第十二次作业参考解答

1. 考虑假设检验: $\mathrm{H}_0: \lambda \geq \lambda_0 \quad \text{vs.} \quad \mathrm{H}_1: \lambda < \lambda_0$. 由 $E(X_1) = \dfrac{1}{\lambda}$, 拒绝域的形式应为 $\{\bar{X} \geq c\}$. 由 $2\lambda X_1 \sim \chi^2(2)$ 与卡方分布的可加性可知 $2\lambda n\bar{X} \sim \chi^2(2n)$. 按第一类错误 $P_{\lambda\geq\lambda_0}(\bar{X} \geq c) \leq \alpha$ 可给出拒绝域为 $\{\bar{X} \geq \dfrac{\chi^2_\alpha(2n)}{2n\lambda_0}\}$.
双边: $\mathrm{H}_0: \lambda = \lambda_0$ vs. $\mathrm{H}_1: \lambda \neq \lambda_0$. 拒绝域为 $\{\bar{X} \geq \dfrac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n\lambda_0}$ 或 $\bar{X} \leq \dfrac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n\lambda_0}\}$

2. (1) $\hat{\theta} = 2\bar{X}$, 拒绝域形式为 $\{2\bar{X} \geq c\}$. 利用大样本方法可给出临界值 $c = \dfrac{\theta_0}{\sqrt{3n}} z_\alpha + \theta_0$. 功效函数为: $P_\theta(X \in R) = 1 - \Phi\left(\dfrac{\frac{c}{2} - \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\theta^2}{12}}}\right)$.
(2) $\hat{\theta} = \max\{X_1, \ldots, X_n\} = X_{(n)}$, 拒绝域形式为 $\{X_{(n)} \geq c\}$. 利用极大次序统计量的分布可给出临界值 $c = \theta_0(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}$. 功效函数为: $P_\theta(X \in R) = 1 - (1-\alpha)\left(\dfrac{\theta_0}{\theta}\right)^n$.

3. $\mathrm{H}_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad \mathrm{H}_1: \mu > \mu_0. \quad \mu_0 = 5.1.$ 方差未知的正态总体均值检验问题, 若取检验水平 $\alpha = 0.05$, 拒绝原假设.

4. (1) $\mathrm{H}_0: \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad \mathrm{H}_1: \mu < \mu_0. \quad \mu_0 = 1180.$ 方差未知的正态总体均值检验问题, 取检验水平 $\alpha = 0.05$, 不拒绝原假设 (认为合格).
(2) $\mathrm{H}_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad \mathrm{H}_1: \mu > \mu_0. \quad \mu_0 = 1180.$ 取检验水平 $\alpha = 0.05$, 不拒绝原假设 (认为不合格). NP 范式倾向于保护原假设.
(3) 当检验水平取很大时, 一定会拒绝原假设.

5. $\mathrm{H}_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad \mathrm{H}_1: \mu > \mu_0. \quad \mu_0 = 225.$ 不拒绝原假设, 即无理由认为元器件寿命大于 225.

6. 利用中心极限定理, 拒绝域为 $\left\{\left|\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n X_i - n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$.

7. (1) $\dfrac{200}{4000}$. (2) $\dfrac{200}{700}$. (3) $\dfrac{500}{1000}$. (4) H_1 成立时功效为 $\dfrac{500}{1000}$.

8. “第 i 个患者是否治愈” 记为 $X_i \sim B(1, p)$. 通过假设检验判断.
$\mathrm{H}_0: p \leq p_0 \quad \text{vs.} \quad \mathrm{H}_1: p > p_0. \quad p_0 = 2\%.$ 拒绝域形为 $\{\sum\limits_{i=1}^n X_i \geq c,\ c \in \mathbb{N}^+\}$.
控制第一类错误: $\sum\limits_{i=c_0}^n \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{(n-i)} > \alpha > \sum\limits_{i=c_0+1}^n \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{(n-i)}$. 取 $c = c_0 + 1$. 给定检验水平 $\alpha = 0.05$ 时 $c = 7$, 不拒绝原假设, 即不能认为更有效.

总结:

- 注意给清楚 H_0 vs. H_1, 这是关于总体参数的描述, 之后采样做决策.
- 注意区分 power function 与 power.
- NP 范式下 H_0 与 H_1 是不对等的, 倾向于保护原假设.