第 11 次作业

1. 从一批次产品随机地取 100 个样品进行检测，发现 40 个不合格，求这批产品合格率 p 的 95%置信的区间估计.

2. 设随机样本 $X_1,\cdots,X_n$ 来自具有概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$ 的分布，其中 $\theta>0$ 是未知参数，θ^* 为 θ 的极大似然估计量.

   （1） 当 $n=4$ 时，一组样本观测值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{5}$，利用 Fisher 信息量和这组观测值给出 θ^* 的标准误差的估计.

   （2） 利用 θ^* 和（1）中样本观测值给出 θ 的满足 95% 置信要求的一个具体置信区间.

3. *假设总体服从 $N(\mu,\sigma^2)$，参数 μ 已知，σ^2 未知，$X_1,\cdots,X_n$ 为其随机样本，常数 $0<\alpha<1$.

   （1） 求 σ 的极大似然估计 σ^*.

   （2） 利用 Fisher 信息量给出 σ^* 的标准误差的估计.

   （3） 利用 σ^* 给出 $\log\sigma$ 的 $1-\alpha$ 置信的区间估计.

4. 为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂.为慎重起见，先进行试验.采用原催化剂 20 次试验的得率均值为 91.73，样本方差为 3.89；采用新催化剂 30 次试验的得率均值为 93.75，样本方差为 4.02.假设两总体都服从正态分布，且两样本独立.不假设两总体方差相等，求两总体均值差的 95%置信的区间估计.（与作业 10-9 作对比）

5. 李雷和韩梅梅开始约会，但是韩梅梅在任何约会中都可能迟到，迟到时间服从区间 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，参数 θ 的先验分布是 0 到 1 小时之间的均匀分布，假设韩梅梅在第一次约会中迟到了 x 小时，那么李雷如何利用这个信息去更新 θ 的分布？

6. 考虑课上硬币的例子，计算硬币正面朝上的概率 θ 的后验众数估计（也称最大后验估计），并给出其当 $n=20$，$x=13$ 时的具体值，所得结果在直观上是否与极大似然的思想相符合？

7. *假设总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，参数 σ^2 已知，$X_1,\cdots,X_n$ 为其随机样本，μ 的先验分布为 $N(\mu_0,\sigma_0^2)$，μ_0,σ_0^2 为已知常数.

（1） 求 μ 的最大后验（后验众数）估计.

（2） 求 μ 的后验均值估计.

8. 设随机变量 X 的分布列为 $P(X=k|\theta)=\theta(1-\theta)^k$（$k=0,1,2,\cdots$），参数 θ 的先验分布是 $(0,1)$ 上的均匀分布. 对 X 作三次独立观测，得到观测值分别为 $x_1=2$，$x_2=3$，$x_3=5$.

（1） 求 θ 的后验分布概率密度函数.

（2） 求 θ 的后验均值估计.

9. *（Bayes 区间估计）假设总体服从 $N(\mu,\sigma^2)$，参数 σ^2 已知，$X_1,\cdots,X_n$ 为其随机样本，$0<\alpha<1$ 为常数.

（1） 假设 μ 的先验分布为 $N(\mu_0,\sigma_0^2)$，μ_0,σ_0^2 为已知常数. 求 a,b 使得在 μ 的后验分布下 $P(a<\mu<b)\geq 1-\alpha$，并选取 a,b 使得区间长度最小（最大后验区间）.

（2） 令 $\sigma_0\to\infty$，给出（1）中估计区间 (a,b) 的极限情况，将其与经典方法所求置信区间相比较，并尝试给予直观解释.

（3） 如果假设 μ 的先验分布 $f(\mu)\propto 1$（Bayes 假设），求 μ 的后验分布及 μ 的最大后验区间和等尾可信区间（可信度 $\geq 1-\alpha$）. 将其与经典方法所求置信区间相比较，并尝试给予直观解释.

10. （计算机实验）作业 10-11 续.

（1） 利用作业 10-11 的结果给出 $\theta=e^{\mu}$ 的 95%置信的区间估计.

（2） 注意到 $\overline{X}$ 是 μ 的极大似然估计，你还能据此给出其他建立置信区间的

方法吗？对于方法的合理性尝试进行简要说明.