概统第二次作业参考题解

2024.10.08

Q1. 先证明 $P(A+B)$, 再将 $A+B+C$ 表示为 $(A+B)+C$.

Q2. 利用概率的公理化定义, 逐个验证集合函数 $\bar{P}(A)=P(A|B)$ 满足非负性, 正则性 及 可列可加性.

Q3. (1) 不正确. 取任一事件 A_0 满足 $0<P(A_0)<1$, 令 $A=B=A_0$.
(2) 不正确. 取 $A=B=\varnothing$.
(3) 不正确. 注意多个事件独立的定义.反例：等概率从1到8之间选一个数，事件$A:\{1,2,3,4\}$ 事件$B:\{1,5,6,7\}$, 事件$C:\{1,4,6,8\}$

Q4. $P(A_2)=1/2, P(A_3)=1/3, P(A_5)=7/36, P(A_2A_3)=1/6,, P(A_2A_5)=1/12$, 由独立定义知 A_2 与 A_3 独立, A_2 与 A_5 不独立.

Q5. 参考概率导论(Bertsekas, 第2版)中例 1.20 与 例 1.21.

Q6. 记事件 B 为“A在迟早要发生”, 事件 B_n 为“A 在前 n 次试验中发生”, 则

$$1 \geq P(B) \geq P(B_n) = 1-P(B_n^c) = 1-(1-\epsilon)^n \to 1.$$

或者利用$\{B_n\}$递增得到

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1.$$

Q7. 记事件 A 为“随机取一张朝上后为红色”, 易得 $P(BB)=P(RR)=P(BR)=1/3, P(A|BB)=0, P(A|RR)=1, P(A|BR)=\frac{1}{2}$, 由贝叶斯公式得$P(BR|A)=1/3$.
注：此题应理解成面等概率。若理解成随机选一张卡，其中有一面是红色，则

会得出$\frac{1}{2}$的结果.

Q8. (2) 记事件 A_k 表示 "第 k 个人抓到"中"后游戏结束", 利用乘法公式可得 $P(A_k) = 1/n$. 即抽奖顺序不影响中奖概率.

Q9. 记事件 A 为"小明患此病", 事件 B 为"小明阳性", 由贝叶斯公式知 $P(A|B) = 5/6 > 80\%$, 从而建议手术.

Q10. 对 $0 < k < n$, 记 s_k 为本金 k 元时输光离场的概率, 由递推式 $s_k = (1-p)s_{k-1} + ps_{k+1}$ 以及边界条件 $s_0 = 1, s_n = 0$ 得

$$s_k = \begin{cases} \dfrac{r^n - r^k}{r^n - 1}, & \text{当} r \neq 1, \\ 1 - \dfrac{k}{n}, & \text{当} r = 1, \end{cases}$$

其中 $r = (1-p)/p$. 对 $p \leq 0.5$ 总有 $\lim\limits_{n \to \infty} s_k = 1$.

Q11. 记 A_n 为以某个质点为祖先的分支在祖先产生时刻计起 n 分钟内灭绝, 由全概率公式可得

$$P(A_n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}P(A_{n-1}) + \frac{1}{3}P(A_{n-1})^2.$$

或者定义事件A为某个质点最终会灭绝，则由全概率公式可得

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}P(A) + \frac{1}{3}P(A)^2.$$

因此最终灭亡的概率为 1.

Q12. 由全概率公式得 $P(\text{甲药治愈}) = 0.655$, $P(\text{乙药治愈}) = 0.66$, 从而综合来看建议乙.

Q13. (1) $P(B_1) = 3/5$.

(2) 若放回 $P(B_2) = P(B_1) = 3/5$; 若不放回, 利用全概率公式与条件概率下的全概率公式可得 $P(B_2) = P(B_1) = 3/5$. 不论放不放回, 若不观测第一个球颜

色, 则对取的袋子编号没有先验. (直观上还可以同Q8-2理解).

(3) $P(B_2B_1) = 2/5, P(B_2|B_1) = 2/3$. $P(B_2|B_1) > P(B_2)$. 直观上观测到第一次取出黑球后, 取的袋子是1号袋子的可能性更大.

(4) Bayes 公式

$$P(B_{n+1}|B_1\cdots B_n) = \frac{P(B_1\cdots B_{n+1}|F)P(F) + P(B_1\cdots B_{n+1}|F^c)P(F^c)}{P(B_1\cdots B_n|F)P(F) + P(B_1\cdots B_n|F^c)P(F^c)}.$$

极限为 4/5, 即充分确认选中 1 号袋.

(5) Bayes 公式. 极限为 1.

Q14. (1) 用 a 元与甲打赌, b 元与乙打赌, 应满足 $a + b \le 100, -a + 1.5b > 0, 4a - b > 0$.

(2) $5P_{甲}(A) - 20P_{甲}(B) \ge 0, 10P_{乙}(B) - 15P_{乙}(A) \ge 0$. $P_{甲}(B) \le 0.2, P_{乙}(B) \le 0.4$.

作业总结:

1. 注意多个事件独立的定义.
2. 无放回抽样不影响中奖概率.
3. 在计算概率时将事件定义清楚, 无法直接计算时可考虑递推.
4. 概率的直观理解, 如 Q13 均可在直观上解释.