Teoría de algoritmos

(75.29) Curso Buchwald - Genender

Trabajo Práctico 2

Programación Dinámica para el Reino de la Tierra

---

6 de mayo de 2024

Integrantes:

- Matías Vázquez Morales (111083)
- ~~Scarlet Mendoza (108524)~~
- Nestor Fabian Palavecino Arnold (108244)

Introducción

En este informe, presentaremos un algoritmo de programación dinámica para resolver el problema de la atacar a la máxima cantidad de enemigos, y en qué tiempos corresponden dichos ataques, teniendo como datos de entrada una lista de valores que representan la cantidad de enemigos que atacan en cada minuto y una lista que representa una función de recarga de energía.

Adicionalmente, analizaremos:

- La complejidad temporal y espacial de la solución
- Variabilidad de algunos valores en el algoritmo planteado
- Tiempos de ejecución para corroborar la complejidad teórica indicada

La ecuación de recurrencia

La ecuación de recurrencia de nuestro algoritmo es la siguiente:

$$OPT[i] = \max(b(j))$$

$$b(j) = \min\big(X[i-1], f(k)\big) + \begin{cases} 0 \;\; si \;\; j = 0 \\ OPT[i-1] \;\; si \;\; j > 0 \end{cases}$$

$$k = i - j - 1$$

$$i \geq 1, j \;\in \{1, \dots, i-1\}$$

$$OPT[0] = 0$$

i = minuto actual de la batalla
j = minuto origen (desde el cual se está recargando energía)
OPT[i] = máximo de enemigos eliminados en el minuto i
b(j) = cantidad de enemigos eliminados habiendo recargado energía desde el minuto j
X[i] = cantidad de enemigos que atacan en el minuto i
f(k) = valor de la función de recarga de energía en el minuto habiendo pasado k minutos

El Algoritmo

Encontrar solución

Encontrar la solución al problema, tal como lo sugiere la ecuación de recurrencia, tiene complejidad temporal cuadrática. En el código se puede observar que hay dos bloques `for` que van desde 0 hasta n, con i la cantidad de minutos de la batalla. Dentro del `for` anidado todas las operaciones se ejecutan en O(1). Hay una llamada a la función `min`, pero es siempre entre dos elementos, por lo cual su ejecución se realiza en tiempo constante.

```python
def tp2_dp(lista_xi, lista_fj):
    n = len(lista_xi)

    # Maximos batallas anteriores
    OPT = []

    for minuto_actual in range(1, n+1):
        maximo_batalla_actual = -math.inf
        minuto_maximo_batalla_actual = 0

        for minuto_origen in range(n):
            if minuto_actual <= minuto_origen:
                continue

            if minuto_origen == 0:
                maximo_batallas_anteriores = 0
            else:
                maximo_batallas_anteriores = OPT[minuto_origen - 1][0]

            j = (minuto_actual - 1) - minuto_origen
            ataque_actual = min(lista_xi[minuto_actual - 1], lista_fj[j])

            abatidos_batalla_actual = maximo_batallas_anteriores + ataque_actual

            if abatidos_batalla_actual > maximo_batalla_actual:
                maximo_batalla_actual = abatidos_batalla_actual
                minuto_maximo_batalla_actual = minuto_origen

        OPT.append((maximo_batalla_actual, minuto_maximo_batalla_actual))

    return OPT
```

Reconstruir solución

Para reconstruir la solución al problema se recorre recursivamente el arreglo `OPT` hasta que el segundo elemento de la tupla guardada en la posición actual contenga un 0; eso signifca que la recarga de energía se hizo desde el minuto 0, por lo que no hay más pasos intermedios para retroceder en el arreglo. En el peor de los casos, se recorren todos los elementos del arreglo de memoización, por lo que la complejidad es O(n).

Luego se devuelve la solución invertida, ya que al momento de la reconstrucción se recorre el arreglo desde el final hacia el principio, pero a nosotros nos sirve la sucesión de ataque-recarga desde el minuto 0 en adelante. Esto nos cuesta O(n) también.

```python
def reconstruir_solucion(memo):
    enemigos_eliminados = memo[len(memo) - 1][0]
    solucion = [ len(memo), ]

    indice = len(memo)
    while indice > 0:
        indice = memo[indice - 1][1]
        if indice > 0:
            solucion.append(indice)

    return enemigos_eliminados, list(reversed(solucion))
```

El resto del programa

El resto del algoritmo consiste en:

- La lectura del archivo de batallas, lo cual es O(1 + n + n) = O(n), con n la cantidad de minutos de batalla
- La escritura del archivo de solución, lo cual es O(n), con n la cantidad de minutos de batalla

Optimalidad del algoritmo y variabilidad de los valores de entrada

Al observar la ecuación de recurrencia de nuestro algoritmo, se puede ver que no hay restricción en principio sobre qué valores puede o no tomar cada casillero de la "matriz de memorización" (va entre comillas porque no se almacena, representa los cálculos intermedios). Si embargo, empíricamente podemos demostrar que, si existen valores negativos en la lista de oleadas de enemigos, la solución obtenida no es la óptima. A continuación, mostramos un ejemplo:

```
x = [-271,-533,-916, 656, -664]
f = [ 21,671,749,833,1543]
```

Los valores *calculados* durante el procesamiento del algoritmo (no los memoizados) son los siguientes:

```
[
[-271,     0,     0,    0,   0],
[-533,  -804,     0,    0,   0],
[-916, -1187, -1449,    0,   0],
[ 656,   385,   123, -895,   0],
[-664,  -935, -1197, -1580, -8]
]
```

Luego, se muestra por pantalla:

```
Enemigos eliminados:  -8
Orden de recarga/ataque:  ['Cargar', 'Cargar', 'Cargar', 'Atacar', 'Atacar']
```

La cantidad de enemigos figura como `-8` porque, al momento de la reconstrucción de la solución se está tomando el elemento máximo de la última fila y a partir de ese punto aplicamos iterativamente el proceso de descubrimiento de la rama de la solución.

Esto con elementos únicamente positivos siempre funciona, pero en el caso de que hubiese valores negativos posibles para indicar la cantidad de enemigos (cosa que no tiene sentido

para el dominio del problema planteado), este programa no da la solución óptima, ya que para valores de enemigos negativos, el crecimiento de la cantidad acumulada de los enemigos abatidos no es monótono, por lo cual podría suceder lo del ejemplo, que se tome como minuto de partida el máximo de la última fila (-8), en vez de tomar el valor máximo de la anteúltima fila (656).

Luego, para cantidades de enemigos 0 o positivas, el algoritmo siempre ofrece la solución óptima, ya que la función de la cantidad de enemigos abatidos es monótona creciente, con lo cual siempre podemos arrancar desde el máximo de la última fila de la "matriz de memoización". En otras palabras, siempre vamos a tener que "atacar" en la última batalla.

Seguimiento del algoritmo

El arreglo de memoización `OPT` en cada posición contiene una tupla de 2 elementos: el primero contiene el número de enemigos eliminados en el minuto i, y el segundo contiene el "minuto en el que se recargó energía la última vez" + 1 (si este valor es 0, significa que no hubo más recargas antes).

Minuto de batalla 1

```
i: 1  /  j: 0  /  k: 0  /  OPT[0] = min(271, 21) + 0 = 21
max(b(j)) = 21
OPT = [(21, 0)]
```

Minuto de batalla 2

```
i: 2  /  j: 0  /  k: 1  /  OPT[1] = min(533, 671) + 0 = 533
i: 2  /  j: 1  /  k: 0  /  OPT[1] = min(533, 21) + 21 = 533
max(b(j)) = 533
OPT = [(21, 0), (533, 0)]
```

Minuto de batalla 3

```
i: 3  /  j: 0  /  k: 2  /  OPT[2] = min(916, 749) + 0 = 749
i: 3  /  j: 1  /  k: 1  /  OPT[2] = min(916, 671) + 21 = 749
i: 3  /  j: 2  /  k: 0  /  OPT[2] = min(916, 21) + 533 = 749
max(b(j)) = 749
OPT = [(21, 0), (533, 0), (749, 0)]
```

Minuto de batalla 4

```
i: 4  /  j: 0  /  k: 3  /  OPT[3] = min(656, 833) + 0 = 656
i: 4  /  j: 1  /  k: 2  /  OPT[3] = min(656, 749) + 21 = 677
i: 4  /  j: 2  /  k: 1  /  OPT[3] = min(656, 671) + 533 = 1189
i: 4  /  j: 3  /  k: 0  /  OPT[3] = min(656, 21) + 749 = 1189
max(b(j)) = 1189
OPT = [(21, 0), (533, 0), (749, 0), (1189, 2)]
```

Minuto de batalla 5

```
i: 5  /  j: 0  /  k: 4  /  OPT[4] = min(664, 1543) + 0 = 664
i: 5  /  j: 1  /  k: 3  /  OPT[4] = min(664, 833) + 21 = 685
i: 5  /  j: 2  /  k: 2  /  OPT[4] = min(664, 749) + 533 = 1197
i: 5  /  j: 3  /  k: 1  /  OPT[4] = min(664, 671) + 749 = 1413
i: 5  /  j: 4  /  k: 0  /  OPT[4] = min(664, 21) + 1189 = 1413
max(b(j)) = 1413
OPT = [(21, 0), (533, 0), (749, 0), (1189, 2), (1413, 3)]
```

Estado final del arreglo de memoización

```
OPT = [(21, 0), (533, 0), (749, 0), (1189, 2), (1413, 3)]
```

Resultado final reconstruido

```
OPT = [(21, 0), (533, 0), (749, 0), (1189, 2), (1413, 3)]
```

- El segundo valor de la tupla es 3, por ende el siguiente elemento donde hubo un ataque está en la posición del arreglo 3 - 1, es decir 2
- Resultado parcial = [5]

```
OPT = [(21, 0), (533, 0), (749, 0), (1189, 2), (1413, 3)]
```

- El segundo valor de la tupla es 0, por ende no hay siguiente elemento donde hubo un ataque
- Resultado parcial = [5, 3]

Resultado final = [5, 3]

- Son los minutos donde se atacó

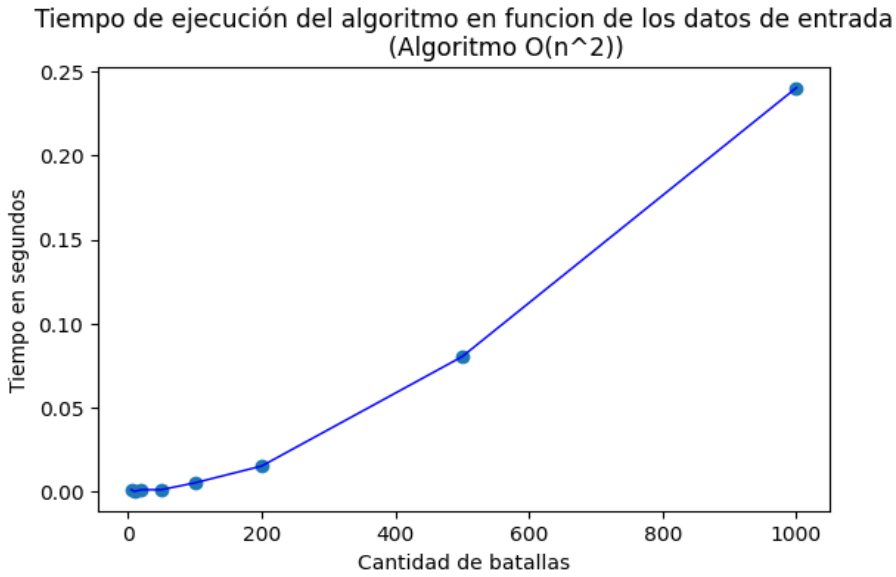
Resultado final reconstruido = [Cargar, Cargar, Atacar, Cargar, Atacar]

Mediciones

Los gráficos se realizaron utilizando `matplotlib`, disponible en Python. En éstos se puede observar la complejidad temporal de nuestro algoritmo por PD.

Pruebas de la cátedra

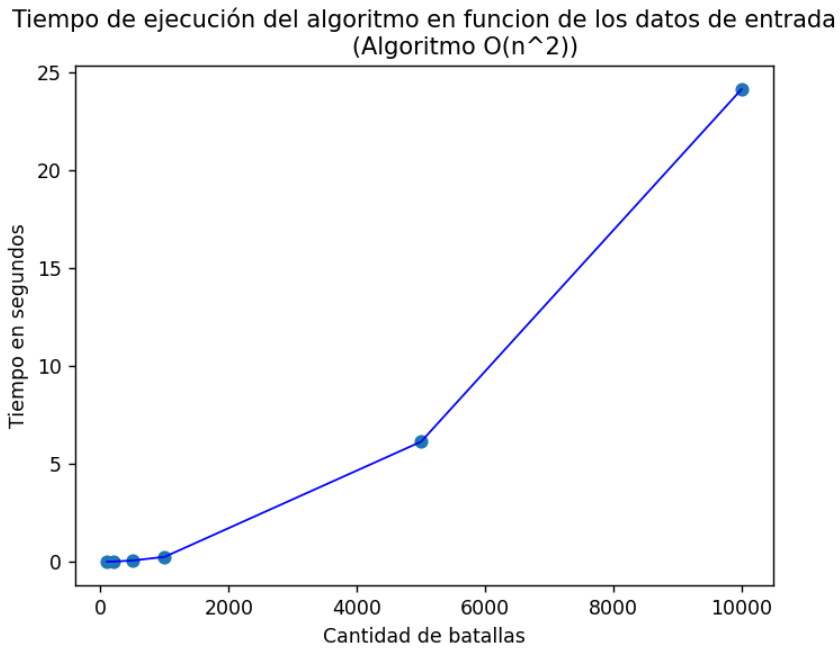
Cantidad de batallas	Tiempo en segundos
5	0.00099754333496093750
10	0.00000000000000000000
20	0.00099873542785644531
50	0.00100183486938476562
100	0.00507354736328125000
200	0.01508188247680664062
500	0.08023452758789062500
1000	0.24034714698791503906
5000	6.27057290077209472656



Pruebas propias

Los datasets fueron generados utilizando el código del archivo **`generator.py`** del proyecto

Cantidad de batallas	Tiempo en segundos
100	0.003124237060546875
200	0.008704662322998047
500	0.060161590576171875
1000	0.247664213180542
5000	6.130439043045044
10000	24.141527891159058



Conclusiones

En conclusión, este informe ha presentado un enfoque basado en programación dinámica para resolver el problema de maximización de ataque para sucesiones de batallas.

Vimos que nuestro algoritmo resuelve el problema en tiempo cuadrático, con complejidad espacial lineal.

Explicamos en qué casos nuestro algoritmo no funciona correctamente, mostrando una prueba empírica al respecto.

Hicimos un seguimiento del algoritmo para demostrar que el mismo funciona correctamente y devuelve el resultado esperado en la complejidad indicada.

Además, revisamos los tiempos de ejecución para varios sets de prueba de batallas, tanto los de la cátedra como sets personalizados generados por nosotros mismos.