第 10 次作业参考解答

1. （简单随机抽样）

设总体的大小为 N，总体均值和方差分别为 μ, σ^2，随机样本 X_i $(i = 1, \dots, n)$ 为无放回抽取的简单随机样本：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

(1) 证明：$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{N}{N-1}$。

解：

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(EX_i^2 - nE\overline{X}^2)$$

计算样本均值的方差 (HW9.3)：

$$Var(\overline{X}) = E\overline{X}^2 - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

因此：

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} - \mu^2 = \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{N}{N-1}$$

(2) 给出 $Var(\overline{X})$ 的一个无偏估计。

解：

已知：

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

由 (1) 可得 $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{N}{N-1}$

因此，$Var(\overline{X})$ 的无偏估计为：

$$\widehat{Var}(\overline{X}) = \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{N-n}{N(n-1)}.$$

2. 设 X 来自 Poisson 总体 $P(\lambda)$ 的一个样本。

(1) 证明：$g(\lambda) = e^{-2\lambda}$ 的唯一无偏估计为：

$$\hat{\theta}(X) = \begin{cases} 1, & \text{当 } X \text{ 为偶数}, \\ -1, & \text{当 } X \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

(2) 上述估计是否合理？如不合理，请尝试给出一个合理的估计：

解答：

(1) 证明：

我们需要找到一个函数 $\hat{\theta}(X)$，使得

$$E[\hat{\theta}(X)] = e^{-2\lambda}.$$

由于 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$：

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

计算 $E[\hat{\theta}(X)] = e^{-2\lambda}$：

$$E[\hat{\theta}(X)] = \sum_{x=0}^{\infty} \hat{\theta}(x) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-2\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \hat{\theta}(x) \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}$$

注意到 Tylor 展开：

$$e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!}.$$

因此：

$$\Leftrightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \hat{\theta}(x) \frac{\lambda^x}{x!} - \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^x}{x!} = 0$$

i.e. 对于任意的 λ：

$$\sum_{x=0}^{\infty} \left(\hat{\theta}(x) \frac{\lambda^x}{x!} - (-1)^x \frac{\lambda^x}{x!} \right) = 0$$

由于这是关于 λ 的多项式，需要对任意正数 λ 成立，各阶系数都要求为 0，所以只可能为：

$$\hat{\theta}(x) = (-1)^x$$

(2) 1. $\hat{\theta}(X)$ 仅取 ± 1 两个值，信息量较少，并且 MSE 较大。2. $e^{-2\lambda}$ 显然不可能为负。

可给出：

$$\hat{g}(\lambda) = e^{-2X}.$$

$\hat{g}(\lambda)$ 有偏，但解决上述问题，且是 $g(\lambda)$ 的 MLE（回忆 MLE 的不变性）。

3. 设随机样本 X_i $(i = 1, \cdots, n)$ 来自总体 $U(0, \theta)$。

(1) 证明：$\hat{\theta}_1 = \max(X_1, \cdots, X_n) + \min(X_1, \cdots, X_n)$ 是 θ 的无偏估计。

解：

设 $Y = \max(X_1, \cdots, X_n)$，$Z = \min(X_1, \cdots, X_n)$。对于 Y 和 Z，其 pdf 分别为：

$$f_Y(y) = n \cdot y^{n-1}/\theta^n, \quad 0 \le y \le \theta,$$

$$f_Z(z) = n \cdot (1 - z/\theta)^{n-1}/\theta, \quad 0 \le z \le \theta.$$

计算期望：

$$E[\hat{\theta}_1] = E[\max(X_1, \cdots, X_n)] + E[\min(X_1, \cdots, X_n)].$$

对于 $E[\max(X_1,\cdots,X_n)]$，我们有：

$$E[Y]=\int_0^\theta y\cdot f_Y(y)\,dy=\int_0^\theta y\cdot\frac{n\cdot y^{n-1}}{\theta^n}\,dy=\frac{n}{n+1}\theta.$$

对于 $E[\min(X_1,\cdots,X_n)]$，我们有：

$$E[Z]=\int_0^\theta z\cdot f_Z(z)\,dz=\int_0^\theta z\cdot\frac{n\cdot(1-z/\theta)^{n-1}}{\theta}\,dz=\frac{\theta}{n+1}.$$

因此：

$$E[\hat\theta_1]=\frac{n}{n+1}\theta+\frac{\theta}{n+1}=\theta.$$

(2) 证明：可以适当选择常数 c_n 使得 $\hat\theta_2=c_n\cdot\min(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的无偏估计。

解：

对于 $\hat\theta_2=c_n\cdot\min(X_1,\cdots,X_n)$：

$$E[\hat\theta_2]=c_n\cdot E[\min(X_1,\cdots,X_n)]=c_n\cdot\frac{\theta}{n+1}.$$

令 $E[\hat\theta_2]=\theta$，可以解得：

$$c_n=n+1.$$

因此，取 $c_n=n+1$，可使 $\hat\theta_2$ 成为 θ 的无偏估计。

(3) ** 比较四个无偏估计 $\hat\theta_1,\hat\theta_2,\hat\theta_3=2\overline{X},\hat\theta_4=\frac{n+1}{n}\max(X_1,\cdots,X_n)$ 的方差大小。

解：计算 $\hat\theta_1$ 的方差：

$\hat\theta_1=\max(X_1,\cdots,X_n)+\min(X_1,\cdots,X_n)$，记为 $Y=\max(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $Z=\min(X_1,\cdots,X_n)$，则：

$$\mathrm{Var}(\hat\theta_1)=\mathrm{Var}(Y)+\mathrm{Var}(Z)+2\cdot\mathrm{Cov}(Y,Z).$$

计算 $\mathrm{Var}(Y)$：

$$f_Y(y)=n\cdot y^{n-1}/\theta^n,\quad 0\le y\le\theta.$$

由前问可知 $E[Y]=\frac{n}{n+1}\theta$.

$$E[Y^2]=\int_0^\theta y^2\cdot f_Y(y)\,dy=\int_0^\theta y^2\cdot\frac{n\cdot y^{n-1}}{\theta^n}\,dy=\frac{n}{n+2}\theta^2.$$

因此：

$$\mathrm{Var}(Y)=E[Y^2]-(E[Y])^2=\frac{n}{n+2}\theta^2-\left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2=\frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

计算 $\mathrm{Var}(Z)$：

$$f_Z(z) = n \cdot (1 - z/\theta)^{n-1}/\theta^n, \quad 0 \leq z \leq \theta.$$

$$E[Z] = \frac{\theta}{n+1}.$$

$$E[Z^2] = \int_0^\theta z^2 \cdot f_Z(z)\, dz = \int_0^\theta z^2 \cdot \frac{n \cdot (1 - z/\theta)^{n-1}}{\theta}\, dz = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

因此：

$$\mathrm{Var}(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2 = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{\theta}{n+1}\right)^2 = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

计算 $\mathrm{Cov}(Y, Z)$：

$$f_{Y,Z}(y, z) = n(n-1) \cdot \frac{(y-z)^{n-2}}{\theta^n}, \quad 0 \leq z \leq y \leq \theta.$$

$$E[YZ] = \int_0^\theta \int_0^y yz \cdot n(n-1) \frac{(y-z)^{n-2}}{\theta^n}\, dz\, dy = \frac{\theta^2}{(n+2)}.$$

因此：

$$\mathrm{Cov}(Y, Z) = E[YZ] - E[Y]E[Z] = \frac{\theta^2}{(n+2)} - \frac{n\theta}{n+1} \cdot \frac{\theta}{n+1} = \frac{\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

最终：

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} + 2 \cdot \frac{\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}. = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

2. 计算 $\hat{\theta}_2$ 的方差

$\hat{\theta}_2 = (n+1) \cdot Z$，其中 $Z = \min(X_1, \cdots, X_n)$。

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2) = (n+1)^2 \cdot \mathrm{Var}(Z) = (n+1)^2 \cdot \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n\theta^2}{n+2}.$$

3. 计算 $\hat{\theta}_3$ 的方差

$\hat{\theta}_3 = 2\overline{X}$，其中 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$。

$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\mathrm{Var}(X)}{n}$，且 $X \sim U(0, \theta)$ 的方差为：

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\theta^2}{12}.$$

因此：

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3) = 4 \cdot \mathrm{Var}(\overline{X}) = 4 \cdot \frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

4. 计算 $\hat{\theta}_4$ 的方差

$\hat{\theta}_4 = \frac{n+1}{n} \cdot Y$，其中 $Y = \max(X_1, \cdots, X_n)$。

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_4) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(Y) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\theta^2 n}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

4. 设随机样本 X_i $(i = 1, \cdots, n)$ 来自某一个均值为 θ 且方差有限的总体。

(1) 设 $c_1, \cdots, c_n$ 为常数，证明：$\sum_{i=1}^n c_i X_i$ 是 θ 的无偏估计当且仅当：$\sum_{i=1}^n c_i = 1$

证明：

设 $Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i$，则有：

$$E[Y] = E\left[\sum_{i=1}^n c_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n c_i E[X_i].$$

因为 $E[X_i] = \theta$，所以：

$$E[Y] = \sum_{i=1}^n c_i \theta = \theta \sum_{i=1}^n c_i = \theta..$$

由于 $\theta \neq 0$，所以：

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1.$$

(2) 在上述形式的估计类中，只有在 $c_1 = \cdots = c_n = \frac{1}{n}$ 时方差达到最小。

证明：

对于 $Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i$，其方差为：

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_i^2$$

为了最小化方差，需要最小化 $\sum_{i=1}^n c_i^2$。

在 $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ 的约束下，考虑 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right),$$

当且仅当 $a_i = kb_i$ 时取等号。

令 $a_i = c_i$，$b_i = 1$，则有：

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n 1^2\right).$$

因此：

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \geq \frac{1}{n} \quad \text{等号成立} iff.\ c_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

5. 设随机样本 X_i $(i = 1, \cdots, n)$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，m_2 和 S^2 可以作为 σ^2 的估计，试比较两个估计的均方误差。

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$Em_2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

注意到:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/\sigma^2 \sim \chi(n-1)$$

因此:

$$Var(m_2) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$$

因此:

$$\text{MSE}(m_2) = \text{Var}(m_2) + \text{Bias}(m_2)^2 = \frac{(2n-1)\sigma^4}{n^2}.$$

关于 S^2：

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

$$E[S^2] = \sigma^2.$$

由上述卡方分布, 同理:

$$\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

$$\text{MSE}(S^2) = \text{Var}(S^2) + \text{Bias}(S^2)^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

可以看出 m_2 的 MSE 更小

6. 设随机样本 X_i $(i = 1, \cdots, 4)$ 来自正态总体 $N(0, 4)$，令：

$$Y = a \cdot \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}},$$

这里 a 为常数，已知 Y 服从 t 分布，求 a 的值以及 t 分布的自由度。

解：

先标准化随机变量。

$X_i \sim N(0, 4)$，令 $Z_i = \frac{X_i}{2}$，则 $Z_i \sim N(0, 1)$。

因此：

$$Y = a \cdot \frac{2(Z_1 + Z_2)}{\sqrt{4(Z_3^2 + Z_4^2)}} = \frac{a \cdot (Z_1 + Z_2)}{\sqrt{Z_3^2 + Z_4^2}}.$$

- 分子 $Z_1 + Z_2 \sim N(0, 2)$，注意到：

$$\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1).$$

- 分母 $Z_3^2 + Z_4^2 \sim \chi^2(2)$，且与分子独立。

因此：

$$Y = \frac{\frac{Z_1+Z_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(Z_3^2+Z_4^2)/2}} \sim t(2).$$

$$a = \pm 1,\quad df = 2$$

7. 有一大批糖果，现从中随机取 16 袋称得重量（克）为：

$$506,\ 508,\ 499,\ 503,\ 504,\ 510,\ 497,\ 512,\ 514,\ 505, 83, 96,\ 506,\ 502,\ 509,\ 496.$$

假设袋装糖果重量服从正态分布，求总体均值的 95% 置信区间。如果用这 16 袋样品的平均重量作为总体均值的估计，误差的范围为多少？这个范围是在哪里意义下？

解：

设总体均值为 μ，总体方差为 σ^2，样本均值为 $\overline{X}$，样本标准差为 s。

样本均值：

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 503.75.$$

样本标准差：

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \approx 6.202.$$

由于样本量 $n = 16$ 较小，且总体标准差 σ 未知，使用 t 分布计算置信区间：

$$\overline{X} \pm t_{n-1,0.025} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

查表得 $t_{15,0.025} \approx 2.131$，因此：

$$CI \approx 503.75 \pm 2.131 \cdot \frac{6.202}{\sqrt{16}} \approx [500.45, 507.05].$$

误差的范围和意义：

误差范围为：

$$\pm 3.304.$$

是指在 95% 的置信水平下，$\overline{X}$ 会落在 $\mu \pm 3.304$ 内, i.e. $\overline{X} \pm t_{n-1,0.025} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ 有至少 95% 的概率包含 μ 。

8. 从一大批灯泡中随机抽取 5 只作寿命试验，测得寿命（单位：小时）为：

$$1050,\ 1100,\ 1120,\ 1250,\ 1280.$$

假设灯泡寿命服从正态分布，求这批灯泡寿命平均值 95% 置信的单侧置信下限（即求 $\hat{\mu}(X_1, \cdots, X_n)$ 使得 $P(\mu > \hat{\mu}) \geq 0.95$）。

解：

设总体均值为 μ，总体方差为 σ^2，样本均值为 $\overline{X}$，样本标准差为 s。

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1050 + 1100 + 1120 + 1250 + 1280}{5} = 1160.$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}.$$

代入数据计算得：

$$s \approx 99.75.$$

对于单侧置信下限：

$$\hat{\mu} \geq \overline{X} - t_{n-1,0.05} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

查表得 $t_{4,0.05} \approx 2.132$，因此：

$$\hat{\mu} \geq 1160 - 2.132 \cdot \frac{99.75}{\sqrt{5}} \approx 1064.9.$$

9. 为提高某一化学生产过程中得率，试图采用一种新的催化剂。为慎重起见，先进行试验。采用原催化剂 20 次试验的得率均值为 91.73，样本方差为 3.89；采用新催化剂 30 次试验的得率均值为 93.75，样本方差为 4.02。假设两总体都服从正态分布，方差相等，且两样本独立。

(1) 求两总体均值差的 95% 置信区间估计

$$\bar{X}_1 = 91.73, \quad s_1^2 = 3.89, \quad n_1 = 20;$$

$$\bar{X}_2 = 93.75, \quad s_2^2 = 4.02, \quad n_2 = 30.$$

$$CI : \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} \cdot \sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)},$$

其中，s_p^2 为两样本的合并方差：

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

代入数据：

$$s_p^2 = 3.9756.$$

故置信区间为：

$$91.73 - 93.75 \pm t_{48,0.025} \cdot \sqrt{3.9756\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)}.$$

计算标准误差：

$$\text{标准误差} = \sqrt{3.9756\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)} = \sqrt{3.9756 \cdot 0.08333} = \sqrt{0.3313} \approx 0.5756.$$

查表得 $t_{48,0.025} \approx 2.01$，因此置信区间为：

$$-2.02 \pm 2.01 \cdot 0.5756 = -2.02 \pm 1.157.$$

最终置信区间为：

$$[-3.177, -0.863].$$

(2) 两种催化剂有显著差别吗？

(1) 直接根据置信区间，可以看出两种催化剂的效果有显著差别。

(2) 假设检验的原假设为 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$，即两种催化剂的效果无显著差别。

使用双侧检验：

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = -3.51.$$

查表得 $t_{48,0.025} \approx 2.01$，由于 $|-3.51| > 2.01$，拒绝原假设。

因此，可以认为两种催化剂的效果有显著差别。

10. 设随机样本 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ 来自总体 $U(0, \theta)$。证明：对于任意给定常数 $0 < \alpha < 1$，可以找到常数 c_n，使得

$$(\max\{X_1, \ldots, X_n\},\ c_n \max\{X_1, \ldots, X_n\})$$

为 θ 的一个 $1 - \alpha$ 置信区间。

证明： 设随机样本 $X_i \sim U(0, \theta)$，则对于样本的最大值 $\max(X_1, \ldots, X_n)$：

$$F_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(x) = P(X_1 \le x, \ldots, X_n \le x) = (F_X(x))^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n, \quad 0 \le x \le \theta.$$

所以:

$$F_{\frac{X_{max}}{\theta}}(x) = x^n$$

因此：

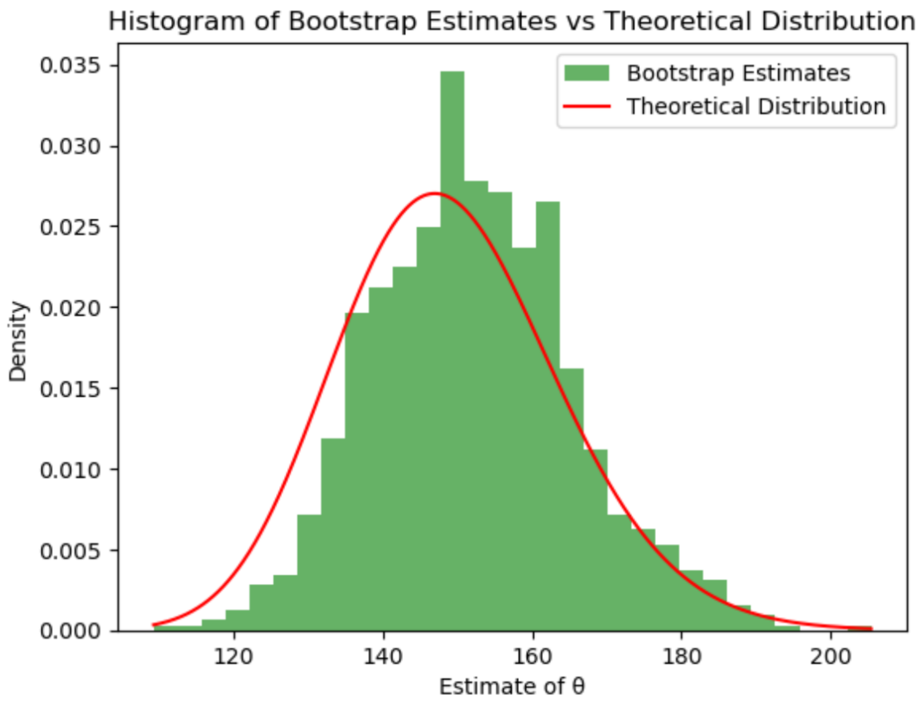
$$P(\alpha^{\frac{1}{n}} <= \frac{x}{\theta} <= 1) = 1 - \alpha$$

即，可取 $c_n = \alpha^{-\frac{1}{n}}$ ∎

11. Python 示例

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm, lognorm

# Step 1: Generate the original data set
#np.random.seed(0)  # For reproducibility
mu = 5
sigma = 1
n = 100
original_data = np.random.normal(mu, sigma, n)

```

```python
# Step 2 & 3: Perform bootstrap sampling and compute estimates
m = 1000
bootstrap_estimates = np.zeros(m)
for i in range(m):
    # Bootstrap sample with replacement
    bootstrap_sample = np.random.choice(original_data, size=n, replace=True)
    # Compute the bootstrap estimate
    bootstrap_estimates[i] = np.exp(np.mean(bootstrap_sample))

# Step 5: Plot the histogram of bootstrap estimates
plt.hist(bootstrap_estimates, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='g', label='Bootstrap Estimates')

# Overlay the theoretical distribution of hat_theta
# Since hat_theta = exp(X̄), where X̄ ~ N( , ²/n)
# Therefore, hat_theta follows a log-normal distribution
theoretical_mu = mu
theoretical_sigma = sigma / np.sqrt(n)
x = np.linspace(min(bootstrap_estimates), max(bootstrap_estimates), 1000)
pdf = lognorm.pdf(x, s=theoretical_sigma, scale=np.exp(theoretical_mu))
plt.plot(x, pdf, 'r', label='Theoretical Distribution')

plt.xlabel('Estimate of  ')
plt.ylabel('Density')
plt.title('Histogram of Bootstrap Estimates vs Theoretical Distribution')
plt.legend()
plt.show()

# Step 6: Compute V_boot
V_boot = np.var(bootstrap_estimates, ddof=0)
print(f"Bootstrap Variance V_boot: {V_boot:.4f}")

# Theoretical Variance of hat_theta
# Var(hat_theta) = (e^{ ²/n} - 1) * e^{2  +  ²/n}
theoretical_variance = (np.exp(sigma**2 / n) - 1) * np.exp(2 * mu + sigma**2 / n)
print(f"Theoretical Variance of hat_theta: {theoretical_variance:.4f}")

# Compare the bootstrap variance with the theoretical variance
print(f"Difference between V_boot and Var(hat_theta): {(V_boot - theoretical_variance):.4f}")
```




```
Bootstrap Variance V_boot: 182.8675
Theoretical Variance of hat_theta: 223.5945
Difference between V_boot and Var(hat_theta): -40.7270
```

总结:

- Q2 的唯一性不难说明, 不过很多同学漏了
- Q3 的 $Var(\theta_1)$ 错误率较高, 主要是在积分计算上
- Q5 的方差可以用卡方分布的性质计算
- Q7 理解频率学派的置信区间的含义, 估计区间是随机变量, 真实值是固定的