第 7 次作业

1. 设 $X \sim B(10, 0.9)$，$Y - 8 \sim B(10, 0.1)$.

   （1） 分别画出 X, Y 的概率质量函数图.

   （2） 计算并比较 X, Y 的均值、方差、中位数和众数.

   （3） 计算 X, Y 的偏度系数.

2. （1）分别计算 $Exp(1)$，$P(4)$ 和 $U(0,1)$ 的偏度系数和峰度系数.

   （2）分别计算 $Exp(1)$，$P(4)$ 和 $U(0,1)$ 的矩母函数

   （3）利用矩母函数计算上述三个分布的偏度系数和峰度系数.

3. 计算具有下列矩母函数的连续随机变量 X 的概率密度函数：

$$M_X(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2-t} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3-t}.$$

4. 假设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$Y = e^X$（对数正态分布）.

   （1） 证明：对数正态分布的矩母函数不存在.

   （2） 利用正态分布的矩母函数计算 Y 的各阶原点矩.

5. 假设随机变量 $X_i \sim P(\lambda_i)$（$i = 1, 2$）相互独立，$Y = X_1 + X_2$，请利用矩母函数确定 Y 的分布.

6. *将线段 $[0,1]$ 随机断开，将前半段（包含原线段左端点那部分）扔掉，将剩下线段再随机断开后扔掉前半段，求余下的那一段长度的期望值.

7. **一个矿工在井下迷了路，迷路的地方有三个门，假设从第一个门出来，经过 2 小时可达安全之处；若从第二个门出来，经过 3 小时后会回到原地；若从第三个门出来，经过 1 小时后会回到原地. 假定该人选择门是随机的，且始终无法区分这三个门，能够走到安全之处的平均用时是多少？

8. *证明：若 $E(Y \mid X) = X$，则 $\mathrm{Cov}(X, Y) = Var(X)$.

9. （1）证明：若 X, Y 独立，则 $E(Y \mid X) = E(Y)$.

（2）*上述结论反之是否成立？请说明理由.

10. *令 $\hat{Y}=E(Y\mid X)$， $\tilde{Y}=Y-\hat{Y}$，证明：$Var(Y)=Var(\hat{Y})+Var(\tilde{Y})$. 尝试给出该式的一个直观解释.

11. 定义条件方差为$Var(Y\mid X)=E\left[(Y-E(Y\mid X))^2\mid X\right]$，证明：

（1）$Var(Y\mid X)=E(Y^2\mid X)-E^2(Y\mid X)$

（2）$Var(Y)=E\left[Var(Y\mid X)\right]+Var[E(Y\mid X)]$

12. 假设点(X,Y)服从单位圆盘上半部分上的均匀分布. 若观测到 $X=0.5$，那么在均方误差意义下Y的最优预测值是什么？

13. *应用中常常基于随机变量 X 的观察值对随机变量Y的值进行预测，假设仅仅知道 X 和 Y 的期望分别为 μ_1 和 μ_2，方差分别为σ_1^2和σ_2^2，相关系数为 ρ.

（1） 在均方误差意义下求 Y 的最优线性预测，即选择系数 a,b 使得 $E\left[(Y-(aX+b))^2\right]$（均方误差）达到极小值.

（2） 给出这个最优线性预测对应的均方误差，并指出其值何时接近 0.

（3） 验证：若 X,Y 服从 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$Y$ 的最优线性预测就是 $E(Y\mid X)$.

14. *设 X_i（$i=1,2,\cdots$）独立同分布且公共期望为μ，$Y=X_1+\cdots+X_N$，N 为取正整数值的随机变量，分布为 $P(N=n)=p_n$（$n=1,2,\cdots$），且与 X_i（$i=1,2,\cdots$）相互独立.

（1） 假设$E(N)=a$，求$E(Y)$.

（2） 求 N 的矩母函数为$M_N(t)$.

（3） 假设 X_i（$i=1,2,\cdots$）的矩母函数为 $M_X(t)$，求 $M_Y(t)$.

（4） 假设 $X_i \sim Exp(\lambda)$， $p_n=(1-p)^{n-1}p$（几何分布），求 Y 的分布.

（5） （4）中所得 Y 的分布与 X_1+X_2 的分布是否相同？（提示：考查 X_1+X_2 的矩母函数）

15. *构造一个个数为随机的独立正态随机变量之和不是正态分布的例子，并加以必要说明.

16. （计算机实验）股票市场模拟：设 Y_i（$i=1,\cdots,n$）为独立同分布随机变量，满足 $P(Y_i=1)=P(Y_i=-1)=\dfrac{1}{2}$，令 $X_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i$. 将 $Y_i=1$ 视为股票价格上涨一元，将 $Y_i=-1$ 视为股票价格下降一元，将 X_n 视为第 n 个时间点股票的价格.

（1） 求 $E(X_n)$ 和 $\mathrm{Var}(X_n)$.

（2） 模拟 X_n 并绘出 X_n 对于 $n=1,\cdots,10000$ 的图形，重复模拟几次并观察，随机序列是否呈现某种趋势？图形是否有差别？若有差别尝试利用（1）中的结论进行解释.