

第9次作业

1. 尝试以简要框架形式给出概率部分知识的总结, 并指出自己掌握起来相对困难的知识点.
2. 给出一个抽样调查实例, 试指出你认为的其可能的不当之处.
3. (简单随机抽样) 设总体的大小为 N , 总体均值和方差分别为 μ, σ^2 , X_i

($i=1, \dots, n$) 为无放回抽取的简单随机样本.

(1) *证明: $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$.

(2) **证明: $E(\bar{X}) = \mu$, $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$.

4. 设随机样本 X_i ($i=1, \dots, n$) 来自二项总体 $B(k, p)$.

(1) 给出参数 k 和 p 的矩估计.

(2) 尝试讨论上述估计的不足之处.

5. 设随机样本 X_i ($i=1, \dots, n$) 来自均匀分布 $U(\theta, 2\theta)$, 求 θ 的矩估计和极大似然估计.

6. 设函数 $f(x; a, \sigma) = (\sqrt{2\pi}\sigma^3)^{-1} (x-a)^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right)$, $x \in R$, 其中 $a \in R$, $\sigma > 0$ 为参数.

(1) 验证 $f(x; a, \sigma)$ 作为 x 的函数满足概率密度的归一化要求.

(2) 设随机样本 X_i ($i=1, \dots, n$) 来自此总体, 求 a 和 σ^2 的矩估计.

(3) 列出 a, σ^2 的极大似然估计所满足的方程, 并指出一种迭代求解的方法.

7. 设随机样本 X_i ($i=1, \dots, n$) 来自 Bernoulli 总体 $B(p)$, 请给出参数 p 的矩估计和极大似然估计.

8. 设总体是总数为 n ，单元概率分别为 p_1, \dots, p_m （这里 $p_1 + \dots + p_m = 1$ ）的多项分布， X_i （ $i=1, \dots, m$ ）分别为 m 个单元的观测频数（ $X_1 + \dots + X_m = n$ ）。求参数 p_i （ $i=1, \dots, m$ ）的极大似然估计。
9. 设总体 X 满足以下分布表：

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $0 < \theta < 1$ 是未知参数。假设已取得了样本值 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 2$ ， $x_3 = 1$ ，请据此求 θ 的矩估计值和极大似然估计值。

10. 设随机样本 X_1, \dots, X_n 来自具有概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的分布，其中 $\theta > 0$ 是未知参数。

- （1）求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 。
- （2）求 θ 的极大似然估计 θ^* 。

11. （计算机实验）考虑第 4 题，分别尝试 $k=10$ ， $p=0.01$ ， $p=0.5$ ， $n=10$ ， $n=1000$ ，生成服从 $B(k, p)$ 容量为 n 的随机样本，利用样本给出 k, p 的矩估计值。多尝试几次，观察你的实验结果，当中是否有明显不合理的？