Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Función Carácteristica y Función Generadora de Momentos

Integrantes:

Cariño Díaz David
Márquez Sánchez Moisés
Martínez Romualdo Valeria
Mondragón Miranda Néstor Yair
Reyes Cruz Alejandro
Torres Bustamante Dulce Jhoana

23 de junio de 2024

Variable Aleatoria	Función generadora $M_X(t)$	Función carácteristica $\phi_X(t)$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{E}[X^2]$
Uniforme Discreta	$\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}$	$\hat{\theta} = \psi$	$\frac{x_n+x_1}{2}$	2
Bernoulli	$1 + p(e^t - 1)$	$1 - p + pe^{it}$	p	p
Binomial	$(1 - p + pe^t)^n$	$(1 - p + pe^{iu})^n$	np	$(np)^2 + np(1 - p)$
Binomial Negativa	$p^r \left(e^{-t} - (1 - p)\right)^{-r}$	$p^r(e^{-it} - (1 - p))^{-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Hipergeométrica	No hay forma cerrada	$\hat{\theta} = \psi$	$\frac{nm}{N}$	2
Geométrica	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e}\right)$	$\hat{\theta} = \psi$	$\frac{1}{p}$	$\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$
Poisson	$e^{-\lambda(1-e^t)}$	$\hat{\theta} = \psi$	λ	2
Uniforme Continua	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$	$\frac{e^{bit}-e^{ait}}{ti(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{a^2+b^2+ab}{3}$
Exponencial	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$	$\frac{1}{\lambda}$	2
Normal	$\hat{\theta} = \phi$	$\hat{\theta} = \psi$	1	2

Uniforme Discreta

Sea X una variable aleatoria discreta que puede tomar n valores diferentes $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Si la misma probabilidad de cada valor es igual, entonces X se dice que sigue una distribución uniforme discreta. Esto se puede expresar matemáticamente como:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Para una variable aleatoria X con distribución uniforme discreta sobre {a, a+1, ..., b}, la función característica se calcula de la siguiente manera:

Notemos que si X es uniformemente distribuida en $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, donde X_i son los valores posibles y todos son igualmente probables, entonces la función característica está dada por:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k)e^{itx_k}$$

Dado que $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ para todos k, esto se puede simplificar a:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{itx_k}$$

Función generadora de momentos

La función generadora de momentos $M_X(t)$ de una variable aleatoria X está dada por:

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

Para la distribución uniforme discreta:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} \cdot \frac{1}{n}$$

Por lo tanto:

$$M_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}$$

Primer Momento(Esperanza)

Para encontrar la esperanza $E[X]$, derivamos $M_X(t)$ respecto a t y luego evaluamos en $t = 0$.

$$M_{X'}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i e^{tx_i}$$

Evaluamos en $t = 0$:

$$M_{X'}(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Por lo tanto:

$$E[X] = M_{X'}(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Esto muestra que la derivada de la FGM en $t = 0$ nos da directamente la esperanza de X

Segundo Momento(Esperanza X^2)

Para obtener el segundo momento $E[X^2]$, derivamos $M_X(t)$ dos veces respecto a t y luego evaluamos en $t = 0$:

$$M_{X''}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 e^{tx_i}$$

Evaluamos en $t = 0$:

$$M_{X''}(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Entonces:

$$E[X^2] = M_{X''}(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Esto muestra que la segunda derivada de la FGM en $t = 0$ nos da directamente el segundo momento de X.

Varianza

Una vez que tenemos $E[X]$ y $E[X^2]$, podemos calcular la varianza $Var(X)$:

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

Bernoulli

Una variable aleatoria discreta X sigue una distribución Bernoulli con parámetro p (donde $0 \leq p \leq 1$) si toma el valor 1 con probabilidad p y el valor 0 con probabilidad $1 - p$. Matemáticamente:

$$P(X = 1) = p$$
$$P(X = 0) = 1 - p$$

Función característica

La función característica de una variable aleatoria X es definida como:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Para una variable aleatoria Bernoulli,la función caracteristica se calcula sumando las contribuciones de cada valor posible de X ponderadas por sus probabilidades:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{it\cdot 0}(1 - p) + e^{it\cdot 1}p$$
$$\varphi_X(t) = 1 \cdot (1 - p) + e^{it} \cdot p$$

Simplificando:

$$\varphi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$$

Función generadora de momentos

La función generadora de momentos de una variable aleatoria X se define como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Para una variable aleatoria Bernoulli:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{t\cdot 0}(1-p) + e^{t\cdot 1}p$$
$$M_X(t) = 1\cdot(1-p) + e^t\cdot p$$

por lo tanto:

$$M_X(t) = 1 - p + pe^t$$

Primer momento (Esperanza)

Para calcular el primer momento de una variable aleatoria Bernoulli. usamos la FGM derivandola con respecto a t y posteriormente evaluando t = 0

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - p + pe^t\right) = pe^t$$

Evaluamos la derivada en $t = 0$:

$$M'_X(0) = p\cdot e^0 = p\cdot 1 = p$$

Por lo tanto, el primer momento (esperanza) de la variable aleatoria Bernoulli X es:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = p$$

Segundo Momento

Para calcular el segundo momento de la variable aleatoria Bernoulli, obtenemos la segunda dervidada de la FGM

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}\left(pe^t\right) = pe^t$$

Evaluamos la segunda derivada en $t = 0$:

$$M''_X(0) = p\cdot e^0 = p\cdot 1 = p$$

Por lo tanto, el segundo momento de la variable aleatoria Bernoulli X es:

$$\mathbb{E}[X^2] = M''_X(0) = p$$

Varianza

La varianza de una variable aleatoria X se define como $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
Para una variable aleatoria bernoulli:

$$\mathrm{Var}(X) = p - p^2$$
$$\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$$

Binomial Negativa

$$X \sim BN(p,r) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{x-r} p^x (1-p)^{x-r} & \text{si} \\ x \in \{r, r+1, ...\} & \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Sabemos lo siguiente de esta disribución

$$\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p}$$

Y

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{r(1-p)}{p^2} + \frac{r^2}{p^2} = \frac{r}{p^2}[1-p+r]$$

Función generadora de momentos

Primer momento

$$\text{Si } X \sim BN(p,r) \Rightarrow M_X(t) = p^r \left(e^{-t} - (1-p)\right)^{-r}$$

$$\Rightarrow$$

$$M_X^{(1)} = -r \cdot p^r \left(e^{-t} - (1-p)\right)^{-r-1} \times (-e^{-t})$$

$$= r \cdot p^r \left(e^{-t} - (1-p)\right)^{-(r+1)} (e^{-t})$$

$$\Rightarrow$$

$$M_X^{(1)}(0) = r \cdot p^r (1+p-1)^{-(r+1)} = \frac{r \cdot p^r}{p^{r+1}} = \frac{r}{p} = \mathbb{E}[X]$$

$$\therefore M_X^{(1)}(0) = \mathbb{E}[X]$$

Segundo momento

Ahora probaremos que la seungda derivada de la función generadora de momentos evaluada en 0, es igual al segundo momento de la variable aleatoria.

$$M_X^{(1)}(t) = r \cdot p^r (e^{-t} + p - 1) \cdot e^{-t}$$

$$\Rightarrow$$

$$M_X^{(2)} = r \cdot p^r [(-r-1)(e^{-1} + p - 1)(-1)e^{-t}e^{-t} + (e^{-t} + p - 1)^{-r-1}(-1)e^{-t}]$$

$$= r \cdot p^r e^{-t} \left[\frac{(r+1)e^{-t}}{(e^{-t}+p-1)^{r+2}} - \frac{1}{(e^{-t}+p-1)^{r+1}} \right]$$

$$\Rightarrow$$

$$M_X^{(2)}(0) = r \cdot p^r \left[\frac{r+1}{p^{r+2}} - \frac{1}{p^{r+1}} \right] = \frac{r}{p^2}(r+1-p) = \mathbb{E}[X^2]$$

$$\therefore M_X^{(2)}(0) = \mathbb{E}[x^2]$$

Ahora usaremos una propiedad parecida, pero de la función característica. Es este caso, como $X \sim BN(r,p)$, entonces sabemos que su función característica tiene la siguiente forma:

$$\phi_X(t) = p^r (e^{-it} - (1-p))^{-r}$$

Ahora buscamos mostrar que $\phi_X^{(n)}(0) = i^n\mathbb{E}[X^n]$, en partícular para los dos primeros momentos, es decír, buscamos mostrar lo siguiente:

$$\phi_X^{(1)}(0) = i^2\mathbb{E}[X] = \frac{i \cdot r}{p}$$

Y

$$\phi_X^{(2)}(0) = i\mathbb{E}[X^2] = \frac{i^2 \cdot r}{p^2}[r + 1 - p]$$

Comenzamos derivando la función caracterísitca de esta distribución

$$\begin{aligned}\phi_X^{(1)}(t) &= p^r(-r)(e^{-it} + p - 1)^{-r-1} \cdot (-i)e^{-it}\\ &= p^r \cdot i \cdot r \cdot e^{-it}(e^{-it} + p - 1)^{-r-1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\phi_x^{(1)}(0) = p^r \cdot i \cdot r(1 + p - 1)^{-r-1} = \frac{i \cdot p^r \cdot r}{p^{r+1}} = \frac{i \cdot r}{p} = i \cdot \mathbb{E}[X]$$

$$\therefore \phi_X^{(0)}(0) = i \cdot \mathbb{E}[X]$$

Ahora derivamos nuevamente para mostrar que la segunda derivada de la función característica evaluada en $t = 0$ es igual al segundo momento multiplicado por en cuadrado de el número imaginario $i = \sqrt{-1}$

$$\phi_X^{(2)}(t) = \frac{d}{dt}\left(p^r \cdot i \cdot r \cdot e^{-it}(e^{-it} + p - 1)^{-r-1}\right)$$

$$= p^r \cdot i \cdot r \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{-it}(e^{-it} + p - 1)^{-r-1}\right)$$

$$= p^r \cdot i \cdot r \cdot \left[(-r-1)(e^{-it} + p - 1)^{-r-2}(-i)e^{-it}e^{-it} + (e^{-it} + p - 1)^{-r-1}(-i)e^{-it}\right]$$

$$= p^r \cdot i^2 \cdot r \cdot e^{-it}\left[(r+1)(e^{-it} + p - 1)^{-r-2}e^{-it} - (e^{-it} + p - 1)^{-r-1}\right]$$

$$= p^r i^2 r \cdot e^{-it}\left[\frac{r+1}{(e^{-it} + p - 1)^{r+2}} - \frac{1}{(e^{-it} + p - 1)^{r+1}}\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$\phi_X^{(2)}(0) = i^2 p^r r\left[\frac{r+1}{p^{r+2}} - \frac{1}{p^{r+1}}\right] = i^2 r\left[\frac{r+1}{p^2} - \frac{p}{p^2}\right] = \frac{i^2 \cdot r}{p^2}[r + 1 - p] = i^2 \cdot \mathbb{E}[X^2]$$

$$\therefore \phi_X^{(2)}(0) = i^2\mathbb{E}[X^2]$$

Uniforme Contínua

Sean a,b dos número reales tales que $a < b$, y X una variable aleatoria coon distribución uniforme en el interbalo $[a, b]$. Entonces la función de densidad de esta variable aleatoria tiene la siguiente forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Función generadora de momentos

Entonces podemos calcular su función generadora de momentos de la siguiente forma:

$$M_x(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot e^{tx}\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot e^{tx}\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{e^{tx}}{t}\Big|_a^b \right)$$

$$= \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

Como puede verse, la función generadora de momentos $M_X(t)$ tiene a t en el cociente, por lo que no está definida sobre $t = 0$, y dado que el soporte de la derivada de una función es subconjunto del soporte de la función original, sabemos que $M_X^{(n)}(t)$ tampoco está definida sobre $t = 0$ para cualquier n entero positivo.

Función característica

Análogamente la función caracterísitca de esta distribución es la siguiente:

$$\phi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

La cual, igual que la generadora de momentos, no está definida sobre $t = 0$, ni ninguna de sus derivadas.

Aunque es facil encontrar una función para calcular el n-ésimo momento de esta variable aleatoria.

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot x^n\, dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}$$

Aunque la función generadora de momentos no está definida en $t = 0$, nos fijamos en como se comporta cuando $t \to 0$

Primero nos fijamos en las primeras dos derivadas de $M_X(t)$, es decir, calculamos $M_X^{(1)}(t)$ y $M_X^{(2)}(t)$

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}\right] = \frac{e^{tb}(tb-1) + e^{ta}(1-ta)}{t^2(b-a)}$$

Y

$$M_X^{(2)}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}\right] = \frac{e^{at}(a^2t^2+2) - e^{tb}(b^2t^2 - 2bt + 2)}{t^3(b-a)}$$

Ambas funciones no están definidas en el $t = 0$, y al tratar de evaluarlas en este, se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, por lo que podemos usar la regla de L'Hôpital (dos y tres veces respectivamente) para calcular el límite de la función cuando t tiende a 0, es decir:

Primer momento

Veremos a la función generadora de momentos como un cociente de funciones, y dado que ambas valen 0 al evaluarlas en $t = 0$, podemos calcular el límite de la función como el cociente de las derivadas de las funciones. Es decir:

$$M_X^{(1)}(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{t\to 0} M_X^{(1)}(t) = \frac{\frac{d^2}{dt^2}[f(t)]\Big|_0}{\frac{d^2}{dt^2}[g(t)]\Big|_0} = \frac{e^{at}[-ta^3 - a^2] + e^{bt}[tb^3 + b^2]}{2(b-a)}\Big|_0 = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} = \mathbb{E}[X]$$

$$\therefore \lim_{t\to 0} M_X^{(1)}(t) = \mathbb{E}[X]$$

Segundo momento

Y analogamente aplicamos esto para calcular el segundo momento de una variable aleatoria con esta distribución de la siguiente forma:

$$\lim_{t\to 0} M_X^{(2)}(t) = \frac{\frac{d^3}{dt^3}[f(t)]\Big|_0}{\frac{d^3}{dt^3}[g(t)]\Big|_0} = \frac{a^3e^{at}(a^2t^2+4at+2)-b^3e^{bt}(b^2t^2+4bt+2)}{3\cdot 2(b-a)}\Big|_0 = \frac{a^3-b^3}{3(b-a)} = \frac{(a^2+b^2+ab)(b-a)}{3(b-a)}$$

$$= \frac{a^2+b^2+ab}{3} = \mathbb{E}[X^2]$$

$$\therefore \lim_{t\to 0} M_X^{(2)}(t) = \mathbb{E}[X^2]$$

Binomial

Para una variable aleatoria X que sigue una distribución binomial con parámetros n (número de ensayos) y p (probabilidad de éxito en cada ensayo), denotada como $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, la función generadora de momentos (MGF) está dada por:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = (1-p+pe^t)^n.$$

Primer Momento (Esperanza)

El primer momento de X, es decir, la esperanza $\mathbb{E}[X]$, se obtiene derivando la MGF una vez y evaluando en $t = 0$.

Primera derivada de la MGF:

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}\left((1-p+pe^t)^n\right).$$

Usando la regla de la cadena:

$$M'_X(t) = n(1-p+pe^t)^{n-1}\cdot pe^t.$$

Evaluando en $t = 0$:

$$M'_X(0) = n(1-p+pe^0)^{n-1}\cdot pe^0 = n(1-p+p)^{n-1}\cdot p = n\cdot p.$$

Por lo tanto, la esperanza es:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = np.$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = (1-p+pe^t)^n.$$

Segundo Momento

El segundo momento de X, es decir, $\mathbb{E}[X^2]$, se obtiene derivando la MGF dos veces y evaluando en $t = 0$.

Segunda derivada de la MGF:

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}\left(n(1-p+pe^t)^{n-1}\cdot pe^t\right).$$

Aplicamos la regla del producto:

$$M''_X(t) = n\cdot\frac{d}{dt}\left((1-p+pe^t)^{n-1}\right)\cdot pe^t + n(1-p+pe^t)^{n-1}\cdot\frac{d}{dt}\left(pe^t\right).$$

Primero derivamos $(1-p+pe^t)^{n-1}$:

$$\frac{d}{dt}\left((1-p+pe^t)^{n-1}\right) = (n-1)(1-p+pe^t)^{n-2}\cdot pe^t.$$

Luego derivamos pe^t:

$$\frac{d}{dt}\left(pe^t\right) = pe^t.$$

Sustituyendo en la expresión original:

$$M_X''(t) = n\cdot(n-1)(1-p+pe^t)^{n-2}\cdot pe^t\cdot pe^t + n(1-p+pe^t)^{n-1}\cdot pe^t.$$

Evaluando en $t=0$:

$$M_X''(0) = n(n-1)(1-p+p)^{n-2}\cdot p^2 + n(1-p+p)^{n-1}\cdot p = n(n-1)p^2+np.$$

Por lo tanto, el segundo momento es:

$$\mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) = n(n-1)p^2+np = n^2p^2+np-np^2 = np(1-p+np).$$

Varianza

La varianza $\mathrm{Var}(X)$ se puede calcular a partir de la media y el segundo momento:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Sustituyendo los valores encontrados:

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p+np) - (np)^2 = np(1-p).$$

Función característica:

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk}P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Hipiergeométrica

Una variable aleatoria discreta X tiene una distribución hipergeométrica denotada como $X\sim \mathrm{HGeom}(M,K,n)$, donde donde M es el tamaño de población, n es el tamaño de la muestra extraída, K es el número de elementos en la población original que pertenecen a la categoría deseada y x es el número de elementos en la muestra que pertenecen a dicha categoría.Su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por:

$$f_X(x;M,K,n) = \begin{cases} \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} & \text{for } x=0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función Característica

La función característica de la distribución hipergeométrica $X\sim \mathrm{HGeom}(M,K,n)$ no tiene una forma cerrada simple como algunas otras distribuciones, pero se puede expresar usando sumas y combinaciones:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{itx}\cdot\mathbb{P}(X=x),$$

donde $\mathbb{P}(X=x)$ es la función de masa de probabilidad de la distribución hipergeométrica:

$$\mathbb{P}(X=x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}.$$

Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de la distribución hipergeométrica $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$ se obtiene expresando la FGM como una suma ponderada de e^{tx} por las probabilidades correspondientes:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \cdot \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}.$$

Primer Momento

El primer momento (esperanza) de una variable aleatoria X que sigue una distribución hipergeométrica $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$ es:

$$\mathbb{E}[X] = n\frac{K}{M}$$

Segundo Momento

El segundo momento de una variable aleatoria X que sigue una distribución hipergeométrica $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$ es:

$$\mathbb{E}[X^2] = n\frac{K}{M}\left(1 - \frac{K}{M}\right)\frac{M-n}{M-1} + \left(n\frac{K}{M}\right)^2$$

Varianza

Para una variable aleatoria X que sigue una distribución hipergeométrica $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$, la varianza se calcula utilizando el primer y segundo momento de la siguiente manera:

El primer momento es:

$$\mathbb{E}[X] = n\frac{K}{M}$$

El segundo momento es:

$$\mathbb{E}[X^2] = n\frac{K}{M}\left(1 - \frac{K}{M}\right)\frac{M-n}{M-1} + \left(n\frac{K}{M}\right)^2$$

Por lo tanto, la varianza es:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Sustituyendo los valores:

$$\text{Var}(X) = \left[n\frac{K}{M}\left(1 - \frac{K}{M}\right)\frac{M-n}{M-1} + \left(n\frac{K}{M}\right)^2\right] - \left(n\frac{K}{M}\right)^2$$

Simplificando la expresión, obtenemos:

$$\text{Var}(X) = n\frac{K}{M}\left(1 - \frac{K}{M}\right)\frac{M-n}{M-1}$$

Poisson

La función de densidad de probabilidad (PDF) de una distribución de Poisson describe la probabilidad de que un número determinado de eventos ocurra en un intervalo de tiempo fijo. La función de densidad de probabilidad (PDF) de una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ es:

$$f_X(x) = f_X(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{for } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Función Característica

La función característica $\varphi_X(t)$ de una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson con parámetro λ es:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de una distribución Poisson con parámetro λ está dada por:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

donde X es una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ.

Primer Momento

El primer momento (esperanza) de una distribución Poisson con parámetro λ es:

$$E[X] = \lambda$$

Segundo Momento

El segundo momento de una distribución Poisson con parámetro λ es:

$$E[X^2] = \lambda + \lambda^2$$

Varianza

Para una distribución Poisson con parámetro λ la varianza se calcula utilizando el primer y segundo momento de la siguiente manera:

- El primer momento es $E[X] = \lambda$.
- El segundo momento es $E[X^2] = \lambda + \lambda^2$.

La varianza se calcula como:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$$

Por lo tanto, la varianza de una distribución Poisson con parámetro λ es λ.

Geométrica

Sea la v.a. $X \sim Geo(p)$ con la siguiente función de masa de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{si } k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función generadora de momentos de la v.a X correspondiente se define como:

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \right)$$

Y su función carácteristica es:

$$\phi_X(t) = \phi_X^{(1)}(t) =$$

Ahora, conociendo la v.a. sabemos que su esperanza y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \qquad y, \qquad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

De aqui podemos obtener el valor e $\mathbb{E}[X^2]$, puesto que $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. Entonces:

$$\mathbb{E}[X^2] = Var(X) + \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1-p}{p^2} + (\frac{1}{p})^2$$

$$= \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{1-p+1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[X^2] == \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Ahora lo comprobaremos con la función generadora para ellos debe cumplirse que $M_X^{(1)}(0) = \mathbb{E}[X]$. Entonces

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right) = p\left(\frac{\frac{d}{dt}e^t(1-(1-p)e^t) - e^t\frac{d}{dt}[1-(1-p)e^t]}{(1-(1-p)e^t)^2}\right)$$

$$p\left(\frac{e^t(1-(1-p)e^t) + e^{2t}(1-p)}{(1-(1-p)e^t)^2}\right) = p\left(\frac{e^t - (1-p)e^{2t}) + e^{2t}(1-p)}{(1-(1-p)e^t)^2}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)^2}$$

De aquí que:

$$M_X^{(1)}(0) = \frac{pe^0}{(1-(1-p)e^0)^2} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Por lo tanto

$$M_X^{(1)}(0) = \mathbb{E}[X]$$

De la misma manera, procedemos para el segundo momento, entonces:

$$M_X^{(2)}(t) = p\frac{d}{dt}\frac{e^t}{(1-(1-p)e^t)^2} = p\left(\frac{\frac{d}{dt}e^t(1-(1-p)e^t)^2 - e^t\frac{d}{dt}[1-(1-p)e^t]^2}{(1-(1-p)e^t)^4}\right)$$

$$= p\left(\frac{e^t\cdot(1-(1-p)e^t)^2 - 2(1-(1-p)e^t)\cdot\frac{d}{dt}[1-(1-p)e^t]\cdot e^t}{(1-(1-p)e^t)^4}\right)$$

$$= p\left(\frac{e^t\cdot(1-(1-p)e^t)^2 + 2((1-p)e^t)\cdot\frac{d}{dt}[1-(1-p)e^t]\cdot e^t}{(1-(1-p)e^t)^4}\right)$$

Exponencial

Una variable aleatoria continua X se dice que sigue una distribución exponencial con parámetro λ (donde $\lambda > 0$), denotada como $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, si su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Función Característica

La función característica de una variable aleatoria X es definida como:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Para una variable aleatoria exponencial $X \sim \text{Exp}(\lambda)$:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\varphi_X(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{(it-\lambda)x}\,dx$$

$$\varphi_X(t) = \lambda \left[\frac{e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda}\right]_0^{\infty}$$

$$\varphi_X(t) = \lambda \left(0 - \frac{1}{it-\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de una variable aleatoria X se define como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Para una variable aleatoria exponencial $X \sim \text{Exp}(\lambda)$:

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

Combinamos los exponentes en la integral:

$$M_X(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x}\,dx$$

Evaluamos la integral:

$$M_X(t) = \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\right]_0^{\infty}$$

Para que la integral converja, requerimos que $\lambda - t > 0$. Evaluando en los límites:

$$M_X(t) = \lambda \left(0 - \frac{1}{t-\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

(Primer Momento (Esperanza))

Para calcular el primer momento de una variable aleatoria Exponencial, usamos la FGM derivandola con respecto a t y posteriormente evaluando $t = 0$.

Derivamos la MGF con respecto a t:

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

Evaluamos la derivada en $t = 0$:

$$M_X'(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

Por lo tanto, el primer momento (esperanza) de la variable aleatoria exponencial X es:

$$\mathbb{E}[X] = M_X'(0) = \frac{1}{\lambda}$$

Segundo Momento

Para el segundo momento calculamos la segunda derivada de la FGM con respecto a t y posteriormente evaluando $t = 0$.

$$M_X''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\right) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

Evaluamos la segunda derivada en $t = 0$:

$$M_X''(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Por lo tanto, el segundo momento de la variable aleatoria exponencial X es:

$$\mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Varianza

La varianza de una variable aleatoria X se define como:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Sustituyendo los valores:

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Normal

Una variable aleatoria continua X se distribuye Normal con media μ y varianza σ^2, denotada como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Función Característica

La función característica de una variable aleatoria X es definida como:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Para una variable aleatoria normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de una variable aleatoria X se define como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Para una variable aleatoria normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, :

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

(Primer Momento (Esperanza))

Para calcular el primer momento de una variable aleatoria Normal, usamos la FGM derivandola con respecto a t y posteriormente evaluando $t = 0$.

Derivamos la MGF con respecto a t:

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}\left(\exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right)$$

Usando la regla de la cadena:

$$M'_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\left(\mu + \sigma^2 t\right)$$

Evaluamos la derivada en $t = 0$:

$$M'_X(0) = \exp\left(\mu \cdot 0 + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 0^2\right)\left(\mu + \sigma^2 \cdot 0\right) = \exp(0) \cdot \mu = 1 \cdot \mu = \mu$$

Por lo tanto, el primer momento (esperanza) de la variable aleatoria normal X es:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = \mu$$

Segundo Momento

Varianza

La varianza de una variable aleatoria X se define como:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Sustituyendo los valores:

$$\mathrm{Var}(X) = (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2$$