Оценка собственных значений возмущенного линейного оператора

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Дан линейный оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$ со своей матрицей $\mathscr{A} = (a_{ij})$, внедиагональные элементы которой малы по сравнению с диагональными. Представим оператор $\mathbb{A}$ в виде разности $\mathbb{A} = A - B$ двух линейных операторов
$A, B \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$, заданных матрицами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор A будем называть *невозмущенным* оператором, оператор B *возмущением* оператора A, а $\mathbb{A}$ — возмущенным линейным оператором. Как уже говорилось, элементы матрицы возмущения $\mathcal{B}$ малы по сравнению с элементами невозмущенной матрицы $\mathcal{A}$.

Требуется получить оценку одного определенного собственного значения (далее всюду будем делать вывод для первого собственного значения). Знаем, что это оцениваемое собственное значение отлично от других.

Разложим пространство $\operatorname{End}\mathbb{C}^n$ в прямую сумму $\mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$ инвариантных относительно невозмущенного оператора A подпространств $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$, где $\mathfrak{X}_1 = \mathbb{C}, \mathfrak{X}_2 = \mathbb{C}^{n-1}$. При этом потребуем, чтобы множества $\sigma_i = \sigma(A_i)$,
$i = 1, 2$ взаимно не пересекались ($A_i = A|_{\mathfrak{X}_i}, i = 1, 2$ — сужение A на $\mathfrak{X}_i$ и $A = A_1 \oplus A_2$). Как уже было сказано, будем искать оценку первого собственного значения, поэтому пусть $\mathfrak{X}_1 = \mathcal{L}(e_1)$ — линейная оболочка, натянутая на базисный вектор $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, а $\mathfrak{X}_2 = \mathcal{L}(e_2, \dots, e_n)$.

В соответствии с заданным разложением пространства $\mathbb{C}^n$ будем рассматривать два трансформатора: $\mathcal{J}\colon \operatorname{End}\mathbb{C}^n \to \operatorname{End}\mathbb{C}^n, \Gamma\colon \operatorname{End}\mathbb{C}^n \to \operatorname{End}\mathbb{C}^n$, таких что:

1. $\forall X \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$ матрица оператора $\mathcal{J}X$ имеет вид:

$$\mathcal{J}X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix};$$

2. ΓX определяется как решение уравнения:

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - \mathcal{J}X, \qquad \forall X \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Определим вид матрицы оператора ΓX. Для этого запишем равенство (1) для элемента (i,j):

$$(A\Gamma X)_{ij}-(\Gamma XA)_{ij}=\begin{cases}x_{ij}, & i=1 \text{ и } j=2\dots n;\\ x_{ij}, & j=1 \text{ и } i=2\dots n;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{2}$$

Пусть $\Gamma X=Y$. Заметим, что $(AY)_{ij}=a_{ii}y_{ij}$. Подставим полученный результат в формулу (2):

$$a_{ii}y_{ij}-a_{jj}y_{ij}=\begin{cases}x_{ij}, & i=1 \text{ и } j=2\dots n;\\ x_{ij}, & j=1 \text{ и } i=2\dots n;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{3}$$

Обозначим за Ω множество $\{(i,j)\colon i=1 \text{ и } j=2\dots n, \text{ или } j=1 \text{ и } i=2\dots n\}$. Тогда

$$y_{ij}=\begin{cases}\frac{x_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}}, & (i,j)\in\Omega\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{4}$$

Таким образом мы получили, что матрица оператора ΓX имеет вид:

$$\Gamma X=\begin{pmatrix}0 & \frac{x_{12}}{a_{11}-a_{22}} & \dots & \frac{x_{1n}}{a_{11}-a_{nn}}\\ \frac{x_{21}}{a_{22}-a_{11}} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{x_{n1}}{a_{nn}-a_{11}} & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что $\|\Gamma X\|\leqslant\gamma\,\|X\|$, где $\gamma=\frac{1}{\min\limits_{\Omega}|a_{ii}-a_{jj}|}$.

Будем искать такой оператор $X_0\in\operatorname{End}\mathbb{C}^n$, чтобы выполнялось равенство

$$(A-B)(I+\Gamma X_0)=(I+\Gamma X_0)(A-\mathcal{J}X_0). \tag{5}$$

При условии $\|\Gamma X_0\|\leqslant 1$ (тогда оператор $I+\Gamma X_0$ обратим) равенство (5) означает подобие операторов $A-B$ и $A-\mathcal{J}X_0$. Таким образом задача оценки первого собственного значения возмущенного оператора $A-B$ сводится к задаче оценки первого собственного значения оператора $A-\mathcal{J}X_0$, равного $a_{11}-x_{11}^0$ в силу указанного разложения пространства $\mathbb{C}^n$. Необходимо получить оценку x_{11}^0 матрицы оператора X_0. Для этого сначала преобразуем равенство (5):

$$\begin{gathered}A+A\Gamma X-B-B\Gamma X=A-\mathcal{J}X+\Gamma XA-\Gamma X\mathcal{J}X;\\ A\Gamma X-\Gamma XA-B\Gamma X+\mathcal{J}X+\Gamma X\mathcal{J}X-B=0;\\ X-\mathcal{J}X-B\Gamma X+\mathcal{J}X+\Gamma X\mathcal{J}X-B=0;\\ X=B\Gamma X-\Gamma X\mathcal{J}X+B. \qquad (6)\end{gathered}$$

Применим к уравнению (6) трансформатор $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}X=\mathcal{J}B\Gamma X+\mathcal{J}B,$$

и подставим $\mathcal{J}X$ в уравнение (6). Получаем нелинейное уравнение

$$X=B\Gamma X-\Gamma X\mathcal{J}(B\Gamma X)-\Gamma X\mathcal{J}B-B=\Phi(X). \tag{7}$$

Условие разрешимости уравнения (7) следует из следующей теоремы:
Теорема 1. *Если выполняется условие*

$$\gamma \|B\| < \frac{1}{4},$$

то уравнение (7) имеет решение X_0, для которого выполнено равенство (5).
Доказательство.
Для доказательства воспользуемся методом сжимающих отображений. Теорема доказана.

Пусть P_1, P_2 — проекторы, ассоциированные с указанным в начале разложением пространства $\mathbb{C}^n$. Заметим, что $\forall X \in \operatorname{End} \mathbb{C}^n$ выполняется:

1. $\mathcal{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$;
2. $P_i(\Gamma X)P_j = \Gamma(P_iXP_j),\ i,j = 1,2$, и $P_i(\Gamma X)P_i = 0,\ i = 1,2$.

Таким образом пространство $\mathbb{C}^n$ можно представить в виде прямой суммы $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{11} \oplus \mathfrak{X}_{12} \oplus \mathfrak{X}_{21} \oplus \mathfrak{X}_{22}$ подпространств, где $\mathfrak{X}_{ij} = \{P_i\mathfrak{X}P_j, X \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n\}$, $i,j = 1,2$. Через X_{ij} будем обозначать оператор $P_iXP_j,\ i,j = 1,2$, таким образом $X = (P_1+P_2)X(P_1+P_2) = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22},\ X \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$. Применим операторы P_1 и P_2 к обеим частям уравнения (7).

1. Применим справа и слева проектор P_1:

$$\begin{aligned}
P_1XP_1 &= P_1B\Gamma XP_1 - P_1\Gamma X\mathcal{J}(B\Gamma X)P_1 - P_1\Gamma X\mathcal{J}BP_1 - P_1BP_1;\\
X_{11} &= (B_{11}+B_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21}) -\\
&\quad - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})\mathcal{J}((B_{11}+B_{12})(\Gamma X_{11}+\Gamma X_{21})) -\\
&\quad - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})(\mathcal{J}B_{11} + \mathcal{J}B_{21}) + B_{11};
\end{aligned}$$

   Будем учитывать, что $\mathcal{J}X_{12} = \mathcal{J}X_{21} = 0$ и $\Gamma X_{11} = \Gamma X_{22} = 0$.

$$\begin{aligned}
X_{11} &= (B_{11}+B_{12})\Gamma X_{21} - \Gamma X_{12}\mathcal{J}((B_{11}+B_{12})\Gamma X_{21}) -\\
&\quad - \Gamma X_{12}\mathcal{J}B_{11} + B_{11};\\
X_{11} &= B_{12}\Gamma X_{21} + B_{11}; \qquad (8)
\end{aligned}$$

2. Применим справа проектор P_1, а слева P_2:

$$\begin{aligned}
P_2XP_1 &= P_2B\Gamma XP_1 - P_2\Gamma X\mathcal{J}(B\Gamma X)P_1 - P_2\Gamma X\mathcal{J}BP_1 - P_2BP_1;\\
X_{21} &= (B_{11}+B_{22})\Gamma X_{21} - \Gamma X_{21}\mathcal{J}(B_{12}\Gamma X_{21}) - \Gamma X_{21}B_{11} + B_{21};\\
X_{21} &= B_{22}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{11} + B_{21}; \qquad (9)
\end{aligned}$$

Искомую оценку элемента x_{11} оператора X, являющегося решением нелинейного уравнения (7) мы получим, получив оценку $\|X_{11}\|$. Для оценки $\|X_{11}\|$ в свою очередь требуется оценка $\|X_{21}\|$ и разрешимость уравнения (9). Потому сформулируем и докажем следующую теорему:
Теорема 2. *//TODO формулировка теоремы*
Доказательство.
Доказательство теоремы.