ЖОРДАНОВА ФОРМА ДЛЯ СОПРОВОЖДАЮЩИХ МАТРИЦ

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} = \alpha_1 x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n x,$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,n}$. Данное уравнение обычным способом сводится к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = Ay,$$

где матрица оператора $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

а $f(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1\lambda^{n-1} - \ldots - \alpha_n, \lambda \in \mathbb{C}$ – характеристический многочлен этой матрицы.

Теорема 1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ кратностей $k_1, \ldots, k_m$ соответственно, где $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$. Тогда жорданова форма для матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:*

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathcal{J}_m \end{pmatrix}, \textit{где } \mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_m),$$

где матрицы $\mathcal{U}_i, i = 1 \ldots m$ имеют вид

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \ldots & \prod_{k=1}^{k_i-1}(n-k)\lambda_i^{n-k_i} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть λ_i - собственное значение матрицы $\mathcal{A}$ кратности k_i. Найдем соответствующие ему собственный и присоединенные векторы матрицы.

$$\mathcal{A}-\lambda_i I=\begin{pmatrix}-\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -\lambda_i & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1-\lambda_i\end{pmatrix}.$$

Пусть $x^i \in \mathbb{C}^n$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i. Тогда справедливо равенство

$$(\mathcal{A}-\lambda_i I)\,x^i=0, \tag{1}$$

где $x^i=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Пусть $x_1=1$. Тогда равенство (1) эквивалентно системе:

$$\begin{cases}-\lambda_i+x_2=0,\\ -\lambda_i x_2+x_3=0,\\ \dots\\ -\lambda_i x_{n-2}+x_{n-1}=0,\\ \alpha_n+\alpha_{n-1}x_2+\dots+(\alpha_1-\lambda_i)x_n=0.\end{cases} \tag{2}$$

Решив систему (2), получим $x_2=\lambda_i, x_3=\lambda_i^2,\dots,x_{n-1}=\lambda_i^{n-2}$, а число x_n однозначно определяется из последнего уравнения системы (2) и оно равно λ_i^{n-1}. Таким образом, получено, что собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i, имеет вид

$$x^i=\left(1,\lambda_i,\lambda_i^2,\dots,\lambda_i^{n-1}\right).$$

Пусть $k_i\neq 1$. Найдем присоединенные векторы.

Пусть $y_j^i\in\mathbb{C}^n,\ 1\le j\le k_i-1$ - присоединенные векторы, отвечающие собственному значению λ_i. Первый присоединенный вектор y_1^i есть решение уравнения

$$(\mathcal{A}-\lambda_i I)\,y_1^i=x^i, \tag{3}$$

где $y_1^i=\left(y_1^{(1)},y_2^{(1)},\dots,y_n^{(1)}\right)$, x^i - собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_i. Пусть $y_1^{(1)}=0$. Тогда равенство (3) эквивалентно системе:

$$\begin{cases}y_2^{(1)}=1,\\ -\lambda_i y_2^{(1)}+y_3^{(1)}=\lambda_i,\\ \dots\\ -\lambda_i y_{n-2}^{(1)}+y_{n-1}^{(1)}=\lambda_i^{n-2},\\ \alpha_{n-1}y_2^{(1)}+\alpha_{n-2}y_3^{(1)}\dots+(\alpha_1-\lambda_i^{n-1})y_n^{(1)}=\lambda_i^{n-1}.\end{cases} \tag{4}$$

Решив систему (4), получим

$$y_1^i=\left(0,1,2\lambda_i,3\lambda_i^2,\dots,(n-1)\lambda_i^{n-2}\right).$$

Покажем, что найденный y_1^i удовлетворяет системе (4). Очевидно, что первые $n-1$ уравнений справеливы, покажем, что справедливо последнее:

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1}+2\alpha_{n-2}\lambda_i+\dots+(\alpha_1-\lambda_i)(n-1)\lambda_i^{n-2}=\lambda_i^{n-1},\\ \alpha_{n-1}+2\alpha_{n-2}\lambda_i+\dots+\alpha_1(n-1)\lambda_i^{n-2}-n\lambda_i^{n-1}+\lambda_i^{n-1}=\lambda_i^{n-1},\\ \alpha_{n-1}+2\alpha_{n-2}\lambda_i+\dots+\alpha_1(n-1)\lambda_i^{n-2}-n\lambda_i^{n-1}=0.\end{aligned}$$

Ясно, что $P'(\lambda_i) = 0$, так как λ_i - корень многочлена P кратности $k_i \neq 1$. Если $k_i \geqslant 2$, тогда в силу равенства нулю любой производной до $k_i - 1$ порядка многочлена P в точке λ_i, можно показать, что

$$y_p^i = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{p}}, p!, (p+1)!\lambda_i, \ldots, \prod_{k=1}^{p} (n-k)\lambda_i^{n-p-1} \right).$$

Таким образом, доказано что матрица $\mathcal{U}$ составлена из собственных и присоединенных векторов. Поэтому $det(\mathcal{U}) \neq 0$, и, следовательно, матрица $\mathcal{U}$ является матрицей перехода к жордановой форме и имеет вид

$$\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_m),$$

где матрицы $\mathcal{U}_i, i = 1 \ldots m$ имеют вид

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{n-1} & (n-1)\lambda_i^{n-2} & \ldots & \prod_{k=1}^{k_i-1}(n-k)\lambda_i^{n-k_i} \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Приведем примеры матрицы $\mathcal{U}$ для двух частных случаев.
Пусть все собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ различны. Тогда матрица $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Она является матрицей Вандермонда.
Пусть кратность единственного собственного значения λ_0 равна n. Тогда матрица $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{n-1} & (n-1)\lambda_0^{n-2} & (n-1)(n-2)\lambda_0^{n-3} & \ldots & (n-1)! \end{pmatrix}.$$

В качестве примера рассмотрим частный случай $n = 3$. Тогда матрица $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Возможны три варианта:
1) все собственные значения различны;

2) собственные значения λ_1, λ_2 имеют кратности $k_1 = 2,\ k_2 = 1$ (либо наоборот);
3) матрица $\mathcal{A}$ имеет одно собственное значение λ_0;

Рассмотрим первый случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ кратностей $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ соответственно. Оператор A имеет простую структуру. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Далее запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$.
Рассмотрим проекторы $\mathcal{P}_i'$ жордановой матрицы $\mathcal{J}$ оператора A, которые имеют вид:

$$\mathcal{P}_i' = \left(p_{jk}'\right),$$

$$p_{jk}' = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k = i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.
Теперь запишем проекторы оператора A:

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{U}\mathcal{P}_i'\mathcal{U}^{-1},$$

где $i \in \{1, 2, 3\}$.
Найдем проектор $\mathcal{P}_1$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_1\left(\lambda_2^2 - \lambda_3^2\right) & \lambda_1\left(\lambda_3 - \lambda_2\right) \\ \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_1^2\left(\lambda_2^2 - \lambda_3^2\right) & \lambda_1^2\left(\lambda_3 - \lambda_2\right) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$.
Найдем проектор $\mathcal{P}_2$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_2(\lambda_3^2-\lambda_1^2) & \lambda_2(\lambda_1-\lambda_3) \\ \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_2^2(\lambda_3^2-\lambda_1^2) & \lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_3) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)$.
Найдем проектор $\mathcal{P}_3$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_2^2-\lambda_3^2 & \lambda_3-\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_3(\lambda_1-\lambda_3) & \lambda_3^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_1^2-\lambda_2^2 & \lambda_2-\lambda_1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_3(\lambda_1^2-\lambda_2^2) & \lambda_3(\lambda_2-\lambda_1) \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2(\lambda_2-\lambda_1) & \lambda_3^2(\lambda_1^2-\lambda_2^2) & \lambda_3^2(\lambda_2-\lambda_1) \end{pmatrix},$$

где $\Delta = (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)$.

Тогда по теореме о спектральном разложении оператора простой структуры [2]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \lambda_3\mathcal{P}_3$$

Рассмотрим второй случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2$ которые имеют кратности $k_1 = 2,\ k_2 = 1$ соответственно. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2-\lambda_1^2 & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det\mathcal{U} = (\lambda_1-\lambda_2)^2$.
Рассмотрим проекторы $\mathcal{P}'_i, i \in \{1,2\}$ жордановой матрицы $\mathcal{J}$ оператора A и её нильпотентную часть $\mathcal{Q}'$.

$$\mathcal{P}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{P}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь запишем проекторы оператора A и нильпотентную часть жордановой матрицы:

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{U}\mathcal{P}_i'\mathcal{U}^{-1},$$
$$\mathcal{Q} = \mathcal{U}\mathcal{Q}'\mathcal{U}^{-1},$$

где $i \in \{1,2\}$.
Найдем проектор $\mathcal{P}_1$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ -\lambda_1^2\lambda_2 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & -\lambda_2 \\ -\lambda_1^2\lambda_2^2 & 2\lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_1^2 - 1\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Найдем проектор $\mathcal{P}_2$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 & -2\lambda_1\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2\lambda_2^2 & -2\lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

Найдем нильпотентную часть жордановой матрицы $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2) & \lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) & \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \lambda_1^2(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2) & \lambda_1^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) & \lambda_1^2(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix}$$

Тогда по теореме о спектральном разложении линейного оператора [2]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \mathcal{Q}.$$

Рассмотрим третий случай. Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет одно собственное значение λ кратности $k = 3$. Тогда жорданова форма матрицы $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода $\mathcal{U}$ и обратную к ней $\mathcal{U}^{-1}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 & -\lambda & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Спектральное разложение для этого случая очевидно.

Литература

1. *Боровских А.В., Перов А.И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2004, 540 стр

2. *Баскаков А. Г.* Лекции по алгебре // Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013, 159 стр