ЖОРДАНОВА ФОРМА ДЛЯ СОПРОВОЖДАЮЩИХ МАТРИЦ

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} = \alpha_1 x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n x,$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,n}$. Данное уравнение обычным способом (см. [1]) сводится к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = Ay,$$

где матрица оператора $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

а $P(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \ldots - \alpha_n, \lambda \in \mathbb{C}$ – характеристический многочлен этой матрицы.

Теорема 1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ кратностей $k_1, \ldots, k_m$ соответственно, где $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$. Тогда жорданова форма для матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид*

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathcal{J}_m \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_m),$$

где матрицы $\mathcal{U}_i \in Matr_{n,k_i}(\mathbb{C}), i = \overline{1,m}$, имеют вид

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \ldots & \prod_{k=1}^{k_i-1}(n-k)\lambda_i^{n-k_i} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть λ_i - собственное значение матрицы $\mathcal{A}$ кратности k_i. Найдем соответствующие ему собственный и присоединенные векторы. Рассмотрим матрицу вида

$$\mathcal{A}-\lambda_i I=\begin{pmatrix}-\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -\lambda_i & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1-\lambda_i\end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица.

Пусть $x_i \in \mathbb{C}^n$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i. Тогда справедливо равенство

$$(\mathcal{A}-\lambda_i I)\, x_i = 0, \tag{1}$$

где $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$. Очевидно, что $x_{i1} \neq 0$ (иначе вектор x_i был бы нулевым). Без ограничения общности можно считать, что $x_{i1} = 1$. Тогда равенство (1) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases}-\lambda_i + x_{i2} = 0,\\ -\lambda_i x_{i2} + x_{i3} = 0,\\ \dots\\ -\lambda_i x_{in-2} + x_{in-1} = 0,\\ \alpha_n + \alpha_{n-1}x_{i2} + \dots + (\alpha_1-\lambda_i)x_{in} = 0.\end{cases} \tag{2}$$

Решив систему (2), получим, что

$$x_i = \left(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1}\right).$$

Пусть $k_i \neq 1$. Найдем присоединенные векторы к вектору x_i.

Пусть $x_{i,j} \in \mathbb{C}^n, 1 \le j \le k_i - 1$ - присоединенные векторы, отвечающие собственному значению λ_i. Первый присоединенный вектор $x_{i,1}$ есть решение уравнения

$$(\mathcal{A}-\lambda_i I)\, x_{i,1} = x_i, \tag{3}$$

где $x_{i,1} = (x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{n,1})$ - подлежащий определению присоединенный вектор, x_i - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i. Пусть $x_{1,1} = 0$. Тогда равенство (3) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases}x_{2,1} = 1,\\ -\lambda_i x_{2,1} + x_{3,1} = \lambda_i,\\ \dots\\ -\lambda_i x_{n-2,1} + x_{n-1,1} = \lambda_i^{n-2},\\ \alpha_{n-1}x_{2,1} + \alpha_{n-2}x_{3,1} \dots + (\alpha_1 - \lambda_i^{n-1})x_{n,1} = \lambda_i^{n-1}.\end{cases} \tag{4}$$

Поскольку $P'(\lambda_i) = 0$, тогда, решив систему (4), получим вектор

$$x_{i,1} = \left(0, 1, 2\lambda_i, 3\lambda_i^2, \dots, (n-1)\lambda_i^{n-2}\right),$$

который является присоединенным к собственному вектору x_i.

Аналогичным образом устанавливается, что векторы

$$x_{i,p} = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{p}, p!, (p+1)!\lambda_i, \dots, \prod_{k=1}^{p}(n-k)\lambda_i^{n-p-1}\right),$$

где $1 \leq p \leq k_i - 1$, являются присоединенными к вектору x_i.
Таким образом, доказано, что матрица $\mathcal{U}$ составлена из собственных и присоединенных векторов. Поэтому $det(\mathcal{U}) \neq 0$, и, следовательно, матрица $\mathcal{U}$ является матрицей перехода к жордановой форме и имеет вид

$$\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_m),$$

где матрицы $\mathcal{U}_i \in Matr_{n,k_i}(\mathbb{C}), i = 1 \ldots m$, имеют вид

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \ldots & \prod_{k=1}^{k_i-1}(n-k)\lambda_i^{n-k_i} \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Приведем примеры матрицы $\mathcal{U}$ для двух частных случаев.

Пример 1.

Пусть корни характеристического многочлена просты. Тогда матрица $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Она является матрицей Вандермонда.

Пример 2.

Пусть характеристический многочлен имеет единственный корень λ_0. Тогда матрица $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{n-1} & (n-1)\lambda_0^{n-2} & (n-1)(n-2)\lambda_0^{n-3} & \ldots & (n-1)! \end{pmatrix}.$$

В качестве примера рассмотрим частный случай $n = 3$. Тогда матрица $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Возможны три варианта:
1) все собственные значения различны;
2) собственные значения λ_1, λ_2 имеют кратности $k_1 = 2, \ k_2 = 1$ (либо наоборот);
3) матрица $\mathcal{A}$ имеет одно собственное значение λ_0;

Рассмотрим первый случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ кратностей $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ соответственно. Оператор

A имеет простую структуру. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Далее запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det\mathcal{U} = (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)$.
Рассмотрим проекторы $\mathcal{P}'_i$ жордановой матрицы $\mathcal{J}$ оператора A, которые имеют вид:

$$\mathcal{P}'_i = \left(p'_{jk}\right),$$
$$p'_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } j=k=i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.
Теперь запишем проекторы оператора A:

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{U}\mathcal{P}'_i\mathcal{U}^{-1},$$

где $i \in \{1, 2, 3\}$.
Найдем проектор $\mathcal{P}_1$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_1\left(\lambda_2^2-\lambda_3^2\right) & \lambda_1\left(\lambda_3-\lambda_2\right) \\ \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_1^2\left(\lambda_2^2-\lambda_3^2\right) & \lambda_1^2\left(\lambda_3-\lambda_2\right) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)$.
Найдем проектор $\mathcal{P}_2$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_2(\lambda_3^2-\lambda_1^2) & \lambda_2(\lambda_1-\lambda_3) \\ \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_2^2(\lambda_3^2-\lambda_1^2) & \lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_3) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)$.
Найдем проектор $\mathcal{P}_3$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_3(\lambda_1^2-\lambda_2^2) & \lambda_3(\lambda_2-\lambda_1) \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_3^2(\lambda_1^2-\lambda_2^2) & \lambda_3^2(\lambda_2-\lambda_1) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)$.

Тогда по теореме о спектральном разложении оператора простой структуры [2]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \lambda_3\mathcal{P}_3$$

Рассмотрим второй случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2$ которые имеют кратности $k_1 = 2,\ k_2 = 1$ соответственно. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det\mathcal{U} = (\lambda_1-\lambda_2)^2$.
Рассмотрим проекторы $\mathcal{P}'_i, i \in \{1,2\}$ жордановой матрицы $\mathcal{J}$ оператора A и её нильпотентную часть $\mathcal{Q}'$.

$$\mathcal{P}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{P}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь запишем проекторы оператора A и нильпотентную часть жордановой матрицы:

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{U}\mathcal{P}'_i\mathcal{U}^{-1},$$
$$\mathcal{Q} = \mathcal{U}\mathcal{Q}'\mathcal{U}^{-1},$$

где $i \in \{1, 2\}$.
Найдем проектор $\mathcal{P}_1$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ -\lambda_1^2\lambda_2 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & -\lambda_2 \\ -\lambda_1^2\lambda_2^2 & 2\lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_1^2 - 1\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Найдем проектор $\mathcal{P}_2$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 & -2\lambda_1\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2\lambda_2^2 & -2\lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

Найдем нильпотентную часть жордановой матрицы $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2) & \lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) & \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \lambda_1^2(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2) & \lambda_1^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) & \lambda_1^2(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix}$$

Тогда по теореме о спектральном разложении линейного оператора [2]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \mathcal{Q}.$$

Рассмотрим третий случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет одно собственное значение λ кратности $k = 3$. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 & -\lambda & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Спектральное разложение для этого случая очевидно.

Литература

1. *Боровских А.В., Перов А.И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2004, 540 стр

2. *Баскаков А. Г.* Лекции по алгебре // Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013, 159 стр