第 15 次作业

1. 假定变量Y（响应变量）与X（预测变量）之间的关系可用如下的线性模型刻画：$Y=\beta_0+\beta_1 X+\varepsilon$，其中$\beta_0$是常数项，$\beta_1$称为模型的回归系数，皆为常数，$\varepsilon$为随机误差项，均值为$0$，方差为$\sigma^2$．假设有$(X,Y)$的独立观测：$(x_i, y_i)$（$i=1,\cdots,n$）．参数$\beta_0,\beta_1$的最小二乘估计分别表示为$\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$.

   （1） 验证：最小二乘法拟合的直线经过点$(\bar{x}, \bar{y})$.

   （2） 计算$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)$．什么时候$\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$不相关？

   （3） 假设$x_i\in[-1,1]$（$i=1,\cdots,n$），为最小化$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)$，应该如何选择$x_i$（$i=1,\cdots,n$）？

   （4） 如果模型可以事先假设$\beta_0=0$，则请在此情况下给出β_1的最小二乘估计.

2. 进一步假设随机误差$\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$.

   （1） 给出参数σ^2的极大似然估计.

   （2） 证明：$\dfrac{\mathrm{SSE}}{n-2}$是$\sigma^2$的无偏估计.

   （3） 已知模型可以事先假设$\beta_0=0$，请给出σ^2的无偏估计，并给出$X=x_0$时响应变量Y取值的$(1-\alpha)$置信的区间估计.