Tarea 2
FFT

Camilo Valenzuela Carrasco
camilo.valenzuela@alumnos.usm.cl
201173030-5

26 de mayo 2017

1. Estudio de la ortogonalidad discreta de las series de Fourier.Sea

$$I = \sum_{n=0}^{N-1} e^{ikx_n} e^{-ik'x_n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{ih(k-k')n} \tag{1}$$

   Analizaremos dos casos, cuando $h(k-k')$ es múltiplo de 2π y cuando no lo es.

   - Suponiendo $h(k-k') = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ reemplazando en 1

   $$I = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi mn} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N \tag{2}$$

   - Si $h(k-k') \neq 2\pi m$ sabemos que $e^{ih(k-k')n} \neq 1$ por lo que la sumatoria se puede representar como una serie geometrica con $r = e^{ih(k-k')}$ que converge a

   $$I = \sum_{n=0}^{N-1} e^{ih(k-k')n} = \frac{1-e^{ih(k-k')N}}{1-e^{ih(k-k')}} \tag{3}$$

   como el dominio de la DFT es $[0, 2\pi]$ se tiene que $h = \frac{2\pi}{N}$ reemplazando tenemos

   $$I = \frac{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(k-k')N}}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(k-k')}} = \frac{1-e^{i\frac{2\pi}{(}k-k')}}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(k-k')}} = \frac{0}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(k-k')}} = 0 \tag{4}$$

   Luego de este análisis podemos ver que cuando

$$h(k-k') = \frac{2\pi}{N}(k-k') = 2\pi m \tag{5}$$

$$\frac{k-k'}{N} = m \tag{6}$$

$$k-k' = mN \tag{7}$$

   Como esta expansión es periódica $mN \ (modN) = 0$, por lo que $k-k' = 0$ lo que nos dice que $k = k'$.

   Como I es distinto de 0 cuando las exponenciales son iguales y vale 0 cuando las exponenciales son distintas, se dice que son bases ortogonales.

2. Sea la convolución discreta

$$c_j = \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_{j-n} = (f \star g)_j \tag{8}$$

   Si aplicamos DFT en ambos lados obtenemos

$$C_k = \mathscr{F}(c_j) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{n-m} e^{-ikx_n} \tag{9}$$

Con $x_n = hn$ y cambiando el orden de las sumatorias tenemos

$$C_k = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \sum_{n=0}^{N-1} g_{n-m} e^{-ikhn} \tag{10}$$

Escribimos la exponencial de la siguiente forma $e^{-ikhn} = e^{-ikh(n-m)} e^{-ikh(m)}$ y las agrupamos una en cada sumatoria

$$C_k = \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-ikh(m)} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} g_{n-m} e^{-ikh(n-m)}}_{NG_k} \tag{11}$$

Tomando NG_k constantes en relación a la sumatoria tenemos

$$C_k = NG_k \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-ikh(m)}}_{F_k} \tag{12}$$

Por lo que llegamos que la transformada de la convolución discreta es de la forma

$$C_k = NG_k F_k \tag{13}$$

3. La ecuación de Helmholtz en 1D está definida por

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma^2 u = f \tag{14}$$

a) Discretizando la derivada utilizando diferencias centradas tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \tag{15}$$

Discretizando la ecuación y reemplazando la derivada tenemos

$$-u_{xx} + \sigma^2 u = f \tag{16}$$

$$-(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}) + \sigma^2 u_i = f_i \tag{17}$$

$$-(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \sigma^2 h^2 u_i = f_i h^2 \tag{18}$$

$$-u_{i-1} + (2 + \sigma^2 h^2) u_i - u_{i+1} = f_i h^2 \tag{19}$$

Que se puede expersar en forma matricial con una matriz tridiagonal con $(2+\sigma^2 h^2)$ en la diagonal principal y -1 en las diagonales contiguas.

b) Dada la discretización obtenida en (a)

$$-u_{i-1} + (2 + \sigma^2 h^2) u_i - u_{i+1} = f_i h^2 \tag{20}$$

Podemos decir que $\hat{u}_k$ es la variable u luego de ser convertida al espacio de fourier por lo que

$$\hat{u}_k = h \sum_{j=1}^{N} e^{-ikhn} u_j \tag{21}$$

Utilizando DFT en la ecuación discretizada obtenemos

$$-\hat{u}_{k+1} + (2 + \sigma^2 h^2) \hat{u}_k - \hat{u}_{k+1} = h^2 \hat{f}_k \tag{22}$$

Utilizando la propiedad de traslación de la Transformada de Fourier $\hat{u}_{k\pm1} = e^{\pm ikh} \hat{u}_k$ podemos reescribir la ecuación de la forma

$$-e^{ikh} \hat{u}_k + (2 + \sigma^2 h^2) \hat{u}_k - e^{-ikh} \hat{u}_k = \hat{f}_k h^2 \tag{23}$$

Despejando $\hat{u}_k$

$$(2+\sigma^2 h^2 - \underbrace{(e^{ik}+e^{-ik})}_{2cos(kh)}) = \hat{f}_k h^2 \tag{24}$$

Queremos los valores propios de esta discretización por lo que sabemos que un operador lineal aplicado a una funcion es de la forma

$$L\hat{u} = \lambda \hat{u} \tag{25}$$

En este caso tenemos que $L = (2+\sigma^2 h^2 - 2cos(kh))$ por lo que

$$\lambda_k = (2+\sigma^2 h^2 - 2cos(kh)) \tag{26}$$

Como $h = \frac{2\pi}{N}$ podemos escribir los valores propios de la forma

$$\lambda_k = 2+\sigma^2 h^2 - 2cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \tag{27}$$

$$= 2\left(1-cos\left(2\frac{k\pi}{N}\right)\right)+\sigma^2 h^2 \tag{28}$$

$$= 2\left(1-\left(1-2sen^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)\right)+\sigma^2 h^2 \tag{29}$$

$$= 4sen^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)+\sigma^2 h^2 \tag{30}$$

4. Dado un problema con condiciones de contorno periódicas en 2 dimensiones de la forma

$$\underbrace{a(u_{m-1,n}+u_{m+1,n})}_{(1)} + \underbrace{b(u_{m,n-1}+u_{m,n+1})}_{(2)} + \underbrace{cu_{m,n}}_{(3)} = f_{m,n} \tag{31}$$

Sea $U_{j,k} = DFT(u_{m,n})$ y $F_{j,k} = DFT(f_{m,n})$, al aplicar DFT al problema obtenemos

$$(1)\,a\left(e^{-ihmj}U_{j,k}+e^{ihmj}U_{j,k}\right) = aU_{j,k}\;\; 2cos\left(hMj\right) \tag{32}$$

$$= aU_{j,k}\left(1-2sin^2\left(\frac{\pi j}{M}\right)\right) \tag{33}$$

$$(2)\,b\left(e^{-ihnk}U_{j,k}+e^{ihnk}U_{j,k}\right) = bU_{j,k}\;\; 2cos\left(hNj\right) \tag{34}$$

$$= bU_{j,k}\left(1-2sin^2\left(\frac{\pi j}{N}\right)\right) \tag{35}$$

$$(3)\,cU_{j,k} \tag{36}$$

Sumando $(1),(2),(3)$ tenemos

$$(1)+(2)+(3) = \left(a-2asen^2\left(\frac{\pi k}{M}\right)+b-2bsen^2\left(\frac{\pi j}{N}\right)+c\right)U_{j,k} = F_{j,k} \tag{37}$$

$$U_{j,k} = \frac{F_{j,k}}{\left(a-2asen^2\left(\frac{\pi k}{M}\right)+b-2bsen^2\left(\frac{\pi j}{N}\right)+c\right)} \tag{38}$$

5. Tomando el problema anterior y en vez de utilizar una DFT multidimensional se puede realizar una DFT unidimensional y luego resolver el sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes de la otra dimension.

   a) Utilizando DFT unidimensional sobre x en la ecuacion obtenemos

$$U_{j,n}\left(a-2asen\left(\frac{\pi j}{M}\right)\right)+bU_{j,n-1}+bU_{j,n+1}+cU_{j,n} = F_{j,n} \tag{39}$$

   Ordenando la ecuacion obtenemos

$$bU_{j,n-1}+\underbrace{\left(a-2asen\left(\frac{\pi j}{M}\right)+c\right)}_{\gamma}U_{j,n}+bU_{j,n+1} = F_{j,n} \tag{40}$$

Esta ecuación se puede escribir de forma matricial donde la matriz principal es $\left(a - 2asen\left(\frac{\pi j}{M}\right) + c\right)$ y las diagonales contiguas tienen valor b.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & \gamma & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \gamma & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{j,1} \\ U_{j,2} \\ U_{j,3} \\ \vdots \\ U_{j,N} \end{pmatrix}}_{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_{j,1} \\ F_{j,2} \\ F_{j,3} \\ \vdots \\ F_{j,N} \end{pmatrix}}_{f} \tag{41}$$

b) Sabemos que el costo computacional de la FFT $O(Nlog(N))$ podemos comparar los dos algoritmos (Utilizar FFT multidimensional y FFT en una dirección)

Para la FFT multidimensional tenemos que realizar FFT sobre todos los $f_{m,n}$, calcular los $F_{m,n}$ y luego utilizar FFT inversa para obtener la solución. Por lo que el costo total es aproximadamente

$$2MNlog(MN)$$

Para el caso de utilizar la FFT en una dimensión y luego resolver el sistema de ecuaciones tridiagonal, por lo que tenemos que calcular los $F_{j,n}$ para todos los j y luego calcular la FFT inversa para cada $U_{j,k}$

$$M \cdot Nlog(N) + 3M + MNlog(N)$$

Este algoritmo va a ser más rápido con pocos puntos, pero cuando aumente la cantidad de puntos va a ser mejor utilizar la FFT multidimensional.