

第 4 次作业

1. 掷 6 颗均匀骰子，求恰有两个一点出现的概率及其 Poisson 近似值（保留小数点后 4 位）。
2. 每天约有一百万人自主决定是否访问某学会网站，访问的概率为 $p = 2 \times 10^{-6}$ ，求在某特定的一天中至少有 3 人访问该网站的概率及其 Poisson 近似（结果保留 4 位小数）。
3. *一只昆虫产卵概率服从参数为 λ 的 Poisson 分布，而虫卵能发育成虫的概率为 p ($0 < p < 1$)，又设每个虫卵是否发育成虫是彼此独立的。证明：有 k 个后代的概率是服从参数为 λp 的 Poisson 分布。

4. 若 X 的概率密度函数为：

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如果 $E(X) = \frac{2}{3}$ ，求 a, b 。

5. 科技馆上午 9 点钟开馆，从 10 点开始每隔半小时有一次同样的科普实验展示，如果某个参观者到馆的时间服从 10 点至 11 点的均匀分布，求以下事件的概率：
 - (1) 他等待科普实验展示的时间不超过 10 分钟；
 - (2) 他等待科普实验展示的时间超过 20 分钟。
6. 某人被指控为一个新生儿的父亲。此案鉴定人作证时指出：母亲的怀孕期（即从受孕到婴儿出生的时间）的天数近似地服从正态分布，其参数为 $\mu = 270$ ， $\sigma^2 = 100$ 。被告提供的证词表明，他在孩子出生前 290 天出国，而于出生前 240 天才回来。如果被告事实上是这个孩子的父亲，试问那位母亲确有与证词相符的过长或过短的怀孕期的概率是多少？
7. *某人计划要开始一个 1 万公里的自驾旅行，他的汽车已经跑了 1.5 万公里，假设该品牌汽车在电池报废之前跑的公里数服从均值为 3 万公里的指数分布，那么他不用更换电池就能跑完全程的概率是多大？如果该品牌汽车在电池报废之前跑的公里数不服从指数分布（但是知道其分布函数 F ）呢？
8. 涉及犯罪嫌疑人的证据可看成一个随机变量 X 的值， X 服从指数分布，其均

值为 μ . 若该人无罪, 则 $\mu = 1$, 否则 $\mu = 2$. 法官按以下方式判罪: 当 $X > c$ 时判其有罪, 否则判其无罪.

- (1) 法官希望以 95% 的把握不冤枉一个无罪的人, c 应该取何值?
- (2) 利用 (1) 中得到的 c 值, 计算将一个确实有罪的被告判为有罪的概率.

9. (对数正态分布) 设随机变量 $Y > 0$, $\log Y$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 求 Y 的概率密度函数.

10. 令随机变量 X 的累积分布函数为 $F(x)$, $F(x)$ 连续且严格单调.

- (1) 假设 $g(x)$ 为严格单调可微函数, X 具有概率密度函数为 $f(x)$, 求 $g(X)$ 的概率密度函数.

- (2) (概率积分变换) 求 $Y = F(X)$ 的分布.

- (3) 证明: 如果 $Y \sim U(0,1)$, 则 $F^{-1}(Y)$ 的累积分布函数为 $F(x)$, 这里 F^{-1} 为 F 的反函数. 请以指数分布为例说明.

- (4) **尝试给出 (3) 的结论的一个应用.

- (5) **如果去掉 $F(x)$ 严格单调的假设, (2) 的结论是否正确?

11. 将区间 $(0,1)$ 分成长度分别为 p_1, p_2, \dots, p_n 的 n 部分 ($p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$),

分别记为子区间 I_1, I_2, \dots, I_n , 令 $X \sim U(0,1)$, 如果 X 落入子区间 I_i 那么定义随机变量 $Y = i$.

- (1) 求 Y 的分布.

- (2) 可否利用上述方法构造一般的离散型随机变量?

12. *将线段 $[0,1]$ 随机断开, 求包含固定点 $p_0 \in (0,1)$ 的那一段的长度的期望值.

13. *按如下方式生成随机变量 X : 首先抛一枚均匀的硬币, 如果出现正面, 令 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布; 如果出现反面, 令 X 服从 $(3,4)$ 的均匀分布. 求 X 的期望和方差.

14. β 分布是取值在区间 $[0,1]$ 的随机变量的一个常见分布.

- (1) 请通过查参考资料给出参数为 a, b 的 β 分布 ($\beta(a, b)$) 并计算其期望和方差.
- (2) 比较 $\beta(1,1)$ 与 $U(0,1)$.

15. (计算机实验) 从正态分布 $N(100, 100)$ 中随机产生 1000 个随机数.

- (1) 作出这 1000 个正态随机数的直方图;
- (2) 从这 1000 个随机数中随机有放回地抽取 1000 个, 作出其直方图;
- (3) 比较它们的均值与方差.