Teoría de algoritmos

(75.29) Curso Buchwald - Genender

Trabajo Práctico 2

Programación Dinámica para el Reino de la Tierra

6 de Mayo de 2024

Integrantes:

- Matias Vazquez Morales (111083)
- ~~Scarlet Mendoza (108524)~~
- Nestor Fabian Palavecino Arnold (108244)

Introducción

En este informe, presentaremos un enfoque basado en programación dinámica para resolver el problema de la cantidad máxima de enemigos, y en qué tiempos corresponden dichos ataques, teniendo como datos de entrada una lista de valores que representa la cantidad e enemigos que ataca en cada minuto y una lista que representa una función de recarga de energía.

Adicionalmente, analizaremos:

- La complejidad temporal y espacial de la solución
- Variabilidad de algunos valores en el algoritmo planteado
- Tiempos de ejecución para corroborar la complejidad teórica indicada

El Algoritmo

El algoritmo planteado se encuentra en el repositorio de github:

https://github.com/NestorPala/TDA-tp2/tree/main

```python
def main():
    if len(sys.argv) != 2:
        print("Ejemplo de uso: python3 tp2.py 500.txt")
        return

    path = sys.argv[1]
    filename = path.split(".")[0] + ".txt"

    enemigos_eliminados, orden_recargar_atacar = tp2_batallas_solver(path)

    escribir_resultados(filename, enemigos_eliminados, orden_recargar_atacar)

    print("\nArchivo procesado con éxito!")
    print(f"Los resultados se encuentran en el archivo solved_{filename}")
```

la funcion main(), comprueba si el numero de argumentos de la linea de comandos es correcto, si no da un mensaje de como debe ser su uso, extrae de estos argumentos el archivo .txt que se quiere leer, hace el llamado a la funcion tp2_batallas_solver y a la funcion escribir_resultados.

La complejidad de esta funcion depende de estas 2 funciones, sin embargo si no las tenemos en cuenta la funcion main() tiene una complejidad constante.

```
def tp2_batallas_solver(file_path):
    with open(file_path, 'r') as file:
        lines = file.readlines()[1:]

    n = int(lines[0].strip())
    x_values = [int(x.strip()) for x in lines[1:n+1]]
    function_values = [int(x.strip()) for x in lines[n+1:]]

    return tp2(x_values, function_values)
```

abre el archivo en la ruta proporcionada en modo de lectura, lee todas las lienas del archivo omitiendo la primer linea, crea 2 listas una con los valores de X que son los enemigos y otra con el valor de las funciones, hace el llamado a la funcion tp2, pasando por parametro estas 2 listas y devuelve su resultado.

En cuanto a la complejidad es O(n) donde en es el numero de lineas del archivo, sin embargo al tener otra funcion dentro de esta, depende de esa funcion.

```
def escribir_resultados(filename, enemigos_eliminados, orden_recargar_atacar):
    with open(f"solved_{filename}", 'w+') as resultados_file:
        resultados_file.write(filename)

        estrategia = ""
        for i in range(len(orden_recargar_atacar)):
            orden = orden_recargar_atacar[i]
            estrategia += orden
            if i < len(orden_recargar_atacar) - 1:
                estrategia += ", "

        resultados_file.write("\nEstrategia: " + estrategia)
        resultados_file.write("\nCantidad de tropas eliminadas: " +
str(enemigos_eliminados))
        resultados_file.write("\n")
```

Crea el archivo llamado solved_{filename} en modo de escritura, crea una cadena estrategia que contiene la secuencia de ordenes de carga y ataque, agregando cada cadena separado por una coma, escribe la cantidad de enemigos eliminados en el archivo.

La complejidad es O(n) donde n es el numero de ordenes en orden_recargar_atacar

```
def tp2(x, f):
    memo = tp2_dp(x, f)
    cantidad_oleadas_enemigos = len(x)

    enemigos_eliminados, indices_solucion = reconstruir_solucion(memo)
    orden_recargar_atacar = beautify_solucion(indices_solucion,
cantidad_oleadas_enemigos)

    return enemigos_eliminados, orden_recargar_atacar
```

Hace el llamado a la funcion tp2_dp con las listas x y f como argumentos, calcula la cantidad de oleadas de enemigos, que es la longitud de la lista x, llama a las funciones recontruir_solucion, beutify_solucion y devuelve los enemigos eliminados y el orden de recargar y atacar.

La complejidad de la funcion sin tener en cuenta a las otras 2 funciones llamadas es constante, ya que no tiene bucles ni estructuras de datos que crezcan con el tamaño de entrada, pero como hace el llamado a otras 2 funciones, la complejidad depende de estas.

```
def tp2_dp(lista_xi, lista_fj):
    n = len(lista_xi)
    OPT = inicializar_memo(n)
    maximos_batallas_anteriores = []

    for minuto_actual in range(1, n+1):
        maximo_batalla_actual = -math.inf

        for minuto_origen in range(n):
            if minuto_actual <= minuto_origen:
                continue

            if minuto_origen == 0:
                maximo_batallas_anteriores = 0
            else:
                maximo_batallas_anteriores =
maximos_batallas_anteriores[minuto_origen - 1]

            minuto_actual_ = minuto_actual - 1

            j = minuto_actual_ - minuto_origen
            ataque_actual = min(lista_xi[minuto_actual_], lista_fj[j])
```

```
            # ecuacion de recurrencia: OPT[i][j] = max(OPT[i-1][k] ∀ k ∈
{0,...,j-1}) + min(X[i], f(j))
            # X = lista de cantidad enemigos en el minuto i ("lista_xi")
            # f = función de recarga ("lista_fj")
            abatidos_batalla_actual = maximo_batallas_anteriores +
ataque_actual
            OPT[minuto_actual_][minuto_origen] = abatidos_batalla_actual

            # optimización O(n^3) -> O(n^2):
            # guardo el valor de la rama de valor máximo para cada minuto
            # al mismo tiempo que proceso los minutos en la matriz
            if abatidos_batalla_actual > maximo_batalla_actual:
                maximo_batalla_actual = abatidos_batalla_actual

        maximos_batallas_anteriores.append(maximo_batalla_actual)

    return OPT
```

inicializa una matriz OPT y una lista maximos_batallas_anteriores, itera sobre cada minuto desde 1 hasta n que es la longitud de las listas xi y fj, para cada minuto itera sobre los minutos anteriores, calcula el ataque actual como el minimo entre el valor actual en lista_xi y el correspondiente en lista_fj, actualiza la matriz OPT con el maximo de las batallas anteriores mas el ataque actual y devuelve esta matriz OPT.

La complejidad de esta funcion en O(n^2) donde n es la longitud de lista_xi y lista_fj, esto porque son 2 bucles anidados que recorren hasta n elementos

```
def reconstruir_solucion(memo):
    enemigos_eliminados = max(memo[len(memo) - 1])
    solucion = [ len(memo), ]

    indice = len(memo)
    while indice > 0:
        indice = indice_elemento_maximo(memo[indice - 1])
        if indice > 0:
            solucion.append(indice)

    return enemigos_eliminados, list(reversed(solucion))
```

encuentra el numero maximo de enemigos eliminados, que es el maximo valor en la ultima fila de la matriz memo, inicializa una lista solucion con el tamaño de la matriz memo, comienza un bucle desde el final de la matriz hasta el principio, en cada iteracion, encuentra el indice del elemento maximo en la fila actual de la matriz usando la funcion indice_elemento_maximo(), si el indice es mayor que 0, lo agrega a la lista solucion, y devuelve el numero maximo de enemigos eliminados y la lista solucion en orden inverso.

La complejidad de esta funcion es O(n), donde n es la longitud de memo, esto es porque la recorre desde el final hasta el principio, pero al hacer el llamado a la funcion indice_elemento_maximo(), la complejidad va a depender de esa funcion.

```
def beautify_solucion(indices_solucion, cantidad_oleadas_enemigos):
    beautified = []
    for i in range(1, cantidad_oleadas_enemigos + 1):
        if i in indices_solucion:
            beautified.append("Atacar")
        else:
            beautified.append("Cargar")
    return beautified
```

inicializa una lista vacia beautified, itera sobre cada numero desde 1 hasta cantidad_oleadas_enemigos, en cada iteracion, comprueba si el numero actual esta en la lista indices_solucion, si el numero esta, agrega a la cadena "Atacar" a la lista beutified, si no esta agrega a la cadena "Cargar", devuelve la lista beautified.

La complejidad de esta funcion es O(n^2), donde n es la cantidad de oleadades de enemigos, esto es porque el bucle recorre desde 1 hasta cantidad_oleadas_enemigos y la operación in que se realiza en cada iteracion tiene una complejidad O(n) en el peor de los casos.

```
def indice_elemento_maximo(lista):
    maximo = lista[0]
    indice_maximo = 0

    for i in range(len(lista)):
        if lista[i] > maximo:
            maximo = lista[i]
            indice_maximo = i

    return indice_maximo
```

inicializa maximo con el primer elemento de la lista y indice_maximo con 0, itera sobre cada elemento en la lista, cada iteracion, si el elemento actual es mayor que maximo, actualiza maximo con el elemento actual y indice_maximo con el indice actual, devuelve indice_maximo.

La complejidad de esta funcion es O(n), donde n es la longitud de la lista.

```
def inicializar_memo(n):
    memo = []
    z = -1
    for i in range(n):
        memo.append([])
        z += 1
        for j in range(n):
            memo[z].append(0)
    return memo
```

inicializa una lista vacia memo y una variable z con -1, itera sobre cada numero desde 0 hasta n-1, en cada iteracion, agrega una nueva lista vacia a memo e incrementa z en 1, despues en un bucle anidado, agrega 0 a la lista en la posicion z de memo n veces, y devuelve memo.

La complejidad de esta funcion es O(n^2) donde n es el argumento de entrada de la funcion, esto es por los 2 bucles anidados que recorren hasta n elementos.

En conclusion la complejidad total del algortimo es O(n^2).

La variabilidad de los valores de las llegadas de enemigos y recargas no afecta directamente a la complejidad del algoritmo, ya que esta se determina por el numero de operaciones que tiene que realizar y no por los valoores especificos de estos.

La complejidad del algoritmo es O(n^2) donde n es la cantidad de oleadas de enemigos, esto se mantiene independientemente de los valores de las llegadas de enemigos y recargas. Sin embargo si los valores son muy grandes, las operaciones aritmeticas pueden llevar mas tiempo, ademas si son valores muy variados, el algortimo tambien aumenta el tiempo de ejecucion.

Optimalidad del algoritmo y variabilidad de los valores de entrada

La ecuación de recurrencia de nuestro algoritmo es la siguiente:

$$OPT[i,j] = \max_{k \in \{1,\dots,j-1\}}(OPT[i-1,k]) + \min(X[i], f(j))$$

Como se puede observar, no hay restriccion en principio sobre que valores puede o no tomar cada casillero de la matriz de memoización. Si embargo, empiricamente podemos demostrar que si existen valores negativos en la lista de oleadas de enemigos, la solución obtenida no es la óptima. A continuación mostramos un ejemplo:

```
    x = [-271,-533,-916, 656, -664]
    f = [ 21,671,749,833,1543]
```

La estructura de memoización contiene los siguientes valores al momento de finalizacion de nuestro algoritmo:

`[[-271, 0, 0, 0, 0], [-533, -804, 0, 0, 0], [-916, -1187, -1449, 0, 0], [656, 385, 123, -895, 0], [-664, -935, -1197, -1580, -8]]`

Ademas, se muestra por pantalla:

`Enemigos eliminados:  -8`

`Orden de recarga/ataque:  ['Cargar', 'Cargar', 'Cargar', 'Atacar', 'Atacar']`

La cantidad de enemigos figura como `-8` porque, al momento de la reconstrucción de la solución se está tomando el elemento máximo de la última fila y a partir de ese punto aplicamos iterativamente el proceso de descubrimiento de la rama de la solución.

Esto con elementos únicamente positivos siempre funciona, pero en el caso de que hubiese valores negativos posibles para indicar la cantidad de enemigos (cosa que no tiene sentido para el dominio del problema planteado), este programa no da la solución óptima, ya que para valores de enemigos negativos, el crecimiento de la cantidad acumulada de los enemigos abatidos no es monótono, por lo cual podría suceder lo del ejemplo, que se tome como minuto de partida el máximo de la última fila (-8), en vez de tomar el valor máximo de la anteúltima fila (656).

Luego, para cantidades de enemigos 0 o positivas, el algoritmo siempre ofrece la solución óptima, ya que la función de la cantidad de enemigos abatidos es monótona creciente, con lo cual siempre podemos arrancar desde el máximo de la última fila de la matriz de memoización. En otras palabras, siempre vamos a tener que "atacar" en la última batalla.

Ejemplo de ejecución

Los ejemplos dados por la catedra, se pueden obtener los resultados pasandolos por el algortimo, todos estos, nos dieron los resultados esperados.

Tomando como ejemplo los siguientes valores

N	X	F( )
5	125	316
	378	429
	492	563
	689	907
	274	831

Vamos a calcular cual es el optimo, para eliminar a la mayor cantidad de enemigos posibles.

Para esto vamos a calcular todos los resultados optimos, partiendo como si tuvieramos 1 batalla hasta N = 5.

Para 1 batalla:

Calculamos el minimo entre X1 y F(1), en este caso 125.

125

Para 2 batallas:

125	441

Para 3 batallas:

125	441	757

Para 4 batallas:

125	441	757	1073

Para 5 batallas:

125	441	757	1073	1347

Para las 5 oleadeas de enemigos que vienen, como se ve en el cuadro nos combiene atacar en todos los minutos, dando como resultado el maximo que es 1347 enemigos que se eliminaron

```
5.txt
Estrategia: Atacar, Atacar, Atacar, Atacar, Atacar
Cantidad de tropas eliminadas: 1347
```

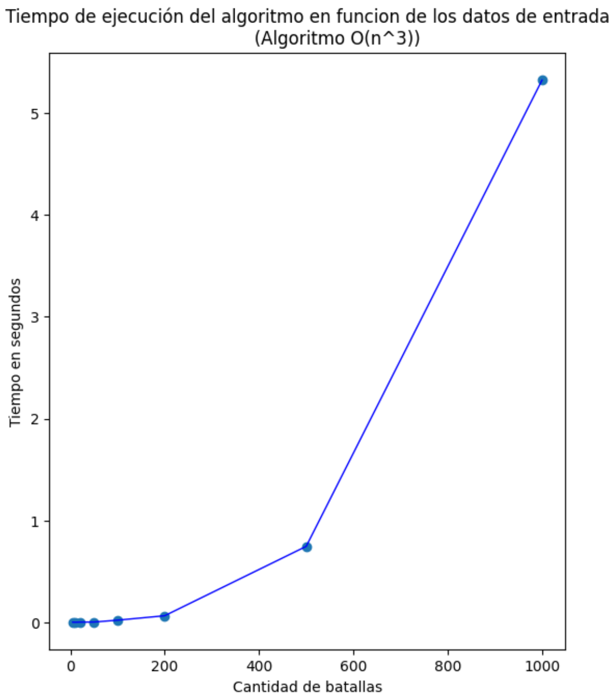
Dando como resultado el mismo que da el algoritmo planteado.

Mediciones

Complejidad del algoritmo sin la optimización de máximo valor por minuto

Orden temporal: $O(n^3)$

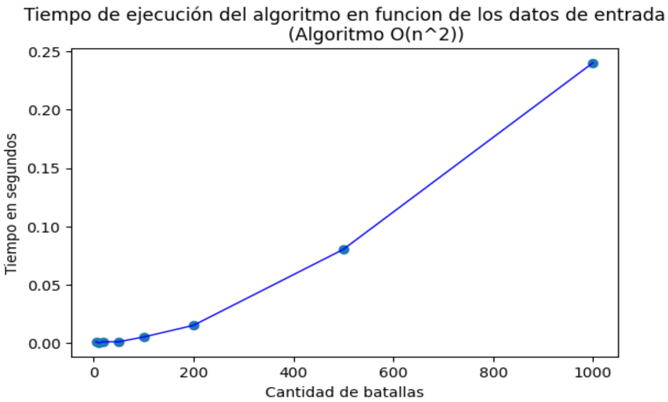
Cantidad de batallas	Tiempo en segundos
5	0.00099945068359375000
10	0.00000000000000000000
20	0.00150609016418457031
50	0.00203466415405273438
100	0.02012777328491210938
200	0.06371688842773437500
500	0.74523496627807617188
1000	5.32637214660644531250
5000	621.24419236183166503906



Complejidad del algoritmo con la optimización de máximo valor por minuto

Orden temporal: $O(n^2)$

Cantidad de batallas	Tiempo en segundos
5	0.00099754333496093750
10	0.00000000000000000000
20	0.00099873542785644531
50	0.00100183486938476562
100	0.00507354736328125000
200	0.01508188247680664062
500	0.08023452758789062500
1000	0.24034714698791503906
5000	6.27057290077209472656



Las 2 primeras corresponden a la ejecucion del algortimo sin la optimizacion del valor maximo por minuto. En este caso la complejidad teórica espeerada es de $O(n^3)$. Donde en es la cantidad de oleadas de enemigos. Estas mediciones dan uan visiond de como se comporta el algortimo sin ninguna optimizacion.

En las otras 2, son de la ejecucion del algoritmo con la optimizacion del valor meximo por minuto implementada. Con esta la complejidad espeerada se reduce a $O(n^2)$.

Para cada conjunto de mediciones, se generaron diversos sets de datos para probar el algoritmo bajo diferentes condiciones.

Estas mediciones son solo una aproximacion y pueden variar dependiendo de varios factores, como la capacidad de la maquina en la que se ejecutan y la carga del sistema en el momento de la prueba.

Estos datos proporcionan una buena indicacion de la eficiencia del algortimo y como escala dependiendo del tamaño de la entrada.

Los gráficos se realizaron utilizando `matplotlib`, disponible en Python. En éstos se puede observar la complejidad temporal de nuestro algoritmo por PD.

Los datasets fueron generados utilizando el código del archivo **`generator.py`** del proyecto

Conclusiones

En conclusión, este informe ha presentado un enfoque basado en programación dinámica para resolver el problema de maximización de ataque para sucesiones de batallas.

Vimos que el algoritmo que resuelve el problema tiene originalmente una complejidad temporal cúbica pero se puede optimizar para que sea cuadrática obteniendo el máximo valor de una fila durante el proceso de cálculo. Tambien vimos que este pequeño cambio definitivamente afecta positivamente a los tiempos de ejecución de nuestro programa. A su vez la complejidad espacial es cuadrática y la complejidad temporal de la reconstrucción de nuestra solución también es cuadrática. Todo esto lo mostramos utilizando nuestros sets de prueba.

Comentario final: la ecuación de recurrencia sugiere que se podría (de alguna manera) optimizar el algoritmo para que la resolución del problema se haga en tiempo lineal, ya que de cada fila de la memo-matriz solo tomamos el máximo, sin embargo, esto no se puede hacer ya que para obtener el máximo sí o sí debemos calcular los demás valores, con lo cual el problema no puede ser menor a cuadrático.