题1: $\boxed{-2x+y-x^2+y^2+z+\sin z=0}$ $(0,0,0)$附近 $z=f(x,y)$

考点: 隐函数定理、隐函数求导、二元泰勒公式

$F(x,y,z)=0$ $\hookrightarrow z=f(x,y)$ 给定局部

① 在$(0,0,0)$附近 F有定义
② $\partial_x F$, $\partial_y F$, $\partial_z F$ 在$(0,0,0)$附近连续
③ $\partial_z F(0,0,0)\neq 0$

- $F(x,y,z)=-2x+y-x^2+y^2+z+\sin z$

① √ ② √ ③ $\partial_z F=1+\cos z \Rightarrow \partial_z F(0,0,0)=2\neq 0$

由隐函数定理, $F(x,y,z)=0$ 在点$(0,0,0)$附近唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$

- 写出$z=f(x,y)$展开到一次的泰勒公式 (在$(0,0,0)$附近)

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$$f(x,y)=f(0,0)+\boxed{\partial_x f(0,0)}\cdot(x-0)+\boxed{\partial_y f(0,0)}(y-0)+o(\rho)$$

$(x,y)\to(0,0)$

$$\partial_x f(0,0)=-\frac{\partial_x F(0,0,0)}{\partial_z F(0,0,0)}=\frac{-(-2)}{2}=1$$

$$\partial_y f(0,0)=-\frac{\partial_y F(0,0,0)}{\partial_z F(0,0,0)}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

代入 $f(x,y)=0+1\cdot x-\frac{1}{2}\cdot y+o(\rho)=x-\frac{y}{2}+o(\rho)$

题2. (1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\sin x^2)(\cos x-e^{x^2})}$ $\frac{0}{0}$ 考点：泰勒公式

展开到最低阶非零项

$\sin x^2 \sim x^2$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=1$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\cdot(\cos x-e^{x^2})}$$

$$\cos x-e^{x^2}=\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right]-\left[1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right]$$

$$=-\frac{3}{2}\boxed{x^2}-\frac{11x^4}{24}+o(x^4)=-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

最低次非零项

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dots$

分母 $\boxed{x^2(\cos x-e^{x^2})=-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}$

$$\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\left[1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right]=\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

分母 $\boxed{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}=\frac{x^4}{8}+o(x^4)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2(\cos x-e^{x^2})}=\frac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{12}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\boxed{\int_0^x e^{t^2}dt}}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

考点：洛必达法则

$\frac{\infty}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$：通分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt-e^x+1}{\sin x(e^x-1)}$$

$\sin x\sim x\sim e^x-1$

（等价无穷小）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt-e^x+1}{x^2}$$

（洛必达）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x\int_0^x e^{t^2}dt+e^{x^2}\sin x-e^x}{2x}$$

$\frac{1+1\cdot 0+0-1}{0}=\frac{0}{0}$

（洛必达）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\sin x\int_0^x e^{t^2}dt+e^{x^2}\cos x+e^{x^2}\cos x-2xe^{x^2}\sin x-e^x}{2}$$

$$=\frac{-0-0\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 1-2\cdot 0\cdot 1\cdot 0-1}{2}=\frac{1}{2}$$

题3 ① $\boxed{\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}} \Rightarrow L$ 过点 $(1,2,3)$ 且垂直于 L

解析几何：送分题

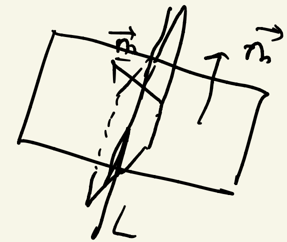
平面：一个点 $(1,2,3)$ + 法向量 $\vec{n}$

设待求平面 Σ 法向量为 $\vec{n}$，则 $\vec{n} \parallel L$

计算 L 的方向向量

$$\vec{t} = (1,1,1)\times(1,-2,-1)$$

$$= \left(\begin{vmatrix}1&1\\-2&-1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix} \right) = (1,2,-3)$$



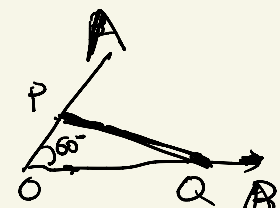
一般方程

$x+2y-3z=-4$

$\vec{n}=(1,2,-1) \Rightarrow (1,2,-3)\cdot(x-1,y-2,z-3)=0$

② $\langle \vec{OA},\vec{OB}\rangle = \frac{\pi}{3}$ $|\vec{OA}|=1$ $|\vec{OB}|=2$ $\vec{OP}=(1-\lambda)\vec{OA}$ $\vec{OQ}=\lambda\vec{OB}$

求 $|\vec{PQ}|$ 最小值时 λ



$$|\vec{PQ}| = |\vec{OQ}-\vec{OP}| = \sqrt{(\vec{OQ}-\vec{OP},\ \vec{OQ}-\vec{OP})}$$

$$|\vec{PQ}|^2 = |\vec{OQ}|^2+|\vec{OP}|^2-\vec{OP}\cdot\vec{OQ}-\vec{OQ}\cdot\vec{OP}$$

$$=(2\lambda)^2+(1-\lambda)^2-2\vec{OP}\cdot\vec{OQ}$$

$$=4\lambda^2+(1-\lambda)^2-2\cdot(1-\lambda)\cdot 2\lambda\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 4\lambda^2+(1-\lambda)^2-2\lambda(1-\lambda)$$

$$=7\lambda^2-4\lambda+1$$

$g(\lambda)=7\lambda^2-4\lambda+1$：开口向上抛物线

$\boxed{\lambda=\frac{2}{7}}$ 时 $g(\lambda)=7\lambda^2-4\lambda+1$ 最小

题24 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x^4+y^2} & y\neq 0\\ 1 & y=0\end{cases}$

考点：可微性、分段函数求偏导

分段函数可微性

证不可微 $\begin{cases}\text{① 不可偏导}\\ \text{② 不连续}\\ \text{③ 用定义}\end{cases}$

① 偏导数

$$\partial_x f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-1}{\Delta x}=0$$

$$\partial_y f(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{(\Delta y)^2}{0+(\Delta y)^2}-1}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1-1}{\Delta y}=0$$

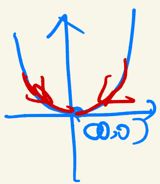
两个偏导数均存在

② 可微性　证 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ $\boxed{\text{不连续}}$ ⇒ 不可微，即证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$\Uparrow$

多路径趋近



① 取 $y=0$　$x\to 0$　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} 1=1$

② 取 $y=x^2$　$x\to 0$　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 发散，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续

题5: $f(x,y)=2x^3-3x^2-6xy(x-y-1)$

考点: 二元极值问题

$\boxed{\begin{array}{l}\text{极大值点 } (-1,-1) \\ \text{极小值点 } (1,0)\end{array}}$

① 定义域 $\mathbb{R}^2$

② 找"极值点候选人"

$\partial_x f=6x^2-6x-12xy+6y(y+1)=6(x-y)^2-6(x-y)$ ①

$\partial_y f=-6x^2+12xy+6x$ ②

令 $\partial_x f=\partial_y f=0$ ①推 $x-y=0$ 或 1

(i) $x-y=0$

代入② $-6x^2+12x^2+6x=0 \Rightarrow x=0$ 或 -1

(ii) $x-y=1$

代入② $-6x^2+12x(x-1)+6x \Rightarrow x=0$ 或 1

$=6x^2-6x=0$

综上, 找到四个驻定点:

$(0,0),(-1,-1),(1,0),(0,-1)$

③ 用二阶条件判定驻定点是否为极值点.

$A=\partial_{xx}f$ $B=\partial_{xy}f$ $C=\partial_{yy}f$

	$(0,0)$	$(-1,-1)$	$(1,0)$	$(0,-1)$
A	-1	-1	1	1
B	1	1	-1	-1
C	0	-2	2	0
B^2-AC	1	-1	-1	1
类型	不是	极大	极小	不是

题6： $a^y - a^x > a^x \ln a(\cos x - \cos y)$ $a>e$

考点：中值定理

柯西中值定理

$$\frac{a^y - a^x}{\cos x - \cos y} = \frac{a^y - a^x}{(-\cos y) - (-\cos x)} = \boxed{\frac{a^\xi \ln a}{\sin \xi}} > a^x \ln a \quad \xi \in (x, y)$$

$$\frac{a^\xi \ln a}{\sin \xi} > a^\xi \ln a > a^x \ln a$$

$(x, y) \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \xi \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Downarrow$

$0 < \sin\xi < 1$

题7: $f(x)=x\sin(x^2-2x)$　考点: 泰勒公式 (ø佳!)

$x=1$处泰勒展开

令 $y=x-1$

$y^2-1\to -1$ $(y\to 0)$

$g(y)=\boxed{(y+1)}\boxed{\sin(y^2-1)}$

非 $x=0$ 处泰勒公式, 优先换元处法

对 $g(y)$ 在 $y=0$ 写马克劳林公式

差角公式

$y^2\to 0$ $(y\to 0)$

$g(y)=(y+1)\left[\sin(\boxed{y^2})\cos 1-\cos(y^2)\sin 1\right]$

$=(y+1)\left[\cos 1\cdot\left(y^2-\frac{y^6}{6}\cdots+(-1)^n\frac{y^{4n+2}}{(2n+1)!}\right)-\sin 1\cdot\left(1-\frac{y^4}{2}+\frac{y^8}{24}\cdots+(-1)^n\frac{y^{4n}}{(2n)!}\right)+o(y^{4n+3})\right]$

$=\left[-\sin 1+y^2\cos 1+\frac{\sin 1}{2}\cdot y^4-\frac{\cos 1}{6}y^6\cdots\cdots-(-1)^n\frac{y^{4n}\sin 1}{(2n)!}+(-1)^n\frac{y^{4n+2}}{(2n+1)!}\cos 1\right]$

$+\left[-y\sin 1+y^3\cos 1+\frac{\sin 1}{2}y^5-\frac{\cos 1}{6}y^7\cdots-(-1)^n\frac{y^{4n+1}\sin 1}{(2n)!}+(-1)^n\frac{y^{4n+3}}{(2n+1)!}\cos 1\right]$

$+o(y^{4n+3})$

用 $x-1$ 替换 y

$=-\sin 1-\sin 1(x-1)+\cos 1(x-1)^2+\cos 1(x-1)^3+\frac{\sin 1}{2}(x-1)^4+\frac{\sin 1}{2}(x-1)^5-\frac{\cos 1}{6}(x-1)^6-\frac{\cos 1}{6}(x-1)^7$

$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\sin 1}{(2n)!}(x-1)^{4n}+(-1)^{n-1}\frac{\sin 1}{(2n)!}(x-1)^{4n+1}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!}(x-1)^{4n+2}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!}(x-1)^{4n+3}$

余项 $o((x-1)^{4n+3})$

计算高阶导数

$f^{(4n)}(1)=(-1)^{n-1}\frac{\sin 1}{(2n)!}(4n)!$

$f^{(4n+1)}(1)=(-1)^{n-1}\frac{\sin 1}{(2n)!}(4n+1)!$

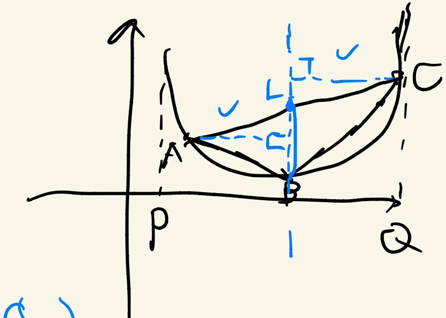
$f^{(4n+2)}(1)=(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!}(4n+2)!$

$f^{(4n+3)}(1)=(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!}(4n+3)!$

题8: $y=f(x)$

A $(a,f(a))$
B $(b,f(b))$
C $(c,f(c))$

$a<b<c$



$f''(x)>1$

凹函数

$S_{\triangle ABC}=\frac{|BL|}{2}\cdot(c-a)$

直线AC的方程

$y-f(a)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-a)$

点L坐标 $\left(b,f(a)+\frac{b-a}{c-a}(f(c)-f(a))\right)$

$=\frac{c-a}{2}\times\left|\frac{b-a}{c-a}(f(c)-f(a))+f(a)-f(b)\right|$

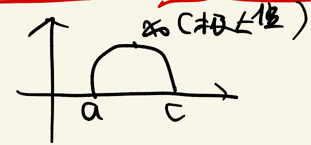
$=\frac{1}{2}\left|(b-a)(f(c)-f(a))+(c-a)(f(a)-f(b))\right|$ 面积表达式

不妨固定a,c，令b在(a,c)任取，将$S_{\triangle ABC}$面积看作关于b函数

令$T(x)=(x-a)(f(c)-f(a))+(c-a)(f(a)-f(x))$

则 $T(a)=T(c)=0$ $\quad T''(x)=-(c-a)f''(x)<-(c-a)\Rightarrow T$为凸函数

我们希望借此了解T极值信息.



$T(x_0)>0$

$P(a)=P(c)=0 \qquad P''(x)\le a-c \qquad \forall x\in(a,c)$

设 $P(x)$ 在 (a,c) 的极~~大~~值点为 $x_0 \Rightarrow P'(x_0)=0$

$\Rightarrow$ 在 x_0 处做对 $\forall x\in[a,c]$ 带拉格朗日余项的泰勒展开

$$P(x)=P(x_0)+P'(x_0)(x-x_0)+\frac{P''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

$$=P(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}P''(\xi)$$

$|P(x)-P(x_0)|\ge\frac{|x-x_0|^2}{2}\cdot(c-a)\quad\forall x\in[a,c]$ 成立

代入 $x=a$ 与 $x=c$ $\quad P(a)=P(c)=0\Rightarrow\begin{cases}P(x_0)\ge\dfrac{|a-x_0|^2}{2}(c-a)\\ P(x_0)\ge\dfrac{|c-x_0|^2}{2}(c-a)\end{cases}$

$$P(x_0)\ge\max\left\{\frac{|a-x_0|^2}{2},\frac{|c-x_0|^2}{2}\right\}(c-a)$$

$$\ge\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a-c}{2}\right)^2\cdot(c-a)=\frac{(c-a)^3}{8}$$

$a=P \quad c=Q$

取 $b=x_0$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|P(b)|=\frac{1}{2}|P(x_0)|\ge\frac{(c-a)^3}{16}$$