И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Пусть X, Y – два комплексных банаховых пространства.

Символом $\mathrm{Hom}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов, определенных на X со значениями в Y. Через $\mathrm{End}\,\mathrm{X}$ обозначим банахово пространство $\mathrm{Hom}(\mathrm{X},\mathrm{X})$, если $\mathrm{Y}=\mathrm{X}$.

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathbb{A}\in\mathrm{End}\,\mathrm{X}$, где X банахово пространство, являющееся прямой суммой $\mathrm{X}=\mathrm{X}_1\oplus\mathrm{X}_2$ двух замкнутых подпространств $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2$. Предполагается, что оператор $\mathbb{A}$ задается операторной матрицей

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix} A & C\\ D & B\end{pmatrix},$$

т.е. $\mathbb{A}x=(Ax_1+Cx_2,Dx_1+Bx_2)$, где $x=x_1+x_2,\ x_1\in\mathrm{X}_1,\ x_2\in\mathrm{X}_2$. Отметим, что

$$A\in\mathrm{End}\,\mathrm{X}_1,\ C\in\mathrm{Hom}(\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_1),$$
$$B\in\mathrm{End}\,\mathrm{X}_2,\ D\in\mathrm{Hom}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2).$$

Представим оператор $\mathbb{A}$ в виде $\mathbb{A}=\mathcal{A}-\mathcal{B}$, где оператор $\mathcal{A}\in\mathrm{End}\,\mathrm{X}$ задается матрицей $\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$, а оператор $\mathcal{B}\in\mathrm{End}\,\mathrm{X}$ – матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -C\\ -D & 0\end{pmatrix}$. Всюду далее считаем что выполняется условие:

$$\sigma(A)\cap\sigma(B)=\varnothing.$$

Символом U обозначим пространство $\mathrm{End}\,\mathrm{X}$. Рассмотрим канонические проекторы

$$P_1x=x_1,\ P_2x=x_2,\ x=x_1+x_2\in\mathrm{X}_1\oplus\mathrm{X}_2,\ x_1\in\mathrm{X}_1,\ x_2\in\mathrm{X}_2$$

. Для любого оператора $X\in\mathrm{U}$ рассмотрим операторы $P_iXP_j\in\mathrm{U},i,j\in 1,2$. Таким образом, оператор X задается матрицей:

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix},$$

где оператор X_{ij} – сужение оператора P_iXP_j на подпространство X_i с областью значений $\mathrm{X}_j,i,j\in 1,2$.

В соответствии с заданным разложением пространства X будем рассматривать два трансформатора: $\mathcal{J}\in\mathrm{End}\,\mathrm{U},\Gamma\in\mathrm{End}\,\mathrm{U}$, таких что:

1. Для любого $X\in\mathrm{U}$ оператор $\mathcal{J}X$ определяется следующим образом: $\mathcal{J}X=P_1XP_1+P_2XP_2$, а матрица оператора $\mathcal{J}X$ имеет вид:

$$\mathcal{J}X=\begin{pmatrix} X_{11} & 0\\ 0 & X_{22}\end{pmatrix};$$

2. Трансформатор $\Gamma \in \operatorname{End} \mathrm{U}$ построим следующим образом. Оператор ΓX, где $X \in \mathrm{U}$ определим как решение $Y \in \operatorname{End} \mathrm{U}$ уравнения

$$\mathcal{A}Y - Y\mathcal{A} = X - \mathcal{J}X, \qquad \forall X \in \mathcal{U}, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию $\mathcal{J}\mathcal{Y} = 0$, кроме того можно показать, что решение Y существует и единственно.

Запишем уравнение (1) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножив и вычтя матрицы получим следующую систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} AY_{12} - Y_{12}B = X_{12}, \\ BY_{21} - Y_{21}A = X_{21}, \end{cases} \tag{2}$$

где Y_{12}, Y_{21} – искомые операторы. Если оператор A или оператор B ограничен, то уравнения (2) разрешимы.

Рассмотрим случай, когда $\dim \mathfrak{X}_1 = 1$, т. е. оператор A – скалярный оператор: $A = \alpha I$. Перепишем уравнения 2:

$$\begin{cases} \alpha Y_{12} - Y_{12}B = X_{12}, \\ BY_{21} - \alpha Y_{21} = X_{21}. \end{cases}$$

Так как оператор A ограничен, то система имеет решение, и оно имеет вид:

$$\begin{cases} Y_{12} = X_{12}(\alpha I - B)^{-1}, \\ Y_{21} = (\alpha I - B)^{-1} X_{21}. \end{cases}$$

Таким образом мы получили, что матрица оператора ΓX имеет вид:

$$\Gamma X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12}(\alpha I - B)^{-1} \\ (\alpha I - B)^{-1} X_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Оценим норму оператора Γ. Пусть $X \in \mathcal{U}$, тогда:

$$\begin{aligned} &\|\Gamma X\| \leqslant \max\left(\left\|X_{12}(\alpha I - B)^{-1}\right\|, \left\|(\alpha I - B)^{-1} X_{21}\right\|\right) \leqslant \\ &\leqslant \max\left(\left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|, \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|\right) \|X\| = \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\| \|X\| = \gamma \|X\|, \end{aligned}$$

где $\gamma = \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|$. Итак, получена следующая оценка $\|\Gamma\| \leqslant \gamma$.

Будем искать такой оператор $X_0 \in \mathcal{U}$, чтобы выполнялось равенство

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B})(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(\mathcal{A} - \mathcal{J}X_0). \tag{3}$$

При условии $\|\Gamma X_0\| < 1$ (тогда оператор $I + \Gamma X_0$ обратим) равенство (3) означает подобие операторов $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} - \mathcal{J}X_0$. Таким образом задача оценки первого собственного значения возмущенного оператора $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ сводится к задаче оценки собственного значения оператора $\mathcal{A} - \mathcal{J}X_0$, равного $a_{11} - x_{11}^0$ в силу указанного разложения пространства $\mathfrak{X}$. Необходимо получить оценку x_{11}^0 матрицы оператора X_0. Для этого сначала преобразуем равенство (3):

$$
\begin{gathered}
\mathcal{A} + \mathcal{A}\Gamma X - \mathcal{B} - \mathcal{B}\Gamma X = \mathcal{A} - \mathcal{J}X + \Gamma X\mathcal{A} - \Gamma X\mathcal{J}X;\\
\mathcal{A}\Gamma X - \Gamma X\mathcal{A} - \mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{J}X + \Gamma X\mathcal{J}X - \mathcal{B} = 0;\\
X - \mathcal{J}X - \mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{J}X + \Gamma X\mathcal{J}X - \mathcal{B} = 0;\\
X = \mathcal{B}\Gamma X - \Gamma X\mathcal{J}X + \mathcal{B}. \qquad (4)
\end{gathered}
$$

Применим к уравнению (4) трансформатор $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}X = \mathcal{J}\mathcal{B}\Gamma X + \mathcal{J}\mathcal{B},$$

и подставим $\mathcal{J}X$ в уравнение (4). Учитывая, что $\mathcal{J}\mathcal{B} = 0$ получаем нелинейное уравнение

$$X = \mathcal{B}\Gamma X - \Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X) - \mathcal{B} = \Phi(X). \qquad (5)$$

Пусть P_1, P_2 – проекторы относительно разложения пространства $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$. Заметим, что $\forall X \in \operatorname{End}\mathfrak{X}$ выполняются следующие два равенства:

1. $\mathcal{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$;
2. $P_i(\Gamma X)P_j = \Gamma(P_iXP_j),\ i,j = 1,2,$ и $P_i(\Gamma X)P_i = 0,\ i = 1,2.$

Применим операторы P_1 и P_2 к обеим частям уравнения (5) и воспользуемся равенствами, приведенными выше.

1. Применим справа и слева проектор P_1:

$$
\begin{aligned}
P_1XP_1 &= P_1\mathcal{B}\Gamma XP_1 - P_1\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_1 - P_1\mathcal{B}P_1 =\\
&= P_1\mathcal{B}(P_1+P_2)\Gamma XP_1 - \Gamma P_1X(P_1\mathcal{B}\Gamma XP_1 + P_2\mathcal{B}\Gamma XP_2)P_1 - 0 =\\
&= 0 + \mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} - \Gamma P_1XP_1\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}P_1 = \mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21};\\
X_{11} &= \mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}, \qquad (6)
\end{aligned}
$$

где X_{11} – сужение оператора P_1XP_1 на пространство $\mathfrak{X}_1$ со значениями в $\mathfrak{X}_1$.

2. Применим справа проектор P_1, а слева P_2:

$$
\begin{gathered}
P_2XP_1 = P_2\mathcal{B}\Gamma XP_1 - P_2\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_1 - P_2\mathcal{B}P_1;\\
X_{21} = -(\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + \mathcal{B}_{21} = \Phi_1(X_{21}); \qquad (7)
\end{gathered}
$$

3. Применим справа и слева проектор P_2:

$$
\begin{gathered}
P_2XP_2 = P_2\mathcal{B}\Gamma XP_2 - P_2\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_2 - P_2\mathcal{B}P_2;\\
X_{22} = \mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}; \qquad (8)
\end{gathered}
$$

4. Применим справа проектор P_2, а слева P_1:

$$
\begin{gathered}
P_1XP_2 = P_1\mathcal{B}\Gamma XP_2 - P_1\Gamma X\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma X)P_2 - P_1\mathcal{B}P_2;\\
X_{12} = -(\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + \mathcal{B}_{12} = \Phi_2(X_{12}). \qquad (9)
\end{gathered}
$$

Получили четыре уравнения, причем уравнения (9) и (7) независимы от остальных уравнений. Разрешимость уравнения (5) будет доказана если, будет доказана разрешимость уравнений (9) и (7).

Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$\gamma \|\mathcal{B}\| < \frac{1}{2},$$

где $\gamma = \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|$, *тогда нелинейные уравнения* (9) *и* (7) *имеют единственные решения* X_{12}, X_{21} *в шаре с центром в точке* $\mathcal{B}$ *и радиусом* $\|\mathcal{B}\|$. X_{12} *и* X_{21} *можно найти методом простых итераций, если в качестве первого приближения взять* $X_{ij} = 0$.

Доказательство.

1. Рассмотрим уравнение Φ_1. Найдем такой шар с центром в точке $\mathcal{B}$, который отображение Φ_1 переводит сам в себя, т.е. если $\|X_{21} - \mathcal{B}\| < r\,\|\mathcal{B}\|$ (или $\|X_{21}\| < (r+1)\,\|\mathcal{B}\|$), то и $\|\Phi_1(X_{21}) - \mathcal{B}\| < r\,\|\mathcal{B}\|$.

$$\|\Phi_1(X_{21}) - \mathcal{B}\| \leq \| - (\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}\| \leq \gamma^2\|\mathcal{B}\|\ \|X_{21}\|^2 \leq \\ \leq \gamma^2\|\mathcal{B}\|^3(r+1)^2 \leq r\|\mathcal{B}\|.$$

Символом r' обозначим $r+1$. Получили квадратное уравнение относительно r':

$$r'^2\gamma^2\|\mathcal{B}\|^2 - r' + 1 \leq 0.$$

Пусть $\varepsilon = \gamma\|\mathcal{B}\|$, тогда:

$$\varepsilon^2 r'^2 - r' + 1 \leq 0, \\ \mathcal{D} = 1 - 4\varepsilon^2,$$

для существования корней необходимо выполнение условия $\mathcal{D} > 0$. Получаем квадратное неравенство относительно ε.

$$1 - 4\varepsilon^2 > 0 \\ \varepsilon = \frac{1}{2}, \varepsilon = -\frac{1}{2}.$$

Получаем, что $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$, т.е. $\varepsilon < \frac{1}{2}$ Найдем r' при условии, что $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$r' = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2} = 2.$$

Тогда получаем, что $r = 1$.

Проверим сжимаемость отображения Φ_1 в этом шаре:

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(X_{21}) - \Phi_1(Y_{21})\| &= \| - (\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma Y_{21}\| = \\ &= \| - (\Gamma X_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma Y_{21} - \\ &\quad - (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21} + (\Gamma Y_{21})\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}\| = \\ &= \| - (\Gamma(X_{21} - Y_{21}))\mathcal{J}(\mathcal{B}_{12}\Gamma X_{21}) - \\ &\quad - (\Gamma Y_{21})\mathcal{J}(\mathcal{B}_{12}\Gamma(X_{21} - Y_{21}))\| \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon^2(r+1)\|X_{21} - Y_{21}\| \end{aligned}$$

Возьмем $r = 1$. Покажем, что $2\varepsilon^2(r+1) < 1$.

$$4\varepsilon^2 < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Тогда получаем, что отображение Φ_1 переводит шар с центром в точке $\mathcal{B}$ и радиусом $2\|\mathcal{B}\|$ в себя и является на этом шаре сжимающим отображением, следовательно, существует внутри шара неподвижная точка отображения Φ_1 , являющаяся единственным решением уравнения (5) и ее можно найти по методу простых итераций, используя в качестве первого приближения нулевой оператор.

2. Проведем аналогичные рассуждения для уравнения Φ_2. Найдем такой шар с центром в точке $\mathcal{B}$, который отображение Φ_2 переводит сам в себя, т.е. если $\|X_{12} - \mathcal{B}\| < r\,\|\mathcal{B}\|$ (или $\|X_{12}\| < (r+1)\,\|\mathcal{B}\|$), то и $\|\Phi_2(X_{12}) - \mathcal{B}\| < r\,\|\mathcal{B}\|$.

$$\|\Phi_2(X_{12}) - \mathcal{B}\| \le \| - (\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}\| \le \gamma^2\|\mathcal{B}\|\,\|X_{12}\|^2 \le$$
$$\le \gamma^2\|\mathcal{B}\|^3(r+1)^2 \le r\|\mathcal{B}\|.$$

Символом r' обозначим $r+1$. Получили квадратное уравнение относительно r':

$$r'^2\gamma^2\|\mathcal{B}\|^2 - r' + 1 \le 0.$$

Пусть $\varepsilon = \gamma\|\mathcal{B}\|$, тогда:

$$\varepsilon^2 r'^2 - r' + 1 \le 0,$$
$$\mathcal{D} = 1 - 4\varepsilon^2,$$

для существования корней необходимо выполнение условия $\mathcal{D} > 0$. Получаем квадратное неравенство относительно ε.

$$1 - 4\varepsilon^2 > 0$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \varepsilon = -\frac{1}{2}.$$

Получаем, что $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$, т.е. $\varepsilon < \frac{1}{2}$ Найдем r' при условии, что $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$r' = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2} = 2.$$

Тогда получаем, что $r = 1$.

Проверим сжимаемость отображения Φ_2 в этом шаре:

$$\begin{aligned}\|\Phi_2(X_{12}) - \Phi_2(Y_{12})\| &= \| - (\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma Y_{12}\| = \\ &= \| - (\Gamma X_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma Y_{12} - \\ &\quad - (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12} + (\Gamma Y_{12})\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}\| = \\ &= \| - (\Gamma(X_{12} - Y_{12}))\mathcal{J}(\mathcal{B}_{21}\Gamma X_{12}) - \\ &\quad - (\Gamma Y_{12})\mathcal{J}(\mathcal{B}_{21}\Gamma(X_{12} - Y_{12}))\| \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon^2(r+1)\|X_{12} - Y_{12}\|\end{aligned}$$

Возьмем $r = 1$. Покажем, что $2\varepsilon^2(r+1) < 1$.

$$4\varepsilon^2 < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Тогда получаем, что отображение Φ_2 переводит шар с центром в точке $\mathcal{B}$ и радиусом $2\|\mathcal{B}\|$ в себя и является на этом шаре сжимающим отображением, следовательно, существует внутри шара неподвижная точка отображения Φ_2 , являющаяся единственным решением уравнения (5) и ее можно найти по методу простых итераций, используя в качестве первого приближения нулевой оператор.

Теорема доказана.

Найдя X_{21} и X_{12}, подставим их в уравнения (6) и (8) соответственно, получим X_{11} и X_{22}. Отсюда следует, что уравнение (5) разрешимо, и его решение находиться по формуле:

$$X_0 = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Искомую оценку элемента x_{11} оператора X, являющегося решением нелинейного уравнения (5) мы получим, получив оценку $\|X_{11}\|$. Для оценки $\|X_{11}\|$ в свою очередь требуется оценка $\|X_{21}\|$ и разрешимость уравнения (7). Потому сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$d = 2\gamma^2(b_{12}b_{21})^{\frac{1}{2}} < 1, \tag{10}$$

а также выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда для нелинейных уравнений (6) - (7) *имеют место следующие оценки:*

$$\|X_{11} - B_{11}\| \leq \frac{2\gamma b_{12}b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}} \qquad \|X_{21}\| \leq \frac{2b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21}b_{12})^{\frac{1}{2}}},$$

где $\|B_{ij}\| = b_{ij},\ i, j = 1, 2.$

Доказательство.

Рассмотрим оператор $\Phi_1(X_{21})$, определяемый уравнением (7). Найдем шар $B(r') = \{X \in \mathfrak{X}_{21} : \|X\| < r' \|B_{21}\|\}$ из пространства $\mathfrak{X}_{21}$, который оператор $\Phi_1(X_{21})$ переводит в себя, т. е. $\|\Phi_1(X_{21})\| \leq r' \|B_{21}\|$ для любого $X \in B(r')$. Обозначим $r' = r + 1$.

$$\begin{aligned} &\|\Phi_1(X_{21})\| = -(\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} + B_{21} \leq \\ &\leq \gamma^2 b_{12} \|X_{21}\|^2 + b_{21} \leq \\ &\leq \gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r'^2 + b_{21} \leq b_{21} r' \end{aligned}$$

Получаем неравенство:

$$\gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r'^2 - r' + 1 \leq 0.$$

Покажем что квадратное уравнение относительно r'

$$\gamma^2 b_{21}^2 b_{12} r'^2 - r' + 1 = 0$$

имеет хотя бы один действительный положительный корень. Воспользуемся тем, что $\gamma \|B\| < \frac{1}{2}$ и $b_{ij} \leq \|B\|$.

$$D = 1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12};$$

$$1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12} > 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Получаем, что

$$r'_{1,2} = \frac{1 \pm (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}}$$

Рассмотрим решение $r' = \frac{1-(1-4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}}$, докажем, что оно больше нуля.

$$\frac{1 - (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 b_{21} b_{12}} = \frac{2}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}} > 0$$

Получаем, что в качестве радиуса шара можно взять число

$$r' b_{21} = \frac{2b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}.$$

Для любой пары операторов Y_1, Y_2 из шара $B(r')$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_1(Y_1) - \Phi_1(Y_2)\| = \| - (\Gamma Y_1) B_{12} \Gamma Y_1 + B_{21} + \\
&+ (\Gamma Y_2) B_{12} \Gamma Y_2 - B_{21}\| \leq (\gamma^2 b_{12}(\|Y_1\| + \\
&+ \|Y_2\|)) \|Y_1 - Y_2\| \leq (\frac{2\gamma^2 (b_{12} b_{21})^{\frac{1}{2}}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}) \|Y_1 - Y_2\| \leq d \|Y_1 - Y_2\|.
\end{aligned}$$

Из условия (10) следует, что оператор Φ_1 является оператором сжатия в шаре $B(r')$. Тогда уравнение (7) имеет единственное решение X_{21} в этом шаре, которое можно найти методом простых итераций. Так как X_{21} принадлежит шару $B(r')$, то справедливо неравенство

$$\|X_{11} - B_{11}\| = \|B_{12} \Gamma X_{21}\| \leq \gamma b_{12} \|X_{21}\| \leq \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема доказана.

Таким образом получена оценка собственного значения $|x_{11}^0|$:

$$|x_{11}^0| = \|X_{11}\| \leq \frac{2\gamma b_{12} b_{21}}{1 + (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2\gamma} - \frac{1 - (1 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{\frac{1}{2}}}{4\gamma^2 b_{21} b_{12}},$$

где $\gamma = \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|, b_{ij} = \|B_{ij}\|, i, j = 1, 2.$