

Определение 1. Два линейных оператора $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, i = 1, 2$ (\mathcal{X} – банахово пространство) называются подобными, если существует обратимый оператор $\mathcal{U} \in \text{End } \mathcal{X}$, такой что $\mathcal{U}D(A_2) = D(A_1)$ и $A_1\mathcal{U}x = \mathcal{U}A_2x \forall x \in D(A_2)$. Оператор \mathcal{U} назовем оператором преобразования оператора A_1 в A_2 .

Символом \mathcal{A} будем обозначать невозмущенный линейный оператор ($A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$), хорошо изученный с точки зрения интересующих нас структурных свойств. Оператор $B: D(B) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ называется подчиненным оператору A , если $D(B) \supset D(A)$ и существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Bx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|) \forall x \in D(A)$. Множество операторов, подчиненных оператору A , обозначим символом $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$.

Поскольку областью определения возмущенного оператора вида $A + B$, $B \in \mathcal{L}_A(\mathcal{X})$, является область определения $D(A)$ оператора A , то будем далее всюду считать, что $D(B) = D(A) \forall B \in \mathcal{L}_A(\mathcal{X})$. Такая договоренность позволяет рассматривать $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ как линейное пространство. Более того, $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ можно нормировать, если положить $\|B\|_A = \inf C$, где инфимум берется по всем постоянным $C > 0$, удовлетворяющим записанному выше неравенству. Нетрудно видеть, что $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ – банахово пространство. Символами $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначается соответственно спектр и резольвентное множество оператора A .

Определение 2. Пусть \mathfrak{U} – линейное многообразие операторов из \mathcal{L}_A и $\mathcal{J}: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, \Gamma: \text{End } \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{U}$ – два трансформатора (т.е. линейные операторы в пространстве операторов). Тройку $(\mathfrak{U}, \mathcal{J}, \Gamma)$ назовем допустимой для оператора A , а \mathfrak{U} – допустимым пространством возмущений, если

1. \mathfrak{U} – банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|$), непрерывно вложенное в $\mathcal{L}_A(\mathcal{X})$ (т.е. $\|X\| \geq \text{const}\|X\|_A \forall X \in \mathfrak{U}$);
2. \mathcal{J} и Γ – непрерывные операторы;
3. $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и $A\Gamma X - \Gamma XA = X - \mathcal{J}X \forall X \in \mathfrak{U}$;
4. $(\Gamma X)Y, X\Gamma Y \in \mathfrak{U} \forall X, Y \in \mathfrak{U}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \leq \gamma$ и $\max\{\|X\Gamma Y\|, \|(\Gamma X)Y\|\} \leq \gamma\|X\|\|Y\| \forall X, Y \in \mathfrak{U}$;
5. \mathcal{J} – проектор и $\mathcal{J}((\Gamma X)\mathcal{J}Y) = 0 \forall X, Y \in \mathfrak{U}$;
6. $\forall X \in \mathfrak{U} \forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 \in \rho(A)$, что $\|X(A - \lambda_0 I) - 1\|_\infty < \varepsilon$.

Пусть $(\mathfrak{U}, \mathcal{J}, \Gamma)$ – допустимая для оператора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ тройка и $B \in \mathfrak{U}$ – возмущение оператора A . Будем искать такой оператор $X_0 \in \mathfrak{U}$, чтобы выполнялось равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(A - \mathcal{J}X_0), \quad (1)$$

которое при условии $\|\Gamma X_0\|_\infty < 1$ (влекущего обратимость оператора $U = I + \Gamma X_0$) означает подобие операторов $A - B$ и $A - \mathcal{J}X_0$. Нетрудно проверить, что равенство (1) имеет место, если X_0 – решение нелинейного уравнения вида

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)\mathcal{J}B - (\Gamma X)\mathcal{J}(B\Gamma X) + B = \Phi(X), \quad (2)$$

рассматриваемого в банаховом пространстве \mathfrak{U} допустимый возмущений. Из метода сжимающих отображений, примененного к нелинейному оператору

$\Phi: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ (корректность его определения следует из определения допустимой тройки), получаем, что имеет место

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$\gamma \|B\| \|\mathcal{J}\| < \frac{1}{4}, \quad (3)$$

то уравнение (2) имеет решение X_0 , для которого выполнено равенство (1), причем оператор $I + \Gamma X_0$ обратим.

Замечание 1. Построение трансформатора Γ обычно осуществляется с помощью трансформатора $ad_A: D(ad_A) \subset \text{End } \mathcal{X} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ с областью определения $D(ad_A)$, состоящих из таких операторов $X_0 \in \text{End } \mathcal{X}$, которые переводят $D(A)$ в $D(A)$, и оператор $AX_0 - X_0A: D(A) \rightarrow \mathcal{X}$ допускает единственное расширение с $D(A)$ до некоторого оператора $Y_0 \in \text{End } \mathcal{X}$ (и тогда полагается $Y_0 = ad_A X_0$).

Теоремы о расщеплении рассматриваемых здесь дифференциальных операторов получены с помощью выбора специальных допустимых троек, которые строятся в предположении существования разложения банахова пространства \mathcal{X} в прямую сумму $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ инвариантных относительно не возмущенного оператора $A: D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ подпространств \mathcal{X}_1 и \mathcal{X}_2 , причем множества $\sigma_i = \sigma(A_i)$, $i = 1, 2$, взаимно не пересекаются ($A_i = A|_{\mathcal{X}_i}$, $i = 1, 2$, – сужение A на \mathcal{X}_i , и будем писать $A = A_1 \oplus A_2$).

Пусть \mathcal{P}_i , $i = 1, 2$, – проекторы, ассоциированные с указанным разложением пространства \mathcal{X} , т.е. $\mathcal{X}_i = \text{Im } \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2$. Отметим, что если одно из множеств σ_i , $i = 1, 2$, компактно, то $\mathcal{P}_i = P(\sigma_i, A)$, $i = 1, 2$, – проекторы Рисса, построенные по спектральным множествам σ_i , $i = 1, 2$.

Определение 3. Допустимая для оператора A тройка $(\mathfrak{U}, \mathcal{J}, \Gamma)$ называется допустимой тройкой теории расщепления операторов, если выполнены следующие свойства:

1. $\mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j \in \mathfrak{U}$, $i, j = 1, 2$, для любого $X \in \mathfrak{U}$, и трансформатор \mathcal{J} имеет вид $\mathcal{J}X = \mathcal{P}_1 X \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 X \mathcal{P}_2$, $X \in \mathfrak{U}$;
2. $\mathcal{P}_i(\Gamma X) \mathcal{P}_j = \Gamma(\mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j)$, $i, j = 1, 2$ для любого $X \in \mathfrak{U}$, причем $\mathcal{P}_i(\Gamma X) \mathcal{P}_i = 0$, $i = 1, 2$.

Рассматриваемые нами допустимые тройки для оператора A удовлетворяют свойствам из определения 3. Это позволяет представить допустимое пространство \mathfrak{U} в виде прямой суммы $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{11} \oplus \mathfrak{U}_{12} \oplus \mathfrak{U}_{21} \oplus \mathfrak{U}_{22}$ подпространств $\mathfrak{U}_{ij} = \{\mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j: X \in \mathfrak{U}\}$, $i, j = 1, 2$. Символом X_{ij} будем обозначать оператор (операторный блок) $\mathcal{P}_i X \mathcal{P}_j$ из \mathfrak{U}_{ij} , $i, j = 1, 2$, так что $X = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)X(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}$, $X \in \mathfrak{U}$.

Применяя к обеим частям уравнения (2) операторы \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 (справа и слева) и используя условие 2 из определения 3, получаем следующую систему уравнений для блоков X_{ij} , $i, j = 1, 2$, оператора $X \in \mathfrak{U}$:

$$X_{11} = B_{12} \Gamma X_{21} + B_{11}, \quad (4)$$

$$X_{21} = B_{22} \Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21}) B_{11} - (\Gamma X_{21}) B_{12} \Gamma X_{21} + B_{21} = \Phi(X_{21}), \quad (5)$$

$$X_{12} = B_{11} \Gamma X_{12} - (\Gamma X_{12}) B_{22} - (\Gamma X_{12}) B_{21} \Gamma X_{12} + B_{12} = \Phi(X_{12}), \quad (6)$$

$$X_{22} = B_{21} \Gamma X_{12} + B_{22}. \quad (7)$$

Важно отметить, что уравнения (5) и (6) независимы от остальных уравнений и рассматриваются соответственно в подпространствах \mathfrak{U}_{21} и \mathfrak{U}_{12} . Условия их разрешимости, и, следовательно, также и уравнений (4), (7), удобно формулировать, используя следующие величины: $b_{ij} = \|B_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$, \tilde{b}_{12} , \tilde{b}_{21} – нормы операторов $X \mapsto B_{12}\Gamma X: \mathfrak{U}_{12} \rightarrow \mathfrak{U}_{12}$, $X \mapsto B_{21}\Gamma X: \mathfrak{U}_{21} \rightarrow \mathfrak{U}_{21}$ соответственно и \tilde{b}_{22} – наибольшая из норм операторов $X \mapsto (\Gamma X)B_{22}: \mathfrak{U}_{12} \rightarrow \mathfrak{U}_{12}$, $X \mapsto B_{22}\Gamma X: \mathfrak{U}_{21} \rightarrow \mathfrak{U}_{21}$. Отметим, что $\tilde{b}_{12} \leq \gamma b_{12}$, $\tilde{b}_{21} \leq \gamma b_{21}$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие

$$d = \gamma b_{11} + \tilde{b}_{22} + 2\gamma(b_{12}b_{21})^{1/2} < 1. \quad (8)$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору вида

$$A - \mathcal{P}_1 X \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 X \mathcal{P}_2 = A - X_{11} - X_{22},$$