1. (15 分 =5×3) 判断下列级数敛散性：

(1) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n\ln\sqrt[2]{n}}$；【来自教材 222 页例题 7，原题 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$】

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$;【来自教材 217 页例题 3,原题为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$】

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cdot 3^n}{5^n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)$.【来自教材 207-208 页例题 1、例题 2 及 209-210 页的讨论，原题为 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 等】

解. (1) $v_n=\frac{2}{n\ln\sqrt[2]{n}}=\frac{4}{n\ln n}$,

据积分判别法，$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ 发散导致 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\ln n}$ 发散，所以，$\sum_{3}^{\infty}v_n$ 发散.

(2) $v_n=\frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$, 因为 $\lim_{n\to\infty}u_n/n^{-\frac{9}{5}}=\frac{3}{2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{9}{5}}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

(3) 首先，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 3^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{3}{5}\right)^n$ 收敛.

2. (10 分) 讨论函数序列 $f_n(x)=(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^{x^2}$, $n=1,2,\cdots$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 的一致收敛性.【此题来自教材 242 页例题 4，原题为 $f_n(x)=(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^x$】

解. 由于 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{n}})=1$,

所以极限函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^{x^2}=1$, $\forall\, x\in(0,+\infty)$.

但是对于 $x_n=\sqrt[4]{n}$, $n=1,2,\cdots$,

$|f_n(x_n)-f(x_n)|=1-(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^{\sqrt{n}}\to 1-e^{-1}\neq 0$.

所以，$f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

3. (15 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ 的收敛半径、收敛域、和函数.

【该题是教材 269 页例题 5 原题】

解. $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=1$，所以收敛半径 $R=1$.

因为 $x=1$ 时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，据交错级数 *Leibniz* 判敛法知其收敛；

$x=-1$ 是级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以，幂级数的收敛域为 $(-1,1]$.

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$, $x\in(-1,1]$,

则 $f(0)=0$. $f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{-1}{1+x}$, $x\in(-1,1)$.

$f'(x)=\frac{-1}{1+x}\Rightarrow f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{-1}{1+t}dt=-\ln(1+x)$, $x\in(-1,1]$.

所以幂级数的和函数为 $f(x)=\sum_{n=1}^{infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=-\ln(1+x)$, $x\in(-1,1]$.

4. (10 分) 求函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$ 于 $x=1$ 处的泰勒展开式，并计算 $f^{(2022)}(1)$, $f^{(2023)(1)}$ 的值.【此题来自教材 279 页例题 3,原题为 $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x+3)}$ 于 $x=2$ 处.】

解. $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x-1)^2-4}=-\frac{1}{4}\ \frac{1}{1-(\frac{x-1}{2})^2}$

$=-\frac{1}{4}\ \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-1}{2})^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{4^{n+1}}(x-1)^{2n}$, $|x-1|<1$ 或者 $|x-1|\le 1$.

因为 $a_{2022}(x-1)^{2022}=\frac{-1}{4^{1011+1}}(x-1)^{2022}, a_{2022}=-\frac{1}{4^{1012}}$.

而 $a_{2022}=\frac{f^{(2023)}(1)}{2022!}$, 所以，$f^{(2022)}(1)=\frac{2022!}{4^{1012}}$.

因为 $a_{2023}(x-1)^{2023}=0$，所以，$f^{(2023)}(1)=0$.

5. (10 分) 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x dx$ 的敛散性.

【本题来自教材 290 页例题 5，原题为 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$】

解. 首先判断 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 的敛散性.

因为 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 于 $[1,+\infty)$ 单调下降并趋于零，$\left|\int_1^{A}\sin x dx\right|\le 2$, $\forall A>1$,

所以据 *Dirichlet* 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛，

其次，由于 $\arctan x$ 于 $[1,+\infty)$ 单调有界，据 *Abel* 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan xdx$ 收敛.

6. (10 分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n}x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

【该题来自教材 227 页例题 5，原题为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$】

解. 记 $u_n(x)=\frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n}x}$，则当 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbb{Z}$ 时，

$u_n(k\pi+\frac{\pi}{2})=\frac{(-1)^{kn}}{2}\not\to 0$，$(n\to\infty)$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(k\pi+\frac{\pi}{2})$ 发散.

当 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbb{Z}$ 时，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{\sin^{n+1}x}{1+\sin^{2n+2}x}\ \frac{1+\sin^{2n}x}{\sin^n x}\right|=|\sin x|\ \frac{1+\sin^{2n}x}{1+\sin^{2n+2}x}$，

由于 $|\sin x<1|\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sin^{2n+2}x=\lim_{n\to\infty}\sin^{2n}x=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|\sin x|<1$，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 绝对收敛.

综上，级数在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbb{Z}$ 时发散；

在 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbb{Z}$ 时绝对收敛；没有条件收敛之处.

7. (20 分) 设 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$，求 $f(x)$ 所对应的 Fourier 级数及其和函数，并给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的值.

【该题来自教材 336 页例题 4，只增加了最后一个级数求值.】

解. 因为 $f(x)$ 是欧函数，所以 $b_n=0,n=1,2,\cdots$.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2d\sin nx=\frac{1}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx$

$=\frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xd\cos nx=\frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx$

$=\frac{2}{n^2\pi}2\pi\cos n\pi=\frac{(-1)^n4}{n^2}$，$n=1,2,3,\cdots$.

所以，$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4}{n^2}\cos nx$.

由于 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 分段单调且连续，

所以 $x^2=\dfrac{\pi}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}\cos nx$，$x\in[-\pi,\pi]$.

在上式中令 $x=\pi$，则得 $\pi^2=\dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}$

令 $x=0$，则得 $0=\dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

最后，根据 $Parseval$ 等式，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx=2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4},\quad \frac{2\pi^2}{5}=\frac{2\pi^2}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4},$$

$$\frac{8\pi^2}{45}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4},\quad \sum_{n=1}^{\infty}=\frac{\pi^2}{90}.$$

8. (10 分) 证明和计算下列各题：

(1) 证明 $I(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛；

(2) 证明 $I(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 的任何闭子区间上可导，即在 $(0.+\infty)$ 可导；

(3) 求出函数 $I(t)$，$t\in(0,+\infty)$.

(4) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}$ 的值

解. (1) 因为 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛，亦即关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛；

e^{-xt} 关于 x 单调递减，关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致有界 $0\le e^{-xt}\le 1)$.

所以根据一致 $Abel$ 判敛法，$I(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

(2) 对于任意的 $[c,d]\subset(0,+\infty)$，$f(x,t)=e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\in C((0,+\infty)\times[c,d])$