УДК 517.984.3

ОЦЕНКА СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

И. Н. Нестеров

Воронежский государственный университет

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathbb{A} \in \operatorname{End}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ банахово пространство, являющееся прямой суммой $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$ двух замкнутых подпространств $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$, и $\operatorname{End}\mathfrak{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов. Предполагается, что оператор $\mathbb{A}$ задается операторной матрицей

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix},$$

т.е. $\mathbb{A}x = (Ax_1 + Cx_2, Dx_1 + Bx_2)$, где $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in \mathfrak{X}_1,\ x_2 \in \mathfrak{X}_2$. Здесь и далее будем отождествлять матрицу оператора, действующего в $\operatorname{End} X$ с оператором, который определяется этой матрицей. Отметим, что

$$\begin{gathered} A \in \operatorname{End}\mathfrak{X}_1,\ C \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_1), \\ B \in \operatorname{End}\mathfrak{X}_2,\ D \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2). \end{gathered}$$

Представим оператор $\mathbb{A}$ в виде

$$\mathbb{A} = \Lambda - \mathfrak{B},$$

где оператор $\Lambda \in \operatorname{End}\mathfrak{X}$ задается матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, а оператор $\mathfrak{B} \in \operatorname{End}\mathfrak{X}$ – матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -C \\ -D & 0 \end{pmatrix}$. Всюду далее считаем что выполняется условие:

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing.$$

Символом $\mathfrak{U}$ обозначим пространство $\operatorname{End}\mathfrak{X}$. Рассмотрим канонические проекторы

$$P_1x = x_1,\ P_2x = x_2,\ x = x_1 + x_2 \in \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2,\ x_1 \in \mathfrak{X}_1,\ x_2 \in \mathfrak{X}_2.$$

Ясно, что $P_1 + P_2 = I$, $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$. Для любого оператора $X \in \mathfrak{U}$ будем рассматривать операторы $P_iXP_j \in \mathfrak{U},\ i, j \in 1, 2$. Таким образом, оператор X задается матрицей:

$$X \sim \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

где оператор X_{ij} – сужение оператора P_iXP_j на подпространство $\mathfrak{X}_j$ с областью значений $\mathfrak{X}_i, i, j \in 1, 2$. Также далее будут рассматриваться сужения $\mathfrak{B}_{11} = 0$, $\mathfrak{B}_{22} = 0$, $\mathfrak{B}_{12} = -C$ и $\mathfrak{B}_{21} = -D$ оператора $\mathfrak{B}$.

В соответствии с заданным разложением пространства $\mathfrak{X}$ будем рассматривать два трансформатора: $\mathrm{J} \in \operatorname{End}\mathfrak{U}, \Gamma \in \operatorname{End}\mathfrak{U}$, таких что:

1. Для любого $X \in \mathfrak{U}$ оператор $\mathrm{J}X$ определяется следующим образом: $\mathrm{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$, а матрица оператора $\mathrm{J}X$ имеет вид:

$$\mathrm{J}X \sim \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix};$$

2. Трансформатор $\Gamma \in \operatorname{End}\mathfrak{U}$ построим следующим образом. Оператор ΓX, где $X \in \mathfrak{U}$ определим как решение $Y \in \operatorname{End}\mathfrak{U}$ уравнения

$$\Lambda Y - Y\Lambda = X - \mathrm{J}X, \qquad \forall X \in \mathfrak{U}, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию $\mathrm{J}Y = 0$, кроме того можно показать, что решение Y существует и единственно.

Далее считается, что $\dim \mathfrak{X}_1 = 1$, следовательно, оператор A имеет вид $A = \alpha I$. Несложно показать, что в таком случае имеет место следующая оценка трансформатора Γ

$$\|\Gamma\| \leqslant \gamma = \left\|(\alpha I - B)^{-1}\right\|. \tag{2}$$

Будем искать такой оператор $X_0 \in \mathfrak{U}$, чтобы выполнялось равенство

$$(\Lambda - \mathfrak{B})(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(\Lambda - \mathrm{J}X_0). \tag{3}$$

При условии $\|\Gamma X_0\| < 1$ (тогда оператор $I + \Gamma X_0$ обратим) равенство (3) означает подобие операторов $\Lambda - \mathfrak{B}$ и $\Lambda - \mathrm{J}X_0$. Таким образом задача оценки собственного значения возмущенного оператора $\Lambda - \mathfrak{B}$ сводится к задаче оценки собственного значения оператора $\Lambda - \mathrm{J}X_0$, равного $\alpha - x_{11}^0$ в силу указанного разложения пространства $\mathfrak{X}$. Необходимо получить оценку x_{11}^0 матрицы оператора X_0. После преобразования равенства (3) получаем:

$$X = \mathfrak{B}\Gamma X - \Gamma X \mathrm{J}X + \mathfrak{B}. \tag{4}$$

Применим к уравнению (4) трансформатор J, и, учитывая равенство

$$\mathrm{J}((\Gamma X)(\mathrm{J}X)) = 0,$$

получим, что

$$\mathrm{J}X = \mathrm{J}(\mathfrak{B}\Gamma X) + \mathrm{J}\mathfrak{B},$$

и подставим $\mathrm{J}X$ в уравнение (4). Учитывая, что $\mathrm{J}\mathfrak{B} = 0$ получаем нелинейное уравнение

$$X = \mathfrak{B}\Gamma X - \Gamma X \mathrm{J}(\mathfrak{B}\Gamma X) - \mathfrak{B} = \Phi(X). \tag{5}$$

Пусть P_1, P_2 – проекторы относительно разложения пространства $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$, т.е. $\mathfrak{X}_1 = \operatorname{Im} P_1$, $\mathfrak{X}_1 = \operatorname{Im} P_2$. Заметим, что $\forall X \in \operatorname{End}\mathfrak{X}$ выполняются следующие два равенства:

1. $\mathrm{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$;

2. $P_i(\Gamma X)P_j = \Gamma(P_iXP_j),\ i,j = 1,2$, и $P_i(\Gamma X)P_i = 0,\ i = 1,2$.

Применим операторы P_1 и P_2 к обеим частям уравнения (5) и воспользуемся равенствами, приведенными выше. Получаем:

$$X_{11} = -C\Gamma X_{21}, \tag{6}$$
$$X_{21} = (\Gamma X_{21})C\Gamma X_{21} - D = \Phi_1(X_{21}), \tag{7}$$
$$X_{22} = -D\Gamma X_{12}, \tag{8}$$
$$X_{12} = (\Gamma X_{12})D\Gamma X_{12} - C = \Phi_2(X_{12}), \tag{9}$$

Получили четыре уравнения, причем уравнения (7) и (9) независимы от остальных уравнений. Разрешимость уравнения (5) будет доказана если, будет доказана разрешимость уравнений (7) и (9).

Теорема 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$\gamma \max(\|C\|, \|D\|) < \frac{1}{2} \tag{10}$$

где $\gamma = \|(\alpha I - B)^{-1}\|$ *, тогда нелинейные уравнения* (7) *и* (9) *имеют единственные решения* X_{12}^0, X_{21}^0 *в шарах с центрами в точках* $-C$ *и* $-D$*, радиусами* $\|C\|$ *и* $\|D\|$ *соответственно.* X_{12}^0 *и* X_{21}^0 *можно найти методом простых итераций.*

Найдя X_{21}^0 и X_{12}^0, подставим их в уравнения (6) и (8) соответственно, получим X_{11}^0 и X_{22}^0. Отсюда следует, что уравнение (5) разрешимо, и его решение можно записать в виде:

$$X_0 \sim \begin{pmatrix} X_{11}^0 & X_{12}^0 \\ X_{21}^0 & X_{22}^0 \end{pmatrix}.$$

Искомую оценку элемента x_{11} оператора X, являющегося решением
нелинейного уравнения (5) мы получим, получив оценку $\|X_{11}\|$. Для оценки $\|X_{11}\|$ в свою очередь требуется оценка $\|X_{21}\|$ и разрешимость уравнения (7). Потому сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда для нелинейных уравнений* (6) - (7) *имеют место следующие оценки:*

$$\|X_{11}^0\| \le \frac{1 - (1 - 4\gamma^2 \|D\| \|C\|)^{\frac{1}{2}}}{2\gamma}, \qquad \|X_{21}^0\| \le \frac{1 - (1 - 4\gamma^2 \|D\| \|C\|)^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2 \|C\|}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы . Тогда оператор* $\mathbb{A}$ *имеет собственное значение* $\lambda_1^0 = \alpha - x_{11}^0$*, где* x_{11}^0 *определяется из* $X_{11}^0 x_1 = x_{11}^0 x_1$*,* $x_1 \in \mathfrak{X}_1$*, причем имеет место оценка:*

$$|x_{11}^0| = \|X_{11}^0\| \le \frac{1 - (1 - 4\gamma^2 \|D\| \|C\|)^{\frac{1}{2}}}{2\gamma} \le \frac{1}{2\gamma},$$

где $\gamma = \|(\alpha I - B)^{-1}\|$.

Литература

1.*Баскаков А. Г.* Расщепление возмущенного дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами // Фундаментальная и прикладная математика. – 2002. – Т. 8, № 1. – С. 4–7.

2. *Баскаков А. Г.* Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений. // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – Т. 50, № 3. – С. 435–457.

2. *Баскаков А. Г.* Метод подобных операторов и формулы регуляризованных следов. // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 3. – С. 3–12.