ЖОРДАНОВА ФОРМА СОПРОВОЖДАЮЩИХ МАТРИЦ ДЛЯ РЕКУРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Рассмотрим задачу построения последовательности $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, для которой известны первые $n \geq 1$ членов $x(1) = x_1^0, \dots, x(n) = x_n^0$ и все последующие задаются реккурентными соотношениями

$$x(m+n) = \alpha_1 x(m+n-1) + \alpha_2 x(m+n-2) + \dots + \alpha_n x(m), m \geq 1, \qquad (1)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - известные числа из $\mathbb{C}$. Введем в рассмотрение последовательность $x_k : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, 1 \leq k \leq n$, определенные равенствами

$$\begin{aligned} x_1(m) &= x(m), \\ x_2(m) &= x(m+1), \\ &\dots \\ x_n(m) &= x(m+n), n \geq 1. \end{aligned}$$

Используя (1), получаем, что такие последовательности связаны друг с другом равенствами

$$\begin{aligned} x_1(m+1) &= x_2(m), \\ x_2(m+1) &= x_3(m), \\ &\dots \\ x_n(m+1) &= \alpha_n x_1(m) + \alpha_{n-1} x_2(m) + \dots + \alpha_1 x_n(m), m \geq 1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Рассмотрим последовательность $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^n$ вида

$$y(m) = (x_1(m), \dots, x_n(m)), m \geq 1.$$

Из (2) следует, что для нее верны равенства

$$y(m+1) = Ay(m), m \geq 1, \qquad (3)$$

где оператор $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ определен с помощью матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

а $P(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \ldots - \alpha_n, \lambda \in \mathbb{C}$ – характеристический многочлен этой матрицы.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *– собственные значения матрицы* $\mathcal{A}$ *кратностей* $k_1, \ldots, k_m$ *соответственно, где* $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$. *Тогда жорданова форма для матрицы* $\mathcal{A}$ *имеет вид*

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathcal{J}_m \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода $\mathcal{U}$ *имеет вид*

$$\mathcal{U} = \operatorname{diag}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_m),$$

где матрицы $\mathcal{U}_i \in Matr_{n,k_i}(\mathbb{C}), i = \overline{1,m}$, *имеют вид*

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \ldots & \prod_{k=1}^{k_i-1}(n-k)\lambda_i^{n-k_i} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть λ_i - собственное значение матрицы $\mathcal{A}$ кратности k_i. Найдем соответствующие ему собственный и присоединенные векторы. Рассмотрим матрицу вида

$$\mathcal{A} - \lambda_i I = \begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_1 - \lambda_i \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица.
Пусть $x_i \in \mathbb{C}^n$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i. Тогда справедливо равенство

$$(\mathcal{A} - \lambda_i I)\, x_i = 0, \tag{4}$$

где $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$. Очевидно, что $x_{i1} \neq 0$ (иначе вектор x_i был бы нулевым). Без ограничения общности можно считать, что $x_{i1} = 1$. Тогда равенство (4) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda_i + x_{i2} = 0, \\ -\lambda_i x_{i2} + x_{i3} = 0, \\ \ldots \\ -\lambda_i x_{in-2} + x_{in-1} = 0, \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} x_{i2} + \cdots + (\alpha_1 - \lambda_i) x_{in} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Решив систему (5), получим, что

$$x_i = \left(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^{n-1}\right).$$

Пусть $k_i \neq 1$. Найдем присоединенные векторы к вектору x_i.
Пусть $x_{i,j} \in \mathbb{C}^n, 1 \leq j \leq k_i - 1$ - присоединенные векторы, отвечающие собственному значению λ_i. Первый присоединенный вектор $x_{i,1}$ есть решение уравнения

$$(\mathcal{A} - \lambda_i I)\, x_{i,1} = x_i, \tag{6}$$

где $x_{i,1} = (x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{n,1})$ - подлежащий определению присоединенный вектор, x_i - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i. Пусть $x_{1,1} = 0$. Тогда равенство (6) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} x_{2,1} = 1, \\ -\lambda_i x_{2,1} + x_{3,1} = \lambda_i, \\ \ldots \\ -\lambda_i x_{n-2,1} + x_{n-1,1} = \lambda_i^{n-2}, \\ \alpha_{n-1} x_{2,1} + \alpha_{n-2} x_{3,1} \cdots + (\alpha_1 - \lambda_i^{n-1}) x_{n,1} = \lambda_i^{n-1}. \end{cases} \tag{7}$$

Поскольку $P'(\lambda_i) = 0$, тогда, решив систему (7), получим вектор

$$x_{i,1} = \left(0, 1, 2\lambda_i, 3\lambda_i^2, \ldots, (n-1)\lambda_i^{n-2}\right),$$

который является присоединенным к собственному вектору x_i.
Аналогичным образом устанавливается, что векторы

$$x_{i,p} = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, p!, (p+1)!\lambda_i, \ldots, \prod_{k=1}^{p} (n-k)\lambda_i^{n-p-1}\right),$$

где $1 \leq p \leq k_i - 1$, являются присоединенными к вектору x_i.
Таким образом, доказано, что матрица $\mathcal{U}$ составлена из собственных и присоединенных векторов. Поэтому $det(\mathcal{U}) \neq 0$, и, следовательно, матрица $\mathcal{U}$ является матрицей перехода к жордановой форме и имеет вид

$$\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_m),$$

где матрицы $\mathcal{U}_i \in Matr_{n,k_i}(\mathbb{C}), i = 1 \ldots m$, имеют вид

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \ldots & \prod_{k=1}^{k_i-1}(n-k)\lambda_i^{n-k_i} \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. *Боровских А.В., Перов А.И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2004, 540 стр

2. *Баскаков А. Г.* Лекции по алгебре // Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013, 159 стр