

ЖОРДАНОВА ФОРМА ДЛЯ СОПРОВОЖДАЮЩИХ МАТРИЦ

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} = \alpha_1 x^{(n-1)} + \dots + \alpha_n x,$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}$. Данное уравнение обычным способом сводится к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = Ay,$$

где матрица оператора $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

а $f(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \dots - \alpha_n, \lambda \in \mathbb{C}$ – характеристический многочлен этой матрицы.

Теорема 1. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ собственные значения матрицы A кратностей k_1, \dots, k_m соответственно, где $\sum_{i=1}^m k_i = n$. Тогда жорданова форма для матрицы A имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_m \end{pmatrix}, \text{ где } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода U имеет вид

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_m),$$

где матрицы $U_i, i = 1 \dots m$ имеют вид

$$U_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \dots & \prod_{k=1}^{k_i-1} (n-k)\lambda_i^{n-k_i} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть λ_i – собственное значение матрицы A кратности k_i . Найдем соответствующие ему собственный и присоединенные векто-

ры матрицы.

$$\mathcal{A} - \lambda_i I = \begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 - \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Пусть $x^i \in \mathbb{C}^n$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i . Тогда справедливо равенство

$$(\mathcal{A} - \lambda_i I) x^i = 0, \quad (1)$$

где $x^i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Пусть $x_1 = 1$. Тогда равенство (1) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} -\lambda_i + x_2 = 0, \\ -\lambda_i x_2 + x_3 = 0, \\ \dots \\ -\lambda_i x_{n-2} + x_{n-1} = 0, \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} x_2 + \dots + (\alpha_1 - \lambda_i) x_n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решив систему (2), получим $x_2 = \lambda_i, x_3 = \lambda_i^2, \dots, x_{n-1} = \lambda_i^{n-2}$, а число x_n однозначно определяется из последнего уравнения системы (2) и оно равно λ_i^{n-1} . Таким образом, получено, что собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i , имеет вид

$$x^i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1}).$$

Пусть $k_i \neq 1$. Найдем присоединенные векторы.

Пусть $y_j^i \in \mathbb{C}^n$, $1 \leq j \leq k_i - 1$ - присоединенные векторы, отвечающие собственному значению λ_i . Первый присоединенный вектор y_1^i есть решение уравнения

$$(\mathcal{A} - \lambda_i I) y_1^i = x^i, \quad (3)$$

где $y_1^i = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_n^{(1)})$, x^i - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i . Пусть $y_1^{(1)} = 0$. Тогда равенство (3) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} y_2^{(1)} = 1, \\ -\lambda_i y_2^{(1)} + y_3^{(1)} = \lambda_i, \\ \dots \\ -\lambda_i y_{n-2}^{(1)} + y_{n-1}^{(1)} = \lambda_i^{n-2}, \\ \alpha_{n-1} y_2^{(1)} + \alpha_{n-2} y_3^{(1)} \dots + (\alpha_1 - \lambda_i^{n-1}) y_n^{(1)} = \lambda_i^{n-1}. \end{cases} \quad (4)$$

Решив систему (4), получим

$$y_1^i = (0, 1, 2\lambda_i, 3\lambda_i^2, \dots, (n-1)\lambda_i^{n-2}).$$

Покажем, что найденный y_1^i удовлетворяет системе (4). Очевидно, что первые $n-1$ уравнений справедливы, покажем, что справедливо последнее:

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} + 2\alpha_{n-2}\lambda_i + \dots + (\alpha_1 - \lambda_i)(n-1)\lambda_i^{n-2} &= \lambda_i^{n-1}, \\ \alpha_{n-1} + 2\alpha_{n-2}\lambda_i + \dots + \alpha_1(n-1)\lambda_i^{n-2} - n\lambda_i^{n-1} + \lambda_i^{n-1} &= \lambda_i^{n-1}, \\ \alpha_{n-1} + 2\alpha_{n-2}\lambda_i + \dots + \alpha_1(n-1)\lambda_i^{n-2} - n\lambda_i^{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Ясно, что $P'(\lambda)|_{\lambda_i} = 0$, так как λ_i - корень многочлена P кратности $k_i \neq 1$. Если $k_i \geq 2$, тогда в силу равенства нулю любой производной до $k_i - 1$ порядка многочлена P в точке λ_i , можно показать, что

$$y_p^i = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_p, p!, (p+1)!\lambda_i, \dots, \prod_{k=1}^p (n-k)\lambda_i^{n-p-1} \right).$$

Таким образом, доказано что матрица \mathcal{U} составлена из собственных и присоединенных векторов. Поэтому $\det(\mathcal{U}) \neq 0$, и, следовательно, матрица \mathcal{U} является матрицей перехода к жордановой форме и имеет вид

$$\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_m),$$

где матрицы $\mathcal{U}_i, i = 1 \dots m$ имеют вид

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \dots & \prod_{k=1}^{k_i-1} (n-k)\lambda_i^{n-k_i} \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Приведем примеры матрицы \mathcal{U} для двух частных случаев.

Пусть все собственные значения матрицы \mathcal{A} различны. Тогда матрица \mathcal{U} имеет вид

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Она является матрицей Вандермонда.

Пусть кратность единственного собственного значения λ_0 равна n . Тогда матрица \mathcal{U} имеет вид

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{n-1} & (n-1)\lambda_0^{n-2} & (n-1)(n-2)\lambda_0^{n-3} & \dots & (n-1)! \end{pmatrix}.$$

В качестве примера рассмотрим частный случай $n = 3$. Тогда матрица \mathcal{A} имеет вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Возможны три варианта:

1) все собственные значения различны;

2) собственные значения λ_1, λ_2 имеют кратности $k_1 = 2, k_2 = 1$ (либо наоборот);

3) матрица \mathcal{A} имеет одно собственное значение λ_0 ;

Рассмотрим первый случай. Пусть матрица \mathcal{A} имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ кратностей $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ соответственно. Оператор A имеет простую структуру. Тогда жорданова форма матрицы \mathcal{A} имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Далее запишем матрицу перехода \mathcal{U} и обратную к ней \mathcal{U}^{-1} :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Рассмотрим проекторы \mathcal{P}'_i жордановой матрицы \mathcal{J} оператора A , которые имеют вид:

$$\mathcal{P}'_i = (p'_{jk}),$$

$$p'_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k = i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Теперь запишем проекторы оператора A :

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{U} \mathcal{P}'_i \mathcal{U}^{-1},$$

где $i \in \{1, 2, 3\}$.

Найдем проектор \mathcal{P}_1

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_1 (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) & \lambda_1 (\lambda_3 - \lambda_2) \\ \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_1^2 (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) & \lambda_1^2 (\lambda_3 - \lambda_2) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Найдем проектор \mathcal{P}_2

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_2 (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) & \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_3) \\ \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_2^2 (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) & \lambda_2^2 (\lambda_1 - \lambda_3) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Найдем проектор \mathcal{P}_3

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) & \lambda_3 (\lambda_2 - \lambda_1) \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) & \lambda_3^2 (\lambda_2 - \lambda_1) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Тогда по теореме о спектральном разложении оператора простой структуры [2]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \lambda_3 \mathcal{P}_3$$

Рассмотрим второй случай. Пусть матрица \mathcal{A} имеет собственные значения λ_1, λ_2 которые имеют кратности $k_1 = 2, k_2 = 1$ соответственно. Тогда жорданова форма матрицы \mathcal{A} имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода \mathcal{U} и обратную к ней \mathcal{U}^{-1} :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$.

Рассмотрим проекторы $\mathcal{P}'_i, i \in \{1, 2\}$ жордановой матрицы \mathcal{J} оператора \mathcal{A} и её нильпотентную часть \mathcal{Q}' .

$$\mathcal{P}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь запишем проекторы оператора A и нильпотентную часть жордановой матрицы:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_i &= \mathcal{U}\mathcal{P}'_i\mathcal{U}^{-1}, \\ \mathcal{Q} &= \mathcal{U}\mathcal{Q}'\mathcal{U}^{-1},\end{aligned}$$

где $i \in \{1, 2\}$.

Найдем проектор \mathcal{P}_1

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{P}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{P}_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ -\lambda_1^2\lambda_2 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & -\lambda_2 \\ -\lambda_1^2\lambda_2^2 & 2\lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_1^2 - 1\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Найдем проектор \mathcal{P}_2

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{P}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{P}_2 &= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 & -2\lambda_1\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2\lambda_2^2 & -2\lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Найдем нильпотентную часть жордановой матрицы \mathcal{Q}

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{Q} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{Q} &= \begin{pmatrix} \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2) & \lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) & \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \lambda_1^2(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2) & \lambda_1^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) & \lambda_1^2(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Тогда по теореме о спектральном разложении линейного оператора [2]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \mathcal{Q}.$$

Рассмотрим третий случай. Пусть матрица \mathcal{A} имеет одно собственное значение λ кратности $k = 3$. Тогда жорданова форма матрицы \mathcal{A} имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода \mathcal{U} и обратную к ней \mathcal{U}^{-1} :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 & -\lambda & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Спектральное разложение для этого случая очевидно.

Литература

1. *Боровских А.В., Перов А.И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2004, 540 стр
2. *Баскаков А. Г.* Лекции по алгебре // Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013, 159 стр