Notas de aula de Matemática

Danielle Rezende

19 de fevereiro de 2020

Este material foi elaborado para facilitar o processo de aprendizagem da disciplina Fundamentos da Matemática. O texto contém notas de aula que apresentam os tópicos da disciplina com os principais conceitos, teoremas e observações. Os exemplos e algumas demonstrações são feitas em sala de aula. Portanto, esse material não substitui a leitura dos livros recomendados e nem a participação do estudantes nas aulas. Gostaria de ressaltar que esse texto sofre alterações constantes e que a participação de todos no processo de revisão é muito importante para melhorar a qualidade do mesmo.

Sumário

Conjuntos Numéricos **4**

Equações e Inequações **7**

Função **13**

Referências Bibliográficas **22**

Conjuntos Numéricos

Números Naturais

O conjunto usado para contagens é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Este é o primeiro conjunto numérico que aparece na história de qualquer civilização ou em qualquer assunto que se refere aos fundamentos da Matemática.
Lembramos que as operações básicas (soma e subtração) estão definidas em $\mathbb{N}$ com certas restrições. Por exemplo, $3 - 4$ não é uma operação possível em $\mathbb{N}$. Sendo assim, surge a necessidade de um novo conjunto numérico para que estas operações se tornem possíveis.

OBS.: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros é definido por $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Note que todo número natural é também inteiro e portanto, podemos escrever que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Assim como em $\mathbb{N}$, as operações básicas (soma e subtração) estão bem definidas em $\mathbb{Z}$. Neste conjunto temos como operações fundamentais a soma e a multiplicação, contudo não está definido nesse o conjunto por exemplo, a operação de divisão. Logo, surge a necessidade de um novo conjunto numérico para que sejam possíveis tais operações.

Números Racionais

O conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, são aqueles que podem ser escritos como o resultado de uma divisão entre inteiros, sendo que o divisor deve ser não nulo. Isto é:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \colon a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}.$$

Números Irracionais

Os números irracionais são aqueles que não podem ser escritos por meio de uma divisão entre dois inteiros. Denotaremos o conjuntos dos números irracionais por $\mathbb{I}$. Diferentemente das dízimas periódicas (que são números racionais), os números irracionais têm representação decimal infinita, porém não periódica. Podemos destacar como números irracionais todas as raízes de índice n não exatas, o número π e o número de Euler e. Observe que um número é racional ou irracional, ou seja, não pode ser ao mesmo tempo pertencente aos dois conjuntos.

Números reais

O conjunto formado pela união dos números racionais e irracionais é chamado de conjunto dos números reais e denotado por $\mathbb{R}$. Assim:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Os números reais podem ser representados por uma reta, chamada reta real, em que cada ponto está associado a um número.

Operações Elementares

O conjunto dos números reais é um exemplo de um corpo. Um corpo é um conjunto munido de duas operações, soma e produto, que satisfaz determinadas propriedades. Listaremos as propriedades de corpo dos números reais

(soma) $+ \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto x + y$

(produto) $\cdot \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto x\, y$

- Associativa da soma: $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Comutativa da soma: $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- Elemento neutro da soma: existe um número real, designado por 0 tal que $0 + x = x + 0 = x$,para todo $x, \in \mathbb{R}$.
- Elemento simétrico: para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = y + x = 0$
- Associativa do produto: $(x\, y)\, z = x\, (y\, z)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Elemento neutro do produto: existe um número real, designado por 1, tal que $1\, x = x\, 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Inverso multiplicativo: para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x\, y = y\, x = 1$

- Distributiva: $x\,(y+z) = x\,y + x\,z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

OBS.: Resultam das propriedades acima as seguintes propriedades:

- Dados $x, y, \in \mathbb{R}$ tais que $x\,y = 0$, temos que $x = 0$ ou $y = 0$.
- Dados $x, y, \in \mathbb{R}$, $(-x)\,y = x\,(-y) = -(x\,y)$.
- Dados $x, y, \in \mathbb{R}$, $(-x)\,(-y) = x\,y$.
- Dados $x, y, \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 = y^2$, temos que $x = \pm y$.

Intervalos

Um intervalo real nada mais é que um subjconjunto de $\mathbb{R}$.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$$
$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$$
$$(a, b] =]a, b]\{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$$
$$[a, +\infty) = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq a\}$$
$$(-\infty, b] =]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq b\}$$
$$(a, +\infty) =]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \colon x > a\}$$
$$(-\infty, b) =]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\}$$

Equações e Inequações

Equações

As equações são sentenças matemáticas que estabelecem uma relação de igualdade entre termos conhecidos (números reais, chamados de coeficientes) e valores desconhecidos (incógnitas). Existem diversos tipos de equações e diversas formas de resolvê-las. Neste momento trabalharemos com equações de apenas uma incógnita. O principal objetivo de uma equação é encontrar o valor da incógnita que satisfaz a sentença matemática. Definimos os tipos de equação com base no maior expoente que a incógnita assume na equação, chamado grau da equação. A seguir veremos os principais tipos de equações suas características e como resolvê-las.

Equações do 1º grau

A equação do primeiro grau ou equação linear é aquela na qual a incógnita apresenta expoente 1, ou seja, a incógnita assume seu próprio valor.

$$a\,x + b = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Neste caso, temos apenas uma incógnita x que representa o valor desconhecido, o termo que se quer determinar. O conjunto solução da equação são os valores da incógnita x que a satisfazem a equação. No caso da equação de primeiro grau, é necessário isolar a incógnita e trabalhar com as operações em ambos os lados da equação até que a incógnita não apareça mais. Para isso, são utilizados procedimentos como: soma, subtração e divisão.

Equação do 2º grau

A equação do segundo grau ou equação quadrática é aquela na qual a incógnita apresenta expoente 2, ou seja, a incógnita está ao quadrado.

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Para resolver esse tipo de equação podemos usar a Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$, chamado discriminante da equação.

OBS.: Os valores da incógnita x que satisfazem a equação são chamados raízes da equação.

OBS.: Se $\Delta > 0$ temos que a equação possui duas raízes reais e distintas. Se $\Delta = 0$ temos que a equação possui duas raízes reais e iguais. Se $\Delta < 0$ temos que a equação possui raízes complexas.

OBS.: A Fórmula de Bhaskara é mais utilizada nas equações de 2º grau completas (quando $a, b, c \neq 0$). Nas equações do 2º grau incompletas ($a \neq 0$, $b = 0$ ou $c = 0$) existem outros métodos mais práticos de resolução.

OBS.: Outro método para resolver equações quadrática é o método da soma e produto. Esse método é indicado quando as raízes são números inteiros. O método baseia-se na seguinte relação entre as raízes:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad P = x_1\,x_2 = \frac{c}{a}$$

Neste caso,

$$x^2 - S\,x + P = 0$$

Inequações

As inequações são sentenças matemáticas que estabelecem uma relação de ordem entre termos conhecidos (números reais chamados de coeficientes) e valores desconhecidos (incógnitas). Existem diversos tipos de inequações e diversas formas de resolvê-las. Neste momento trabalharemos com inequações de apenas uma incógnita. O principal objetivo de uma inequação é encontrar todos os valores da incógnita que satisfazem a relação de ordem determinada. Definimos os tipos de inequação com base no maior expoente que a incógnita assume na inequação, chamado grau da inequação. A seguir veremos os principais tipos de inequações suas características e como resolvê-las.

Inequações do 1º grau

Uma inequação do primeiro grau é aquela na qual a incógnita apresenta expoente 1, ou seja, a incógnita assume seu próprio valor. Podem assumir as seguintes formas:

$$a\,x + b > 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$$a\,x + b < 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$$a\,x + b \geq 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$$a\,x + b \leq 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Para resolver uma inequação desse tipo podemos fazer da mesma forma que resolvemos equações. Porém, devemos tomar cuidado quando a incógnita possui coeficiente negativo. Neste caso devemos observar que quando multiplicamos por -1 devemos trocar o sinal da desigualdade.

Inequações do 2º grau

Uma inequação do segundo grau é aquela na qual a incógnita apresenta expoente 2, ou seja, a incógnita está ao quadrado. Podem assumir as seguintes formas:

$$a\,x^2 + b\,x + c > 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$$a\,x^2 + b\,x + c < 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$$a\,x^2 + b\,x + c \geq 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$$a\,x^2 + b\,x + c \leq 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Para resolver uma inequação desse tipo podemos determinar a solução da equação do 2º equivalente e fazer o estudo do sinal para valores a direita e a esquerda das raízes (caso existam).

Equações Modulares

Definimos o valor absoluto (ou módulo) de um números real da seguinte forma:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Propriedades:

1. $|a|^2 = a^2$
2. $|a| = \sqrt{a^2}$
3. $|a| = b \Leftrightarrow a = \pm b$
4. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
5. $|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ ou $a \geq b$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Falaremos sobre equações modulares, onde a incógnita aparece dentro da definição de módulo. Neste momento, trabalharemos com equações modulares de primeiro grau e de segundo grau como por exemplo:

$$|a\,x + b| = k \qquad\qquad |a\,x^2 + b\,x + c| = k$$

Usaremos a definição e as propriedades de módulo para resolver esse tipo de equação.

Produtos Notáveis

Os produtos notáveis são expressões algébricas muito utilizadas na matemática. São elas

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$$

Binômio de Newton

Considere $n \in \mathbb{N}$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \cdots + \\
&\quad + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k + \cdots + \binom{n}{n-2} a^2\, b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0\, b^n
\end{aligned}
$$

onde

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}, n \geq k.$$

OBS.: O número $C_{n,k}$ é chamado de coeficiente binomial (ou número binomial).

OBS.: Lembre que $p! = p\,(p-1)\,(p-2)\,\cdots 1$, para $p \in \mathbb{N}^*$ e que $0! = 1$.

OBS.: Note que $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$.

Propriedades: Para $n, p, k \in \mathbb{N}$, $n \geq p, k$, temos:

- $p + k = n \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{k}$
- $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$

OBS.: Os coeficientes binomiais estão dispostos ordenadamente em uma tabela que chamamos de Triângulo de Pascal. Os números binomiais de mesmo denominador são descritos na mesma coluna e de mesmo numerador na mesma linha.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Assim:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}
$$

OBS.: O Triângulo de Pascal possui algumas propriedades, a saber:

- Cada elemento do triângulo que não seja da coluna 0 e nem o último de cada linha é igual à soma daquele que está na mesma coluna e linha anterior com o elemento que se situa à esquerda deste último. Essa propriedade decorre do item 2 das propriedades de números binomiais (relação de Stifel).

- Dois números binomiais equidistantes em qualquer linha da tabela são iguais.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

- A soma dos elementos de qualquer coluna, do $1^{\underline{o}}$ elemento até um elemento de uma determinada linha, é igual ao elemento situado na coluna à direita da linha imediatamente abaixo da linha considerada para a soma.

- A soma dos elementos situados na mesma diagonal, desde o elemento da $1^{\underline{a}}$ coluna até o elemento de uma determinada coluna, é igual ao elemento imediatamente abaixo deste último na coluna determinada.

Função

O conceito mais importante da matemática é o de função. Estudaremos o conceito de função que relaciona quantidades descritas por números reais. Vamos relacionar informações algébricas (expressões matemáticas) com informações geométricas (descritas por gráficos).

Funcões de uma variável real a valores reais

O conceito de função surge na consideração de duas grandezas relacionadas entre si por meio de uma equação. Por exemplo,

$$y = x^2$$

Neste caso, as letras x e y não são números fixos mas **variáveis**.
Cada valor que x assume corresponde a um valor determinado de y.
x: **variável independente** ou entrada
y: **variável dependente** ou saída
Para indicar essa dependência escrevemos $y = f(x) = x^2$.
Em todo nosso estudo só nos interessa as funções reais, isto é, aquelas em que as variáveis envolvidas são números reais.

Uma função $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função de uma variável real a valores reais** se cada $x \in A$ é associado (através de uma regra) a um único valor real $y = f(x)$ (construído a partir de x).

O conjunto A é chamado de **domínio** de f e geralmente será denotado por D, D_f, $Dom(f)$, ou $D(f)$. Em geral, uma função deve ser definida junto com o seu domínio, que dá os valores de x para os quais $y = f(x)$ é definida. O domínio será importante para garantir que $f(x)$ seja bem definida, mas às vezes, poderemos escolher um domínio particular somente por razões específicas, ou pelas exigências de um problema.

OBS.: Para simplificar, algumas vezes deixamos de explicitar o domínio da função f, falando apenas a lei $y = f(x)$. Neste caso, fica implícito que o domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para os quais a lei faça sentido (conjunto de todos os valores admissíveis de x).

OBS.: O conjunto **imagem** da função f, denotado por $f(D)$, Im_f ou $Im(f)$, é formado pelos números reais que satisfazem a lei estabelecida (conjunto de todos os valores resultantes), isto é,

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \colon x \in D(f)\}.$$

OBS.: O conjunto $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in D(f)\}$ é chamado **gráfico** da função f, denotado por G_f ou $G(f)$.

OBS.: O gráfico de uma função pode ser interceptado por uma reta vertical em no máximo um ponto.

Funções pares e ímpares

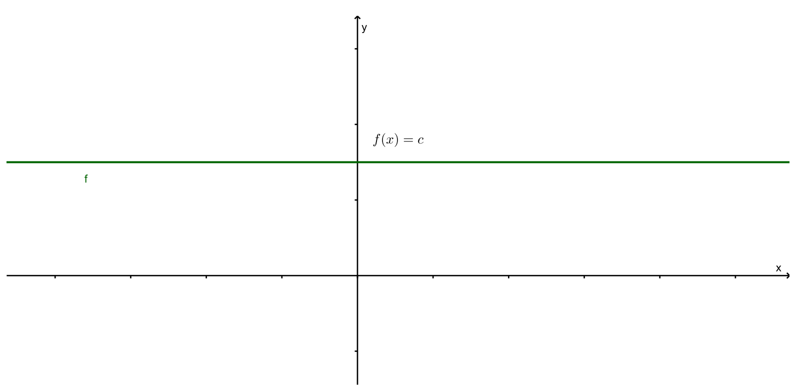
Seja f uma função. Suponha que para todo $x \in D(f)$ exista $-x \in D(f)$.

- Dizemos que f é uma função **par** se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in D(f)$.
- Dizemos que f é uma função **ímpar** se $-f(x) = f(-x)$, para todo $x \in D(f)$.

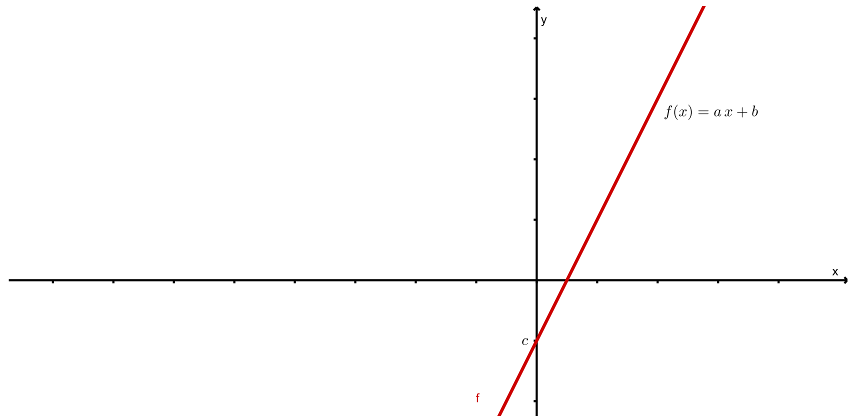
O gráfico de uma função par é simétrico com relação ao eixo O_y (isto é, se $(a, b) \in G_f$ temos que $(-a, b) \in G_f$) e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem (isto é, se $(a, b) \in G_f$ temos que $(-a, -b) \in G_f$).

Algumas funções elementares

- Função constante: $f(x) = c$ com $c \in \mathbb{R}$.



- Função afim (ou função do 1º grau): $f(x) = a\,x + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

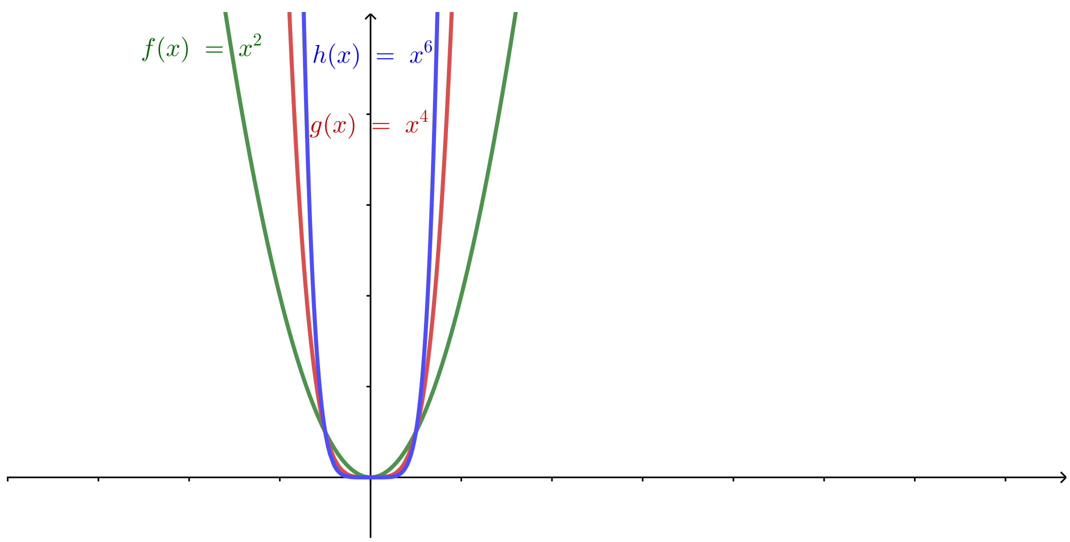


OBS.: O gráfico de uma função afim é sempre uma reta.

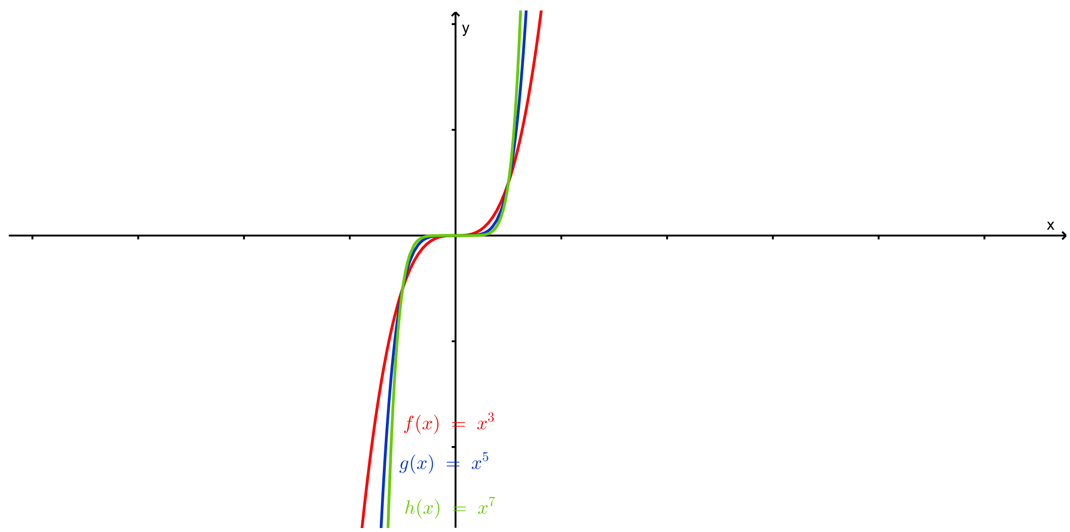
OBS.: Quando $b = 0$ essa equação se reduz a $y = a\,x$, chamada função linear.

- Potências Inteiras: $f(x) = x^p$, onde $p \in \mathbb{Z}$ com $p \neq 0$.

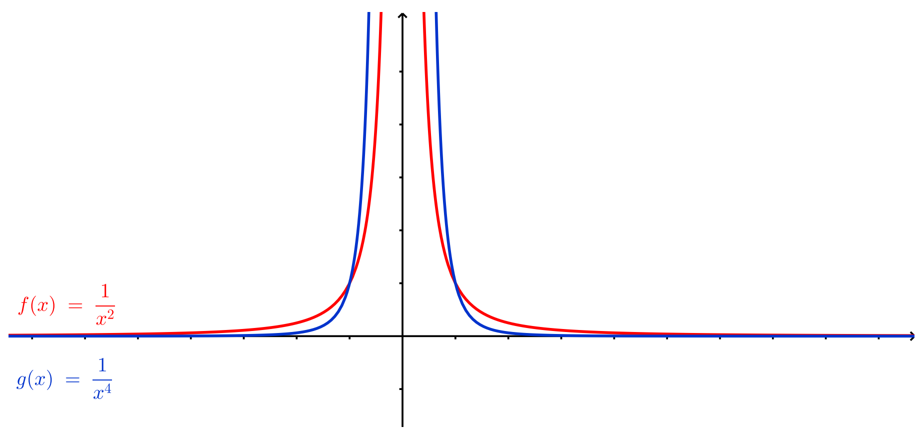
  - $p > 0$ e p par



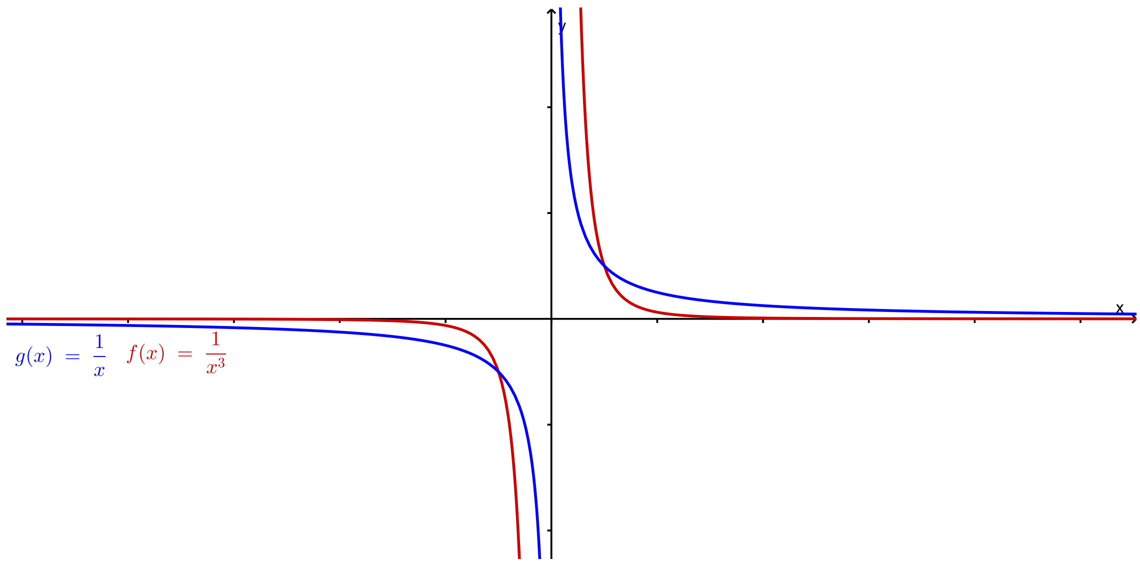
− $p > 0$ e p ímpar



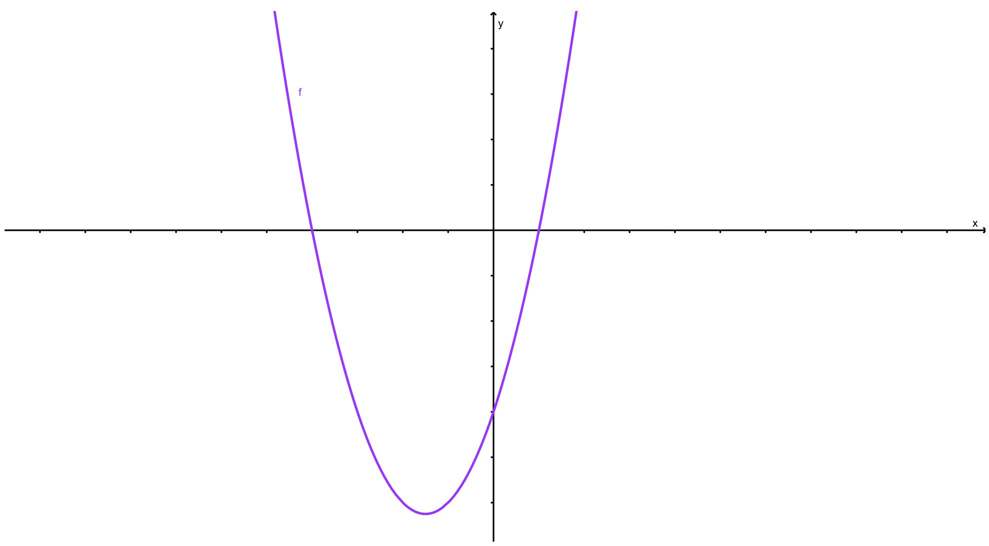
− $p < 0$ e p par



– $p < 0$ e p ímpar



- Função quadrática (ou função do 2º grau): $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.



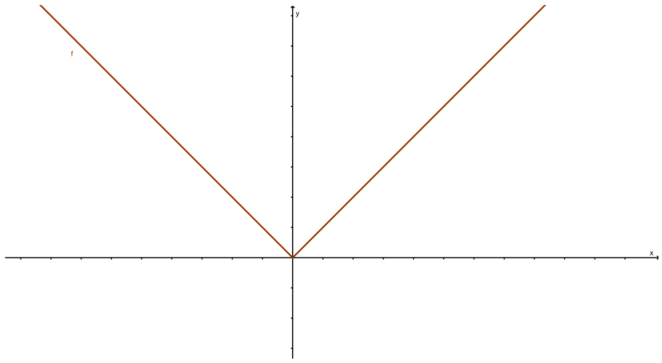
OBS.: O gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola.

OBS.: Para o esboço da parábola é importante determinar as interseções com os eixos coordenados, o vértice que é dado por

$$V = (x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2\,a}, \frac{-\Delta}{4\,a}\right),$$

e o eixo de simetria dado por $x = x_v$.

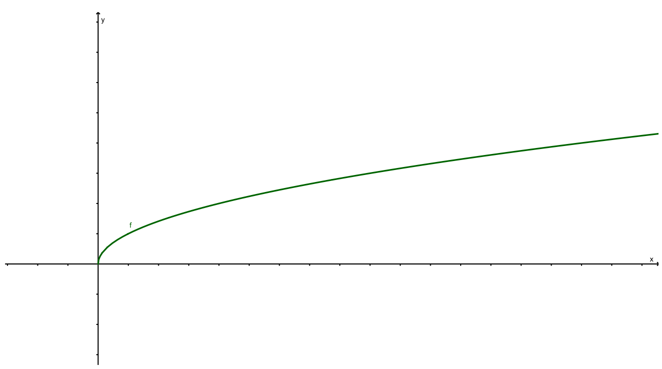
- Função Modular: $f(x) = |x|$



Propriedades:

1. $|x|^2 = x^2$
2. $|x| = \sqrt{x^2}$
3. $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$
4. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
5. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

- Função raiz quadrada: $f(x) = \sqrt{x}$



- Funções trigonométricas

$$f(x) = \operatorname{sen} x = \sin x \qquad g(x) = \cos x$$

OBS.: As funções seno e cosseno e as demais funções trigonométricas,

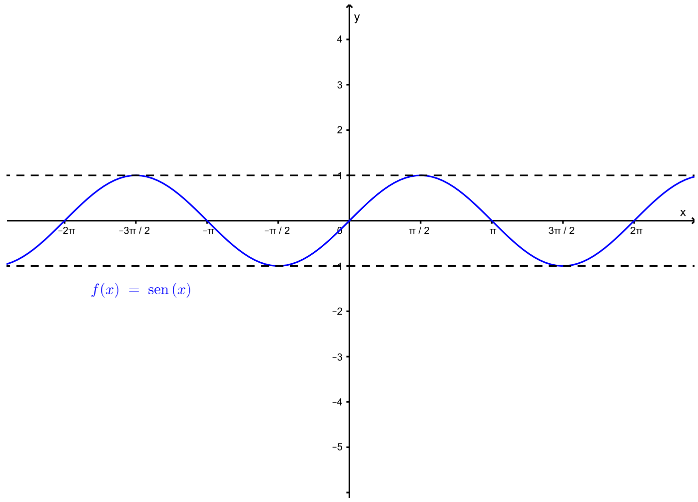
$$f(x) = \operatorname{tg} x = \tan x$$

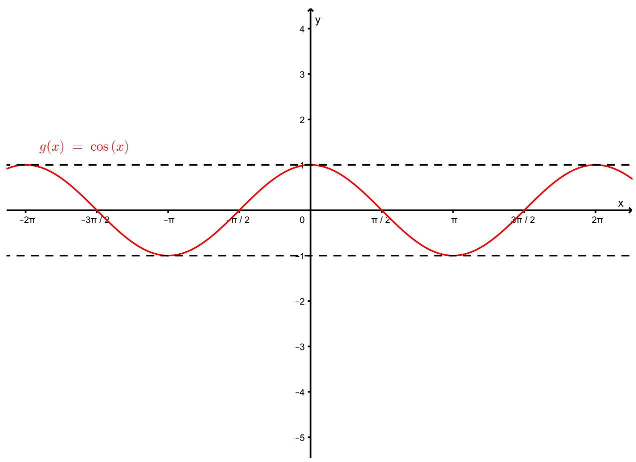
$$f(x) = \operatorname{cotg} x = \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$f(x) = \operatorname{cossec} x = \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

serão estudadas mais adiante.





- Funções exponenciais e logarítmicas

$$f(x) = a^x \qquad g(x) = \log_a x$$

OBS.: Essas funções serão estudadas mais tarde e por isso, neste momento, não entraremos em detalhes.

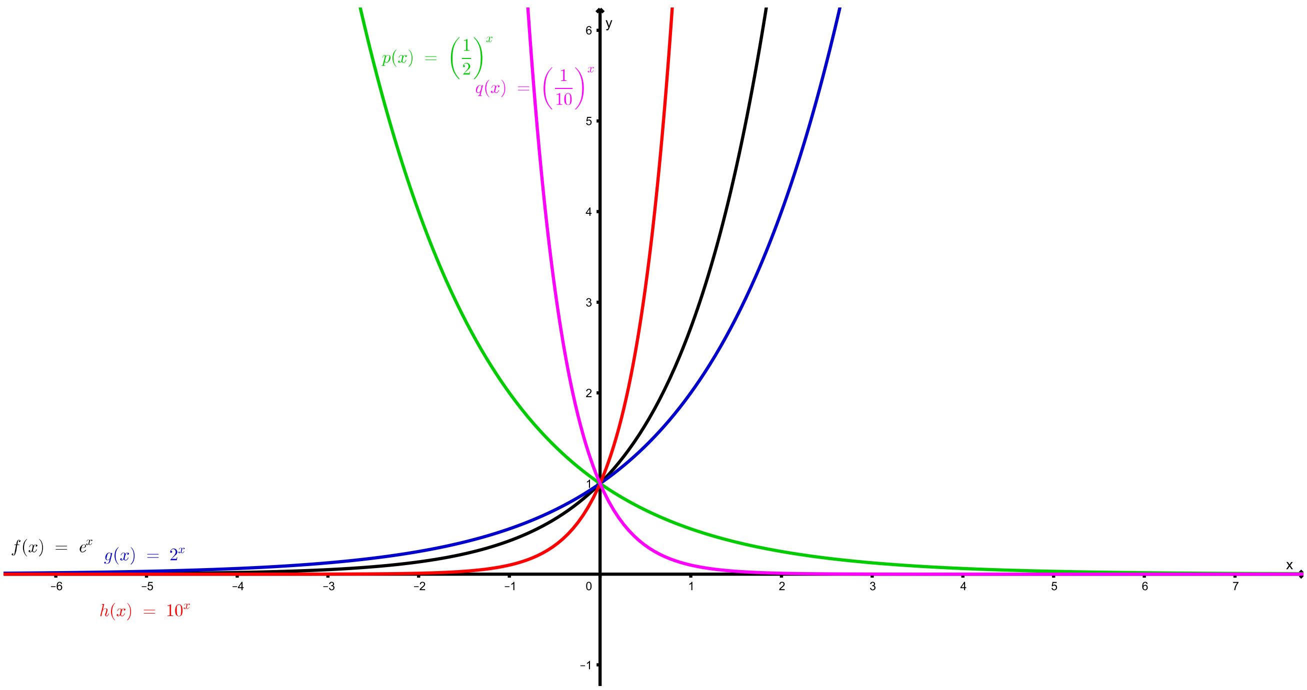
OBS.: A função logarítmica natural é definida e denotada por

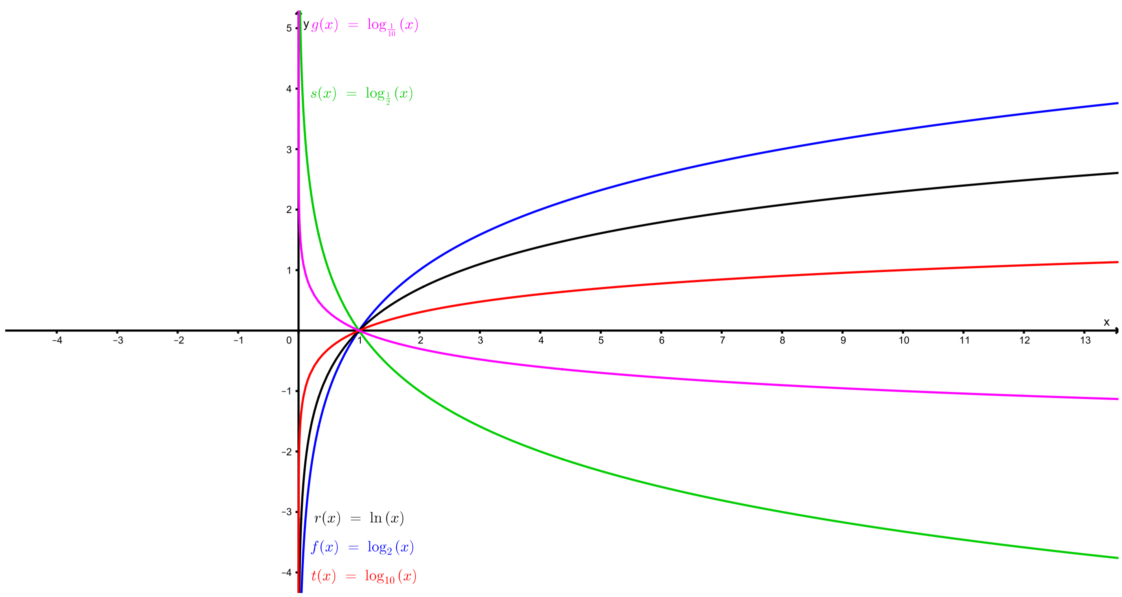
$$g(x) = \log_e x = \ln x$$

e a função exponencial natural é definida e denotada por

$$f(x) = e^x = \exp(x).$$

É comum nos referirmos as funções exponencial natural e logarítmica natural simplesmente por exponencial e logarítmica, recpectivamente.





Operações com funções

Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $D_f \cap D_g \neq \emptyset$

- Adição de funções: $(f+g)\colon D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, onde $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Diferença de funções: $(f-g)\colon D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, onde $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- Produto de uma constante por uma função: $(k\,f)\colon D_f \to \mathbb{R}$, onde $(k\,f)(x) = k\,f(x)$ e $k \in \mathbb{R}$

- Produto de funções: $(f\,g)\colon D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, onde $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$
- Quaciente de funções: $\left(\dfrac{f}{g}\right)\colon D_f \cap D_g - \{x \in \mathbb{R}\colon g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, onde $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

OBS.: Sejam f e g duas funções. Dizemos que f e g são **iguais** (denotado por $f = g$) se $D_f = D_g$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f$.

Referências Bibliográficas

[1] FLEMMING, Diva M.; Gonçalves, Mirian B. Cálculo A. 6.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006

[2] MEDEIROS, Valeria Zuma. Pré-Cálculo. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[3] SIMMONS, George F. Cálculo com Geometria Analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. v.1.

[4] DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar: logaritmos. 9.ed. São Paulo: Atual, 2004. v.2.

[5] HAZZAN, Samuel; IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar: conjuntos e funções. 8.ed. São Paulo: Atual, 2004. v.1.

[6] IEZZI, Nelson. Fundamentos de matemática elementar: trigonometria. 8.ed. São Paulo: Atual, 2004. v.3.

[7] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de matemática elementar: limites, derivadas, noções de integral. 6.ed. São Paulo: Atual, 2005. v.8.

[8] SAFIER, Fred. Pré-Calculo. (Coleção Schaum). Porto Alegre: Bookman, 2003.