственное решение, которое можно найти методом простых итераций, и имеют место следующие оценки:*

$$\|X_{11} - B_{11}\| \le \frac{2\gamma b_{12}b_{21}}{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} + q} \qquad \|X_{21}\| \le \frac{2b_{21}}{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} + q},$$

где $q = ((\gamma b_{22} + \gamma b_{11} - 1)^2 - 4\gamma b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}$ *и* $\|B_{ij}\| = b_{ij},\ i,j = 1,2.$

Доказательство.

Рассмотрим оператор $\Phi_1(X_{21})$, определяемый уравнением 9. Найдем шар $B(r_1) = \{X \in \mathfrak{X}_{21} : \|X\| < r_1\}$ из пространства $\mathfrak{X}_{21}$, который оператор $\Phi_1(X_{21})$ переводит в себя, т. е. $\|\Phi_1(X_{21})\| \le r_1$ для любого $X \in B(r_1)$. Обозначим $r_1 = rb_{21}$.

$$\begin{aligned} &\|\Phi_1(X_{21})\| = \|B_{22}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{11} + B_{21}\| \le\\ &\le b_{22}\gamma\|X_{21}\| + \gamma b_{11}\|X_{21}\| + \gamma^2 b_{12}\|X_{21}\|^2 + b_{21} \le\\ &\le \gamma b_{22}b_{21}r + \gamma b_{11}b_{21}r + \gamma^2 b_{21}^2 b_{12}r^2 + b_{21} \le b_{21}r \end{aligned}$$

Получаем неравенство:

$$\gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r^2 + (\gamma b_{22} + \gamma b_{11} - 1) r + 1 \le 0.$$

Покажем что квадратное уравнение относительно r

$$\gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r^2 + (\gamma b_{22} + \gamma b_{11} - 1) r + 1 = 0$$

имеет хотя бы один действительный положительный корень. Воспользуемся тем, что $\gamma \|B\| < \frac{1}{4}$ и $b_{ij} \le \|B\|$.

$$\begin{aligned} &D = (\gamma b_{22} + \gamma b_{11} - 1)^2 - 4\gamma b_{21} b_{12} \\ &(\gamma b_{22} + \gamma b_{11} - 1)^2 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12} > (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) - 4 \cdot \frac{1}{16} = 0 \end{aligned}$$

Получаем, что

$$r_{1,2} = \frac{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} \pm q}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}}$$

Рассмотрим решение $r = \frac{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} - q}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}}$, докажем, что оно больше нуля.

$$\frac{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} - q}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}} = \frac{2}{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} + q} > 0$$

Получаем, что в качестве радиуса шара можно взять число

$$r b_{21} = \frac{2 b_{21}}{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} + q}.$$

Для любой пары операторов Y_1, Y_2 из шара $B(r_1)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\|\Phi_1(Y_1) - \Phi_1(Y_2)\| = \|B_{22}\Gamma Y_1 - (\Gamma Y_1) B_{12} \Gamma Y_1 - (\Gamma Y_1) B_{11} + B_{21} - \\ &- B_{22}\Gamma Y_2 + (\Gamma Y_2) B_{12} \Gamma Y_2 + (\Gamma Y_2) B_{11} - B_{21}\| \le (\gamma b_{22} + \gamma b_{11} + \\ &+ \gamma^2 b_{12} (\|Y_1\| + \|Y_2\|)) \|Y_1 - Y_2\| \le (\gamma b_{22} + \gamma b_{11} + \\ &+ \frac{2\gamma^2 (b_{12} b_{21})^{\frac{1}{2}} (1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11})}{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} + q}) \|Y_1 - Y_2\| \le d \|Y_1 - Y_2\|. \end{aligned}$$

Из условия (10) следует, что оператор Φ_1 является оператором сжатия в шаре $B(r_1)$. Тогда уравнение (9) имеет единственное решение X_{21} в этом шаре, которое можно найти методом простых итераций. Так как X_{21} принадлежит шару $B(r_1)$, то справедливо неравенство

$$\|X_{11} - B_{11}\| = \|B_{12}\Gamma X_{21}\| \le \gamma b_{12} \|X_{21}\| \le \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} + q}.$$

Теорема доказана.

Таким образом мы имеем следующую оценку для $\|X_{11}\|$

$$\|X_{11}\| \le \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} + q} + b_{11}.$$

Для получения формулы оценки собственного значения λ_1 возьмем норму вектора $\|x\| = \max_i |x_i|$, $x \in \mathbb{C}^n$, $i = 1 \ldots n$, которая в свою очередь порождает норму матриц соответствующих операторам в $\mathrm{End}\,\mathbb{C}^n$: $\|X\| = \max\limits_j \sum\limits_i x_{ij},\ X \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^n,\ i,j = 1\ldots n$.

По условию нашей задачи b_{11} равен 0, поэтому получаем следующую оценку λ_1

$$\lambda_1 \leq a_{11} + \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1 - \gamma b_{22} - \gamma b_{11} + ((\gamma b_{22} - 1)^2 - 4\gamma b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}.$$