И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Рассмотрим линейный оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ банахово пространство, заданный операторной матрицей, т. е.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}.$$

Пусть пространство $\mathfrak{X}$ представимо в виде прямой суммы подпространств: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} A&\colon \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_1 \\ B&\colon \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_2 \\ C&\colon \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_1 \\ D&\colon \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2 \end{aligned}$$

Представим оператор $\mathbb{A}$ в виде $\mathbb{A} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$, где оператор $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$ задается матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, а оператор $\mathcal{B} \in \operatorname{End}(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$ – матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -C \\ -D & 0 \end{pmatrix}$. Всюду далее считаем что выполняется условие:

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing.$$

Символом $\mathcal{U}$ обозначим пространство $\operatorname{End}(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$ Рассмотрим канонические проекторы

$$P_1 x = (x_1, 0), P_2 x = (0, x_2), x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2.$$

Для любого оператора $X \in \mathcal{U}$ рассмотрим операторы $P_i X P_j \in \mathcal{U}, i, j \in 1, 2$. Таким образом, оператор X задается матрицей:

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

где оператор X_{ij} – сужение оператора $P_i X P_j$ на подпространство $\mathfrak{X}_i$ с областью значений $\mathfrak{X}_j, i, j \in 1, 2$.

В соответствии с заданным разложением пространства $\mathfrak{X}$ будем рассматривать два трансформатора: $\mathcal{J} \in \operatorname{End}\mathcal{U}, \Gamma \in \operatorname{End}\mathcal{U}$, таких что:

1. Для любого $X \in \mathcal{U}$ оператор $\mathcal{J}X$ определяется следующим образом: $\mathcal{J}X = P_1 X P_1 + P_2 X P_2$, а матрица оператора $\mathcal{J}X$ имеет вид:

$$\mathcal{J}X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix};$$

2. Пусть $\Gamma X = Y$, тогда оператор Y определяется как решение уравнения:

$$\mathcal{A}Y - Y\mathcal{A} = X - \mathcal{J}X, \qquad \forall X \in \mathcal{U}. \tag{1}$$

Запишем уравнение 1 в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Перемножив и вычтя матрицы получим следующую систему операторный уравнений:

$$\begin{cases} AY_{12} - Y_{12}B = X_{12}, \\ BY_{21} - Y_{21}A = X_{21}, \end{cases} \tag{2}$$

где Y_{12}, Y_{21} – искомые операторы. Если оператор A или оператор B ограничен, то уравнения 2 разрешимы.

Рассмотрим случай, когда $\dim \mathfrak{X}_1 = 1$, т. е. оператор A – скалярный оператор: $A = \alpha I$. Перепишем уравнения 2:

$$\begin{cases} \alpha I Y_{12} - Y_{12}B = X_{12}, \\ BY_{21} - Y_{21}\alpha I = X_{21}. \end{cases}$$

Так как оператор A ограничен, то система имеет решение, и оно имеет вид:

$$\begin{cases} Y_{12} = X_{12}(\alpha I - B)^{-1}, \\ Y_{21} = (\alpha I - B)^{-1}X_{21}. \end{cases}$$

Таким образом мы получили, что матрица оператора ΓX имеет вид:

$$\Gamma X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12}(\alpha I - B)^{-1} \\ (\alpha I - B)^{-1}X_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Оценим норму оператора Γ. Пусть $X \in \mathcal{U}$, тогда:

$$\begin{aligned} &\|\Gamma X\| \leqslant \max\left(\left\|X_{12}(\alpha I - B)^{-1}\right\|, \left\|(\alpha I - B)^{-1}X_{21}\right\|\right) \leqslant \\ &\leqslant \max\left(\left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|, \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|\right)\|X\| = \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|\|X\| = \gamma\|X\|. \end{aligned}$$

Получили следующую оценку $\|\Gamma\| \leqslant \gamma$.

Будем искать такой оператор $X_0 \in \mathcal{U}$, чтобы выполнялось равенство

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B})(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(\mathcal{A} - \mathcal{J}X_0). \tag{3}$$

При условии $\|\Gamma X_0\| \leqslant 1$ (тогда оператор $I + \Gamma X_0$ обратим) равенство (3) означает подобие операторов $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}-\mathcal{J}X_0$. Таким образом задача оценки первого собственного значения возмущенного оператора $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ сводится к задаче оценки первого собственного значения оператора $\mathcal{A} - \mathcal{J}X_0$, равного $a_{11} - x_{11}^0$ в силу указанного разложения пространства $\mathfrak{X}$. Необходимо получить оценку x_{11}^0 матрицы оператора X_0. Для этого сначала преобразуем равенство (3):

$$\begin{gathered} \mathcal{A} + \mathcal{A}\Gamma X - \mathcal{B} - \mathcal{B}\Gamma X = \mathcal{A} - \mathcal{J}X + \Gamma X\mathcal{A} - \Gamma X\mathcal{J}X; \\ \mathcal{A}\Gamma X - \Gamma X\mathcal{A} - \mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{J}X + \Gamma X\mathcal{J}X - \mathcal{B} = 0; \\ X - \mathcal{J}X - \mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{J}X + \Gamma X\mathcal{J}X - \mathcal{B} = 0; \\ X = \mathcal{B}\Gamma X - \Gamma X\mathcal{J}X + \mathcal{B}. \end{gathered} \tag{4}$$

Применим к уравнению (4) трансформатор $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}X = \mathcal{J}\mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{J}\mathcal{B},$$

и подставим $\mathcal{J}X$ в уравнение (4). Учитывая, что $\mathcal{J}\mathcal{B} = 0$ получаем нелинейное уравнение

$$X = \mathcal{B}\Gamma X - \Gamma X \mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X) - \mathcal{B} = \Phi(X). \tag{5}$$

Пусть P_1, P_2 – проекторы относительно разложения пространства $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$. Заметим, что $\forall X \in \operatorname{End}\mathfrak{X}$ выполняется:

1. $\mathcal{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$;

2. $P_i(\Gamma X)P_j = \Gamma(P_iXP_j),\ i,j = 1,2$, и $P_i(\Gamma X)P_i = 0,\ i = 1,2$.

Таким образом пространство $\mathfrak{X}$ можно представить в виде прямой суммы $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{11} \oplus \mathfrak{X}_{12} \oplus \mathfrak{X}_{21} \oplus \mathfrak{X}_{22}$ подпространств, где $\mathfrak{X}_{ij} = \{P_i\mathfrak{X}P_j, X \in \operatorname{End}\mathfrak{X}\}$, $i,j = 1,2$. Через X_{ij} будем обозначать оператор $P_iXP_j,\ i,j = 1,2$, таким образом $X = (P_1 + P_2)X(P_1 + P_2) = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22},\ X \in \operatorname{End}\mathfrak{X}$. Применим операторы P_1 и P_2 к обеим частям уравнения (5).

1. Применим справа и слева проектор P_1:

$$\begin{aligned} P_1XP_1 &= P_1\mathcal{B}\Gamma XP_1 - P_1\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_1 - P_1\mathcal{B}P_1;\\ X_{11} &= (\mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21}) -\\ &\quad - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})((\mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21})) + \mathcal{B}_{11}; \end{aligned}$$

Будем учитывать, что $\mathcal{J}X_{12} = \mathcal{J}X_{21} = 0$, $\Gamma X_{11} = \Gamma X_{22} = 0$ и $\mathcal{B}_{11} = \mathcal{B}_{22} = 0$.

$$X_{11} = \mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}; \tag{6}$$

2. Применим справа проектор P_1, а слева P_2:

$$\begin{aligned} P_2XP_1 &= P_2\mathcal{B}\Gamma XP_1 - P_2\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_1 - P_2\mathcal{B}P_1;\\ X_{21} &= (\mathcal{B}_{21} + \mathcal{B}_{22})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21}) -\\ &\quad - (\Gamma X_{21} + \Gamma X_{22})((\mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21})) + \mathcal{B}_{21};\\ X_{21} &= -(\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + \mathcal{B}_{21} = \Phi_1(X_{21}); \end{aligned} \tag{7}$$

3. Применим справа и слева проектор P_2:

$$\begin{aligned} P_2XP_2 &= P_2\mathcal{B}\Gamma XP_2 - P_2\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_2 - P_2\mathcal{B}P_2;\\ X_{22} &= (\mathcal{B}_{21} + \mathcal{B}_{22})(\Gamma X_{12} + \Gamma X_{22}) -\\ &\quad - (\Gamma X_{21} + \Gamma X_{22})((\mathcal{B}_{21} + \mathcal{B}_{22})(\Gamma X_{12} + \Gamma X_{22})) + \mathcal{B}_{22};\\ X_{22} &= \mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}; \end{aligned} \tag{8}$$

4. Применим справа проектор P_2, а слева P_1:

$$\begin{aligned} P_1XP_2 &= P_1\mathcal{B}\Gamma XP_2 - P_1\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_2 - P_1\mathcal{B}P_2;\\ X_{12} &= (\mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{12})(\Gamma X_{12} + \Gamma X_{22}) -\\ &\quad - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})((\mathcal{B}_{21} + \mathcal{B}_{22})(\Gamma X_{12} + \Gamma X_{22})) + \mathcal{B}_{12};\\ X_{12} &= -(\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + \mathcal{B}_{12} = \Phi_2(X_{12}). \end{aligned} \tag{9}$$

Получили четыре уравнения, причем уравнения (9) и (7) независимы от остальных уравнений. Разрешимость уравнения (5) будет доказана если, будет доказана разрешимость уравнений (9) и (7).
Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$\gamma\left\|\mathcal{B}\right\| < \frac{1}{2},$$

где $\gamma = \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|$, *тогда нелинейные уравнения* (9) *и* (7) *имеют единственные решения* X_{12}, X_{21} *в шаре с центром в точке* $\mathcal{B}$ *и радиусом* $\left\|\mathcal{B}\right\|$. X_{12} *и* X_{21} *можно найти методом простых итераций, если в качестве первого приближения взять* $X_{ij} = 0$.
Доказательство.

1. Рассмотрим уравнение Φ_1. Найдем такой шар с центром в точке $\mathcal{B}$, который отображение Φ_1 переводит сам в себя, т.е. если $\left\|X_{21} - \mathcal{B}\right\| < r\left\|\mathcal{B}\right\|$ (или $\left\|X_{21}\right\| < (r+1)\left\|\mathcal{B}\right\|$), то и $\left\|\Phi_1(X_{21}) - \mathcal{B}\right\| < r\left\|\mathcal{B}\right\|$.

$$\begin{aligned}\|\Phi_1(X_{21}) - \mathcal{B}\| \leq \| - (\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}\| \leq \gamma^2\|\mathcal{B}\|\ \|X_{21}\|^2 \leq \\ \leq \gamma^2\|\mathcal{B}\|^3(r+1)^2 \leq r\|\mathcal{B}\|.\end{aligned}$$

Символом r' обозначим $r+1$. Получили квадратное уравнение относительно r':

$$r'^2\gamma^2\|\mathcal{B}\|^2 - r' + 1 \leq 0.$$

Пусть $\varepsilon = \gamma\|\mathcal{B}\|$, тогда:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2 r'^2 - r' + 1 \leq 0,\\ &\mathcal{D} = 1 - 4\varepsilon^2,\end{aligned}$$

для существования корней необходимо выполнение условия $\mathcal{D} > 0$. Получаем квадратное неравенство относительно ε.

$$\begin{aligned}&1 - 4\varepsilon^2 > 0\\ &\varepsilon = \frac{1}{2}, \varepsilon = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Получаем, что $\varepsilon \in (0; \frac{1}{3})$, т.е. $\varepsilon < \frac{1}{3}$ Найдем r' при условии, что $\varepsilon = \frac{1}{3}$:

$$r' = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2} = 2.$$

Тогда получаем, что $r = 1$.

Проверим сжимаемость отображения Φ_1 в этом шаре:

$$\begin{aligned}\|\Phi_1(X_{21}) - \Phi_1(Y_{21})\| &= \| - (\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma Y_{21}\| = \\ &= \| - (\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma Y_{21} - \\ &\quad - (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}\| = \\ &= \| - (\Gamma(X_{21} - Y_{21}))\mathcal{J}(\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}) - \\ &\quad - (\Gamma Y_{21})\mathcal{J}(\mathcal{B}_{12}\Gamma(X_{21} - Y_{21}))\| \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon^2(r+1)\|X_{21} - Y_{21}\|\end{aligned}$$

Возьмем $r = 1$. Покажем, что $2\varepsilon^2(r+1) < 1$.

$$4\varepsilon^2 < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Тогда получаем, что отображение Φ_1 переводит шар с центром в точке $\mathcal{B}$ и радиусом $2\|\mathcal{B}\|$ в себя и является на этом шаре сжимающим отображением, следовательно, существует внутри шара неподвижная точка отображения Φ_1 , являющаяся единственным решением уравнения (5) и ее можно найти по методу простых итераций, используя в качестве первого приближения нулевой оператор.

2. Проведем аналогичные рассуждения для уравнения Φ_2. Найдем такой шар с центром в точке $\mathcal{B}$, который отображение Φ_2 переводит сам в себя, т.е. если $\|X_{12} - \mathcal{B}\| < r\,\|\mathcal{B}\|$ (или $\|X_{12}\| < (r+1)\,\|\mathcal{B}\|$), то и $\|\Phi_2(X_{12}) - \mathcal{B}\| < r\,\|\mathcal{B}\|$.

$$\begin{aligned}\|\Phi_2(X_{12}) - \mathcal{B}\| \leq \| - (\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}\| \leq \gamma^2\|\mathcal{B}\|\;\|X_{12}\|^2 \leq \\ \leq \gamma^2\|\mathcal{B}\|^3(r+1)^2 \leq r\|\mathcal{B}\|.\end{aligned}$$

Символом r' обозначим $r+1$. Получили квадратное уравнение относительно r':

$$r'^2\gamma^2\|\mathcal{B}\|^2 - r' + 1 \leq 0.$$

Пусть $\varepsilon = \gamma\|\mathcal{B}\|$, тогда:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2 r'^2 - r' + 1 \leq 0,\\ &\mathcal{D} = 1 - 4\varepsilon^2,\end{aligned}$$

для существования корней необходимо выполнение условия $\mathcal{D} > 0$. Получаем квадратное неравенство относительно ε.

$$\begin{aligned}&1 - 4\varepsilon^2 > 0\\ &\varepsilon = \frac{1}{2}, \varepsilon = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Получаем, что $\varepsilon \in (0; \frac{1}{3})$, т.е. $\varepsilon < \frac{1}{3}$ Найдем r' при условии, что $\varepsilon = \frac{1}{3}$:

$$r' = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2} = 2.$$

Тогда получаем, что $r = 1$.

Проверим сжимаемость отображения Φ_2 в этом шаре:

$$\begin{aligned}\|\Phi_2(X_{12}) - \Phi_2(Y_{12})\| &= \| - (\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma Y_{12}\| = \\ &= \| - (\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma Y_{12} - \\ &\quad - (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}\| = \\ &= \| - (\Gamma(X_{12} - Y_{12}))\mathcal{J}(\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}) - \\ &\quad - (\Gamma Y_{12})\mathcal{J}(\mathcal{B}_{21}\Gamma(X_{12} - Y_{12}))\| \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon^2(r+1)\|X_{12} - Y_{12}\|\end{aligned}$$

Возьмем $r = 1$. Покажем, что $2\varepsilon^2(r+1) < 1$.

$$4\varepsilon^2 < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Тогда получаем, что отображение Φ_2 переводит шар с центром в точке $\mathcal{B}$ и радиусом $2\|\mathcal{B}\|$ в себя и является на этом шаре сжимающим отображением, следовательно, существует внутри шара неподвижная точка отображения Φ_2 , являющаяся единственным решением уравнения (5) и ее можно найти по методу простых итераций, используя в качестве первого приближения нулевой оператор.

Теорема доказана.

Найдя X_{21} и X_{12}, подставим их в уравнения (6) и (8) соответственно, получим X_{11} и X_{22}. Отсюда следует, что уравнение (5) разрешимо, и его решение находиться по формуле:

$$X_0 = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}.$$

Искомую оценку элемента x_{11} оператора X, являющегося решением нелинейного уравнения (5) мы получим, получив оценку $\|X_{11}\|$. Для оценки $\|X_{11}\|$ в свою очередь требуется оценка $\|X_{21}\|$ и разрешимость уравнения (7). Потому сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$d = 2\gamma^2(b_{12}b_{21})^{\frac{1}{2}} < 1. \tag{10}$$

Тогда нелинейное уравнение (7) *имеет единственное решение, которое можно найти методом простых итераций, и имеют место следующие оценки:*

$$\|X_{11} - B_{11}\| \le \frac{2\gamma b_{12}b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}} \qquad \|X_{21}\| \le \frac{2b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}},$$

где $\|B_{ij}\| = b_{ij},\ i, j = 1, 2.$

Доказательство.

Рассмотрим оператор $\Phi_1(X_{21})$, определяемый уравнением 7. Найдем шар $B(r_1) = \{X \in \mathfrak{X}_{21} : \|X\| < r_1\}$ из пространства $\mathfrak{X}_{21}$, который оператор $\Phi_1(X_{21})$ переводит в себя, т. е. $\|\Phi_1(X_{21})\| \le r_1$ для любого $X \in B(r_1)$. Обозначим $r_1 = rb_{21}$.

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_1(X_{21})\| = -(\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} + B_{21} \le \\
&\le \gamma^2 b_{12}\,\|X_{21}\|^2 + b_{21} \le \\
&\le \gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r^2 + b_{21} \le b_{21} r
\end{aligned}$$

Получаем неравенство:

$$\gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r^2 - r + 1 \le 0.$$

Покажем что квадратное уравнение относительно r

$$\gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r^2 - r + 1 = 0$$

имеет хотя бы один действительный положительный корень. Воспользуемся тем, что $\gamma \|B\| < \frac{1}{3}$ и $b_{ij} \le \|B\|$.

$$D = 1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12};$$
$$1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12} > 1 - 4 \cdot \frac{1}{9} = 0$$

Получаем, что
$$r_{1,2} = \frac{1 \pm (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}}$$

Рассмотрим решение $r = \frac{1-(1-4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}}$, докажем, что оно больше нуля.

$$\frac{1 - (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}} = \frac{2}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}} > 0$$

Получаем, что в качестве радиуса шара можно взять число

$$r b_{21} = \frac{2 b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}.$$

Для любой пары операторов Y_1, Y_2 из шара $B(r_1)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_1(Y_1) - \Phi_1(Y_2)\| = \| - (\Gamma Y_1) B_{12} \Gamma Y_1 + B_{21} + \\
&+ (\Gamma Y_2) B_{12} \Gamma Y_2 - B_{21}\| \le (\gamma^2 b_{12}(\|Y_1\| + \\
&+ \|Y_2\|)) \|Y_1 - Y_2\| \le (\frac{2\gamma^2 (b_{12} b_{21})^{\frac{1}{2}}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}) \|Y_1 - Y_2\| \le d \|Y_1 - Y_2\|.
\end{aligned}$$

Из условия (10) следует, что оператор Φ_1 является оператором сжатия в шаре $B(r_1)$. Тогда уравнение (7) имеет единственное решение X_{21} в этом шаре, которое можно найти методом простых итераций. Так как X_{21} принадлежит шару $B(r_1)$, то справедливо неравенство

$$\|X_{11} - B_{11}\| = \|B_{12} \Gamma X_{21}\| \le \gamma b_{12} \|X_{21}\| \le \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема доказана.

Таким образом мы имеем следующую оценку для $\|X_{11}\|$

$$\|X_{11}\| \le \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{2\gamma} - \frac{1 - (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{4\gamma^2 b_{21} b_{12}},$$

где $\gamma = \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|, b_{ij} = \|B_{ij}\|, i, j = 1, 2$