

# Оценка собственных значений возмущенного линейного оператора

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Дан линейный оператор  $\mathbb{A} \in \text{End } \mathbb{C}^n$  со своей матрицей  $(a_{ij})$ , внедиагональные элементы которой малы по сравнению с диагональными. Представим оператор  $\mathbb{A}$  в виде разности  $\mathbb{A} = A - B$  двух линейных операторов  $A, B \in \text{End } \mathbb{C}^n$ , заданных матрицами  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор  $A$  будем называть *невозмущенным* оператором, оператор  $B$  *возмущением* оператора  $A$ , а  $\mathbb{A}$  — возмущенным линейным оператором. Как уже говорилось, элементы матрицы возмущения  $\mathcal{B}$  малы по сравнению с элементами невозмущенной матрицы  $\mathcal{A}$ .

Разложим пространство  $\text{End } \mathbb{C}^n$  в прямую сумму  $\mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$  инвариантных относительно невозмущенного оператора  $A$  подпространств  $\mathfrak{X}_1$  и  $\mathfrak{X}_2$ , где  $\mathfrak{X}_1 = \mathbb{C}$ ,  $\mathfrak{X}_2 = \mathbb{C}^{n-1}$ . При этом потребуем, чтобы множества  $\sigma_i = \sigma(A_i)$ ,  $i = 1, 2$  взаимно не пересекались ( $A_i = A|_{\mathfrak{X}_i}$ ,  $i = 1, 2$  — сужение  $A$  на  $\mathfrak{X}_i$  и  $A = A_1 \oplus A_2$ ). Для определенности пусть  $\mathfrak{X}_1 = \mathcal{L}(e_1)$  — линейная оболочка, натянутая на базисный вектор  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , а  $\mathfrak{X}_2 = \mathcal{L}(e_2, \dots, e_n)$ .

В соответствии с заданным разложением пространства  $\mathbb{C}^n$  будем рассматривать два трансформатора:  $\mathcal{J}: \text{End } \mathbb{C}^n \rightarrow \text{End } \mathbb{C}^n$ ,  $\Gamma: \text{End } \mathbb{C}^n \rightarrow \text{End } \mathbb{C}^n$ , таких что:

1.  $\forall X \in \text{End } \mathbb{C}^n$  матрица оператора  $\mathcal{J}X$  имеет вид:

$$\mathcal{J}X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix};$$

2.  $\Gamma X$  определяется как решение уравнения:

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - \mathcal{J}X, \quad \forall X \in \text{End } \mathbb{C}^n. \quad (1)$$

Определим вид матрицы оператора  $\Gamma X$ . Для этого запишем равенство (1) для элемента  $(i, j)$ :

$$(\Gamma X)_{ij} - (\Gamma X A)_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & i = 1 \text{ и } j = 2 \dots n; \\ x_{ij}, & j = 1 \text{ и } i = 2 \dots n; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Пусть  $\Gamma X = Y$ . Заметим, что  $(AY)_{ij} = a_{ii}y_{ij}$ . Подставим полученный результат в формулу (2):

$$a_{ii}y_{ij} - a_{jj}y_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & i = 1 \text{ и } j = 2 \dots n; \\ x_{ij}, & j = 1 \text{ и } i = 2 \dots n; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим за  $\Omega$  множество  $\{(i, j): i = 1 \text{ и } j = 2 \dots n, \text{ или } j = 1 \text{ и } i = 2 \dots n\}$ . Тогда

$$y_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}, & (i, j) \in \Omega \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом мы получили, что матрица оператора  $\Gamma X$  имеет вид:

$$\Gamma X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_{12}}{a_{11} - a_{22}} & \dots & \frac{x_{1n}}{a_{11} - a_{nn}} \\ \frac{x_{21}}{a_{22} - a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_{n1}}{a_{nn} - a_{11}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что  $\|\Gamma X\| \leq \gamma \|X\|$ , где  $\gamma = \frac{1}{\min_{\Omega} |a_{ii} - a_{jj}|}$ .

Будем искать такой оператор  $X_0 \in \text{End } \mathbb{C}^n$ , чтобы выполнялось равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(A - \mathcal{J}X_0). \quad (5)$$

При условии  $\|\Gamma X_0\| \leq 1$  (тогда оператор  $I + \Gamma X_0$  обратим) равенство (5) означает подобие операторов  $A - B$  и  $A - \mathcal{J}X_0$ . Преобразуем равенство (5):

$$\begin{aligned} A + A\Gamma X - B - B\Gamma X &= A - \mathcal{J}X + \Gamma X A - \Gamma X \mathcal{J}X; \\ A\Gamma X - \Gamma X A - B\Gamma X + \mathcal{J}X + \Gamma X \mathcal{J}X - B &= 0; \\ X - \mathcal{J}X - B\Gamma X + \mathcal{J}X + \Gamma X \mathcal{J}X - B &= 0; \\ X &= B\Gamma X - \Gamma X \mathcal{J}X + B. \end{aligned} \quad (6)$$

Применим к уравнению (6) трансформатор  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{J}X = \mathcal{J}B\Gamma X + \mathcal{J}B,$$

и подставим  $\mathcal{J}X$  в уравнение (6). Получаем нелинейное уравнение

$$X = B\Gamma X - \Gamma X \mathcal{J}(B\Gamma X) - \Gamma X \mathcal{J}B - B = \Phi(X). \quad (7)$$

Пусть  $P_1, P_2$  — проекторы, ассоциированные с указанным в начале разложением пространства  $\mathbb{C}^n$ . Заметим, что  $\forall X \in \text{End } \mathbb{C}^n$  выполняется:

1.  $\mathcal{J}X = P_1 X P_1 + P_2 X P_2$ ;
2.  $P_i(\Gamma X)P_j = \Gamma(P_i X P_j)$ ,  $i, j = 1, 2$ , и  $P_i(\Gamma X)P_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Таким образом пространство  $\mathbb{C}^n$  можно представить в виде прямой суммы  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{11} \oplus \mathfrak{X}_{12} \oplus \mathfrak{X}_{21} \oplus \mathfrak{X}_{22}$  подпространств, где  $\mathfrak{X}_{ij} = \{P_i X P_j, X \in \text{End } \mathbb{C}^n\}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Через  $X_{ij}$  будем обозначать оператор  $P_i X P_j$ ,  $i, j = 1, 2$ , таким образом  $X = (P_1 + P_2)X(P_1 + P_2) = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}$ ,  $X \in \text{End } \mathbb{C}^n$ . Применим операторы  $P_1$  и  $P_2$  к обеим частям уравнения (7).

1. Применим справа и слева проектор  $P_1$ :

$$\begin{aligned} P_1 X P_1 &= P_1 B \Gamma X P_1 - P_1 \Gamma X \mathcal{J}(B \Gamma X) P_1 - P_1 \Gamma X \mathcal{J} B P_1 - P_1 B P_1; \\ X_{11} &= (B_{11} + B_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21}) - \\ &\quad - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12}) \mathcal{J}((B_{11} + B_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21})) - \\ &\quad - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})(\mathcal{J} B_{11} + \mathcal{J} B_{21}) + B_{11}; \end{aligned}$$

Будем учитывать, что  $\mathcal{J} X_{12} = \mathcal{J} X_{21} = 0$  и  $\Gamma X_{11} = \Gamma X_{22} = 0$ .

$$\begin{aligned} X_{11} &= (B_{11} + B_{12})\Gamma X_{21} - \Gamma X_{12} \mathcal{J}((B_{11} + B_{12})\Gamma X_{21}) - \\ &\quad - \Gamma X_{12} \mathcal{J} B_{11} + B_{11}; \\ X_{11} &= B_{12} \Gamma X_{21} + B_{11}; \end{aligned} \tag{8}$$

2. Применим справа проектор  $P_1$ , а слева  $P_2$ :

$$\begin{aligned} P_2 X P_1 &= P_2 B \Gamma X P_1 - P_2 \Gamma X \mathcal{J}(B \Gamma X) P_1 - P_2 \Gamma X \mathcal{J} B P_1 - P_2 B P_1; \\ X_{21} &= (B_{11} + B_{22})\Gamma X_{21} - \Gamma X_{21} \mathcal{J}(B_{12} \Gamma X_{21}) - \Gamma X_{21} B_{11} + B_{21}; \\ X_{21} &= B_{22} \Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21}) B_{12} \Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21}) B_{11} + B_{21}; \end{aligned} \tag{9}$$