《高等数学》第七章习题解答

习题7.1

3. 设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续, $g(x,y)$在D上非负, 且$g(x,y)$与$f(x,y)g(x,y)$在D上可积. 证明: 在D中存在一点(x_0,y_0)使$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma = f(x_0,y_0)\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

证. 设m,M为f在D上的最小, 最大值. 则$mg(x,y)\le f(x,y)g(x,y)\le Mg(x,y)$.
因此$\iint\limits_D mg(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D Mg(x,y)d\sigma$.
若$\iint\limits_D g(x,y)d\sigma = 0$, 则$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma = 0$, 可任取一点$(x_0,y_0)\in D$使命题成立. 否则有$m \le \frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)d\sigma} \le M$. 由介值定理, 存在$(x_0,y_0)\in D$使得
$f(x_0,y_0) = \frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)d\sigma}$, 即$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma = f(x_0,y_0)\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$.

4. 设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续, 非负, 且$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$. 证明$f(x,y)=0$, 当$(x,y)\in D$时.

证. 因为f非负, 若f不处处为零, 则f在某点$P\in D$处大于0. 又因f连续, 因此在P的一个邻域内f的值大于$\frac{1}{2}f(P)$. 于是$\iint\limits_D f(x,y)dxdy > 0$, 矛盾.

习题7.2

计算下列二重积分.

3. $\iint\limits_D ydxdy$, 其中D由$y=0$及$y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$所围.

$I=\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}dyy=\int_0^\pi dx\frac{\sin^2 x}{2}=\frac{\pi}{4}$.

4. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, 其中D由$x=1$, $y^2=4x$所围.

$I=\int_{-2}^2 dy\int_{y^2/4}^1 dxxy^2=\int_{-2}^2 dy\frac{1}{2}(1-\frac{y^4}{16})y^2=\frac{32}{21}$.

5. $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy$, 其中$D$由$y^2=x$, $x=0$, $y=1$所围.

$I=\int_0^1 dy\int_0^{y^2}dxe^{\frac{x}{y}}=\int_0^1 dyye^y=1$.

6. $\int_0^1 dy\int_{y^{\frac{1}{3}}}^1\sqrt{1-x^4}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^3}dy\sqrt{1-x^4}=\int_0^1 dxx^3\sqrt{1-x^4}=\frac{1}{6}$.

7. $\iint\limits_D(x^2+y)dxdy$, 其中$D$由$y=x^2$, $x=y^2$所围.

$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy(x^2+y)=\int_0^1 dx(\frac{1}{2}x+x^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{2}x^4)=\frac{33}{140}$.

8. $\int_0^\pi dx\int_x^\pi\frac{\sin y}{y}dy=\int_0^\pi dy\int_0^y dx\frac{\sin y}{y}=\int_0^\pi dy\sin y=2$.

9. $\int_0^2 dx\int_x^2 2y\sin(xy)dy=\int_0^2 dy\int_0^2 dx2y\sin(xy)=\int_0^2 dy2(1-\cos 2y)=4-\sin 4$.

10. $\iint\limits_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy$, $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$.

$I=4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dyy^2\sqrt{1-x^2}=4\int_0^1 dx\frac{1}{3}(1-x^2)^2=\frac{32}{45}$.

11. $\iint\limits_D(|x|+y)dxdy$, $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$.

$I=\iint\limits_D |x|dxdy+\iint\limits_D ydxdy=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dyx+0=4\int_0^1 dxx(1-x)=\frac{2}{3}$.

12. $\iint\limits_D(x+y)dxdy$, 其中D为由$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2y$所围区域的中间一块.

$I=\iint\limits_D xdxdy+\iint\limits_D ydxdy=0+2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} ydy=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

利用极坐标计算下列累次积分或二重积分.

13. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 r^2rdr=\frac{\pi}{8}$.

14. $\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dy=\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} d\theta\int_0^1 \frac{2}{1+r}rdr=\pi(1-\ln 2)$.

15. $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} 3xydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} 3r\cos\theta r\sin\theta rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta 12\cos^5\theta\sin\theta=2$.

16. $\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^R \ln(1+r^2)rdr=\frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2]$.

17. $\iint\limits_D \frac{1}{x^2}dxdy$, D是由$y=\alpha x$, $y=\beta x$ ($\frac{\pi}{2}>\beta>\alpha>0$), $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$ ($b>a>0$)所围的在第一象限的部分.

$I=\int_{\arctan\alpha}^{\arctan\beta} d\theta\int_a^b \frac{1}{(r\cos\theta)^2}rdr=(\beta-\alpha)\ln\frac{b}{a}$.

18. $\iint\limits_D rd\sigma$, 其中D是由心脏线$r=a(1+\cos\theta)$ 与圆周$r=a$ ($a>0$)所围的不包含极点的区域.

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)} rrdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta a^3(\cos\theta+\cos^2\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta)=(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2})a^3$.

19. 利用二重积分的几何意义证明: 由射线$\theta=\alpha$, $r=\beta$与曲线$r=r(\theta)$ ($\alpha\le\theta\le\beta$)所围区域D的面积可表示成$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r(\theta)^2]d\theta$.

证. $S=\iint\limits_D dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} rdr=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r(\theta)^2]d\theta$.

20. 求心脏线$r=a(1+\cos\theta)$ ($a>0, 0\le\theta<2\pi$)所围区域之面积.

解. $S=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)} rdr=\int_0^{2\pi} d\theta\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2=\frac{3}{2}\pi a^2$.

计算下列二重积分.

21. $\iint\limits_D(2x^2-xy-y^2)dxdy$, 其中$D$由$y=-2x+4$, $y=-2x+7$, $y=x-2$, $y=x+1$所围.

解. 设$u=2x+y$, $v=x-y$. 则$x=\frac{u+v}{3}$, $y=\frac{u-2v}{3}$, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{1}{3}$.
因此$I=\int_4^7 du\int_{-1}^2 (uv)\frac{1}{3}dv=\frac{33}{4}$.

22. $\iint\limits_D (\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy})dxdy$, 其中$D$由$xy=1$, $xy=9$, $y=x$与$y=4x$所围.

解. 设$u=\sqrt{\frac{y}{x}}$, $v=\sqrt{xy}$. 则$x=\frac{v}{u}$, $y=uv$, $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{2v}{u}$.
因此$I=\int_1^2 du\int_1^3 (u+v)\frac{2v}{u}dv=8+\frac{52}{3}\ln 2$.

23. $\iint\limits_D ydxdy$, 其中D为圆域$x^2+y^2\le x+y$.

解1. 设$x=\frac{1}{2}+r\cos\theta$, $y=\frac{1}{2}+r\sin\theta$. 则$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=r$.
因此$I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dr\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}+r\sin\theta)rd\theta=\frac{\pi}{4}$.
解2. 设$x=u+\frac{1}{2}$, $y=v+\frac{1}{2}$. 则$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=1$. 设D'为圆域$u^2+v^2\le\frac{1}{2}$,
得$I=\iint_{D'}(v+\frac{1}{2})dudv=0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$.

24. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, 其中$D$为椭圆域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

解. 设$x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$. 则$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=abr$.
因此$I=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}(a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta)abrd\theta=\int_0^1 dr\pi(a^2r^2+b^2r^2)abr=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)ab$.

26. 设$a>0$, 并令$I(a)=\int_0^a e^{-x^2}dx$, $J(a)=\iint\limits_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy$, 其中$D_a=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\}$. 证明
(1) $[I(a)]^2=\iint\limits_{R_a} e^{-x^2-y^2}dxdy$, 其中$R_a=\{(x,y)\mid 0\le x\le a, 0\le y\le a\}$;
(2) $J(a)\le [I(a)]^2\le J(\sqrt{2}a)$;
(3) 利用本节例10的结果推出$\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

证. (1) $[I(a)]^2=\int_0^a e^{-x^2}dx\int_0^a e^{-y^2}dy=\iint\limits_{R_a} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

(2) $D_a\subset R_a\subset D_{\sqrt{2}a}$, 所以$\iint\limits_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy\le\iint\limits_{R_a} e^{-x^2-y^2}dxdy\le\iint\limits_{D_{\sqrt{2}a}} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

(3) $J(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^a e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$. 因此$\lim\limits_{a\to+\infty} J(a)=\lim\limits_{a\to+\infty} J(\sqrt{2}a)=\frac{\pi}{4}$. 由夹逼定理, 得$\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

习题7.3

计算下列三重积分.

1. $\iiint\limits_\Omega (z+z^2)dV$, 其中$\Omega$为单位球$x^2+y^2+z^2\le 1$.

$I=\iiint\limits_\Omega zdV+\iiint\limits_\Omega z^2dV=0+\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^1 drr^2\sin\varphi(r\cos\varphi)^2=\frac{4\pi}{15}$.

2. $\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2zdV$, 其中$\Omega$是由$2z=x^2+y^2$, $z=2$所围成的区域.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2z=\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta\cos^2\theta)d\theta\cdot\int_0^2 r^5(2-\frac{r^4}{8})dr=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{128}{15}=\frac{32\pi}{15}$.

3. $\iiint\limits_{\Omega} x^2\sin xdxdydz$, 其中$\Omega$为由平面$z=0$, $y+z=1$及柱面$y=x^2$所围的区域.

区域Ω关于Oyz平面对称, 被积函数是关于x的奇函数, 因此积分为0.

4. $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$, 其中$\Omega$由$x^2+y^2=4$, $z=x^2+y^2$及$z=0$所围.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_0^{r^2}dzz=2\pi\cdot\frac{16}{3}=\frac{32\pi}{3}$.

5. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2-y^2-z^2)dV$, $\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2$.

$\iiint\limits_{\Omega} z^2dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a r^2\sin\varphi dr(r\cos\varphi)^2=\frac{4\pi}{15}a^5$. 同理$\iiint\limits_{\Omega} x^2dV=\iiint\limits_{\Omega} y^2dV=\frac{4\pi}{15}a^5$. 因此$I=-\frac{4\pi}{15}a^5$.

6. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$, $\Omega: 3\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3$.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{3r}^3 dzr^2=2\pi\int_0^1 3(1-r)r^3dr=\frac{3\pi}{10}$.

7. $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dV$, $\Omega: 0\le a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2$.

取球坐标系$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi\cos\theta$, $z=r\sin\varphi\sin\theta$.
得$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_a^b r^2\sin\varphi dr(r\sin\varphi)^2=2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{b^5-a^5}{5}=\frac{8\pi}{15}(b^5-a^5)$.

8. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)dV$, $\Omega: x^2+y^2\le z\le 1$.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz(r^2\cos^2\theta+z^2)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$.

9. $\iiint\limits_{\Omega} z^2dV$, $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2, x^2+y^2\le Rx$.

$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}2rdr\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}}dzz^2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\frac{1}{15}R^5(1-\sin^5\theta)=\frac{2}{15}(\pi-\frac{16}{15})R^5$.

10. $\iiint\limits_{\Omega}(1+xy+yz+zx)dV$, 其中$\Omega$为由曲面$x^2+y^2=2z$及$x^2+y^2+z^2=8$所围$z\ge 0$的部分.

由对称性$I=\iiint\limits_{\Omega} 1dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{8-r^2}}dz=2\pi\frac{16\sqrt{2}-14}{3}$.

11. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$, Ω由$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi drr^2\sin^2\varphi=2\pi(\frac{2}{15}-\frac{\sqrt{2}}{12})R^5$.

12. $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$, Ω由$z=x^2+y^2+z^2=z$所围.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^2\sin\varphi drr=\frac{\pi}{10}$.

13. $\iiint\limits_{\Omega}z^2dV$, $\Omega:\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi drr^2\cos^2\varphi=\frac{2\pi}{15}(1-\frac{3\sqrt{3}}{8})$.

14. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{zdV}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, Ω由$x^2+y^2+z^2=2az$所围.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi dr\cos\varphi=\frac{16\pi}{15}$.

15. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{2xy+1}{x^2+y^2+z^2}dV$, Ω为由$x^2+y^2+z^2=2a^2$与$az=x^2+y^2$所围$z\ge 0$的部分.

由对称性$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}a}r^2\sin\varphi dr\frac{1}{r^2}$

$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}r^2\sin\varphi dr\frac{1}{r^2}=2\pi a(\sqrt{2}-1+\ln\sqrt{2})$.

16. $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dV}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, $\Omega:x^2+y^2+z^2\le 1$.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{\pi}d\varphi r^2\sin\varphi\frac{1}{\sqrt{r^2-4r\cos\varphi+4}}=2\pi\int_0^1 drr^2\frac{|r+2|-|r-2|}{r}=\frac{2}{3}\pi$.

17. $\iiint\limits_{\Omega}(x^3+\sin y+z)dV$, Ω由$x^2+y^2+z^2\le 2az$, $\sqrt{x^2+y^2}\le z$所围.

由对称性$I=\iiint\limits_{\Omega}zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi drr\cos\varphi=\frac{7}{6}\pi a^4$.

18. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2y+3xyz)dV$, $\Omega:1\le x\le 2$, $0\le xy\le 2$, $0\le z\le 1$.

设$u=x,v=xy,w=z$. 则$x=u,y=\frac{v}{u},z=w$, $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{u}$.
$I=\int_1^2 du\int_0^2 dv\int_0^1 dw(uv+3vw)\frac{1}{u}dudvdw=2+3\ln 2$.

19. $\iiint\limits_{\Omega}(x+1)(y+1)dV$, $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

由对称性$I=\iiint\limits_{\Omega}(xy+x+y+1)dV=\iiint\limits_{\Omega}1dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 abcr^2\sin\varphi dr=\frac{4}{3}\pi abc$.

20. $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dV$, $\Omega:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le a^2$.

设$x=x_0+u$, $y=y_0+v$, $z=z_0+w$, $\Omega':u^2+v^2+w^2\le a^2$. 则$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=1$.
$I=\iiint\limits_{\Omega'}(x_0+y_0+z_0+u+v+w)dudvdw=\iiint\limits_{\Omega'}(x_0+y_0+z_0)dudvdw=\frac{4}{3}\pi a^3(x_0+y_0+z_0)$

21. 分别用柱坐标和球坐标, 把三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dV$表成累次积分, 其中$\Omega$为球体$x^2+y^2+z^2\le z$在锥面$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$上方的部分.

解. 柱坐标: $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}rdr\int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4r^2}}{2}}f(\sqrt{r^2+z^2})dz$.

球坐标: $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}f(r)r^2\sin\varphi dr$.

22. 化累次积分$I=\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y dzf(z)dz$为定积分.

解. 设Ω为区域$0\le z\le y\le x\le a$. 则$I=\iiint\limits_{\Omega}f(z)dxdydz=\int_0^a dz\int_z^a dy\int_y^a dxf(z)=\frac{1}{2}\int_0^a f(z)(z-a)^2dz$.

习题7.4

1. 求由上半球面$z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$及旋转抛物面$x^2+y^2=2az$所围立体的表面积$(a>0)$.

解. $S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2a^2}(\sqrt{\frac{3a^2}{3a^2-x^2-y^2}}+\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}})dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}rdr(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-r^2}}+\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}})=\frac{16}{3}\pi a^2$.

2. 求锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$所割下部分的曲面面积.

解. $S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\pi$

3. 求由三个圆柱面$x^2+y^2=R^2$, $x^2+z^2=R^2$, $y^2+z^2=R^2$所围立体的表面积.

解. 设$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le\frac{R}{\sqrt{2}}\}$, 柱面$x^2+z^2=R^2$投影到$D$上的第一卦限部分的面积为$\iint\limits_{D}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dxdy=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})R^2$. 因此总的表面积为$48(1-\frac{1}{\sqrt{2}})R^2$.

4. 求由三个圆柱面$x^2+y^2=R^2$, $x^2+z^2=R^2$, $y^2+z^2=R^2$所围立体的体积.

解. 设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2, 0\le y\le x\}$, 投影到$D$上的第一卦限部分的立体体积为$\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^R R\sin\theta rdr=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})R^3$. 因此总体积为$8(1-\frac{1}{\sqrt{2}})R^3$.

第七章总练习题

4. 求下列累次积分.

(1) $\int_0^1 dy\int_{2y}^2 4\cos x^2dx=\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x}{2}}4\cos x^2dy=\int_0^2 2x\cos x^2dx=\sin 4$.

(2) $\int_0^8 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^2\frac{dy}{1+y^4}=\int_0^2 dy\int_0^{y^3}\frac{dx}{1+y^4}=\int_0^2 dy\frac{y^3dy}{1+y^4}=\frac{\ln 17}{4}$.

11. 求圆$x^2+y^2\le a^2$上所有的点到原点的平均距离.

解. $d=\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\frac{2}{3}a$.

21. 设闭曲面S在球坐标下的方程为$\rho=2\sin\varphi$. 求S所围立体的体积.

解. $V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}r^2\sin\varphi dr=2\pi^2$.

《高等数学》第八章习题解答

习题8.1

1. 求$\int_L (xy+yz+zx)ds$, 其中L为过四点$O(0,0,0)$, $A(0,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,1,1)$的折线.

解. $I=\int_0^1 0dz+\int_0^1 ydy+\int_0^1 (x+1+x)dx=\frac{5}{2}$.

2. 求$\oint_L xyds$, 其中L是正方形$|x|+|y|=a\ (a>0)$.

解. 被积函数是关于x的奇函数, 积分曲线L关于y轴对称, 因此积分为0.

3. 求$\int_L (1+y^2)ds$, 其中L为摆线段: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

解. $I=\int_0^{2\pi}(1+4a^2\sin^4\frac{t}{2})2a\sin\frac{t}{2}dt=8a+\frac{256}{15}a^3$.

4. 求$\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$, 其中$L$为螺旋线段: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\le t\le 2\pi$.

解. $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2+b^2t^2}\sqrt{a^2+b^2}dt=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\arctan\frac{2\pi b}{a}$.

5. 求$\oint_C (x+y)ds$, 其中C为双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$的右面的一瓣.

解. 曲线C的参数方程: $x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$, $y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.
$x'^2+y'^2=\frac{a^2}{\cos 2\theta}$. 于是$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\theta}(\cos\theta+\sin\theta)\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta=\sqrt{2}a^2$.

6. 求$\int_L xyds$, 其中L是椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$位于第一象限中的那部分.

解. L的参数方程: $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.
$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos\theta\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta=\frac{ab(a^3-b^3)}{a^2-b^2}$.

7. 求$\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$, 其中L为曲线段$x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$.

解. $x^2+y^2=a^2(1+t^2)$, $x'^2+y'^2=a^2t^2$, $I=\int_0^{2\pi}a^2\sqrt{1+t^2}tdt=\frac{(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1}{3}a^2$.

8. 求$\int_L (x+\sqrt{y}-z^5)ds$, 其中$L$由曲线段$L_1, L_2$组成, L_1与L_2的方程分别为L_1 : $\begin{cases} y=x^2, \\ z=0, \end{cases}$ $0\le x\le 1$; L_2 : $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$ $0\le z\le 1$.

解. $I=\int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}dx+\int_0^1(2-z^5)dz=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}+\frac{11}{6}=\frac{5\sqrt{5}+10}{6}$.

9. 若椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任一点$(x,y)$处的线密度为$|y|$, 求椭圆周的质量$(0<b<a)$.

解. 记椭圆为L, $m=\int_L |y|ds=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta=2b^2+\frac{2a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

习题8.2

1. 求$\int_L 2xydx-x^2dy$的值, 其中L沿下列不同路径从原点$O(0,0)$到终点$A(2,1)$:
(1) 直线段$\overline{OA}$; (2) 以Oy轴为对称轴的抛物线段; (3) 折线OBA; (4)折线OCA.

解. (1) $I=\int_0^1 2(2y)yd(2y)-(2y)^2dy=\frac{4}{3}$.

(2) $I=\int_0^2 2x\frac{x^2}{2}dx-x^2d\frac{x^2}{2}=0$.

(3) $I=\int_0^2 0dx-\int_0^1 4dy=-4$.

(4) $I=-\int_0^1 0dy+\int_0^2 2xdx=4$.

2. 求$\int_L \mathbf{F}d\mathbf{r}$, 其中$\mathbf{F}=(x^2+y,x+y^2)$, L沿下列各路径从点$A(1,0)$到$B(-1,0)$: (1) 半圆周$y=-\sqrt{1-x^2}$; (2) 直线段$\overline{AB}$; (3) 折线段ACB, 其中C点坐标为$(0,-1)$.

解. (1) 曲线L: $x=\cos t, y=\sin t, t$从0至$-\pi$. $I=\int_0^{-\pi}(\cos^2 t+\sin t)(-\sin tdt)+(\cos t+\sin^2 t)\cos tdt=-\frac{2}{3}$.

(2) 曲线L: $y=0$, x从1至-1. $I=\int_1^{-1}(x^2+0)(-dx)=-\frac{2}{3}$.

(3) $I=\int_1^0(x^2+x-1)dx+(x+(x-1)^2)dx+\int_0^{-1}(x^2-x-1)dx+(x+(-x-1)^2)(-dx)=-\frac{2}{3}$.

3. 求$\oint x^2dy-y^2dx$, 其中积分路径为椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 按逆时针方向.

解. L: $x=a\cos t, y=b\sin t, t$从0至2π. $I=\int_0^{2\pi}a^2\cos^2 tb\cos t-\sin^2 t(-a\sin t)dt=0$.

4. $\int_L(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, 其中$L$为: (1) 曲线$y=x^4$上由点$(-1,1)$到点$(1,1)$的一段; (2) 由点$(-1,1)$到点$(1,1)$的直线段.

解. (1) $I=\int_{-1}^1(x^2-2xx^4)dx+(x^8-2xx^4)dx^4=-\frac{10}{9}$.

(2) $I=\int_{-1}^1(x^2-2x)dx=\frac{2}{3}$.

5. 求$\int_L ydx+zdy+xdz$, 其中L为螺旋线段: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$.

解. $I=\int_0^{2\pi}a\sin t(-a\sin t)dt+bta\cos tdt+a\cos tbdt=-\pi a^2+0+0=-\pi a^2$.

6. 求$\int_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y)dy$, 其中$L$是曲线$y=|x|$上从点$(-1,1)$到$(2,2)$的一段.

解. $I=\int_{-1}^0(x^2+x^2)dx+(x^2+x)(-dx)+\int_0^2(x^2+x^2)dx+(x^2-x)dx=\frac{41}{6}$.

7. 求$\oint_L\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, 其中$L$是以$A(2,0),B(0,2),C(-2,0),D(0,-2)$为顶点的正向正方形闭路.

解. 被积向量函数$(\frac{1}{|x|+|y|},\frac{1}{|x|+|y|})$和积分曲线都关于原点对称, 因此积分为$0$.

8. 求$\int_L(x^4-z^2)dx+2xy^2dy-ydz$, 其中$L$为依参数$t$增加方向的曲线: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ $(0\le t\le 1)$.

解. $I=\int_0^1(t^4-t^6)dt+2tt^4dt^2-t^2dt^3=\frac{1}{35}$.

9. 求$\oint_L(z^2-y^2)dx+(x^2-z^2)dy+(y^2-x^2)dz$, 其中$L$为球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一卦限的边界, 方向由$A(1,0,0)$到$B(0,1,0)$到$C(0,0,1)$再回到$A$.

解. 由对称性$I=3\int_{AB}(z^2-y^2)dx+(x^2-z^2)dy+(y^2-x^2)dz$
$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0-\sin^2 t)(-\sin tdt)+(\cos^2 t-0)\cos tdt+0=4$.

14. 求$\oint_L \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$, 其中$L$为双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$ $(a>0)$的右面的一瓣, 沿逆时针方向.

解. 曲线L: $x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$, $y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.
$ydx-xdy=-a^2\cos 2\theta d\theta$, $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-a^2\cos 2\theta\cos\theta\sin\theta d\theta=0$.

习题8.3

1. 利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{L^+}(xy^2+y^3)dy-(x^3+x^2y)dx$, 其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$.

解. $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2rdr=\frac{\pi}{2}a^4$.

(2) $\oint_L y^2dx+x^2dy$, 其中L为以$O(0,0),B(1,0),C(0,1)$为顶点的三角形OBC的正向边界线.

解. $I=\iint\limits_{\triangle OBC}(2y-2x)dxdy$, 由对称性$I=0$.

(4) $\oint_{L^+}(x+e^x\sin y)dx+(x+e^x\cos y)dy$, 其中$L$是双纽线$r^2=\cos 2\theta$的右半支.

解. 设D为L所围区域. $I=\iint\limits_D(1+e^x\cos y-e^x\cos y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}rdr=\frac{1}{2}$.

(5) $\oint_{L^+}(e^x\sin y+\sin x-8y)dx+(e^x\cos y-\sin y)dy$, 其中$L$为上半圆$0\le y\le\sqrt{ax-x^2}$ $(0\le x\le a)$的边界.

解. 设D为L所围区域. $I=\iint\limits_D(e^x\cos y-e^x\cos y+8)dxdy=\pi a^2$.

2. 利用曲线积分计算下列闭曲线所围图形的面积:

(1) 星形线$x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

解. 记星形线为L, 所围区域为D. $S=\iint\limits_D dxdy=\oint_{L^+}xdy=\int_0^{2\pi}3a^2\cos^4 t\sin^2 tdt=\frac{3}{8}\pi a^2$.

(2) 心脏线$x=a(1-\cos t)\cos t$, $y=a(1-\cos t)\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

解. 记心脏线为L. $S=\frac{1}{2}\oint_{L^+}xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt=\frac{3}{2}\pi a^2$.

3. 证明$\oint_{L^+}f(xy)(ydx+xdy)=0$, 其中$f(u)$有连续的一阶导数, L为光滑曲线.

证. $f(xy)(ydx+xdy)=f(xy)d(xy)$为全微分, 因此它的曲线积分与路径无关. 由于$L$的起点和终点重合, 因此$\oint_{L^+}f(xy)(ydx+xdy)=0$.

4. 证明下列曲线积分与路径无关, 并求积分值.

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y)dx+(x-y)dy$. $\frac{\partial(x+y)}{\partial y}=\frac{\partial(x-y)}{\partial x}$, 因此曲线积分与路径无关. $(x+y)dx+(x-y)dy=d(\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2)$, $I=(\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2)|_{(0,0)}^{(1,1)}=1$.

(3) $\int_{(0,0)}^{(a,b)}e^x\cos ydx-e^x\sin ydy$. $\frac{\partial(e^x\cos y)}{\partial y}=\frac{\partial(-e^x\sin y)}{\partial x}$, 因此曲线积分与路径无关. $e^x\cos ydx-e^x\sin ydy=d(e^x\cos y)$, $I=e^x\cos y|_{(0,0)}^{(a,b)}=e^a\cos b-1$.

5. 求$\int_{AB}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$的值, 其中$A(-2,-1), B(3,0)$, AB为任意路径.

解. $(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=d(\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5)$,
$I=(\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5)|_{(-2,-1)}^{(3,0)}=62$.

7. 求常数a,b, 使$\frac{(y^2+2xy+ax^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$是某个函数$u(x,y)$的全微分, 并求$u(x,y)$.

解. 记$P=\frac{y^2+2xy+ax^2}{(x^2+y^2)^2}$, $Q=-\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2}$. 解$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 得$a=b=-1$.
由$\frac{\partial u}{\partial x}=P$, 得$u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+\varphi(y)$. 求导得$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(y)$, 代入$\frac{\partial u}{\partial y}=Q$, 得$\varphi(y)=C$. 因此$u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$.

8. 求$\int_{(0,1)}^{(1,1)}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y)dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x)dy$.

解. $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y)dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x)dy=d(\sqrt{x^2+y^2}+xy)$.
因此$I=(\sqrt{x^2+y^2}+xy)|_{(0,1)}^{(1,1)}=\sqrt{2}$.

9. 求$\int_{AB}(x^2+y)dx+(x-y^2)dy$, 其中$AB$是由$A(0,0)$至$B(1,1)$的曲线段$y^3=x^2$.

解. $(x^2+y)dx+(x-y^2)dy=d(\frac{1}{3}x^3+xy-\frac{1}{3}y^3)$, $I=(\frac{1}{3}x^3+xy-\frac{1}{3}y^3)|_{(0,0)}^{(1,1)}=1$.

10. 设D是平面有界闭区域, 其边界线L逐段光滑, 函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在D上有连续的一阶偏导数. 证明: $\oint_{L^+}[P\cos(n,x)+Q\cos(n,x)]ds=\iint\limits_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma$, 其中$\cos(n,x),\cos(n,y)$为曲线$L$的外法向量的方向余弦.

证. $\oint_{L^+}[P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)]ds=\oint_{L^+}Pdy-Qdx=\iint\limits_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma$.

11. 求曲线积分$\oint_{L^+}[x\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle+y\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle]ds$, 其中$L$为一简单封闭曲线, $\mathbf{n}$为L的外法线方向的单位向量.

解. 设L所围区域为D. $I=\oint_{L^+}xdy-ydx=\iint\limits_D 2d\sigma=$两倍$D$的面积,

12. 设函数$u(x,y),v(x,y)$在有界闭区域D上有连续的二阶偏导数, L为D的边界, 分段光滑. 证明:

(1) $\iint\limits_D v\triangle ud\sigma=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}ds-\iint\limits_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma$, 其中$\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}$为$u$沿$L$的外法线方向的方向导数.

(2) $\iint\limits_D(u\triangle v-v\triangle u)d\sigma=\oint_{L^+}(u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}})ds$.

证. $\iint\limits_D v\triangle ud\sigma+\iint\limits_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D(v\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})d\sigma=\iint\limits_D(\frac{\partial}{\partial x}(v\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(v\frac{\partial u}{\partial y}))d\sigma$, 由格林公式, 该式$=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial x}dy-v\frac{\partial u}{\partial y}dx$, 由于$dy=\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle ds$, $dx=-\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle ds$, 该式$=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{i}\rangle ds+v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{j}\rangle ds=\oint_{L^+}v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}ds$. (1)得证. (2)是(1)的直接推论.

13. 设$u(x,y)$是有界闭区域D上的调和函数, 即$u(x,y)$有连续的二阶偏导数, 且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 证明:

(1) $\oint_{L^+} u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds=\iint\limits_D[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]d\sigma$, 其中$L$为$D$的边界, $\mathbf{n}$为L的外法线方向.

(2) 若$u(x,y)$在L上处处为零, 则$u(x,y)$在D上也恒为零.

证. (1) 在12(1)题中取$v=u$, 并利用$\triangle u=0$, 即得所要等式.

(2) 一方面由(1)的结论$\iint\limits_D[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]d\sigma=0$, 另一方面$(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$为$D$上非负连续函数, 因此$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$在$D$内恒为零, 因此$u$在$D$上恒为零.

习题 9.2

1.(1) $\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{dx}{x(1+x^2)}$. $\frac12\ln(1+y^2)=\int\left(\frac1x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\ln|x|-\frac12\ln(1+x^2)+C$

$\ln(1+y^2)=\ln x^2-\ln(1+x^2)+C \Rightarrow (1+x^2)(1+y^2)=\cancel{\ln}\, e^C x^2 = C^* x^2$. $C^*>0$.

(3) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$. $\arcsin y=\ln(\underbrace{x+\sqrt{1+x^2}}_{>0})+C=\ln e^C(x+\sqrt{1+x^2})=\ln C^*(x+\sqrt{1+x^2})$ $C^*>0$.

(7) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x^2+y^2}{2xy+3y^2}=-\frac{2+u^2}{2u+3u^2}$. $u=\frac yx$

$u'=\frac{h(u)-u}{x}=\frac1x\left(-\frac{2+3u^2+3u^3}{2u+3u^2}\right)$, $\frac{2u+3u^2}{2+3u^2+3u^3}du=-\frac1x dx$

$\frac13\ln|2+3u^2+3u^3|=-\ln|x|+C$. $|2+3u^2+3u^3|=C|x|^{-3}$. $C>0$. $2+3u^2+3u^3=Cx^{-3}$. C任意

(8) $y'=(x+y+2)^2$, $z=x+y+2$, $z'=1+y'=1+z^2$. $\frac{dz}{1+z^2}=dx$. $\arctan z=x+C$

(10) $\frac{dy}{dx}=\frac{-(x-2y+5)}{2x-y+4}$. $\Delta=\begin{vmatrix}-1&2\\2&-1\end{vmatrix}\ne0$. $(x_0,y_0)=(-1,2)$, $u=x_0+1$. $v=y_0-2$

$\frac{dv}{du}=\frac{-u+2v}{2u-v}=\frac{-1+2\frac vu}{2-\frac vu}$ 令 $\frac vu=z$, $z'=\frac1u(h(z)-z)=\frac1u\cdot\frac{-1+2z-2z+z^2}{2-z}=\frac1u\cdot\frac{z^2-1}{2-z}$

$z=\pm1$ 是特解. $\frac{(2-z)dz}{z^2-1}=\frac1u du \Rightarrow \left[-\frac{1}{1+z}-\frac{1}{1-z}-\frac{2z}{2(z^2-1)}\right]dz=\frac1u du$

$-\ln|1+z|+\ln|1-z|-\frac12\ln|z^2-1|=\ln|u|+C$

$-\ln(1+z)^2+\ln(1-z)^2-\ln|z^2-1|=\ln u^2+C$

$|z^2-1|=C\cdot\frac{(1-z)^2}{(1+z)^2}\cdot\frac1{u^2}$. $C>0 \Rightarrow z^2-1=C\cdot\frac{(1-z)^2}{(1+z)^2}\cdot\frac1{u^2}$ $C\ne0$.

又 $z=\pm1$ 是特解. $z^2-1=C\frac{(1-z)^2}{(1+z)^2}\cdot\frac1{u^2}$. $C\in R$. $\frac{(z+1)^3}{z-1}=C\frac1{u^2}$. $(u+v)^3=C(u-v)$

8. $\frac{dR}{dt}=-kR$. $k>0$. $R=Ce^{-kt}$

当 $t=0$, $R_0=C$ $t=1600$, $R_{1600}=R_0e^{-1600k}=\frac12R_0$. $e^{-1600k}=\frac12$. $k=\frac{\ln2}{1600}$

$R_0=1(g)$, $t=1$. $R_1=e^{-k}$. $R_0-R_1=1-e^{-k}=1-e^{-\frac{\ln2}{1600}}=1-2^{-\frac1{1600}}\approx0.00043(g)$

9. $u=tx$. $\int_0^x\varphi(u)\cdot\frac1x du=n\varphi(x)$. $\int_0^x\varphi(u)du=nx\varphi(x)$. 两边求导: $\varphi(x)=n\varphi(x)+nx\varphi'(x)$

$\frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{1-n}{nx}dx$. $\ln|\varphi|=\frac{1-n}{n}\ln|x|+C$. $|\varphi|=|x|^{\frac{1-n}{n}}\cdot C_1$. $C_1>0 \Rightarrow \varphi=|x|^{\frac{1-n}{n}}\cdot C_1$. $C_1\in R$

13.(1) 令 $z=y'$. $x^2z'=z^2$. $\frac{dz}{z^2}=\frac{dx}{x^2}$, $-\frac1z=-\frac1x+C_1$. $z=\frac{x}{1+C_1x}$

当 $C_1=0$. $z=x\Rightarrow y'=x$. $y=\frac{x^2}{2}+C_2$. 当 $C_1\ne0$. $y'=\frac{x}{1+C_1x}=\frac1{C_1}-\frac1{C_1(1+C_1x)}$

$y=\frac{x}{C_1}-\frac1{C_1^2}\ln|1+C_1x|+C_2\Rightarrow C_1x-C_1^2y=\ln|1+C_1x|+C_2$. 另还有特解 $z\equiv0\Rightarrow y\equiv C$

(2) 令 $p=y'$. $p^2+2y\cdot p\cdot p'=0$. $p\equiv0\Rightarrow y\equiv C$.

$\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{2y}$. $\ln|p|=-\frac12\ln|y|+C$. $|p|=|y|^{-\frac12}C$. $C>0$, $p=C|y|^{-\frac12}$ C任意.

$y'=C|y|^{-\frac12}$. $|y|^{\frac12}dy=Cdx$. $\frac23|y|^{\frac32}\cdot\mathrm{sgn}(y)=Cx+C_1$. $\frac23|y|^{\frac32}=Cx+C_1$

$|y|^{\frac32}=Cx+C_1=C(x+C_1)$ $|y|=C^{\frac23}(x+C_1)^{\frac23}=C_2(x+C_1)^{\frac23}$. $C_2\ge0$.

$y=C_2(x+C_1)^{\frac23}$. $C_1,C_2\in R$

14. (3). $\frac{\partial P}{\partial y}=e^y$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=e^y$. $u(x,y)=xe^y+\varphi(y)$. $\frac{\partial u}{\partial y}=xe^y+\varphi'(y)$

$\varphi'(y)=-2y$. $\varphi(y)=-y^2+C$. $u=xe^y-y^2+C=C'$. $xe^y-y^2\equiv C$.

(6) $\frac{\partial P}{\partial y}=-b$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=b$ 不是.

(7). $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x+2y$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x+2y$. $u=ye^x+2e^x+xy^2+\varphi(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=e^x+2xy+\varphi'(y)$

$\varphi(y)\equiv 0$. $ye^x+2e^x+xy^2\equiv C$

15. (1) $dx-dy=\frac{1}{(x+y)^2}(dx+dy)$. $d(x-y)=-d\frac{1}{x+y}$. $x-y=-\frac{1}{x+y}+C$

(4) $(x^2+y^2)dx+ydx-xdy=0$. $(x^2+y^2)dx+d(\frac{x}{y})\cdot y^2=0$

$dx+d(\frac{x}{y})\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}=0$. $dx+d(\frac{x}{y})\cdot d\arctan(u)=0$.

$x+\arctan\frac{x}{y}\equiv C$

16. (3). $y(x+1)dx+x(y+1)dy=0$. $xy\neq 0$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=x+1$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=y+1$

两边同除 xy. $(1+\frac{1}{x})dx+(1+\frac{1}{y})dy=0$. $x+\ln|x|+y+\ln|y|=C$

(6) $e^xdx+(e^x\cot y+2y\cos y)dy=0$.

$\frac{\partial M}{\partial y}=0$. $\frac{\partial N}{\partial x}=e^x\cot y$. $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\cot y$. $\mu=e^{\ln\sin y}=\sin y$

$\sin y\cdot e^xdx+\sin y(e^x\cot y+2y\cos y)dy=0$.

$u=\sin y\cdot e^x+\varphi(y)$. $\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\cos y+\varphi'(y)=e^x\cos y+y\sin 2y$

$\varphi'(y)=y\sin 2y$. $\varphi(y)=-\frac{1}{2}y\cos 2y+\frac{1}{4}\sin 2y$

或凑微分法: 两边乘 $\sin y$.

$e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy+2y\sin y\cos y\,dy=0$

$d(\sin y\,e^x)+y\sin 2y\,dy=0$

$d(\sin y\,e^x)+d(-\frac{1}{2}y\cos 2y+\frac{1}{4}\sin 2y)$

习题9.4

2. 设 φ_1, φ_2 是 $y''+q(x)y=0$ 的两个解.

$\varphi_1''=-q(x)\varphi_1$. $\varphi_2''=-q(x)\varphi_2$.

$W(x)=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2$. $W'(x)=\varphi_1'\varphi_2'+\varphi_1\varphi_2''-\varphi_1''\varphi_2-\varphi_1'\varphi_2'$

$=\varphi_1\varphi_2''-\varphi_1''\varphi_2=-q(x)\varphi_1\varphi_2+q(x)\varphi_1\varphi_2=0.$

$W(x)\equiv C$.

3. 设 φ_1, φ_2 是齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的线性无关解.

则 $\varphi(x)$ 可表示为 $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$. C_1, C_2 为某固定常数.(通解包含一切解)

若 $\exists x_0$. $\varphi(x_0)=0$. $\Rightarrow C_1\varphi_1(x_0)+C_2\varphi_2(x_0)=0$.

若 $\varphi'(x_0)=0 \Rightarrow C_1\varphi_1'(x_0)+C_2\varphi_2'(x_0)=0$

由于 $\varphi(x)$ 是非零解. C_1, C_2 一定不同时为零. 则上述方程组有非零解.

$\Rightarrow \begin{vmatrix}\varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0)\\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0)\end{vmatrix}=0$. 总言之. $\exists x_0$. $W(x_0)=0$ 与 φ_1, φ_2 线性无关矛盾.

4. 若存在 x_0 是 φ_1, φ_2 的公共零点. 即 $\varphi_1(x_0)=0$ $\varphi_2(x_0)=0$.

$$\begin{vmatrix}\varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0)\\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0)\end{vmatrix}=0.$$ 也即 $\exists x_0$. $W(x_0)=0$

与 φ_1, φ_2 线性无关矛盾.

习题9.6

1. $y''+3y'+2y=\frac{1}{e^x+1}$

$y''+3y'+2y=0 \Rightarrow \lambda^2+3\lambda+2=0$. $\lambda=-1$ $\lambda=-2$ $C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

$\begin{cases} C_1'e^{-x}+C_2'e^{-2x}=0 \\ -C_1'e^{-x}-2C_2'e^{-2x}=\frac{1}{e^x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)=\frac{e^x}{e^x+1} \\ C_2'(x)=-\frac{e^{2x}}{e^x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=\ln(1+e^x)+C_1 \\ \end{cases}$

$C_2'(x)=-e^x+\frac{e^x}{1+e^x}$. $C_2(x)=-e^x+\ln(1+e^x)+C_2$

$y=e^{-x}\ln(1+e^x)+C_1e^{-x}-e^{-x}+e^{-2x}\ln(1+e^x)+C_2e^{-2x}$

$=(e^{-x}+e^{-2x})\ln(1+e^x)+\underbrace{(C_1-1)}_{\tilde{C}_1\ (\text{记为})}e^{-x}+C_2e^{-2x}$

2. $y''+y=\frac{1}{\sin x}$.

$\lambda^2+1=0$. $\lambda=\pm i$. $C_1\cos x+C_2\sin x$

$\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0 \\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=\frac{1}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'=-1 \\ C_2'=\operatorname{ctg} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=-x+C_1 \\ C_2(x)=\ln|\sin x|+C_2 \end{cases}$

$y=(-x+C_1)\cos x+(\ln|\sin x|+C_2)\sin x=-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|+C_1\cos x+C_2\sin x$

3. $y''+4y=2\tan x$

$\lambda^2+4=0$. $\lambda=\pm 2i$. $C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

$\begin{cases} C_1'\cos 2x+C_2'\sin 2x=0 \\ -2C_1'\sin 2x+2C_2'\cos 2x=2\tan x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'=-2\sin^2 x=-1+\cos 2x \\ C_2'=\tan x\cos 2x=\sin 2x-\tan x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=-x+\frac{1}{2}\sin 2x+C_1 \\ C_2(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\ln|\cos x|+C_2 \end{cases}$

$y=(-x+\frac{1}{2}\sin 2x+C_1)\cos 2x+(-\frac{1}{2}\cos 2x+\ln|\cos x|+C_2)\sin 2x$

$=-x\cos 2x+\sin 2x\ln|\cos x|+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

4. $y''+y=2\sec^3 x$. $C_1\cos x+C_2\sin x$

$\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0 \\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=2\sec^3 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'=-2\sec^3 x\cdot\sin x=\frac{-2\sin x}{\cos^3 x} \\ C_2'=2\sec^3 x\cdot\cos x=2\sec^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=-\sec^2 x+C_1 \\ C_2(x)=2\tan x+C_2 \end{cases}$

$y=(-\sec^2 x+C_1)\cos x+(2\tan x+C_2)\sin x=-\sec x+2\tan x\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x$

$=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1-2\sin^2 x}{\cos x}=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 2x}{\cos x}$

5. $x^2y''-4xy'+6y=0$

$x=e^t$. $y_x'=y_t'\cdot\frac{1}{x}$. $y_x''=(y_t''-y_t')\frac{1}{x^2}$

$(t=\ln|x|)$ $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$
$e^t=|x|$

$y_t''-y_t'-4y_t'+6y_t=0 \quad \lambda^2-5\lambda+6=0 \quad \lambda=2,\ \lambda=3$

$e^{2t},\ e^{3t} \Rightarrow C_1x^2+C_2x^3$

6. $x^2y''-xy'-3y=0$. $y_t''-y_t'-y_t'-3y=0$. $\lambda^2-2\lambda-3=0 \quad \lambda=-1,\ \lambda=3$

$C_1\frac{1}{x}+C_2x^3$

7. $x^3y'''+xy'-y=0$. $y_x'''=[(y_t'''-y_t'')\frac{1}{x^2}-2(y_t''-y_t')\frac{1}{x^3}x]\cdot\frac{1}{x}=(y_t'''-3y_t''+2y_t')\frac{1}{x^3}$

$y_t'''-3y_t''+2y_t'+y_t'-y=0 \Rightarrow y_t'''-3y_t''+3y_t'-y=0 \quad \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$, $(\lambda-1)^3=0$

$C_1e^t+C_2te^t+C_3t^2e^t \Rightarrow x(C_1+C_2\ln|x|+C_3(\ln|x|)^2)$

8. $x^2y''+xy'+4y=10$

$\Rightarrow$特解: $y=\frac{5}{2}$

$y_t''-y_t'+y_t'+4y=10$. $y_t''+4y=10$. $\lambda^2+4=0$. $\lambda=\pm2i$

$C_1\cos2t+C_2\sin2t+\frac{5}{2} \Rightarrow C_1\cos(\ln x^2)+C_2\sin(\ln x^2)+\frac{5}{2}$

习题 9.5

1. (1) $y''-3y'+2y=0$. $\lambda^2-3\lambda+2=0$. $\lambda=1,\ \lambda=2$. $C_1e^x+C_2e^{2x}$

(3) $y''+6y'+9y=0 \quad \lambda^2+6\lambda+9=0$. $\lambda=-3$. $C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$

(5) $y''-y'+2y=0 \quad \lambda^2-\lambda+2=0$. $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$. $C_1e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x+C_2e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x$

3. (7) $y''-y=2e^x-x^2$. $\lambda^2-1=0$, $\lambda=\pm1$. $C_1e^x+C_2e^{-x}$.

$y=Axe^x$: $y''=2Ae^x+Axe^x$, $2Ae^x=2e^x \Rightarrow A=1$. $y_1=xe^x$

$y=ax^2+bx+c$. $y''=2a$. $2a-ax^2-bx-c=-x^2$. $y_2=x^2+2$

$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2$

(8) $y''+y'=\sin4x-2\sin2x$. $\lambda^2+\lambda=0$. $\lambda=0,-1 \quad C_1+C_2e^{-x}$

$y=A\sin4x+B\cos4x$. $y'=4A\cos4x-4B\sin4x$, $y''=-16A\sin4x-16B\cos4x$

$\begin{cases}-16A-4B=1\\4A-16B=0\end{cases}$, $\begin{cases}A=-\frac{1}{17}\\B=-\frac{1}{68}\end{cases} \Rightarrow y_1=-\frac{1}{17}\sin4x-\frac{1}{68}\cos4x$

$y=A\sin2x+B\cos2x \quad y'=2A\cos2x-2B\sin2x$, $y''=-4A\sin2x-4B\cos2x$

$\begin{cases}-4A-2B=-2\\2A-4B=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\frac{2}{5}\\B=\frac{1}{5}\end{cases} \Rightarrow \quad y_2=\frac{2}{5}\sin2x+\frac{1}{5}\cos2x$

$y=C_1+C_2e^{-x}-\frac{1}{17}\sin4x-\frac{1}{68}\cos4x+\frac{2}{5}\sin2x+\frac{1}{5}\cos2x$

4. (2) $y''+y'=x-2$. $\lambda^2+\lambda=0$ $\lambda=0,-1$. $x(ax+b)$

(4) $y''-y=e^x(x^2-1)$. $\lambda^2-1=0$. $\lambda=\pm 1$. $x(ax^2+bx+c)e^x$

(5) $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$

$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$. $(\lambda+1)^3$ $\lambda=-1$. $x^3(ax+b)e^{-x}$

《高等数学》第十章习题解答

习题10.1

1. 利用柯西收敛原理证明:

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n(n+1)}$收敛.

证. $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k}{k(k+1)}| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n}$. 对任意$\varepsilon > 0$, 令$N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, 则当$n > N$时, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k}{k(k+1)}| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. 由柯西收敛原理, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n(n+1)}$收敛.

(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$发散.

证. $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}}| \ge \frac{p}{\sqrt{n+p}}$. 无论$N$多么大, 取$n = p = N+1$时, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}}| \ge \sqrt{\frac{N+1}{2}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$. 由柯西收敛原理, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$发散.

(3) 设两个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛, 且存在正整数$N$, 使当$n \ge N$时有$a_n \le u_n \le b_n$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛.

证. 对任意的$\varepsilon > 0$, 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛, 所以存在$N' > N$, 使得当$n > N'$时, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$, $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k| < \varepsilon$. 另一方面, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k$. 所以$|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k| < \varepsilon$. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

2. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 又知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散, 问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$是否收敛?

答: 一定发散. 否则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$也收敛.

3. 判断下列级数是否收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. 因为部分和$\sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1$, 在$n \to \infty$时没有极限, 所以级数发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. 因为$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1})$, 在$n \to \infty$时有极限, 所以级数收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^2 \frac{\pi}{n}$. 因为$\lim\limits_{n \to \infty} \cos^2 \frac{\pi}{n} = 1$, 所以级数发散.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.0001}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.0001}=1$, 所以级数发散.

4. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和序列为$\{S_n\}$. 若$n\to\infty$时$\{S_{2n}\}$与$\{S_{2n+1}\}$都收敛且收敛到同一个常数$A$. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证. 对任意的$\varepsilon>0$, 因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=A$, 所以存在$N>0$, 使得当$n>N$时, $|S_{2n}-A|<\varepsilon$, $|S_{2n+1}-A|<\varepsilon$. 于是当$n>N$时, $|S_n-A|<\varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

5. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 且$u_n\geq u_{n+1}\geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

证. 对任意的$\varepsilon>0$, 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 由柯西收敛原理, 存在$N$, 使得当$n>N$时, $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_n<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当$n>N$时, $(2n)u_{2n}\leq 2\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k<\varepsilon$. $(2n+1)u_{2n+1}\leq\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k+\sum\limits_{k=n+1}^{2n+1}u_k<\varepsilon$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

习题10.2

1. 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{4^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{4^n}/\frac{1}{2^n}=\pi$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛, 所以原级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^3+1}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^3+1}}/\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$收敛, 所以原级数收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$, 所以级数发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^2+4n-3}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n^2+4n-3}/\frac{1}{n}=4$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以原级数发散.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n^2+3n+1)^{\frac{n+2}{2}}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n^2+3n+1)^{\frac{n+2}{2}}}/\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3n+1}{n^2})^{-\frac{n+2}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以原级数收敛.

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\ln[\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}/\frac{1}{n^2}]=\lim\limits_{n\to\infty}(3-\ln\ln n)\ln n=-\infty$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(\ln n)^{\ln n}}/\frac{1}{n^2}=0$. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以原级数收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{1}{3^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\tan\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{3}$, 由柯西判别法, 级数收敛.

2. 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{(n+1)!}/\frac{n^5}{n!} = 0$, 由达朗贝尔判别法, 级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3n^2}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{3n^2} = +\infty$, 级数发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\cdot n!}{n^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}/\frac{3^n\cdot n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 3(1+\frac{1}{n})^{-n} = 3e^{-1} > 1$, 由达朗贝尔判别法, 级数发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}/\frac{1}{n} = 1$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散, 所以原级数发散.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3-\frac{1}{n})^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(3-\frac{1}{n})^n}} = \frac{1}{3}$, 由柯西判别法, 级数收敛.

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(\ln n)^n}} = 0$, 由柯西判别法, 级数收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}/\frac{1000^n}{n!} = 0$, 由达朗贝尔判别法, 级数收敛.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}/\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{4}$, 由达朗贝尔判别法, 级数收敛.

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}} = \frac{e}{3} < 1$, 由柯西判别法, 级数收敛.

(10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ $(p > 0)$. 当$p > 1$时, 积分$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} = \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}|_2^{+\infty}$收敛, 所以级数收敛. 当$p = 1$时, 积分$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} = \ln\ln x|_2^{+\infty}$发散, 所以级数发散. 当$0 < p < 1$时, 积分$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} = \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}|_2^{+\infty}$发散, 所以级数发散.

(11) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln\ln n)^q}$ $(q > 0)$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(\ln\ln n)^q}/\frac{1}{n(\ln n)^{1/2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{1/2}}{(\ln\ln n)^q} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{(\ln x)^q} = +\infty$. 级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1/2}}$发散, 所以原级数发散.

3. 证明: 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$也收敛. 反之不一定成立, 试举例说明.

证. 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 所以$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, 所以序列$\{u_n\}$有界. 设$u_n < M$. 则$u_n^2 \le Mu_n$. 由比较判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛.

反之不一定成立, 例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^2$收敛, 但$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散.

4. 证明: 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$也收敛.

证. 由题设条件, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$收敛. 由于$|a_nb_n| \le \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$, $(a_n + b_n)^2 \le$

$2(a_n^2+b_n^2)$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$也收敛. 取$b_n=\frac{1}{n}$, 即得出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛.

5. 证明: 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛, 问下列级数是否发散?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$.

答. (1) 一定发散, 因为$u_n+v_n\geq u_n$, 根据比较判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散. (2) 不一定, 比如$u_n=v_n=\frac{1}{n}$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$收敛到0. (3) 不一定, 比如$u_n=v_n=\frac{1}{n}$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛.

6. 设$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l$, 其中$0<l<+\infty$. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛, 而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

证. 首先$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l>0$意味着当$n$充分大时$u_n>0$. 所以可以假设$u_n>0$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n^2/\frac{1}{n^2}=l^2$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n/\frac{1}{n}=l$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

习题10.3

1. 判断下列级数是否收敛? 条件收敛还是绝对收敛?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2}$. 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2}|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$收敛, 所以原级数绝对收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^p}$ $(p>0)$. 序列$\{\frac{1}{(2n-1)^p}\}$单调趋于0, 所以该交错级数收敛. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$当且仅当$p>1$时收敛, 所以原级数当$p>1$时绝对收敛, 否则条件收敛.

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$. 序列$\{\frac{1}{n\ln n}\}$单调趋于0, 所以该交错级数收敛. 但是级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散, 所以原级数条件收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}-1}{n}$. 原式$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, 右端两个交错级数都收敛, 所以原级数收敛. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}/\frac{1}{\sqrt{n}}=1$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n}$发散. 所以原级数条件收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{3^{n^2}}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{3^{(n+1)^2}}/\frac{n!}{3^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{2n+1}}=0$. 由达朗贝尔判别法, 级数绝对收敛.

(7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}/\frac{1}{n^2}=\pi$, 所以级数绝对收敛.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tan\frac{\varphi}{n}$ $(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$. 当$\varphi=0$时, 级数显然绝对收敛. 否则该级数为交错级数, 且$|\tan\frac{\varphi}{n}|$单调趋于0, 因此级数收敛. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}|\tan\frac{\varphi}{n}|/\frac{1}{n}=|\varphi|$, 级数不绝对收敛.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$. 因此该级数为收敛的交错级数. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}/\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}$, 级数不绝对收敛.

2. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ $(p>0)$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}u_n$均收敛.

证. 数列$\{\frac{1}{n^p}\}$及$\{\frac{n}{n+1}\}$均单调有界, 又因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 由阿贝尔判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}u_n$均收敛.

3. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}$ $(0<\varphi<2\pi)$ 当$p>1$时绝对收敛, 当$0<p\le 1$时条件收敛.

证. (i) 当$p>1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛. 由于$|\frac{\cos n\varphi}{n^p}|\le\frac{1}{n^p}$, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}$绝对收敛. (ii) 设$0<p\le 1$. 由于数列$\{\frac{1}{n^p}\}$单调趋于0, 部分和$\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\varphi$有界, 由狄利克雷判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}$收敛. 同理可证当$\varphi\ne\pi$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\varphi}{2n^p}$收敛. 又由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$发散, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2n\varphi}{2n^p}$发散. 因为$|\frac{\cos n\varphi}{n^p}|\ge\frac{\cos^2 n\varphi}{n^p}=\frac{1+\cos 2n\varphi}{2n^p}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^p}$不绝对收敛.

5. 形如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$的级数称作狄利克雷级数. 证明它有下列性质: 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛(发散), 那么当$x>x_0(x<x_0)$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$也收敛(发散).

证. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$收敛. 当$x>x_0$时, 数列$\{n^{x_0-x}\}$单调有界. 由阿贝尔判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}n^{x_0-x}$收敛.

6. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}u_n$也绝对收敛.

证. $|\frac{2n-1}{n}u_n|\le 2|u_n|$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛意味着级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}|u_n|$也收敛.

习题10.4

1. 求下列级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$. 当且仅当$|\ln x|<1$时级数收敛, 所以收敛域为$(e^{-1},e)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(\frac{1-x}{1+x})^n$. 当且仅当$\frac{1-x}{1+x}\in[-1,1)$时级数收敛, 所以收敛域为$(0,+\infty)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{3^n}$. 当$|x|\le\frac{1}{3}$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{3^n}\ne 0$, 所以级数发散. 当$|x|>\frac{1}{3}$时, $|\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{3^n}|\le\frac{1}{|x|^n}\frac{\pi}{3^n}$, 由比较判别法可知, 级数绝对收敛. 所以收敛域为$(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},+\infty)$.

2. 讨论下列函数序列在所示区间内的一致收敛性.

(1) $f_n(x)=\frac{1}{2^n+x^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 由于$|f_n(x)-0|\le\frac{1}{2^n}$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, 所以函数序列一致收敛.

(2) $f_n(x)=\sqrt{x^4+e^{-n}}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\sqrt{x^4}=x^2$. 由于$|f_n(x)-x^2|=\frac{e^{-n}}{\sqrt{x^4+e^{-n}}+x^2}\le\frac{e^{-n}}{\sqrt{e^{-n}}}=e^{-\frac{n}{2}}$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{n}{2}}=0$, 所以函数序列一致收敛.

(3) $f_n(x)=\ln(1+\frac{x^2}{n^2})$, (a) $-l<x<+l$, (b) $-\infty<x<+\infty$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. (a) 由于$|f_n(x)-0|\le\frac{x^2}{n^2}<\frac{l^2}{n^2}$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{l^2}{n^2}=0$, 所以函数序列在区间$(-l,l)$上一致收敛. (b) 取$x_n=n$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-0]=\ln 2$ 所以函数序列在区间$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

(4) $f_n(x)=\frac{n^2x}{1+n^2x}$, $0<x<1$.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1$. 取$x_n=\frac{1}{n^2}$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-1]=-\frac{1}{2}$ 所以函数序列不一致收敛.

3. 讨论下列级数在所示区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}|\le\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}}$, 由$M$判别法, 级数一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1})$, $-1\le x\le 1$.

解. $|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1})|=|\frac{x^{n+1}}{n+1}|\le\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 所以级数一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{1+(x^2+n^2)^3}}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $|\frac{\sin nx}{\sqrt{1+(x^2+n^2)^3}}|\le\frac{1}{n^3}$, 由$M$判别法, 级数一致收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+4n^4x^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

解. $1+4n^4x^2 \geq 4n^2|x|$, 所以$|\frac{x}{1+4n^4x^2}| \leq \frac{1}{4n^2}$, 由$M$判别法, 级数一致收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^n}$, $-\infty < x < +\infty$.

解. $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^k} = \frac{x}{(1+x)^n} \leq \frac{x}{1+nx} \leq \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 所以级数一致收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

解. $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 所以函数序列$\{\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\}$一致收敛到0. 因为$\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$关于$n$单调, 且$|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x \cdot \sin kx| = |\cos\frac{x}{2} \cdot [\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x]| \leq 2$, 根据狄利克雷判别法, 级数一致收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^2 e^{-nx^2}$, $-\infty < x < +\infty$.

解. $|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^2 e^{-kx^2}| = \frac{x^2 e^{-nx^2}}{e^{x^2}+1} \leq x^2 e^{-nx^2} \leq \frac{e^{-1}}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-1}}{n} = 0$, 所以级数一致收敛.

4. 证明级数$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \sin 2^n x$在$(-\infty, +\infty)$中一致收敛, 且有连续的导函数.

证. (i) $|3^{-n} \sin 2^n x| \leq 3^{-n}$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \sin 2^n x$一致收敛.

(ii) $|(3^{-n} \sin 2^n x)'| = |(\frac{2}{3})^n \cos 2^n x| \leq (\frac{2}{3})^n$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3^{-n} \sin 2^n x)'$一致收敛. 于是$f(x)$有连续的导函数.

5. 证明级数$g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在$(-\infty, +\infty)$中不一致收敛, 但在任意闭区间$[-M, M]$ $(M > 0)$上一致收敛, 并证明$g(x)$在$(-\infty, +\infty)$中有连续的导函数.

证. (i) 取$x_n = 3^{n+1}$, 则$|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} 2^k \sin\frac{x_n}{3^k}| \geq 2^{n+1} \sin 1 > \sin 1$, 所以级数在$(-\infty, +\infty)$中不一致收敛.

(ii) 当$x \in [-M, M]$时, $|2^n \sin\frac{x}{3^n}| \leq |2^n \cdot \frac{x}{3^n}| \leq M(\frac{2}{3})^n$. 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$在闭区间$[-M, M]$上一致收敛.

(iii) $|(2^n \sin\frac{x}{3^n})'| = |(\frac{2}{3})^n \cos\frac{x}{3^n}| \leq (\frac{2}{3})^n$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2^n \sin\frac{x}{3^n})'$在区间$(-\infty, +\infty)$上一致收敛. 于是$g(x)$在区间$(-\infty, +\infty)$上有连续的导函数.

6. 证明级数$\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$在任意区间$[1+\delta, +\infty)$中一致收敛$(\delta > 0)$, 并证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$在任意区间$[1+\delta, +\infty)$中一致收敛$(\delta > 0)$, 从而导出函数$\zeta(x)$在$(1, +\infty)$中有连续的导函数.

证. (i) 当$x \in [1+\delta, +\infty]$时, $\frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^{1+\delta}}$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$在区间$[1+\delta, +\infty)$中一致收敛.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\delta/2}} = 0$, 所以存在$M > 0$, 使得$\frac{\ln n}{n^{\delta/2}} < M$. 于是当$x \in [1+\delta, +\infty]$时, $\frac{\ln n}{n^x} \le \frac{\ln n}{n^{1+\delta}} \le \frac{M}{n^{1+\delta/2}}$, 根据$M$判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$在区间$[1+\delta, +\infty)$中一致收敛.

(iii) 综上所述, 在任意区间$(1+\delta, +\infty)$上, $\zeta(x)$有连续的导函数$\zeta'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^x})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^x}$. 所以$\zeta'(x)$在区间$(1, +\infty)$上连续.

8. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$在$[0, +\infty)$中一致收敛, 并有$\lim\limits_{x\to 0+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

证. 当$x \in [0, +\infty)$时, $\frac{1}{n^x}$关于n单调, 且$\frac{1}{n^x} \le 1$. 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 根据阿贝尔判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$在$[0, +\infty)$中一致收敛. 于是$\lim\limits_{x\to 0+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{a_n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

习题10.5

1. 求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} / \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{2}$, 收敛半径为2.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)!} / \frac{n^k}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^k \cdot \frac{1}{n+1} = 0$, 收敛半径为$+\infty$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} / \frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{-n} = e^{-1}$, 收敛半径为$e$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} / \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4}$, 收敛半径为4.

2. 求下列幂级数的收敛区间与收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} / \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1$, 故收敛区间为$(-1, 1)$. 又$x = 1$时级数发散, $x = -1$时交错级数收敛, 所以收敛域为$[-1, 1)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{na^n}$ $(a > 0)$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{na^n}} = \frac{1}{a}$, 故收敛区间为$(-a, a)$. 又$x = a$时级数发散, $x = -a$时交错级数收敛, 所以收敛域为$[-a, a)$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)\cdot(2n+3)!} / \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)\cdot(2n+1)!} = 0$, 故收敛区间和收敛域皆为$(-\infty, +\infty)$.

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$. 等比级数, 当且仅当$x^2 < 1$时收敛, 故收敛区间和收敛域皆为$(-1,1)$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^{-n}+5^{-n})x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{-n}+5^{-n}} = \frac{1}{3}$, 故收敛区间为$(-3,3)$. 又$x = \pm 3$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(3^{-n}+5^{-n})x^n \neq 0$, 级数发散, 所以收敛域为$(-3,3)$.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+e^{-n})x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}+e^{-n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}(1+\frac{n}{e^n})} = 1$, 故收敛区间为$(-1,1)$. 当$x = 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}$发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}x^n$收敛, 所以原级数发散. 当$x = -1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}x^n$均收敛, 所以原级数收敛. 所以收敛域为$[-1,1)$.

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$. $1 \le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \le n$, 由夹逼定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$, 故收敛区间为$(-1,1)$. 又$x = \pm 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n = \infty$, 级数发散, 所以收敛域为$(-1,1)$.

3. 求下列幂函数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

解. 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$的和函数为$\frac{x}{1-x}$, 收敛半径为1. 所以级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'$的和函数为$(\frac{x}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$, 收敛半径为1. 当$x = \pm 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)x^n = \infty$, 级数发散. 所以级数的收敛域为$(-1,1)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

解. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}$的和函数为$\frac{x}{1+x^2}$, 收敛半径为1. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x^{2n-1})'$的和函数为$(\frac{x}{1+x^2})' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, 收敛半径为1. 当$x = \pm 1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} = \infty$, 级数发散. 所以级数的收敛域为$(-1,1)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

解. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)})' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数为$\ln(1+x)$, 收敛半径为1. 当$x = 0$时原级数为0, 所以原级数的和函数为$\int_0^x \ln(1+t)dt = (1+x)\ln(1+x) - x$, 收敛半径为1. 当$x = \pm 1$时, 级数绝对收敛, 所以收敛域为$[-1,1]$. 和函数在$x = -1$时补充定义为它在该点的右极限1.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$.

解. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$的和函数为$xe^{x^2}$, 收敛半径为$+\infty$. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n+1}}{n!})'$的和函数为$(xe^{x^2})' = (1+2x^2)e^{x^2}$, 收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

习题10.6

1. 利用已知的初等函数的展开式, 求下列函数在$x=0$处的幂级数展开式, 并指出收敛域.

(1) $\frac{x}{16+x^2} = \frac{x}{16}\frac{1}{1+\frac{x^2}{16}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{16^{n+1}}$, $x\in(-4,4)$.

(2) $e^{x^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $\frac{1}{a+x}$ $(a\neq 0)$. $\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x}{a}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{a^{n+1}}$, $x\in(-|a|,|a|)$.

(4) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x) = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x\in(-1,1)$.

(5) $(1+x)e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!} = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1-n}{n!}x^n$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(6) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{x^n-(-x)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(8) $\sin(\frac{\pi}{4}+x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}]$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(9) $\ln(1+x-2x^2) = \ln(1-x)+\ln(1+2x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n+(2x)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n$, $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(10) $\frac{5x-12}{x^2+5x-6} = \frac{6}{6+x}+\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+\frac{x}{6}}+\frac{1}{1-x} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+(-6)^{-n})x^n$, $x\in(-1,1)$.

2. 利用逐项微分法和逐项积分法, 求下列函数在$x=0$处的幂级数展开式.

(1) $\arctan x$.

解. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, 收敛半径为1. 又因为$\arctan 0 = 0$, 所以$\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 收敛半径为1. 当$x=\pm 1$时级数收敛, 所以收敛域为$[-1,1]$.

(2) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解. $\frac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^{2n} = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$, 收敛半径为1. 又因为$\ln(0+\sqrt{1+0^2}) = 0$, 所以$\ln(x+$

$\sqrt{1+x^2}) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 收敛半径为1. 因为序列$\{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\}$单调递减, 又序列$\{\frac{1}{2n+1}\}$单调递减趋于0, 所以当$x = \pm 1$时级数为收敛的交错级数, 所以收敛域为$[-1,1]$.

3. 证明级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{1}{x}(e^x-1)$ $(x \neq 0)$, 并证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1$.

证. 当$x \neq 0$时, $\frac{1}{x}(e^x-1) = \frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$. 于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{d}{dx}(\frac{e^x-1}{x}) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$. 代入$x=1$, 得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = 1$.

第十章总练习题

3. 设有$\alpha > 0$使得$n \geq N$时$\ln\frac{1}{a_n} \geq (1+\alpha)\ln n$, 其中$a_n > 0$. 试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

证. 当$n \geq N$时, 因为$\ln\frac{1}{a_n} \geq (1+\alpha)\ln n$, 所以$\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\alpha}$, 所以$a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$. 由比较判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

9. 设$y = f(x)$在(x_0-a, x_0+a) $(a > 0)$中有定义,有任意阶导数, 且$|f^{(n)}(x)| \leq M$ (M为常数). 证明: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ $(x_0 - a < x < x_0 + a)$.

证. $f(x)$在$x = x_0$点的泰勒级数的拉格朗日余项为$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}$. 于是当$x \in (x_0-a, x_0+a)$时, $|R_n(x)| \leq \frac{Ma^n}{(n+1)!}$, 于是$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x) = 0$, 所以$f(x)$的泰勒级数收敛到$f(x)$.

《高等数学》第十一章习题解答

习题11.1

1. 判别下列广义积分的敛散性; 若收敛, 求出其值.

(1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})|_0^{+\infty} = 1$.

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \ln \frac{x+1}{x+2}|_0^{+\infty} = \ln 2$.

(3) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{x-a=\sqrt{2}\sigma t}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 1\ (\sigma > 0)$.

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx \overset{u=x-x^{-1}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan u|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(5) $\int_0^{+\infty} x\sin xdx = (-x\cos x + \sin x)|_0^{+\infty}$, 发散.

(6) $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \overset{t=\sqrt{x-1}}{=} \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2dt}{t^2+1} = 2\arctan t|_{\sqrt{3}}^{+\infty} = \frac{\pi}{3}$.

(8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}dx = \arctan(x+1)|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.

(9) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xdx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

(10) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{x=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$.

(11) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x|_0^{\frac{1}{2}}$, 发散.

(12) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\ln 2}$.

3. 判断下列积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+3}}$. 因为$\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x^4+3}} < \frac{1}{x^2}$, 且积分$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$收敛, 原积分收敛.

(2) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+6}$. 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+6}/\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, 且积分$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$发散, 原积分发散.

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}+x^3}$. 因为$\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}+x^3}/\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{3}$, 且积分$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$收敛, 原积分收敛.

(4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$. 因为$\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}/\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim\limits_{x\to1} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, 且积分$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$收敛, 原积分收敛.

(5) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$. 因为$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x^{3/2}}/\frac{1}{x^{1/2}} = 1$, 且积分$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$收敛, 原积分收敛.

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 积分无瑕点. 因为当$x \to +\infty$时, 函数$\frac{1}{x}$单调趋于0, 且$|\int_0^A \sin xdx| \leq 2$, 根据狄利克雷判别法, 原积分收敛.

(7) $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x^2}dx\ (\alpha > 0)$. 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha e^{-x^2}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = 0$, 且积分$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$收敛, 原积分收敛.

(8) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$, 1不是瑕点. 因为$\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln x}{1-x}/\ln x = 1$, 且积分$\int_0^1 \ln xdx = (x\ln x - x)|_0^1 = -1$收敛, 原积分收敛.

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$. 0与$\frac{\pi}{2}$是瑕点. 因为$\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}/\frac{1}{x^2} = 1$, 且积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^2}$发散, 原积分发散.

4. 判断下列积分是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+3}dx$.

解. 当n为非负整数时, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+3}dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sqrt{n\pi}|\cos x|}{(n+1)\pi+3}dx = \frac{2\sqrt{n\pi}}{(n+1)\pi+3}$. $\int_0^{n\pi}\frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+3}dx \geq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\sqrt{k\pi}}{(k+1)\pi+3}$. 所以积分$\int_0^A\frac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+3}dx$无界, 原积分不绝对收敛.

因为$(\frac{\sqrt{x}}{x+3})' = \frac{3-x}{2\sqrt{x}(x+3)^2}$, 所以当$x$充分大时, 函数$\frac{\sqrt{x}}{x+3}$单调递减. 由于$x \to +\infty$时, $\frac{\sqrt{x}}{x+3} \to 0$, 又因为$|\int_0^A \cos x dx| \leq 2$, 由狄利克雷判别法, 原积分收敛.

综上所述, 原积分条件收敛.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(3x+2)}{\sqrt{x^3+1}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$.

解. 因为$|\frac{\cos(3x+2)}{\sqrt{x^3+1}\sqrt[3]{x^2+1}}| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}}}$, 且积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}}}$收敛, 原积分绝对收敛.

5. 叙述关于瑕积分的狄利克雷判别法及阿贝尔判别法.

(i) 狄利克雷判别法: 设函数$f(x), g(x)$在$(a,b]$上有定义, 且a是它们的瑕点. 设存在常数$M > 0$, 使得对一切$0 < \varepsilon < b-a$, $|\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx| \leq M$. 又设函数$g(x)$在$x \to a+0$时单调趋于0, 则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛.

(ii) 阿贝尔判别法: 设函数$f(x), g(x)$在$(a,b]$上有定义, 且a是它们的瑕点. 若瑕积分$\int_a^b f(x)dx$收敛, 且函数$g(x)$在$(a,b]$上单调有界, 则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)dx$收敛.

习题11.2

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{k\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. 以$\varphi, k$为变量的二元函数$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$在$[0,\frac{\pi}{2}]\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上连续, 因此原式$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim\limits_{k\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\lim\limits_{k\to 1-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi$. 以$\varphi, k$为变量的二元函数$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$在$[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$上连续, 因此原式$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\lim\limits_{k\to 1-0}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi = 1$.

(4) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$. 二元函数$\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$在全平面上连续, 所以$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. 又因为$|\int_1^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}| \leq |\int_1^{1+\alpha}dx| = |\alpha|$, 所以$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_1^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = 0$. 综上所述, 原式$= \frac{\pi}{4}+0 = \frac{\pi}{4}$.

(5) $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1\frac{e^x\sin xy}{y+1}dx$. 以$x, y$为变量的二元函数$\frac{e^x\sin xy}{y+1}$在$[0,1]\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上连续, 因此原式$= \int_0^1\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^x\sin xy}{y+1}dx = \int_0^1 0dx = 0$.

2. 求下列函数的导函数.

(1) $g(y) = \int_{a-ky}^{a+ky}f(x)dx$, 其中$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

解. $g'(y) = kf(a+ky)+kf(a-ky)$.

(2) $g(y) = \int_{\sin y}^{\cos y}e^{y\sqrt{1-x^2}}dx$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

解. $g'(y)=-\sin y e^{y\sin x}-\cos y e^{y\cos y}+\int_{\sin y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}}dx$.

(3) $g(y)=\int_0^y\frac{\ln(1+xy)}{x}dx$, $0<y<+\infty$.

解. $g'(y)=\frac{\ln(1+y^2)}{y}+\int_0^y\frac{1}{1+xy}dx=\frac{\ln(1+y^2)}{y}+\frac{\ln(1+xy)}{y}|_0^y=\frac{2\ln(1+y^2)}{y}$.

(4) $g(y)=\int_0^{y^2}\sin(x^2+y^2)dx$, $-\infty<y<+\infty$.

解. $g'(y)=2y\sin(y^4+y^2)+\int_0^{y^2}2y\cos(x^2+y^2)dx$.

3. 利用积分号下求导数的方法求下列积分.

(1) $g(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$, $-\infty<a<+\infty$.

解. 当$(x,a)\to(0,a_0)$时, $\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}=\frac{a\cdot\arctan(a\tan x)}{a\tan x}\to a_0$.
当$(x,a)\to(\frac{\pi}{2},a_0)$时, 由夹逼定理, $\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\to 0$.
因此补充定义后, 以x,a为变量的二元函数$\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}$在$[0,\frac{\pi}{2}]\times\mathbb{R}$上连续.
所以$g'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$.
当$a>0$且$a\neq 1$时, $g'(a)\overset{t=\tan x}{=}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}=\frac{1}{1-a^2}(\arctan t-a\arctan at)|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2(a+1)}$. 注意到$g'(a)$是处处连续的偶函数, 故$g'(a)=\frac{\pi}{2(|a|+1)}$. 又因为$g(0)=0$, 积分可得$g(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\cdot\ln(|a|+1)$.

(2) $g(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$, $-1<a<1$.

解. 当$(x,a)\to(\frac{\pi}{2},a_0)$时, $a\cos x\to 0$, $\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{1}{a\cos x}\to 2$. 补充定义后, 以$x,a$为变量的二元函数$\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$在$[0,\frac{\pi}{2}]\times(-1,1)$上连续. 所以$g'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x}\overset{t=\tan x}{=}\int_0^{+\infty}\frac{2dt}{1-a^2+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. 因为$g(0)=0$, 所以$g(a)=\pi\arcsin a$.

(3) $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+\cos^2 x)dx$, $a\neq 0$.

解. 二元函数$\ln(a^2\sin^2 x+\cos^2 x)$在$a\neq 0$时连续, 所以$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x dx}{a^2\sin^2 x+\cos^2 x}$.
当$a>0$且$a\neq 1$时, $I'(a)\overset{t=\tan x}{=}2a\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}=\frac{2a}{a^2-1}(\arctan t-\frac{1}{a}\arctan at)|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{a+1}$. 注意到$I'(a)$在$a\neq 0$时连续, 故等式$I'(a)=\frac{\pi}{a+1}$在$a=1$处亦成立. 又因为$I(1)=0$, 所以当$a>0$时$I(a)=\pi\ln\frac{a+1}{2}$. 又因为$I(a)$是偶函数, 所以$I(a)=\pi\ln\frac{|a|+1}{2}$.

习题11.3

1. 讨论下列积分在指定区间上的一致收敛性.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}dx$, $(-\infty<t<+\infty)$.

解. $|\frac{\sin tx}{1+x^2}|\leq\frac{1}{1+x^2}$, 且积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分一致收敛.

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-t^2x^2}dx$, $(0<t_0<t<+\infty)$.

解. 当$t>t_0>0$时, $|e^{-t^2x^2}|\leq e^{-t_0^2x^2}$, 积分$\int_0^{+\infty}e^{-t_0^2x^2}dx$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$(t_0,+\infty)$上一致收敛.

(3) $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x dx$, (i) $(0<\alpha_0\leq\alpha\leq+\infty)$, (ii) $(0<\alpha\leq+\infty)$.

解. (i) 当$x\in[0,+\infty)$且$0<\alpha_0\le\alpha\le+\infty$时, $|e^{-\alpha x}\sin x|\le e^{-\alpha_0 x}$, 积分$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$[\alpha_0,+\infty)$上一致收敛.

(ii) 当$\alpha>0$时, $\int_A^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx=\frac{-e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}|_A^{+\infty}=\frac{e^{-\alpha A}(\alpha\sin A+\cos A)}{1+\alpha^2}$. 则不论$M$多么大, 取$\alpha=\frac{1}{M}$及$A=2k\pi$使得$M<A<2M$时, $|\int_A^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx|>\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$. 所以原积分在区间$(0,+\infty)$上不一致收敛.

(4) $\int_1^{+\infty}e^{-bx}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$, $(0\le b<+\infty)$.

解. e^{-bx}是x的单调函数, 且$|e^{-bx}|\le 1$. 积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$收敛. 由阿贝尔判别法, 原积分在区间$[0,+\infty)$上一致收敛.

(5) $\int_0^{+\infty}te^{-tx}dx$, (i) $(0<c\le t\le d)$, (ii) $(0<t\le d)$.

解. (i) 当$x\in[0,+\infty)$且$0<c\le t\le d$时, $|te^{-tx}|\le de^{-cx}$, 积分$\int_0^{+\infty}de^{-ct}dx$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$[c,d]$上一致收敛.

(ii) 当$t>0$时, $\int_A^{+\infty}te^{-tx}dx=-e^{-tx}|_A^{+\infty}=e^{-tA}$. 则不论$M$多么大, 取$t=\frac{1}{M}$, $A=2M$时, $\int_A^{+\infty}te^{-tx}dx=e^{-\frac{1}{2}}$. 所以原积分在区间$(0,d]$上不一致收敛.

(6) $\int_0^1\frac{dx}{x^t}$, $(0<t\le b<1)$.

解. 当$x\in(0,1]$且$0<t\le b<1$时, $|\frac{1}{x^t}|\le\frac{1}{x^b}$, 积分$\int_0^1\frac{dx}{x^b}$收敛, 根据$M$-判别法, 原积分在区间$(0,b]$上一致收敛.

2. 求下列积分的值.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, $(0<a<b)$.

解. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-tx}dt$. 因为积分$\int_0^{+\infty}e^{-tx}dx$在区间$[a,b]$上一致收敛, 所以原式$=\int_a^b dt\int_0^{+\infty}e^{-tx}dx=\int_a^b\frac{1}{t}dt=\ln\frac{b}{a}$.

(2) $\int_0^1\frac{x^a-x^b}{\ln x}dx$, $(a>-1,b>-1)$.

解. 不失一般性, 假设$a>b$. $\int_0^1\frac{x^a-x^b}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_b^a x^t dt$. 因为积分$\int_0^1 x^t dx$在区间$[b,a]$上一致收敛, 所以原式$=\int_b^a dt\int_0^1 x^t dx=\int_b^a\frac{1}{1+t}dt=\ln\frac{1+a}{1+b}$.

(3) $\int_{-\frac{1}{4}}^{+\infty}e^{-(2x^2+x+1)}dx$.

解. 设$t=\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})$, 原式$=\int_0^{+\infty}e^{-t^2-\frac{7}{8}}\frac{dt}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{7}{8}}$.

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cdot\cos\beta x}{x}dx$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

解. 原式$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x}{2x}dx=\frac{\pi}{4}(1+\mathrm{sgn}(\alpha-\beta))$.

3. 求积分$\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{\sin tx}{x}dx$的初等函数表达式.

解. 将积分记做$I(t)$. 当$t\in[-a,a]$且$x\in(0,+\infty)$时, $|e^{-x}\frac{\sin tx}{x}|\le|e^{-x}t|\le ae^{-x}$, 积分$\int_0^{+\infty}ae^{-x}dx$收敛, 所以积分$I(t)$在区间$[-a,a]$上一致收敛. 所以当$t\in(-a,a)$时, $I'(t)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos txdx=\frac{e^{-x}(t\sin tx-\cos tx)}{1+t^2}|_0^{+\infty}=\frac{1}{1+t^2}$. 由$a$的任意性, 及等式$I(0)=0$, 得$I(t)=\arctan t$, $t\in\mathbb{R}$.