Tarea 1
Multigrid

Camilo Valenzuela Carrasco
camilo.valenzuela@alumnos.usm.cl
201173030-5

31 de julio de 2017

1. Considere el intervalo $0 \leq x \leq 1$ con nodos $x_j = \frac{j}{n}$, $0 \leq n \leq n$. Muestre que el k-ésimo modo de Fourier $w_{k,j} = sin\frac{jk\pi}{n}$ tiene una longitud de onda $l = \frac{2}{k}$ ¿Cuál modo tiene longitud de onda $l = 8h$? ¿y $l = \frac{1}{4}$?

   Solución:

   Si tenemos $sin(\alpha x)$ la longitud de onda esta dada por $l = \frac{2\pi}{\alpha}$. Sabiendo esto podemos transformar

   $$sin\left(\frac{jk\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{j}{n}k\pi\right) = sin\left(x_j k\pi\right)$$

   Con $x = x_j$ y $\alpha = k\pi$ la longitud de onda queda:

   $$l = \frac{2\pi}{k\pi} = \frac{2}{k} \quad \square$$

   Reemplazando $l = 8h$ y $l = \frac{1}{4}$ obtenemos $k = \frac{1}{4h}$ y $k = 8$ respectivamente.

2. El número de condición de una matriz $\kappa(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2$ da una idea de cuan bien el residual mide al error. En el siguiente ejercicio, use la propiedad que $||Ax|| \leq ||A||||x||$

   a) Partiendo de la relación $Ae = r$ y $A^{-1}f = u$, demuestre que

   $$\frac{||r||_2}{||f||_2} \leq \kappa(A)\frac{||e||_2}{||u||_2}$$

   Entregue una interpretación de esta desigualdad cuando κ es alto.

   Solución:

   Comenzamos aplicando la norma 2 a ambas ecuaciones

   $$Ae = r$$

   $$||Ae||_2 = ||r||_2$$

   $$A^{-1}f = u$$

   $$||A^{-1}f||_2 = ||u||_2$$

   Multimplicamos

   $$||Ae||_2||u||_2 = ||r||_2||u||_2$$

   $$||Ae||_2||A^{-1}f||_2 = ||r||_2||u||_2$$

Utilizando la desigualdad triangular obtenemos

$$||A||_2||A^{-1}||_2||e||_2||f||_2 \geq ||Ae||_2||A^{-1}f||_2 = ||r||_2||u||_2$$

$$||A||_2||A^{-1}||_2||e||_2||f||_2 \geq ||r||_2||u||_2$$

Reemplazando $\kappa(A)$ y ordenando la ecuación obtenemos

$$\kappa(A)||e||_2||f||_2 \geq ||r||_2||u||_2$$

$$\frac{||r||_2}{||f||_2} \leq \kappa(A)\frac{||e||_2}{||u||_2} \quad \square$$

Mientras mayor sea el valor de κ el residuo de la relajación puede ser mucho más grande, por lo que nuestra solución aproximada por la relajación puede quedar muy lejos de la solución exacta.
Lo que nos da una cota inferior para el error normalizado.

b) Partiendo de las relaciones $Au = f$ y $A^{-1}r = e$ demuestre que

$$\frac{||e||_2}{||u||_2} \leq \kappa(A)\frac{||r||_2}{||f||_2}$$

Entregue una interpretación de esta desigualdad cuando κ es alto.

Solución:

Utilizando la misma idea que en el ejercicio anterior:

$$||Au||_2 = ||f||_2 \quad , \quad ||A^{-1}r||_2 = ||e||_2$$

Multiplicando $||e||_2$ a la primera ecuación

$$||Au||_2||e||_2 = ||f||_2||e||_2$$

$$||Au||_2||A^{-1}r||_2 = ||f||_2||e||_2$$

Utilizando la desigualdad triangular

$$||A||_2||A^{-1}||_2||u||_2||r||_2 \geq ||Au||_2||A^{-1}r||_2 = ||f||_2||e||_2$$

$$\kappa(A)||u||_2||r||_2 \geq ||f||_2||e||_2$$

Despejando obtenemos la desigualdad buscada

$$\frac{||e||_2}{||u||_2} \leq \kappa(A)\frac{||r||_2}{||f||_2} \quad \square$$

Lo mismo que el caso anterior pero ahora tenemos una cota superior del error normalizado.

c) Combine estos resultados para llegar a

$$\frac{1}{\kappa(A)}\frac{||r||_2}{||f||_2} \leq \frac{||e||_2}{||u||_2} \leq \kappa(A)\frac{||r||_2}{||f||_2}$$

Solución:

Despejamos $\frac{||e||_2}{||u||_2}$ en ambas ecuaciones

$$\frac{1}{\kappa(A)}\frac{||r||_2}{||f||_2} \leq \frac{||e||_2}{||u||_2} \quad , \quad \frac{||e||_2}{||u||_2} \leq \kappa(A)\frac{||r||_2}{||f||_2}$$

Al combinar ambas desigualdades se obtienen las dos cotas para el error normalizado.

$$\frac{1}{\kappa(A)}\frac{||r||_2}{||f||_2} \leq \frac{||e||_2}{||u||_2} \leq \kappa(A)\frac{||r||_2}{||f||_2}$$

Mientra mayor es el valor de κ, mayor va a ser el rango en el que se puede mover el error normalizado, lo que hace que sea dificil la convergencia de la relajación.

3. Considere un método iterativo del tipo $v = v + B^{-1}(f - Av)$ aplicado al problema $Au = f$. Use los siguientes pasos para demostrar que la relajación de $Au = f$ es equivalente a relajar $Ae = r$ con estimación inicial 0.

   - Considere el problema $Au = f$ con una estimación inicial arbitraria $v = v_0$ ¿Cuál es el error y residual asociado con v_0?
   - Ahora considere la ecuación del residual $Ae = r0 = f - Av_0$. ¿Cuál es el error y residual en la estimación inicial e_0?
   - Concluya que ambos problemas son equivalentes.

   Solución:

   - Dado $Au = f$ con un vector inicial arbitrario $v = v_0$ se tiene que el error inicial asociado es $e = u - v_0$ y el residuo $r = f - Av_0$
   - Con $Ae = r$ tenemos algo similar, donde el error está dado por $\hat{e} = e - e_0$ y el residuo por $\hat{r} = r_0 - Ae_0$. Como $e_0 = 0$ tenemos
   $$\hat{e} = e = u - v_0 \text{ y } \hat{r} = r_0 = f - Av_0$$
   - Como el error inicial y el residuo inicial en ambos casos es el mismo, se puede decir que ambas relajaciones son equivalentes.

4. Verifique que $I_h^{2h} w_k^h = cos(\frac{k\pi}{2n}) w_k^{2h}$ donde $w_{k,j}^h = sin(\frac{jk\pi}{n}$, $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ e I_h^{2h} es el operador *full weightning*

   Solución:

   Por el operador I_h^{2h} se tiene que:
   $$I_h^{2h} w_{j,k}^{2h} = \frac{1}{4}\left(w_{2j-1,k}^h + 2w_{2j,k}^h + w_{2j+1,k}^h\right)$$
   Reemplazando los $w_{k,j}^h$
   $$I_h^{2h} w_{j,k}^{2h} = \frac{1}{4}\left(sin\left(\frac{(2j-1)k\pi}{n}\right) + 2sin\left(\frac{(2j)k\pi}{n}\right) + sin\left(\frac{(2j+1)k\pi}{n}\right)\right)$$
   Utilizando la identidad trigonométrica $sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$
   $$I_h^{2h} w_{j,k}^{2h} = \frac{1}{4}\left(sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right)cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) - sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(cos\frac{2jk\pi}{n}\right) + 2sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right) + sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right)\left(cos\frac{k\pi}{n}\right) + sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(cos\frac{2jk\pi}{n}\right)\right)$$
   Como $cos\frac{2jk\pi}{n} = 0$
   $$I_h^{2h} w_{j,k}^{2h} = \frac{1}{4}\left(sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right)\left(cos\frac{k\pi}{n}\right) + 2sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right) + sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right)\left(cos\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$
   $$I_h^{2h} w_{j,k}^{2h} = \frac{1}{4}\left(2sin\left(\frac{2jk\pi}{n}cos\frac{k\pi}{n}\right) + 2sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right)\right)$$
   Factorizando por 2 $sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right)$
   $$I_h^{2h} w_{j,k}^{2h} = \frac{1}{2}sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right)\left(cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$
   Utilizando la identidad trigonométrica $cos^2(a) = \frac{1+cos(2a)}{2}$ con $a = \frac{k\pi}{2n}$
   $$I_h^{2h} w_{j,k}^{2h} = cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right)$$
   Como $sin\left(\frac{2jk\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{2jk\pi}{\frac{n}{2}}\right) = w_{j,k}^{2h}$

$$I_h^{2h} w_{j,k}^{2h} = cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) w_{j,k}^{2h}$$

Y en general se tiene

$$I_h^{2h} w_k^{2h} = cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) w_k^{2h} \quad \square$$