МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Воронеж, 2014 г.

Пусть дана матрица $\mathcal{A} \in Matr_n(\mathbb{C})$ с преобладанием диагональных элементов.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $i, j = 1 \dots n, a_{ii} \neq a_{jj} \forall i \neq j$. Представим матрицу $\mathcal{A}$ в виде $\mathcal{A} = \Lambda - \mathcal{B}$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу Λ назовем *невозмущенной* матрицей, её собственными значениями являются числа $a_{11}, \dots, a_{nn}$, а собственными векторами - стандартный базис $\vec{e_1} = \{1, 0, \dots, 0\}, \dots, \vec{e_n} = \{0, 0, \dots, 1\}$. Матрицу $\mathcal{B}$ далее будем называт *возмущением* матрицы Λ, а исходную матрицу $\mathcal{A} = \Lambda - \mathcal{B}$ — *возмущенной* матрицей.

Далее рассматривается возмущенная матрица $\Lambda - \mathcal{B}$, причем элементы возмущения малы по сравнению с элементами невозмущенной матрицы.

Возникает вопрос, можно ли преобразованием подобия привести возмущенную матрицу $\Lambda - \mathcal{B}$ в диагональную матрицу $\Lambda - \tilde{\mathcal{B}}$ ($\tilde{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\tilde{b}_{11}, \dots, \tilde{b}_{nn})$), при каких условиях на возмущение это верно (очевидно, что не при любом возмущении), где искать матрицу $\tilde{\mathcal{B}}$ и как её искать. Сразу же ответим еще на один самый важный вопрос: зачем все это? Затем, что собственные значения и собственные векторы диагональной матрицы $\Lambda - \tilde{\mathcal{B}}$ известны (или хорошо считаются). А зная их, мы знаем и соответствующие характеристики у $\mathcal{A} = \Lambda - \mathcal{B}$, причем они будут близки к характеристикам диагональной мартицы Λ.

Пусть $\mathcal{X} = (x_{ij})$ – матрица n-го порядка, тогда через $\mathcal{J}\mathcal{X}$ обозначим матрицу $\operatorname{diag} \mathcal{X}$, т.е.

$$\mathcal{J}\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Понадобится еще одна матрица $\mathcal{Y} = \Gamma\mathcal{X}$. Определим $\mathcal{Y}$ как решение матричного уравнения

$$\Lambda\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\Lambda = \mathcal{X} - \mathcal{J}\mathcal{X}. \tag{2}$$

Если матрицы, стоящие слева и справа от знака равенства равны, то равны и их соответствующие элементы, т.е.

$$(\Lambda\mathcal{Y})_{ij} - (\mathcal{Y}\Lambda)_{ij} = x_{ij}, \ i \neq j; \tag{3}$$

$$(\Lambda\mathcal{Y})_{ii} - (\mathcal{Y}\Lambda)_{ii} = 0. \tag{4}$$

Так как матрица Λ - диагональная, то $(\Lambda\mathcal{Y})_{ij} = a_{ii}y_{ij}$, поэтому из (4) сразу следует, что $y_{ii} = 0\ \forall i$, а (3) перепишется в виде

$$a_{ii}y_{ij} - a_{jj}y_{ij} = x_{ij},$$

откуда

$$y_{ij} = \frac{x_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}},\ i \neq j \tag{5}$$

Напомним, что предполагалось изначально $a_{ii} \neq a_{jj}$ при $i \neq j$, поэтому формула (5) корректна.

Итак, получаем, что матрица $\Gamma\mathcal{X}$ имеет вид

$$\Gamma\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_{12}}{a_{11}-a_{22}} & \dots & \frac{x_{1n}}{a_{11}-a_{nn}} \\ \frac{x_{21}}{a_{22}-a_{11}} & 0 & \dots & \frac{x_{2n}}{a_{22}-a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_{n1}}{a_{nn}-a_{11}} & \frac{x_{n2}}{a_{nn}-a_{22}} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то есть у нее главная диагональ нулевая, а остальные элементы определены формулой (5), или, короче:

$$(\Gamma\mathcal{X})_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}}, i \neq j, \\ 0, i = j. \end{cases} \tag{6}$$

Если внимательно посмотрель на формулы (1) и (6), определяющие матрицы $\Gamma\mathcal{X}$ и $\mathcal{J}\mathcal{X}$ для заданной матрицы $\mathcal{X}$, то легко увидеть замечательное свойство

$$\Gamma(\mathcal{J}\mathcal{X}) = \mathcal{J}(\Gamma\mathcal{X}) = 0.$$

Заметим также, что если известна величина $\|\mathcal{X}\|$, то $\|\mathcal{J}\mathcal{X}\| \leq \|\mathcal{X}\|$ и $\|\Gamma\mathcal{X}\| \leq \frac{1}{\min_{i\neq j}|a_{ii}-a_{jj}|}\|\mathcal{X}\|$, обозначим $\gamma = \frac{1}{\min_{i\neq j}|a_{ii}-a_{jj}|}$.

Продолжим пока работать с матрицами $\Gamma\mathcal{X}$ и $\mathcal{J}\mathcal{X}$, посчитаем элементы их произведения:

$$\left((\Gamma\mathcal{X})\,(\mathcal{J}\mathcal{X})\right)_{ij} = \sum_{r\neq i}(\Gamma\mathcal{X})_{ir}(\mathcal{J}\mathcal{X})_{rj} = \begin{cases} (\Gamma\mathcal{X})_{ij}\mathcal{X}_{jj}, i \neq j, \\ 0, i = j. \end{cases}$$

Таким образом, матрица $((\Gamma\mathcal{X})\,(\mathcal{J}\mathcal{X}))$ наследует структуру матрицы $\Gamma\mathcal{X}$ и $\mathcal{J}\left((\Gamma\mathcal{X})\,(\mathcal{J}\mathcal{X})\right) = 0$.

Будем теперь искать такую неизвестную матрицу $\mathcal{X}$, чтобы возмущенная матрица $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ была подобна диагональной матрице $\mathcal{A} - \mathcal{J}\mathcal{X}$, то есть чтобы выполнялось матричное равенство

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B})(\mathcal{E} + \Gamma\mathcal{X}) = (\mathcal{E} + \Gamma\mathcal{X})(\mathcal{A} - \mathcal{J}\mathcal{X}), \tag{7}$$

здесь через $\mathcal{E}$ обозначена единичная матрица и в роли матрицы $\mathcal{U}$, осуществляющей преобразование подобия, выступает матрица $\mathcal{U} = \mathcal{E} + \Gamma\mathcal{X}$.

Раскроем левую и правую части равенства (7) и учтем (2) с $\mathcal{Y} = \Gamma\mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} - \mathcal{B} + \mathcal{A}\Gamma\mathcal{X} - \mathcal{B}\Gamma\mathcal{X} = \mathcal{A} - \mathcal{J}\mathcal{X} + \Gamma\mathcal{X}\mathcal{A} - \Gamma\mathcal{X}\mathcal{J}\mathcal{X};\\
&\mathcal{A}\Gamma\mathcal{X} - \Gamma\mathcal{X}\mathcal{A} - \mathcal{B}\Gamma\mathcal{X} + \Gamma\mathcal{X}\mathcal{J}\mathcal{X} - \mathcal{B} + \mathcal{J}\mathcal{X} = 0;\\
&\mathcal{X} - \mathcal{J}\mathcal{X} - \mathcal{B}\Gamma\mathcal{X} + \Gamma\mathcal{X}\mathcal{J}\mathcal{X} - \mathcal{B} + \mathcal{J}\mathcal{X} = 0;\\
&\mathcal{X} = \mathcal{B}\Gamma\mathcal{X} - \Gamma\mathcal{X}\mathcal{J}\mathcal{X} + \mathcal{B}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Итак, мы получили уравнение (8) относительно оператора $\mathcal{X}$, решение которого удовлетворяет равенству (7).

Применим $\mathcal{J}$ к уравнению (8)

$$\mathcal{J}\mathcal{X} = \mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X}) + \mathcal{J}\mathcal{B} \qquad (9)$$

Подставим (9) в (8)

$$\mathcal{X} = \mathcal{B}\Gamma\mathcal{X} - \Gamma\mathcal{X}\mathcal{J}\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{X}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X}) + \mathcal{B}. \qquad (10)$$

Займемся поисками условий разрешимости уравнения (10), имеющего вид

$$\mathcal{X} = \Phi(\mathcal{X}). \qquad (11)$$

В этом нам поможет принцип сжимающих отображений, который мы применим к уравнению (10).

(Формулировка принципа сжимающих отображений для матриц). Если в пространстве матриц есть сжимающее отображение Φ, переводящее некоторую область в себя, то в ней имеется единственная неповижная точка и вся область при неограниченном повторении отображения Φ стягивается к ней.

Напомним также, что отражение Φ называется сжимающим, если

$$\|\Phi\mathcal{X} - \Phi\mathcal{Y}\| \le \alpha\|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|,$$

где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$– матрицы, $\alpha < 1$ и $\|.\|$– любая норма в пространстве матриц.

Неподвижная точка $\mathcal{Y}$ отображения Φ есть решение матричного уравнения $\mathcal{Y} = \Phi\mathcal{Y}$.

Вернемся к уравнению (10) и найдем такой шар с центром в точке 0, который отображение Φ переводит сам в себя, т.е. если $\|\mathcal{X}\| < r\|\mathcal{B}\|$, то и $\|\Phi(\mathcal{X})\| < r\|\mathcal{B}\|$.

$$\|\Phi(\mathcal{X})\| \le \|\mathcal{B}(\Gamma\mathcal{X}) - (\Gamma\mathcal{X})(\mathcal{J}\mathcal{B}) - (\Gamma\mathcal{X})\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X}) + \mathcal{B}\| \le \gamma\|\mathcal{B}\|\,\|\mathcal{X}\| + \gamma\|\mathcal{B}\|\,\|\mathcal{X}\| + \gamma^2\|\mathcal{B}\|\,\|\mathcal{X}\|^2 + \|\mathcal{B}\|;$$

Так как $\|\mathcal{X}\| \le r\|\mathcal{B}\|$:

$$\gamma r\|\mathcal{B}\|^2 + \gamma r\|\mathcal{B}\|^2 + \gamma^2\|\mathcal{B}\|^3 r^2 + \|\mathcal{B}\| \le r\|\mathcal{B}\|,$$

Получим квадратное уравнение относительно r:

$$r^2\gamma^2\|\mathcal{B}\|^2 + r(2\gamma\|\mathcal{B}\| - 1) + 1 \le 0.$$

Пусть $\varepsilon = \gamma\|\mathcal{B}\|$, тогда:

$$\varepsilon^2 r^2 + (2\varepsilon - 1)r + 1 \leq 0, \tag{12}$$
$$\mathcal{D} = (2\varepsilon - 1)^2 - 4\varepsilon^2 = 4\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1 - 4\varepsilon^2 = 1 - 4\varepsilon,$$

для существования корней (и решений неравенства (12)) необходимо выполнение условия $\mathcal{D} > 0$, откуда $1 - 4\varepsilon > 0$, т.е. $\varepsilon < \frac{1}{4}$. Итак, первое условие на возмущение получено:

$$\gamma\|\mathcal{B}\| < \frac{1}{4}. \tag{13}$$

Найдем из (12) оценку на радиус шара r:

$$r = \frac{1 - 2\varepsilon \mp \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon^2};$$

при $\varepsilon = \frac{1}{4}, r = 4$.

Проверим сжимаемость отображения Φ в этом шаре:

$$\|\Phi(\mathcal{X}) - \Phi(\mathcal{Y})\| = \|\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X} - \Gamma\mathcal{X}\mathcal{J}\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{X}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X}) + \mathcal{B} - \mathcal{B}\Gamma\mathcal{Y} + \Gamma\mathcal{Y}\mathcal{J}\mathcal{B} + \Gamma\mathcal{Y}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{Y}) -$$
$$- \mathcal{B}\| = \|\mathcal{B}\Gamma(\mathcal{X} - \mathcal{Y}) - \Gamma(\mathcal{X} - \mathcal{Y})\mathcal{J}\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{X}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X}) + \Gamma\mathcal{Y}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{Y}) - \Gamma\mathcal{Y}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X}) +$$
$$+ \Gamma\mathcal{Y}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X})\| = \|\mathcal{B}\Gamma(\mathcal{X} - \mathcal{Y}) - \Gamma(\mathcal{X} - \mathcal{Y})\mathcal{J}\mathcal{B} - \Gamma(\mathcal{X} - \mathcal{Y})\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X}) - \Gamma\mathcal{Y}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma(\mathcal{X} -$$
$$- \mathcal{Y}))\| \leqslant 2\varepsilon\|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\| + 2\varepsilon^2 r\|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\| = (2\varepsilon + 2\varepsilon^2 r)\|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|$$

Итак, еще одно условие (на сжимаемость отображения) $2\varepsilon + 2\varepsilon^2 r < 1$. Проверим его:

$$2\varepsilon + 2\varepsilon^2 r < 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} r = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} r < 1$$

При $r = 4$ все выполняется.

Тогда получаем, что отображение отображение Φ переводит шар с центром в нуле и радиусом $4\|\mathcal{B}\|$ в себя и является на этом шаре сжимающим отображением, следовательно, существует внутри шара неподвижная точка отображения Φ , являющаяся единственным решением уравнения (10) и ее можно найти по методу простых итераций, используя в качестве нулевого приближения нулевой оператор, тогда:

$$\mathcal{X}^{(0)} = 0;$$
$$\mathcal{X}^{(1)} = \mathcal{B};$$
$$\mathcal{X}^{(2)} = \mathcal{B}\Gamma\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{B}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{B}) + \mathcal{B};$$

$$\mathcal{X}^{(3)} = \mathcal{B}\Gamma(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{B}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{B}) + \mathcal{B}) - \Gamma(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{B}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{B}) + \mathcal{B})\mathcal{J}\mathcal{B} -$$
$$- \Gamma(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{B}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{B}) + \mathcal{B})\mathcal{J}\mathcal{B}\Gamma(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{B} - \Gamma\mathcal{B}\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{B}) + \mathcal{B});$$

и так далее.

Итак, доказана теорема (1), являющаяся основной теоремой метода подобных оперторов в приложении к матрицам.

Теорема 1. *Пусть элементы* a_{ij} *исходной матрицы* $\mathcal{A}$ *таковы, что выполнено условие*

$$4\|\mathcal{A} - \Lambda\|\gamma < 1,$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\mathcal{A}), \gamma = (\min\limits_{i \neq j}(|a_{ii} - a_{jj}|))^{-1}$. *Тогда имеет место равенство:*

$$\mathcal{A}(E + \Gamma\mathcal{X}) = (\Lambda - \mathcal{J}\mathcal{X})(E + \Gamma\mathcal{X}),$$

где матрица $\mathcal{X}$ *есть решение нелинейного матричного уравнения*

$$\mathcal{X} = \mathcal{B}(\Gamma\mathcal{X}) - (\Gamma\mathcal{X})(\mathcal{J}\mathcal{B}) - (\Gamma\mathcal{X})\mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X}) + \mathcal{B},$$

матрицы $\Gamma\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{J}\mathcal{X}$ *определяются формулами* (1) *и* (6) *и это решение* $\mathcal{X}$ *может быть найдено по методу простых итерацый, если в качестве нулевого приближения взять нулевой оператор.*

Если нас интересует спектр, то

$$\mathcal{J}\mathcal{X} = \mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{X}) + \mathcal{B}, \tag{14}$$

поэтому, например, для первого приближения $\mathcal{J}\mathcal{B} = 0$, для второго $\mathcal{J}\mathcal{X}^{(2)} = \mathcal{J}(\mathcal{B}\Gamma\mathcal{B}) + \mathcal{B}$.

Важное замечание. При поиске $\mathcal{J}\mathcal{X}$ (или различных приближений к нему) сначала решаем уравнение (10) и потом считаем от него $\mathcal{J}$. Решать сразу уравнение (15) нельзя!