ЖОРДАНОВА ФОРМА ДЛЯ ЛОДУ N-ГО ПОРЯДКА

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} = \alpha_1 x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n x,$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,n}$. Данное уравнение обычным способом сводится к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = Ay,$$

где матрица оператора A имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

а $f(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1\lambda^{n-1} - \ldots - \alpha_n, \lambda \in \mathbb{C}$ – характеристический многочлен этой матрицы.

Теорема 1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ кратностей $k_1, \ldots, k_m$ соответственно, где $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$. Тогда жорданова форма для матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:*

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathcal{J}_m \end{pmatrix}, \textit{где } \mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Векторами столбцами матрицы перехода являются собственные и присоединенные векторы, где собственные векторы имеют вид

$$x^i = (1, \lambda_i, \ldots, \lambda_i^{n-1}), 1 \leqslant i \leqslant m,$$

а присоединенные

$$y_i^j = (1^{(j)}, \lambda_i^{(j)}, \ldots, (\lambda_i^{n-1})^{(j)}), 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant k_i.$$

Доказательство. Пусть λ_i - собственное значение матрицы $\mathcal{A}$ кратности k_i. Найдем соответсвующие ему собственный и присоединенные векторы.

$$\mathcal{A} - \lambda_i I = \begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_1 - \lambda_i \end{pmatrix},$$

Пусть $x^i \in \mathbb{C}^n$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i. Тогда справедливо равенство

$$(\mathcal{A} - \lambda_i I)\, x^i = 0, \tag{1}$$

где $x^i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Пусть $x_1 = 1$. Тогда равенство (1) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} -\lambda_i + x_2 = 0, \\ -\lambda_i x_2 + x_3 = 0, \\ \dots \\ -\lambda_i x_{n-2} + x_{n-1} = 0, \\ \alpha_n + \alpha_{n-1} x_2 + \dots + (\alpha_1 - \lambda_i) x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Решив систему (2) получим

$$x^i = \left(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1}\right).$$

Покажем, что найденный x^i удовлетворяет системе (2). Очевидно, что первые $n-1$ уравнений справеливы, покажем, что справедливо последнее

$$\alpha_n + \alpha_{n-1}\lambda_i + \dots + (\alpha_1 - \lambda_i)\lambda_i^{n-1} = 0,$$

так как справа от знака равентсва стоит характеристическое уравнение и λ_i - его корень.

Если $k_i \neq 1$, тогда найдем присоединенные. Пусть y_j^i - присоединенный вектор. Рассмотрим первый присоединенный вектор y_1^i

$$(\mathcal{A} - \lambda_i I)\, y_1^i = x^i, \tag{3}$$

где $y_1^i = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, x^i - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i. Пусть $y_1 = 0$. Тогда равенство (3) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} y_2 = 1, \\ -\lambda_i y_2 + y_3 = \lambda_i, \\ \dots \\ -\lambda_i y_{n-2} + y_{n-1} = \lambda_i^{n-2}, \\ \alpha_{n-1} y_2 + \alpha_{n-2} y_3 \cdots + (\alpha_1 - \lambda_i^{n-1}) y_n = \lambda_i^{n-1}. \end{cases} \tag{4}$$

Решив систему (4) получим

$$y_1^i = \left(0, 1, 2\lambda_i, 3\lambda_i^2, \dots, (n-1)\lambda_i^{n-2}\right).$$

Покажем, что найденный y_1^i удовлетворяет системе (4). Очевидно, что первые $n-1$ уравнений справеливы, покажем, что справедливо последнее:

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} + 2\alpha_{n-2}\lambda_i + \dots + (\alpha_1 - \lambda_i)(n-1)\lambda_i^{n-2} &= \lambda_i^{n-1}, \\ \alpha_{n-1} + 2\alpha_{n-2}\lambda_i + \dots + \alpha_1(n-1)\lambda_i^{n-2} - n\lambda_i^{n-1} + \lambda_i^{n-1} &= \lambda_i^{n-1}, \\ \alpha_{n-1} + 2\alpha_{n-2}\lambda_i + \dots + \alpha_1(n-1)\lambda_i^{n-2} - n\lambda_i^{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Получили следующее $P'(\lambda)|_{\lambda_i} = 0$, так как λ_i - корень многочлена $P(\lambda)$ кратности $k_i \neq 1$. Аналогично можно получить, что

$$y_2^i = \left(0, 0, 2, 6\lambda_i, \dots, (n-1)(n-2)\lambda_i^{n-3}\right).$$

Таким образом, доказано что векторами столбцами матрицы U являются собственные и присоединенные векторы, где собственные векторы имеют вид
$$x^i = (1, \lambda_i, \ldots, \lambda_i^{n-1}), 1 \leqslant i \leqslant m,$$
а присоединенные
$$y_i^j = (1^{(j)}, \lambda_i^{(j)}, \ldots, (\lambda_i^{n-1})^{(j)}), 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant k_i.$$
Поэтому $det(\mathcal{U}) \neq 0$, и, следовательно, матрица $\mathcal{U}$ является матрицей перехода к жордановой форме. Теорема доказана.

Приведем примеры матрицы $\mathcal{U}$ для двух частных случаев.
Пусть все собственные значения различны, тогда матрица $\mathcal{U}$ имеет вид
$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$
которая является матрицей Вандермонда.
Пусть кратность собственного значения λ равна n. Тогда матрица $\mathcal{U}$ имеет вид
$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & (n-1)(n-2)\lambda^{n-3} & \ldots & (n-1)! \end{pmatrix}.$$

В качестве примера рассмотрим частный случай $n = 3$. Тогда матрица $\mathcal{A}$ имеет вид:
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$
Возможны три варианта:

1. все собственные значения различны;
2. есть собственные значения λ_1, λ_2, которые имеют кратности $k_1 = 2,\ k_2 = 1$ соответственно;
3. все собственные значения одинаковы;

Рассмотрим первый случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ которые имеют кратности $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ соответственно. Оператор A имеет простую структуру. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:
$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Далее запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$.
Теперь запишем проекторы оператора A:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^{-1}, \\ \mathcal{P}_i &= \mathcal{U}\mathcal{P}'_i\mathcal{U}^{-1}, \\ \mathcal{P}'_i &= \left(p'_{jk}\right), \\ p'_{jk} &= \begin{cases} 1, & \text{если } j = k = i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, и $\mathcal{P}'_i$ — проекторы жордановой матрицы $\mathcal{J}$ оператора A. Тогда по теореме о спектральном разложении оператора простой структуры [2]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \lambda_3\mathcal{P}_3$$

Рассмотрим второй случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2$ которые имеют кратности $k_1 = 2,\ k_2 = 1$ соответственно. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$.
Для спектрального разложения найдем проекторы и нильпотентную часть

оператора A:

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^{-1},$$
$$\mathcal{P}_i = \mathcal{U}\mathcal{P}'_i\mathcal{U}^{-1},$$
$$\mathcal{P}'_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathcal{P}'_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\mathcal{Q} = \mathcal{U}\mathcal{Q}'\mathcal{U}^{-1},$$
$$\mathcal{Q}' = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

где $i \in \{1,2\}$, и $\mathcal{P}'_i, \mathcal{Q}'$ — проекторы жордановой матрицы $\mathcal{J}$ оператора A и её нильпотентная часть соответственно. Тогда по теореме о спектральном разложении линейного оператора [2]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \mathcal{Q}$$

И наконец последний случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет одно собственное значение λ кратности $k = 3$. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda & 1 & 0\\ \lambda^2 & 2\lambda & 2\end{pmatrix},$$
$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\lambda & 1 & 0\\ \frac{1}{2}\lambda^2 & -\lambda & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det\mathcal{U} = 2$.
Спектральное разложение для этого случая очевидно.

Литература

1. *Боровских А.В., Перов А.И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2004, 540 стр

2. *Баскаков А. Г.* Лекции по алгебре // Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013, 159 стр