

Заголовок статьи

И. Н. Нестеров, С. В. Клочков, А. С. Чурсанова

1 Введение

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} = \alpha_1 x^{(n-1)} + \dots + \alpha_n,$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}$. Данное уравнение обычным способом сводится к системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = Ay,$$

где матрица оператора A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix},$$

а $f(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \dots - \alpha_n, \lambda \in \mathbb{C}$ — характеристический многочлен этой матрицы.

2 Теорема

Теорема 1. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ собственные значения матрицы A кратностей k_1, \dots, k_m соответственно. Тогда жорданова форма для матрицы A имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{J}_m \end{pmatrix}, \text{ где } \mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Векторами столбцами матрицы перехода являются собственные и присоединенные векторы, где собственные векторы имеют вид:

$$x^i = (1, \lambda_i, \dots, \lambda_i^{n-1}), 1 \leq i \leq m,$$

а присоединенные:

$$y_i^j = (1^{(j)}, \lambda_i^{(j)}, \dots, (\lambda_i^{n-1})^{(j)}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i.$$

3 Пример

Для примера рассмотрим частный случай $n = 3$. Тогда матрица \mathcal{A} имеет вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Возможны три варианта:

1. все собственные значения различны;
2. есть собственные значения λ_1, λ_2 , которые имеют кратности $k_1 = 2, k_2 = 1$ соответственно;
3. все собственные значения одинаковы;

Рассмотрим первый случай. Пусть матрица \mathcal{A} имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ которые имеют кратности $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ соответственно. Оператор A имеет простую структуру. Тогда жорданова форма матрицы \mathcal{A} имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Далее запишем матрицу перехода \mathcal{U} и обратную к ней \mathcal{U}^{-1} :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3) & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Теперь запишем проекторы оператора A :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{U} \mathcal{J} \mathcal{U}^{-1}, \\ \mathcal{P}_i &= \mathcal{U} \mathcal{P}'_i \mathcal{U}^{-1}, \\ \mathcal{P}'_i &= (p'_{jk}), \\ p'_{jk} &= \begin{cases} 1, & \text{если } j = k = i; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, и \mathcal{P}'_i — проекторы жордановой матрицы \mathcal{J} оператора A . Тогда по теореме о спектральном разложении оператора простой структуры [1]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \lambda_3 \mathcal{P}_3$$

Рассмотрим второй случай. Пусть матрица \mathcal{A} имеет собственные значения λ_1, λ_2 которые имеют кратности $k_1 = 2, k_2 = 1$ соответственно. Тогда жорданова форма матрицы \mathcal{A} имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода \mathcal{U} и обратную к ней \mathcal{U}^{-1} :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 & 2\lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & -2\lambda_1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$.

Для спектрального разложения найдем проекторы и нильпотентную часть оператора A :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^{-1}, \\ \mathcal{P}_i &= \mathcal{U}\mathcal{P}'_i\mathcal{U}^{-1}, \\ \mathcal{P}'_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Q} &= \mathcal{U}\mathcal{Q}'\mathcal{U}^{-1}, \\ \mathcal{Q}' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где $i \in \{1, 2\}$, и $\mathcal{P}'_i, \mathcal{Q}'$ — проекторы жордановой матрицы \mathcal{J} оператора A и её нильпотентная часть соответственно. Тогда по теореме о спектральном разложении линейного оператора [1]:

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \mathcal{Q}$$

И наконец последний случай. Пусть матрица A имеет одно собственное значение λ кратности $k = 3$. Тогда жорданова форма матрицы A имеет вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода \mathcal{U} и обратную к ней \mathcal{U}^{-1} :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 & -\lambda & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det \mathcal{U} = 2$.

Спектральное разложение для этого случая очевидно.

Список литературы

- [1] Г. Баскаков А. Лекции по алгебре. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. — 159 с.