Определение 1. Два линейных оператора $A_i \colon D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}, i = 1, 2$ ($\mathcal{X}$ – банахово пространство) называются подобными, если существует обратимый оператор $\mathcal{U} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, такой что $\mathcal{U}D(A_2) = D(A_1)$ и $A_1\mathcal{U}x = \mathcal{U}A_2x$ $\forall x \in D(A_2)$. Оператор $\mathcal{U}$ назовем оператором преобразования оператора A_1 в A_2.

Символом A будем обозначать невозмущенный линейный оператор ($A\colon D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$), хорошо изученный с точки зрения интересующих нас структурных свойств. Оператор $B\colon D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется подчиненным оператору A, если $D(B) \supset D(A)$ и существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Bx\| \leqslant C(\|x\|+\|Ax\|)$ $\forall x \in D(A)$. Множество операторов, подчиненных оператору A, обозначим символом $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$.

Поскольку областью определения возмущенного оператора вида $A - B$, $B \in \mathcal{L}_A(\mathcal{X})$, является область определения $D(A)$ оператора A, то будем далее всюду считать, что $D(B) = D(A)$ $\forall B \in \mathcal{L}_A(\mathcal{X})$. Такая договоренность позволяет рассматривать $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ как линейное пространство. Более того, $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ можно нормировать, если положить $\|B\|_A = \inf C$, где инфимум берется по всем постоянным $C > 0$, удовлетворяющим записанному выше неравенству. Нетрудно видеть, что $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ – банахово пространство. Символами $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначается соответственно спектр и резольвентное множество оператора A.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{U}$ – линейное многообразие операторов из $\mathcal{L}_A$ и $\mathcal{J} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}, \Gamma\colon \operatorname{End}\mathcal{X}$ – два трансформатора (т.е. линейные операторы в пространстве операторов). Тройку $(\mathfrak{U}, \mathcal{J}, \Gamma)$ назовем допустимой для оператора A, а $\mathfrak{U}$ – допустимый пространством возмущений, если

1. $\mathfrak{U}$ – банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|$), непрерывно вложенное в $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ (т.е. $\|X| \ \geqslant const\|X\|_A$ $\forall X \in \mathfrak{U}$);

2. $\mathcal{J}$ и Γ – непрерывные операторы;

3. $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и $A\Gamma X - \Gamma X A = X - \mathcal{J}X$ $\forall X \in \mathfrak{U}$;

4. $(\Gamma X)Y$, $X\Gamma Y \in \mathfrak{U}$ $\forall X, Y \in \mathfrak{U}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \leqslant \gamma$ и $\max\{\|X\Gamma Y\|, \|(\Gamma X)Y\|\} \leqslant \gamma\,\|X\|\,\|Y\|$ $\forall X, Y \in \mathfrak{U}$;

5. $\mathcal{J}$ – проектор и $\mathcal{J}((\Gamma X)\mathcal{J}Y) = 0$ $\forall X, Y \in \mathfrak{U}$;

6. $\forall X \in \mathfrak{U}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \lambda_0 \in \rho(A)$, что $\|X(A - \lambda_0 I) - 1\|_\infty < \varepsilon$.

Пусть $(\mathfrak{U}, \mathcal{J}, \Gamma)$ – допустимая для оператора $A\colon D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ тройка и $B \in \mathfrak{U}$ – возмущение оператора A. Будем искать такой оператор $X_0 \in \mathfrak{U}$, чтобы выполнялось равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(A - \mathcal{J}X_0), \tag{1}$$

которое при условии $\|\Gamma X_0\|_\infty < 1$ (влекущего обратимость оператора $U = I + \Gamma X_0$) означает подобие операторов $A - B$ и $A - \mathcal{J}X_0$. Нетрудно проверить, что равенство (1) имеет место, если X_0 – решение нелинейного уравнения вида

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)\mathcal{J}B - (\Gamma X)\mathcal{J}(B\Gamma X) + B = \Phi(X), \tag{2}$$

рассматриваемого в банаховом пространстве $\mathfrak{U}$ допустимый возмущений. Из метода сжимающих отображений, примененного к нелинейному оператору

$\Phi\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ (корректность его определения следует из определения допустимой тройки), получаем, что имеет место

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$\gamma \,\|B\|\,\|\mathcal{J}\| < \frac{1}{4}, \tag{3}$$

то уравнение (2) *имеет решение* X_0, *для которого выполнено равенство* (1), *причем оператор* $I + \Gamma X_0$ *обратим.*

Замечание 1. Построение трансформатора Γ обычно осуществляется с помощью трансформатора $ad_A\colon D(ad_A) \subset \operatorname{End}\mathcal{X} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ с областью определения $D(ad_A)$, состоящих из таких операторов $X_0 \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, которые переводят $D(A)$ в $D(A)$, и оператор $AX_0 - X_0A\colon D(A) \to \mathcal{X}$ допускает единственное расширение с $D(A)$ до некоторого оператора $Y_0 \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ (и тогда полагается $Y_0 = ad_A X_0$).

Теоремы о расщеплении рассматриваемых здесь дифференциальных операторов получены с помощью выбора специальных допустимых троек, которые строятся в предположении существования разложения банахова пространства $\mathcal{X}$ в прямую сумму $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ инвариантных относительно не возмущенного оператора $A\colon D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ подпространств $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$, причем множества $\sigma_i = \sigma(A_i)$, $i = 1, 2$, взаимно не пересекаются ($A_i = A|\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, – сужение A на $\mathcal{X}_i$, и будем писать $A = A_1 \oplus A_2$).

Пусть $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2$, – проекторы, ассоциированные с указанным разложением пространства $\mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{X}_i = \operatorname{Im}\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2$. Отметим, что если одно из множеств σ_i, $i = 1, 2$, компактно, то $\mathcal{P}_i = P(\sigma_i, A)$, $i = 1, 2$, – проекторы Рисса, построенные по спектральным множествам σ_i, $i = 1, 2$.

Определение 3. Допустимая для оператора A тройка $(\mathfrak{U}, \mathcal{J}, \Gamma)$ называется допустимой тройкой теории расщепления операторов, если выполнены следующие свойства:

1. $\mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j \in \mathfrak{U}$, $i, j = 1, 2$, для любого $X \in \mathfrak{U}$, и трансформатор $\mathcal{J}$ имеет вид $\mathcal{J}X = \mathcal{P}_1 X \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 X \mathcal{P}_2$, $X \in \mathfrak{U}$;

2. $\mathcal{P}_i(\Gamma X)\mathcal{P}_j = \Gamma(\mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j)$, $i, j = 1, 2$ для любого $X \in \mathfrak{U}$, причем $\mathcal{P}_i(\Gamma X)\mathcal{P}_i = 0$, $i = 1, 2$.

Рассматриваемые нами допустимые тройки для оператора A удовлетворяют свойствам из определения 3. Это позволяет представить допустимое пространство $\mathfrak{U}$ в виде прямой суммы $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{11} \oplus \mathfrak{U}_{12} \oplus \mathfrak{U}_{21} \oplus \mathfrak{U}_{22}$ подпространств $\mathfrak{U}_{ij} = \{\mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j\colon X \in \mathfrak{U}\}$, $i, j = 1, 2$. Символом X_{ij} будем обозначать оператор (операторный блок) $\mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j$ из $\mathfrak{U}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, так что $X = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)X(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}$, $X \in \mathfrak{U}$.

Применяя к обеим частям уравнения (2) операторы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ (справа и слева) и используя условие 2 из определения 3, получаем следующую систему уравнений для блоков X_{ij}, $i, j = 1, 2$, оператора $X \in \mathfrak{U}$:

$$X_{11} = B_{12}\Gamma X_{21} + B_{11}, \tag{4}$$

$$X_{21} = B_{22}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{11} - (\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} + B_{21} = \Phi(X_{21}), \tag{5}$$

$$X_{12} = B_{11}\Gamma X_{12} - (\Gamma X_{12})B_{22} - (\Gamma X_{12})B_{21}\Gamma X_{12} + B_{12} = \Phi(X_{12}), \tag{6}$$

$$X_{22} = B_{21}\Gamma X_{12} + B_{22}. \tag{7}$$

Важно отметить, что уравнения (5) и (6) независимы от остальных уравнений и рассматриваются соответственно в подпространствах $\mathfrak{U}_{21}$ и $\mathfrak{U}_{12}$. Условия их разрешимости, и, следовательно, также и уравнений (4), (7), удобно формулировать, используя следующие величины: $b_{ij} = \|B_{ij}\|$, $i,j=1,2$, $\tilde{b}_{12}$, $\tilde{b}_{21}$ – нормы операторов $X \mapsto B_{12}\Gamma X : \mathfrak{U}_{12} \to \mathfrak{U}_{12}$, $X \mapsto B_{21}\Gamma X : \mathfrak{U}_{21} \to \mathfrak{U}_{21}$ соответственно и $\tilde{b}_{22}$ – наибольшая из норм операторов $X \mapsto (\Gamma X)B_{22} : \mathfrak{U}_{12} \to \mathfrak{U}_{12}$, $X \mapsto B_{22}\Gamma X : \mathfrak{U}_{21} \to \mathfrak{U}_{21}$. Отметим, что $\tilde{b}_{12} \leqslant \gamma b_{12}$, $\tilde{b}_{21} \leqslant \gamma b_{21}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$d = \gamma b_{11} + \tilde{b}_{22} + 2\gamma(b_{12}b_{21})^{1/2} < 1. \tag{8}$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору вида

$$A - \mathcal{P}_1 X \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 X \mathcal{P}_2 = A - X_{11} - X_{22},$$

где X – решение уравнения (2), X_{ij}, $i,j = 1,2$, – решения соответствующих уравнений (4)-(7), а оператор $U = I + \Gamma X = I + \Gamma X_{12} + \Gamma X_{21}$ является оператором преобразования, причем

$$\begin{aligned} U^{-1} = I &+ (I - \Gamma X_{21})(I - (\Gamma X_{12})\Gamma X_{21})^{-1}\Gamma X_{12} + \\ &+ (I - \Gamma X_{12})(I - (\Gamma X_{21})\Gamma X_{12})^{-1}\Gamma X_{21}. \end{aligned} \tag{9}$$

Кроме того, имеют место следующие оценки:

$$\|X_{11} - B_{11}\| \leqslant \frac{2b_{21}\tilde{b}_{12}}{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11} + q} \leqslant \frac{2\gamma b_{21} b_{12}}{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11}}; \tag{10}$$

$$\|X_{22} - B_{22}\| \leqslant \frac{2b_{12}\tilde{b}_{21}}{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11} + q} \leqslant \frac{2\gamma b_{21} b_{12}}{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11}}; \tag{11}$$

$$\|X_{21} - B_{21}\| \leqslant \frac{2q b_{21}}{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11} + q} \leqslant \frac{2b_{21}}{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11}}; \tag{12}$$

$$\|X_{12} - B_{12}\| \leqslant \frac{2q b_{12}}{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11} + q} \leqslant \frac{2b_{12}}{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11}}; \tag{13}$$

$$\|X_{11} - B_{11} - B_{12}\Gamma B_{21}\| \leqslant \frac{2\tilde{b}_{12} b_{21} q}{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11}}; \tag{14}$$

$$\|X_{22} - B_{22} - B_{21}\Gamma B_{12}\| \leqslant \frac{2b_{12}\tilde{b}_{21} q}{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11}}, \tag{15}$$

где $q = [(1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11})^2 - 4\gamma b_{12} b_{21}]^{1/2}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (5) и определяемый его правой частью нелинейный оператор $\Phi_1 : \mathfrak{U}_{21} \to \mathfrak{U}_{21}$. Найдем шар $B(r_1) = \{Y \in \mathfrak{U}_{21} : \|Y\| \leqslant r_1\}$ из пространства $\mathfrak{U}_{21}$, который оператор Φ_1 переводит в себя. Определяемый далее радиус шара r_1 удобно представить в виде $r_1 = r b_{21}$. Из условия $\|\Phi_1(Y)\| \leqslant r b_{21}$ для любого $Y \in \mathfrak{U}_{21}$ получаем, что $\Phi_1(B(r_1)) \subset B(r_1)$, если число $r > 0$ удовлетворяет неравенству

$$r\tilde{b}_{22} b_{21} + r\gamma b_{21} b_{11} + r^2 \gamma \tilde{b}_{12} b_{21}^2 + b_{21} \leqslant r b_{21}.$$

Отсюда получаем, что в качестве r_1 можно взять число

$$r_1 = r b_{21} = \frac{1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11} - q}{2\gamma \tilde{b}_{12}} = 2b_{21}(1 - \tilde{b}_{22} - \gamma b_{11} - q)^{-1}.$$

Для любой пары операторов Y_1, Y_2 из шара $B(r_1)$ имеют место оценки

$$\begin{aligned}\|\Phi_1(Y_1)-\Phi_1(Y_2)\| &\leqslant (\tilde{b}_{22}+\gamma b_{11}+4\gamma^2 b_{12}b_{21}(1-\tilde{b}_{22}-\gamma b_{11}+q)^{-1})\,\|Y_1-Y_2\| \leqslant \\ &\leqslant \left(\tilde{b}_{22}+\gamma b_{11}+\frac{2\gamma(b_{12}b_{21})^{1/2}(1-\tilde{b}_{22}-\gamma b_{11})}{1-\tilde{b}_{22}-\gamma b_{11}+q}\right)\|Y_1-Y_2\| \leqslant \\ &\leqslant d\,\|Y_1-Y_2\|\,.\end{aligned}$$

В силу условия (8) теоремы оператор Φ_1 является оператором сжатия в шаре $B(r_1)$, и поэтому уравнение (5) имеет единственное в шаре $B(r_1)$ решение X_{21}, которое можно найти методом простых итераций. Следовательно, уравнение (4) имеет соответствующее решение X_{11}. Оценки (10),(12), (14) непосредственно следуют из условия принадлежности оператора X_{21} шару $B(r_1)$.

Аналогичные рассуждения применимы к уравнению (6) (и следовательно, к уравнению (7)), с которым связан оператор $\Phi_2\colon \mathfrak{U}_{12} \to \mathfrak{U}_{12}$. Он является оператором сжатия в шаре $B(r_2)$, где $r_2 = 2b_{12}(1-b_{22}-\gamma b_{11}+q)^{-1}$, что позволяет получить оценки (11),(13) и (15).

Поскольку $\|\Gamma X_{21}\|_\infty \|\Gamma X_{12}\|_\infty \leqslant \gamma^2 r_1 r_2 = 4\gamma^2 b_{12}b_{21}(1-\tilde{b}_{22}-\gamma b_{11}+q)^{-1}$ < 1, то операторы $I-(\Gamma X_{21})\Gamma X_{12}, I-(\Gamma X_{12})\Gamma X_{21}$ обратимы. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что обратный к $U = I+\Gamma X_{12}+\Gamma X_{21} = I+\Gamma X$ оператор допускает представление вида (9). **Теорема доказана.**

Замечание 2. Преимущество рассмотрения оператора $\tilde{A} = A-\mathcal{P}_1 X\mathcal{P}_1-\mathcal{P}_2 X\mathcal{P}_2$ перед оператором $A-B$ состоит в том, что подпространства $\mathcal{X}_i = \operatorname{Im}\mathcal{P}_i, i=1,2$, инвариантны относительно оператора A и поэтому $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2$, где $\tilde{A}_i = A_i - \mathcal{P}_i X|\mathcal{X}_i, i=1,2$ — сужения $\tilde{A}$ на $\mathcal{X}_i$. Таким образом, изучение оператора $A-B$ по существу сводится к изучению операторов $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$. Например, $\sigma(A-B) = \sigma(\tilde{A}) = \sigma(\tilde{A}_1)\cup\sigma(\tilde{A}_2)$.