

第 10 次作业

1. (简单随机抽样) 设总体的大小为 N , 总体均值和方差分别为 μ, σ^2 , X_i

($i=1, \dots, n$) 为无放回抽取的简单随机样本, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

(1) *证明: $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{N}{N-1}$.

(2) 给出 $\text{Var}(\bar{X})$ 的一个无偏估计.

2. **设 X 来自 Poisson 总体 $P(\lambda)$ 的一个样本.

(1) 证明: $g(\lambda) = e^{-2\lambda}$ 的唯一无偏估计为 $\hat{\theta}(X) = \begin{cases} 1, & \text{当 } X \text{ 为偶数} \\ -1, & \text{当 } X \text{ 为奇数} \end{cases}$.

(2) 上述估计是否合理? 如不合理, 请尝试给出一个合理的估计.

3. 设随机样本 X_i ($i=1, \dots, n$) 来自总体 $U(0, \theta)$.

(1) 证明: $\hat{\theta}_1 = \max(X_1, \dots, X_n) + \min(X_1, \dots, X_n)$ 是 θ 的无偏估计.

(2) 证明: 可以适当选择常数 c_n 使得 $\hat{\theta}_2 = c_n \min(X_1, \dots, X_n)$ 是 θ 的无偏估计.

(3) **比较四个无偏估计 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3 = 2\bar{X}, \hat{\theta}_4 = \frac{n+1}{n} \max(X_1, \dots, X_n)$ 的方差大小.

4. 设随机样本 X_i ($i=1, \dots, n$) 来自某一个均值为 θ 且方差有限的总体.

(1) 设 c_1, \dots, c_n 为常数, 证明: $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ 是 θ 的无偏估计当且仅当

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1.$$

(2) 在上述形式的估计类中, 只有在 $c_1 = \cdots = c_n$ ($= \frac{1}{n}$) 时方差达到最小.

5. *设随机样本 X_i ($i=1, \cdots, n$) 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, m_2 和 S^2 可以作为 σ^2 的估计, 试比较两个估计的均方误差.

6. 设随机样本 X_i ($i=1, \cdots, 4$) 来自正态总体 $N(0, 4)$, 令 $Y = a \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}$,

这里 a 为常数, 已知 Y 服从 t 分布, 求 a 的值以及 t 分布的自由度.

7. 有一大批糖果, 现从中随机取 16 袋称得重量 (克) 为

506 508 499 503 504 510 497 512

514 505 493 496 506 502 509 496

假设袋装糖果重量服从正态分布, 求总体均值的 95% 置信的区间估计. 如果用这 16 袋样品的平均重量作为总体均值的估计, 误差的范围为多少? 这个范围是在什么意义下?

8. 从一大批灯泡中随机地取 5 只作寿命试验, 测得寿命 (单位: 小时) 为

1050 1100 1120 1250 1280

假设灯泡寿命服从正态分布, 求这批灯泡寿命平均值 95% 置信的单侧置信下限 (即求 $\hat{\mu}(X_1, \cdots, X_n)$ 使得 $P(\mu > \hat{\mu}) \geq 0.95$).

9. *为提高某一化学生产过程的得率, 试图采用一种新的催化剂. 为慎重起见, 先进行试验. 采用原催化剂 20 次试验的得率均值为 91.73, 样本方差为 3.89; 采用新催化剂 30 次试验的得率均值为 93.75, 样本方差为 4.02. 假设两总体都服从正态分布, 方差相等, 且两样本独立.

(1) 求两总体均值差的 95% 置信的区间估计.

(2) 两种催化剂有显著差别吗? 请尝试说明你的理由.

10. *设随机样本 X_i ($i=1, \cdots, n$) 来自总体 $U(0, \theta)$. 证明: 对于任意给定常数

$0 < \alpha < 1$, 可以找到常数 c_n , 使 $(\max\{X_1, \cdots, X_n\}, c_n \max\{X_1, \cdots, X_n\})$ 为 θ

的一个 $(1-\alpha)$ 置信区间.

11. (计算机实验) (自助法 Bootstrap) 设随机样本 X_i ($i=1, \cdots, n$) 来自正态

总体 $N(\mu, 1)$, $\theta = e^\mu$, 考虑 θ 的估计 $\hat{\theta} = T(X_1, \dots, X_n) = \exp(\bar{X})$.

- (1) 创建一个包含 n 个观测的数据集, 数据记为 x_1, \dots, x_n (取 $\mu = 5$, $n = 100$). (数据所确定的经验分布记为 $F_n(x)$)
- (2) 从 (1) 中数据集中有放回地抽取 $n = 100$ 个观测, 记为 x_1^*, \dots, x_n^* . (等同于从分布 $F_n(x)$ 中抽取容量依旧为 n 的随机样本)
- (3) 计算 $\hat{\theta}^* = T(x_1^*, \dots, x_n^*)$.
- (4) 重复步骤 (2) 和 (3) m 次, 得到 $\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_m^*$. (取 $m = 1000$)
- (5) 画出 $\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_m^*$ 的直方图, 并与 $\hat{\theta}$ 的分布相比较, 你能得到什么结论?
- (6) 令 $V_{boot} = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m \left(\hat{\theta}_r^* - \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m \hat{\theta}_r^* \right)^2$, 求 V_{boot} . 是否可以用 V_{boot} 来近似 $Var(\hat{\theta})$?