

И. Н. Нестеров, С. В. Ключков, А. С. Чурсанова

Рассмотрим линейный оператор $\mathbb{A} \in \text{End } \mathfrak{X}$, где \mathfrak{X} банахово пространство, заданный операторной матрицей, т. е.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}.$$

Пусть пространство \mathfrak{X} представимо в виде прямой суммы подпространств: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} A: \mathfrak{X}_1 &\rightarrow \mathfrak{X}_1 \\ B: \mathfrak{X}_2 &\rightarrow \mathfrak{X}_2 \\ C: \mathfrak{X}_2 &\rightarrow \mathfrak{X}_1 \\ D: \mathfrak{X}_1 &\rightarrow \mathfrak{X}_2 \end{aligned}$$

Представим оператор \mathbb{A} в виде $\mathbb{A} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$, где оператор $\mathcal{A} \in \text{End}(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$ задается матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, а оператор $\mathcal{B} \in \text{End}(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$ – матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -C \\ -D & 0 \end{pmatrix}$. Всюду далее считаем что выполняется условие:

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset.$$

Символом \mathcal{U} обозначим пространство $\text{End}(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$. Рассмотрим канонические проекторы

$$P_1x = (x_1, 0), P_2x = (0, x_2), x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2.$$

Для любого оператора $X \in \mathcal{U}$ рассмотрим операторы $P_iXP_j \in \mathcal{U}, i, j \in 1, 2$. Таким образом, оператор X задается матрицей:

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

где оператор X_{ij} – сужение оператора P_iXP_j на подпространство \mathfrak{X}_i с областью значений $\mathfrak{X}_j, i, j \in 1, 2$.

В соответствии с заданным разложением пространства \mathfrak{X} будем рассматривать два трансформатора: $\mathcal{J} \in \text{End } \mathcal{U}, \Gamma \in \text{End } \mathcal{U}$, таких что:

1. Для любого $X \in \mathcal{U}$ оператор $\mathcal{J}X$ определяется следующим образом: $\mathcal{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$, а матрица оператора $\mathcal{J}X$ имеет вид:

$$\mathcal{J}X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix};$$

2. Пусть $\Gamma X = Y$, тогда оператор Y определяется как решение уравнения:

$$\mathcal{A}Y - Y\mathcal{A} = X - \mathcal{J}X, \quad \forall X \in \mathcal{U}. \quad (1)$$

Запишем уравнение 1 в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Перемножив и вычтя матрицы получим следующую систему операторный уравнений:

$$\begin{cases} AY_{12} - Y_{12}B = X_{12}, \\ BY_{21} - Y_{21}A = X_{21}, \end{cases} \quad (2)$$

где Y_{12}, Y_{21} – искомые операторы. Если оператор A или оператор B ограничен, то уравнения 2 разрешимы.

Рассмотрим случай, когда $\dim \mathfrak{X}_1 = 1$, т. е. оператор A – скалярный оператор: $A = \alpha I$. Перепишем уравнения 2:

$$\begin{cases} \alpha I Y_{12} - Y_{12}B = X_{12}, \\ BY_{21} - Y_{21}\alpha I = X_{21}. \end{cases}$$

Так как оператор A ограничен, то система имеет решение, и оно имеет вид:

$$\begin{cases} Y_{12} = X_{12}(\alpha I - B)^{-1}, \\ Y_{21} = (\alpha I - B)^{-1}X_{21}. \end{cases}$$

Таким образом мы получили, что матрица оператора ΓX имеет вид:

$$\Gamma X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12}(\alpha I - B)^{-1} \\ (\alpha I - B)^{-1}X_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Оценим норму оператора Γ . Пусть $X \in \mathcal{U}$, тогда:

$$\begin{aligned} \|\Gamma X\| &\leq \max(\|X_{12}(\alpha I - B)^{-1}\|, \|(\alpha I - B)^{-1}X_{21}\|) \leq \\ &\leq \max(\|(\alpha I - B)^{-1}\|, \|(\alpha I - B)^{-1}\|) \|X\| = \|(\alpha I - B)^{-1}\| \|X\| = \gamma \|X\|. \end{aligned}$$

Получили следующую оценку $\|\Gamma\| \leq \gamma$.

Будем искать такой оператор $X_0 \in \mathcal{U}$, чтобы выполнялось равенство

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B})(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(\mathcal{A} - \mathcal{J}X_0). \quad (3)$$

При условии $\|\Gamma X_0\| \leq 1$ (тогда оператор $I + \Gamma X_0$ обратим) равенство (3) означает подобие операторов $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} - \mathcal{J}X_0$. Таким образом задача оценки первого собственного значения возмущенного оператора $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ сводится к задаче оценки первого собственного значения оператора $\mathcal{A} - \mathcal{J}X_0$, равного $a_{11} - x_{11}^0$ в силу указанного разложения пространства \mathfrak{X} . Необходимо получить оценку x_{11}^0 матрицы оператора X_0 . Для этого сначала преобразуем равенство (3):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} + \mathcal{A}\Gamma X - \mathcal{B} - \mathcal{B}\Gamma X &= \mathcal{A} - \mathcal{J}X + \Gamma X\mathcal{A} - \Gamma X\mathcal{J}X; \\ \mathcal{A}\Gamma X - \Gamma X\mathcal{A} - \mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{J}X + \Gamma X\mathcal{J}X - \mathcal{B} &= 0; \\ X - \mathcal{J}X - \mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{J}X + \Gamma X\mathcal{J}X - \mathcal{B} &= 0; \\ X &= \mathcal{B}\Gamma X - \Gamma X\mathcal{J}X + \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (4)$$

Применим к уравнению (4) трансформатор \mathcal{J} :

$$\mathcal{J}X = \mathcal{J}\mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{J}\mathcal{B},$$

и подставим $\mathcal{J}X$ в уравнение (4). Учитывая, что $\mathcal{J}\mathcal{B} = 0$ получаем нелинейное уравнение

$$X = \mathcal{B}\Gamma X - \Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X) - \mathcal{B} = \Phi(X). \quad (5)$$

Пусть P_1, P_2 – проекторы относительно разложения пространства $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$. Заметим, что $\forall X \in \text{End } \mathfrak{X}$ выполняется:

1. $\mathcal{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$;
2. $P_i(\Gamma X)P_j = \Gamma(P_iXP_j)$, $i, j = 1, 2$, и $P_i(\Gamma X)P_i = 0$, $i = 1, 2$.

Таким образом пространство \mathfrak{X} можно представить в виде прямой суммы $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{11} \oplus \mathfrak{X}_{12} \oplus \mathfrak{X}_{21} \oplus \mathfrak{X}_{22}$ подпространств, где $\mathfrak{X}_{ij} = \{P_i\mathfrak{X}P_j, X \in \text{End } \mathfrak{X}\}$, $i, j = 1, 2$. Через X_{ij} будем обозначать оператор P_iXP_j , $i, j = 1, 2$, таким образом $X = (P_1 + P_2)X(P_1 + P_2) = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}$, $X \in \text{End } \mathfrak{X}$. Применим операторы P_1 и P_2 к обеим частям уравнения (5).

1. Применим справа и слева проектор P_1 :

$$\begin{aligned} P_1XP_1 &= P_1\mathcal{B}\Gamma XP_1 - P_1\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_1 - P_1\mathcal{B}P_1; \\ X_{11} &= (\mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21}) - \\ &\quad - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})((\mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21})) + \mathcal{B}_{11}; \end{aligned}$$

Будем учитывать, что $\mathcal{J}X_{12} = \mathcal{J}X_{21} = 0$, $\Gamma X_{11} = \Gamma X_{22} = 0$ и $\mathcal{B}_{11} = \mathcal{B}_{22} = 0$.

$$X_{11} = \mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}; \quad (6)$$

2. Применим справа проектор P_1 , а слева P_2 :

$$\begin{aligned} P_2XP_1 &= P_2\mathcal{B}\Gamma XP_1 - P_2\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_1 - P_2\mathcal{B}P_1; \\ X_{21} &= (\mathcal{B}_{21} + \mathcal{B}_{22})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21}) - \\ &\quad - (\Gamma X_{21} + \Gamma X_{22})((\mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21})) + \mathcal{B}_{21}; \\ X_{21} &= -(\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + \mathcal{B}_{21} = \Phi_1(X_{21}); \end{aligned} \quad (7)$$

3. Применим справа и слева проектор P_2 :

$$\begin{aligned} P_2XP_2 &= P_2\mathcal{B}\Gamma XP_2 - P_2\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_2 - P_2\mathcal{B}P_2; \\ X_{22} &= (\mathcal{B}_{21} + \mathcal{B}_{22})(\Gamma X_{12} + \Gamma X_{22}) - \\ &\quad - (\Gamma X_{21} + \Gamma X_{22})((\mathcal{B}_{21} + \mathcal{B}_{22})(\Gamma X_{12} + \Gamma X_{22})) + \mathcal{B}_{22}; \\ X_{22} &= \mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}; \end{aligned} \quad (8)$$

4. Применим справа проектор P_2 , а слева P_1 :

$$\begin{aligned} P_1XP_2 &= P_1\mathcal{B}\Gamma XP_2 - P_1\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_2 - P_1\mathcal{B}P_2; \\ X_{12} &= (\mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{12})(\Gamma X_{12} + \Gamma X_{22}) - \\ &\quad - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})((\mathcal{B}_{21} + \mathcal{B}_{22})(\Gamma X_{12} + \Gamma X_{22})) + \mathcal{B}_{12}; \\ X_{12} &= -(\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + \mathcal{B}_{12} = \Phi_2(X_{12}). \end{aligned} \quad (9)$$

Получили четыре уравнения, причем уравнения (9) и (7) независимы от остальных уравнений. Разрешимость уравнения (5) будет доказана если, будет доказана разрешимость уравнений (9) и (7).

Теорема 1. Пусть выполнено неравенство

$$\gamma \|\mathcal{B}\| < \frac{1}{2},$$

где $\gamma = \|(\alpha I - B)^{-1}\|$, тогда нелинейные уравнения (9) и (7) имеют единственные решения X_{12}, X_{21} в шаре с центром в точке \mathcal{B} и радиусом $\|\mathcal{B}\|$. X_{12} и X_{21} можно найти методом простых итераций, если в качестве первого приближения взять $X_{ij} = 0$.

Доказательство.

1. Рассмотрим уравнение Φ_1 . Найдем такой шар с центром в точке \mathcal{B} , который отображение Φ_1 переводит сам в себя, т.е. если $\|X_{21} - \mathcal{B}\| < r \|\mathcal{B}\|$ (или $\|X_{21}\| < (r+1) \|\mathcal{B}\|$), то и $\|\Phi_1(X_{21}) - \mathcal{B}\| < r \|\mathcal{B}\|$.

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(X_{21}) - \mathcal{B}\| &\leq \| -(\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} \| \leq \gamma^2 \|\mathcal{B}\| \|X_{21}\|^2 \leq \\ &\leq \gamma^2 \|\mathcal{B}\|^3 (r+1)^2 \leq r \|\mathcal{B}\|. \end{aligned}$$

Символом r' обозначим $r+1$. Получили квадратное уравнение относительно r' :

$$r'^2 \gamma^2 \|\mathcal{B}\|^2 - r' + 1 \leq 0.$$

Пусть $\varepsilon = \gamma \|\mathcal{B}\|$, тогда:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 r'^2 - r' + 1 &\leq 0, \\ \mathcal{D} &= 1 - 4\varepsilon^2, \end{aligned}$$

для существования корней необходимо выполнение условия $\mathcal{D} > 0$. Получаем квадратное неравенство относительно ε .

$$\begin{aligned} 1 - 4\varepsilon^2 &> 0 \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}, \varepsilon = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Получаем, что $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$, т.е. $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Найдем r' при условии, что $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$r' = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2} = 2.$$

Тогда получаем, что $r = 1$.

Проверим сжимаемость отображения Φ_1 в этом шаре:

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(X_{21}) - \Phi_1(Y_{21})\| &= \| -(\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma Y_{21} \| = \\ &= \| -(\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma Y_{21} - \\ &\quad - (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} \| = \\ &= \| -(\Gamma(X_{21} - Y_{21}))\mathcal{J}(\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}) - \\ &\quad - (\Gamma Y_{21})\mathcal{J}(\mathcal{B}_{12}\Gamma(X_{21} - Y_{21})) \| \leq \\ &\leq 2\varepsilon^2 (r+1) \|X_{21} - Y_{21}\| \end{aligned}$$

Возьмем $r = 1$. Покажем, что $2\varepsilon^2(r + 1) < 1$.

$$4\varepsilon^2 < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Тогда получаем, что отображение Φ_1 переводит шар с центром в точке \mathcal{B} и радиусом $2\|\mathcal{B}\|$ в себя и является на этом шаре сжимающим отображением, следовательно, существует внутри шара неподвижная точка отображения Φ_1 , являющаяся единственным решением уравнения (5) и ее можно найти по методу простых итераций, используя в качестве первого приближения нулевой оператор.

2. Проведем аналогичные рассуждения для уравнения Φ_2 . Найдем такой шар с центром в точке \mathcal{B} , который отображение Φ_2 переводит сам в себя, т.е. если $\|X_{12} - \mathcal{B}\| < r\|\mathcal{B}\|$ (или $\|X_{12}\| < (r + 1)\|\mathcal{B}\|$), то и $\|\Phi_2(X_{12}) - \mathcal{B}\| < r\|\mathcal{B}\|$.

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(X_{12}) - \mathcal{B}\| &\leq \| -(\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} \| \leq \gamma^2\|\mathcal{B}\| \|X_{12}\|^2 \leq \\ &\leq \gamma^2\|\mathcal{B}\|^3(r + 1)^2 \leq r\|\mathcal{B}\|. \end{aligned}$$

Символом r' обозначим $r + 1$. Получили квадратное уравнение относительно r' :

$$r'^2\gamma^2\|\mathcal{B}\|^2 - r' + 1 \leq 0.$$

Пусть $\varepsilon = \gamma\|\mathcal{B}\|$, тогда:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 r'^2 - r' + 1 &\leq 0, \\ \mathcal{D} &= 1 - 4\varepsilon^2, \end{aligned}$$

для существования корней необходимо выполнение условия $\mathcal{D} > 0$. Получаем квадратное неравенство относительно ε .

$$\begin{aligned} 1 - 4\varepsilon^2 &> 0 \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}, \varepsilon = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Получаем, что $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$, т.е. $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Найдем r' при условии, что $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$r' = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2} = 2.$$

Тогда получаем, что $r = 1$.

Проверим сжимаемость отображения Φ_2 в этом шаре:

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(X_{12}) - \Phi_2(Y_{12})\| &= \| -(\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma Y_{12} \| = \\ &= \| -(\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma Y_{12} - \\ &\quad - (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} \| = \\ &= \| -(\Gamma(X_{12} - Y_{12}))\mathcal{J}(\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}) - \\ &\quad - (\Gamma Y_{12})\mathcal{J}(\mathcal{B}_{21}\Gamma(X_{12} - Y_{12})) \| \leq \\ &\leq 2\varepsilon^2(r + 1)\|X_{12} - Y_{12}\| \end{aligned}$$

Возьмем $r = 1$. Покажем, что $2\varepsilon^2(r + 1) < 1$.

$$4\varepsilon^2 < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Тогда получаем, что отображение Φ_2 переводит шар с центром в точке \mathcal{B} и радиусом $2\|\mathcal{B}\|$ в себя и является на этом шаре сжимающим отображением, следовательно, существует внутри шара неподвижная точка отображения Φ_2 , являющаяся единственным решением уравнения (5) и ее можно найти по методу простых итераций, используя в качестве первого приближения нулевой оператор.

Теорема доказана.

Найдя X_{21} и X_{12} , подставим их в уравнения (6) и (8) соответственно, получим X_{11} и X_{22} . Отсюда следует, что уравнение (5) разрешимо, и его решение находится по формуле:

$$X_0 = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}.$$

Искомую оценку элемента x_{11} оператора X , являющегося решением нелинейного уравнения (5) мы получим, получив оценку $\|X_{11}\|$. Для оценки $\|X_{11}\|$ в свою очередь требуется оценка $\|X_{21}\|$ и разрешимость уравнения (7). Потому сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$d = 2\gamma^2(b_{12}b_{21})^{\frac{1}{2}} < 1, \quad (10)$$

а также выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда для нелинейных уравнений (6) - (7) имеют место следующие оценки:

$$\|X_{11} - B_{11}\| \leq \frac{2\gamma b_{12}b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}} \quad \|X_{21}\| \leq \frac{2b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}},$$

где $\|B_{ij}\| = b_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Доказательство.

Рассмотрим оператор $\Phi_1(X_{21})$, определяемый уравнением (7). Найдем шар $B(r') = \{X \in \mathfrak{X}_{21} : \|X\| < r' \|B_{21}\|\}$ из пространства \mathfrak{X}_{21} , который оператор $\Phi_1(X_{21})$ переводит в себя, т. е. $\|\Phi_1(X_{21})\| \leq r' \|B_{21}\|$ для любого $X \in B(r')$. Обозначим $r' = r + 1$.

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(X_{21})\| &= -(\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} + B_{21} \leq \\ &\leq \gamma^2 b_{12} \|X_{21}\|^2 + b_{21} \leq \\ &\leq \gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r'^2 + b_{21} \leq b_{21} r' \end{aligned}$$

Получаем неравенство:

$$\gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r'^2 - r' + 1 \leq 0.$$

Покажем что квадратное уравнение относительно r'

$$\gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r'^2 - r' + 1 = 0$$

имеет хотя бы один действительный положительный корень. Воспользуемся тем, что $\gamma \|B\| < \frac{1}{2}$ и $b_{ij} \leq \|B\|$.

$$D = 1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12};$$

$$1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12} > 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Получаем, что

$$r'_{1,2} = \frac{1 \pm (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}}$$

Рассмотрим решение $r' = \frac{1 - (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}}$, докажем, что оно больше нуля.

$$\frac{1 - (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}} = \frac{2}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}} > 0$$

Получаем, что в качестве радиуса шара можно взять число

$$r'_{b_{21}} = \frac{2b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}.$$

Для любой пары операторов Y_1, Y_2 из шара $B(r')$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(Y_1) - \Phi_1(Y_2)\| &= \|-(\Gamma Y_1)B_{12}\Gamma Y_1 + B_{21} + \\ &+ (\Gamma Y_2)B_{12}\Gamma Y_2 - B_{21}\| \leq (\gamma^2 b_{12}(\|Y_1\| + \\ &+ \|Y_2\|)) \|Y_1 - Y_2\| \leq \left(\frac{2\gamma^2(b_{12}b_{21})^{\frac{1}{2}}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}\right) \|Y_1 - Y_2\| \leq d \|Y_1 - Y_2\|. \end{aligned}$$

Из условия (10) следует, что оператор Φ_1 является оператором сжатия в шаре $B(r')$. Тогда уравнение (7) имеет единственное решение X_{21} в этом шаре, которое можно найти методом простых итераций. Так как X_{21} принадлежит шару $B(r')$, то справедливо неравенство

$$\|X_{11} - B_{11}\| = \|B_{12}\Gamma X_{21}\| \leq \gamma b_{12} \|X_{21}\| \leq \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема доказана.

Таким образом мы имеем следующую оценку для $\|X_{11}\|$

$$\|X_{11}\| \leq \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2\gamma} - \frac{1 - (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{4\gamma^2 b_{21} b_{12}},$$

где $\gamma = \|(\alpha I - B)^{-1}\|$, $b_{ij} = \|B_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$