И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Рассмотрим линейный оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ банахово пространство, заданный операторной матрицей, т. е.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}.$$

Пусть пространство $\mathfrak{X}$ представимо в виде прямой суммы подпространств: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} A&\colon \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_1 \\ B&\colon \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_2 \\ C&\colon \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_1 \\ D&\colon \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2 \end{aligned}$$

Представим оператор $\mathbb{A}$ в виде $\mathbb{A} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$, где оператор $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$ задается матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, а оператор $\mathcal{B} \in \operatorname{End}(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$ – матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -C \\ -D & 0 \end{pmatrix}$. Всюду далее считаем что выполняется условие:

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing.$$

Символом $\mathcal{U}$ обозначим пространство $\operatorname{End}(\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)$ Рассмотрим канонические проекторы

$$P_1 x = (x_1, 0), P_2 x = (0, x_2), x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2.$$

Для любого оператора $X \in \mathcal{U}$ рассмотрим операторы $P_i X P_j \in \mathcal{U}, i, j \in 1, 2$. Таким образом, оператор X задается матрицей:

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

где оператор X_{ij} – сужение оператора $P_i X P_j$ на подпространство $\mathfrak{X}_i$ с областью значений $\mathfrak{X}_j, i, j \in 1, 2$.

В соответствии с заданным разложением пространства $\mathfrak{X}$ будем рассматривать два трансформатора: $\mathcal{J} \in \operatorname{End}\mathcal{U}, \Gamma \in \operatorname{End}\mathcal{U}$, таких что:

1. Для любого $X \in \mathcal{U}$ оператор $\mathcal{J}X$ определяется следующим образом: $\mathcal{J}X = P_1 X P_1 + P_2 X P_2$, а матрица оператора $\mathcal{J}X$ имеет вид:

$$\mathcal{J}X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix};$$

2. Пусть $\Gamma X = Y$, тогда оператор Y определяется как решение уравнения:

$$\mathcal{A}Y - Y\mathcal{A} = X - \mathcal{J}X, \qquad \forall X \in \mathcal{U}. \tag{1}$$

Запишем уравнение 1 в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Перемножив и вычтя матрицы получим следующую систему операторный уравнений:

$$\begin{cases} AY_{12} - Y_{12}B = X_{12}, \\ BY_{21} - Y_{21}A = X_{21}, \end{cases} \tag{2}$$

где Y_{12}, Y_{21} – искомые операторы. Если оператор A или оператор B ограничен, то уравнения 2 разрешимы.

Рассмотрим случай, когда $\dim \mathfrak{X}_1 = 1$, т. е. оператор A – скалярный оператор: $A = \alpha I$. Перепишем уравнения 2:

$$\begin{cases} \alpha I Y_{12} - Y_{12}B = X_{12}, \\ BY_{21} - Y_{21}\alpha I = X_{21}. \end{cases}$$

Так как оператор A ограничен, то система имеет решение, и оно имеет вид:

$$\begin{cases} Y_{12} = X_{12}(\alpha I - B)^{-1}, \\ Y_{21} = (\alpha I - B)^{-1} X_{21}. \end{cases}$$

Таким образом мы получили, что матрица оператора ΓX имеет вид:

$$\Gamma X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12}(\alpha I - B)^{-1} \\ (\alpha I - B)^{-1} X_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Оценим норму оператора Γ. Пусть $X \in \mathcal{U}$, тогда:

$$\begin{aligned} &\|\Gamma X\| \leqslant \max\left(\left\|X_{12}(\alpha I - B)^{-1}\right\|, \left\|(\alpha I - B)^{-1} X_{21}\right\|\right) \leqslant \\ &\leqslant \max\left(\left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|, \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|\right) \|X\| = \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\| \|X\| = \gamma \|X\|. \end{aligned}$$

Получили следующую оценку $\|\Gamma\| \leqslant \gamma$.

Пусть P_1, P_2 – проекторы относительно разложения пространства $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$. Заметим, что $\forall X \in \operatorname{End} \mathfrak{X}$ выполняется:

1. $\mathcal{J} X = P_1 X P_1 + P_2 X P_2$;
2. $P_i(\Gamma X)P_j = \Gamma(P_i X P_j),\ i, j = 1, 2$, и $P_i(\Gamma X)P_i = 0,\ i = 1, 2$.

Таким образом пространство $\mathfrak{X}$ можно представить в виде прямой суммы $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{11} \oplus \mathfrak{X}_{12} \oplus \mathfrak{X}_{21} \oplus \mathfrak{X}_{22}$ подпространств, где $\mathfrak{X}_{ij} = \{P_i \mathfrak{X} P_j, X \in \operatorname{End} \mathfrak{X}\}$, $i, j = 1, 2$. Через X_{ij} будем обозначать оператор $P_i X P_j,\ i, j = 1, 2$, таким образом $X = (P_1 + P_2) X (P_1 + P_2) = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22},\ X \in \operatorname{End} \mathfrak{X}$. Применим операторы P_1 и P_2 к обеим частям уравнения (**??**).

1. Применим справа и слева проектор P_1:

$$\begin{aligned} P_1 X P_1 &= P_1 B \Gamma X P_1 - P_1 \Gamma X \mathcal{J}(B \Gamma X) P_1 - P_1 B P_1; \\ X_{11} &= (B_{11} + B_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21}) - \\ &\quad - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12}) \mathcal{J}((B_{11} + B_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21})) + B_{11}; \end{aligned}$$

Будем учитывать, что $\mathcal{J} X_{12} = \mathcal{J} X_{21} = 0$, $\Gamma X_{11} = \Gamma X_{22} = 0$ и $B_{11} = B_{22} = 0$.

$$X_{11} = B_{12} \Gamma X_{21}; \tag{3}$$

2. Применим справа проектор P_1, а слева P_2:

$$\begin{aligned} P_2XP_1 &= P_2B\Gamma XP_1 - P_2\Gamma X\mathcal{J}(B\Gamma X)P_1 - P_2BP_1; \\ X_{21} &= (B_{11}+B_{22})\Gamma X_{21} - \Gamma X_{21}\mathcal{J}(B_{12}\Gamma X_{21}) - \Gamma X_{21}B_{11} + B_{21}; \\ X_{21} &= -(\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} + B_{21}; \end{aligned} \tag{4}$$

Искомую оценку элемента x_{11} оператора X, являющегося решением нелинейного уравнения (**??**) мы получим, получив оценку $\|X_{11}\|$. Для оценки $\|X_{11}\|$ в свою очередь требуется оценка $\|X_{21}\|$ и разрешимость уравнения (4). Потому сформулируем и докажем следующую теорему:
Теорема 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$d = 2\gamma^2(b_{12}b_{21})^{\frac{1}{2}} < 1. \tag{5}$$

Тогда нелинейное уравнение (4) *имеет единственное решение, которое можно найти методом простых итераций, и имеют место следующие оценки:*

$$\|X_{11} - B_{11}\| \le \frac{2\gamma b_{12}b_{21}}{1+(1-4\gamma^2b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}} \qquad \|X_{21}\| \le \frac{2b_{21}}{1+(1-4\gamma^2b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}},$$

где $\|B_{ij}\| = b_{ij},\ i,j = 1,2.$
Доказательство.
Рассмотрим оператор $\Phi_1(X_{21})$, определяемый уравнением 4. Найдем шар $B(r_1) = \{X \in \mathfrak{X}_{21} : \|X\| < r_1\}$ из пространства $\mathfrak{X}_{21}$, который оператор $\Phi_1(X_{21})$ переводит в себя, т. е. $\|\Phi_1(X_{21})\| \le r_1$ для любого $X \in B(r_1)$. Обозначим $r_1 = rb_{21}$.

$$\begin{aligned} &\|\Phi_1(X_{21})\| = -(\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} + B_{21} \le \\ &\le \gamma^2 b_{12}\|X_{21}\|^2 + b_{21} \le \\ &\le \gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r^2 + b_{21} \le b_{21}r \end{aligned}$$

Получаем неравенство:

$$\gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r^2 - r + 1 \le 0.$$

Покажем что квадратное уравнение относительно r

$$\gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r^2 - r + 1 = 0$$

имеет хотя бы один действительный положительный корень. Воспользуемся тем, что $\gamma\|B\| < \frac{1}{3}$ и $b_{ij} \le \|B\|$.

$$\begin{aligned} &D = 1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12}; \\ &1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12} > 1 - 4\cdot\frac{1}{9} = 0 \end{aligned}$$

Получаем, что

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm (1-4\gamma^2b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2b_{21}b_{12}}$$

Рассмотрим решение $r = \frac{1-(1-4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}}$, докажем, что оно больше нуля.

$$\frac{1-(1-4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}} = \frac{2}{1+(1-4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}} > 0$$

Получаем, что в качестве радиуса шара можно взять число

$$r b_{21} = \frac{2 b_{21}}{1+(1-4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}.$$

Для любой пары операторов Y_1, Y_2 из шара $B(r_1)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_1(Y_1) - \Phi_1(Y_2)\| = \| - (\Gamma Y_1) B_{12} \Gamma Y_1 + B_{21} + \\
&+ (\Gamma Y_2) B_{12} \Gamma Y_2 - B_{21}\| \leq (\gamma^2 b_{12}(\|Y_1\| + \\
&+ \|Y_2\|)) \|Y_1 - Y_2\| \leq (\frac{2\gamma^2 (b_{12} b_{21})^{\frac{1}{2}}}{1+(1-4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}) \|Y_1 - Y_2\| \leq d \|Y_1 - Y_2\|.
\end{aligned}$$

Из условия (5) следует, что оператор Φ_1 является оператором сжатия в шаре $B(r_1)$. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение X_{21} в этом шаре, которое можно найти методом простых итераций. Так как X_{21} принадлежит шару $B(r_1)$, то справедливо неравенство

$$\|X_{11} - B_{11}\| = \|B_{12} \Gamma X_{21}\| \leq \gamma b_{12} \|X_{21}\| \leq \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1+(1-4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема доказана.

Таким образом мы имеем следующую оценку для $\|X_{11}\|$

$$\|X_{11}\| \leq \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1+(1-4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2\gamma} - \frac{1-(1-4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{4\gamma^2 b_{21} b_{12}},$$

где $\gamma = \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|, b_{ij} = \|B_{ij}\|, i, j = 1, 2$