Оценка точки спектра возмущенного линейного оператора

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Пусть A — *невозмущенный* линейный оператор, $A\colon D(A)\subset\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, структурные свойства которого хорошо изучены.

Линейный оператор $B\colon D(B)\subset\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ будем называть *возмущением* оператора A, если $D(A)\subset D(B)$ и $\exists\, C>0\colon\ \|Bx\|\leqslant C(\|x\|+\|Ax\|)$ $\forall x\in D(A)$, а $A-B$ *возмущенным* линейным оператором. Символом $\mathfrak{B}$ будем обозначать множество возмущений оператора A.

Поскольку областью определения возмущенного оператора $A-B$, $B\in\mathfrak{B}$ является область определения $D(A)$ оператора A, то будем далее всюду считать, что $D(B)=D(A)\ \forall B\in\mathfrak{B}$. Таким образом $\mathfrak{B}$ можно рассматривать как линейной пространство с нормой $\|B\|_{\mathfrak{B}}=\inf C,\ C>0$.

Также нам понадобятся $\mathcal{J}\colon\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}, \Gamma\colon\mathfrak{B}\to\operatorname{End}\mathbb{C}^n$ — два трансформатора (т.е. линейные операторы в пространстве линейных операторов), обладающие следующими свойствами:

1. $(\Gamma X)D(A)\subset D(A)$ и $A\Gamma X-\Gamma XA=X-\mathcal{J}\mathcal{X}\ \forall X\in\mathfrak{B}$;

2. $(\Gamma X)Y, X\Gamma Y\in\mathfrak{B},\ \forall X,Y\in\mathfrak{B}$ и существует такая постоянная $\gamma>0$, что $\|\Gamma\|\leqslant\gamma$ и $\max\{\|(\Gamma X)Y\|, \|X\Gamma Y\|\}\leqslant\gamma\,\|X\|\,\|Y\|\ \ \forall X,Y\in\mathfrak{B}$;

3. $\mathcal{J}$ — проектор и $\mathcal{J}((\Gamma X)\mathcal{J}Y)=\mathcal{J}((\mathcal{J}X)\Gamma Y)=0\ \forall X,Y\in\mathfrak{B}$;

Будем искать