第十一次作业参考解答

1. 利用大样本方法近似. 95% 置信区间: (0.50, 0.70).

2. (1) Fisher 信息量为 $\frac{1}{\theta^2}$, 标准误差的估计约为 0.3992.

(2) 利用 MLE 的 Asymptotic Normality. (0.0160, 1.5806).

3. (1) $\sigma^\star = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$.

(2) 利用 MLE 的 Asymptotic Normality. $\widehat{SE} = \frac{\sigma^\star}{\sqrt{2n}}$.

(3) $n\left(\frac{\sigma^\star}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$. $1-\alpha$ 置信区间为 $(\log\sigma^\star + \frac{1}{2}\log\frac{n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \log\sigma^\star + \frac{1}{2}\log\frac{n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)})$.

4. 利用大样本方法近似. $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}}}$ 近似服从 $\mathcal{N}(0,1)$. 95% 置信区间: $(-3.14, -0.90)$.

5. 注意观测 x 与参数 θ 的大小关系. $f(\theta|x) = \begin{cases} \frac{1}{-\theta\log x} & \theta\in[x,1] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

6. θ 的最大后验估计与极大似然估计均为 $\frac{x}{n}$. 直观上一致.

7. 正态分布为正态分布 (方差已知) 均值的共轭先验.

按定义写出后验分布, 配方即可得后验分布为 $\mathcal{N}(B,\ \frac{1}{2A})$, 其中

$$A = \frac{1}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2\sigma^2}, \qquad B = \frac{\frac{\mu_0}{2\sigma_0^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{2\sigma^2}}{A}.$$

因此 μ 的最大后验估计与后验均值估计均为 B.

8. (1) $p(x_1,x_2,x_3|\theta) = \theta(1-\theta)^{x_1}\theta(1-\theta)^{x_2}\theta(1-\theta)^{x_3}$, 后验分布为

$$\pi(\theta|x_1,x_2,x_3) = \frac{\theta^3(1-\theta)^{\sum_{i=1}^3 x_i}}{\int_0^1 \theta^3(1-\theta)^{\sum_{i=1}^3 x_i}d\theta}$$

即 Beta$(4,11)$.

(2) 后验均值的估计为 $\frac{4}{4+11} = 4/15$.

9. (1) 后验分布 $\mathcal{N}(\mu_n,\sigma_n)$, 其中 $\mu_n = \frac{n\sigma_0^2\bar{X}+\sigma^2\mu_0}{n\sigma_0^2+\sigma^2}, \sigma_n = \frac{\sigma_0^2\sigma^2}{n\sigma_0^2+\sigma^2}$. 由正态分布对称性, 取 $a=\mu_n-\sigma_n z_{\frac{\alpha}{2}}$, $b=\mu_n+\sigma_n z_{\frac{\alpha}{2}}$.

(2) 与经典结果一致, 可理解为无信息先验.

(3) 与经典结果一致, 无信息先验, 也是广义先验, 即先验非概率密度但后验为概率密度.

总结:

- 2, 3 中注意 MLE 的渐进正态性;
- 4 中注意不能直接假定方差相同;
- 7 中正态分布均值 (注意方差已知) 的共轭先验;
- 8 中正比于 1 的先验是广义先验, 也是无信息先验, 但注意并不是密度正比于 1 的先验均可视为无信息先验 (可能与直觉不同), 如对尺度参数来讲, 密度正比于 1 的先验并不是无信息先验.