Заголовок статьи

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

1 Введение

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} = \alpha_1 x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n,$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}$. Данное уравнение обычным способом сводится к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = Ay,$$

где матрица оператора A имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

а $f(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \ldots - \alpha_n, \lambda \in \mathbb{C}$ – характеристический многочлен этой матрицы.

2 Теорема

Теорема 1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ кратностей $k_1, \ldots, k_m$ соответственно. Тогда жорданова форма для матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:*

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathcal{J}_m \end{pmatrix}, \textit{ где } \mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Векторами столбцами матрицы перехода являются собственные и присоединенные векторы, которые тмеют вид:

$$(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1^{n-1}), \quad (0, 1, 2\lambda_1, \ldots, (n-1)\lambda_1^{n-2}), \quad (0, 0, \ldots, k_1!, \frac{(n-1)!}{(n-k_1)!}\lambda_1^{n-k_1}), \ldots,$$

где собственные векторы имеют вид:

$$x^i = (1, \lambda_i, \ldots, \lambda_i^{n-1}), 1 \leqslant i \leqslant m,$$

а присоединенные:

$$y_i^j = (1^{(j)}, \lambda_i^{(j)}, \ldots, (\lambda_i^{n-1})^{(j)}), 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant k_i.$$

3 Пример

Для примера рассмотрим частный случай $n = 3$. Тогда матрица $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Возможны три варианта:

1. все собственные значения различны;

2. есть собственные значения λ_1, λ_2, которые имеют кратности $k_1 = 2,\ k_2 = 1$ соответственно;

3. все собственные значения одинаковы;

Рассмотрим первый случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ которые имеют кратности $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ соответственно. Оператор A имеет простую структуру. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Далее запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$.
Теперь запишем проекторы оператора A:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^{-1}, \\ \mathcal{P}_i &= \mathcal{U}\mathcal{P}'_i\mathcal{U}^{-1}, \\ \mathcal{P}'_i &= \left(p'_{jk}\right), \\ p'_{jk} &= \begin{cases} 1, & \text{если } j = k = i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, и $\mathcal{P}'_i$ — проекторы жордановой матрицы $\mathcal{J}$ оператора A. Тогда по теореме о спектральном разложении оператора простой структуры [1]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \lambda_3\mathcal{P}_3$$

Рассмотрим второй случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2$ которые имеют кратности $k_1 = 2,\ k_2 = 1$ соответственно. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$.

Для спектрального разложения найдем проекторы и нильпотентную часть оператора A:

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^{-1},$$

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{U}\mathcal{P}'_i\mathcal{U}^{-1},$$

$$\mathcal{P}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{P}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{U}\mathcal{Q}'\mathcal{U}^{-1},$$

$$\mathcal{Q}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где $i \in \{1, 2\}$, и $\mathcal{P}'_i, \mathcal{Q}'$ — проекторы жордановой матрицы $\mathcal{J}$ оператора A и её нильпотентная часть соответственно. Тогда по теореме о спектральном разложении линейного оператора [1]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \mathcal{Q}$$

И наконец последний случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет одно собственное значение λ кратности $k = 3$. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 & -\lambda & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = 2$.

Спектральное разложение для этого случая очевидно.

Список литературы

[1] Г. Баскаков А. Лекции по алгебре. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. — 159 с.