

# ЖОРДАНОВА ФОРМА СОПРОВОЖДАЮЩИХ МАТРИЦ ДЛЯ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

*Воронежский государственный университет*

Рассмотрим задачу построения последовательности  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , для которой известны первые  $n \geq 1$  членов  $x(1) = x_1^0, \dots, x(n) = x_n^0$  и все последующие задаются рекуррентными соотношениями

$$x(m+n) = \alpha_1 x(m+n-1) + \alpha_2 x(m+n-2) + \dots + \alpha_n x(m), m \geq 1, \quad (1)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  - известные числа из  $\mathbb{C}$ . Введем в рассмотрение последовательность  $x_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, 1 \leq k \leq n$ , определенные равенствами

$$\begin{aligned} x_1(m) &= x(m), \\ x_2(m) &= x(m+1), \\ &\dots \\ x_n(m) &= x(m+n), n \geq 1. \end{aligned}$$

Используя (1), получаем, что такие последовательности связаны друг с другом равенствами

$$\begin{aligned} x_1(m+1) &= x_2(m), \\ x_2(m+1) &= x_3(m), \\ &\dots \\ x_n(m+1) &= \alpha_n x_1(m) + \alpha_{n-1} x_2(m) + \dots + \alpha_1 x_n(m), m \geq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим последовательность  $y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^n$  вида

$$y(m) = (x_1(m), \dots, x_n(m)), m \geq 1.$$

Из (2) следует, что для нее верны равенства

$$y(m+1) = Ay(m), m \geq 1, \quad (3)$$

где оператор  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  определен с помощью матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

а  $P(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \dots - \alpha_n, \lambda \in \mathbb{C}$  - характеристический многочлен этой матрицы.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – собственные значения матрицы  $\mathcal{A}$  кратностей  $k_1, \dots, k_m$  соответственно, где  $\sum_{i=1}^m k_i = n$ . Тогда жорданова форма для матрицы  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{J}_m \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода  $\mathcal{U}$  имеет вид

$$\mathcal{U} = \text{diag}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_m),$$

где матрицы  $\mathcal{U}_i \in \text{Matr}_{n, k_i}(\mathbb{C})$ ,  $i = \overline{1, m}$ , имеют вид

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \dots & \prod_{k=1}^{k_i-1} (n-k)\lambda_i^{n-k_i} \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\lambda_i$  – собственное значение матрицы  $\mathcal{A}$  кратности  $k_i$ . Найдем соответствующие ему собственный и присоединенные векторы. Рассмотрим матрицу вида

$$\mathcal{A} - \lambda_i I = \begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 - \lambda_i \end{pmatrix},$$

где  $I$  – единичная матрица.

Пусть  $x_i \in \mathbb{C}^n$  – собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_i$ . Тогда справедливо равенство

$$(\mathcal{A} - \lambda_i I) x_i = 0, \quad (4)$$

где  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ . Очевидно, что  $x_{i1} \neq 0$  (иначе вектор  $x_i$  был бы нулевым). Без ограничения общности можно считать, что  $x_{i1} = 1$ . Тогда равенство (4) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda_i + x_{i2} = 0, \\ -\lambda_i x_{i2} + x_{i3} = 0, \\ \dots \\ -\lambda_i x_{in-2} + x_{in-1} = 0, \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} x_{i2} + \dots + (\alpha_1 - \lambda_i) x_{in} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решив систему (5), получим, что

$$x_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1}).$$

Пусть  $k_i \neq 1$ . Найдем присоединенные векторы к вектору  $x_i$ .

Пусть  $x_{i,j} \in \mathbb{C}^n, 1 \leq j \leq k_i - 1$  - присоединенные векторы, отвечающие собственному значению  $\lambda_i$ . Первый присоединенный вектор  $x_{i,1}$  есть решение уравнения

$$(\mathcal{A} - \lambda_i I) x_{i,1} = x_i, \quad (6)$$

где  $x_{i,1} = (x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{n,1})$  - подлежащий определению присоединенный вектор,  $x_i$  - собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_i$ . Пусть  $x_{1,1} = 0$ . Тогда равенство (6) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} x_{2,1} = 1, \\ -\lambda_i x_{2,1} + x_{3,1} = \lambda_i, \\ \dots \\ -\lambda_i x_{n-2,1} + x_{n-1,1} = \lambda_i^{n-2}, \\ \alpha_{n-1} x_{2,1} + \alpha_{n-2} x_{3,1} \dots + (\alpha_1 - \lambda_i^{n-1}) x_{n,1} = \lambda_i^{n-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Поскольку  $P'(\lambda_i) = 0$ , тогда, решив систему (7), получим вектор

$$x_{i,1} = (0, 1, 2\lambda_i, 3\lambda_i^2, \dots, (n-1)\lambda_i^{n-2}),$$

который является присоединенным к собственному вектору  $x_i$ .

Аналогичным образом устанавливается, что векторы

$$x_{i,p} = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_p, p!, (p+1)!\lambda_i, \dots, \prod_{k=1}^p (n-k)\lambda_i^{n-p-1} \right),$$

где  $1 \leq p \leq k_i - 1$ , являются присоединенными к вектору  $x_i$ .

Таким образом, доказано, что матрица  $\mathcal{U}$  составлена из собственных и присоединенных векторов. Поэтому  $\det \mathcal{U} \neq 0$ , и, следовательно, матрица  $\mathcal{U}$  является матрицей перехода к жордановой форме и имеет вид

$$\mathcal{U} = \text{diag}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_m),$$

где матрицы  $\mathcal{U}_i \in \text{Matr}_{n, k_i}(\mathbb{C}), i = 1 \dots m$ , имеют вид

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \dots & \prod_{k=1}^{k_i-1} (n-k)\lambda_i^{n-k_i} \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

### Литература

1. Баскаков А. Г. Лекции по алгебре // Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета – 2013. – 159 с.